Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Владимирский государственный университет

П.Л. ИВАНКОВ Ю.В. МУРАНОВ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ: ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Владимир 1998

И 19
УДК 519.21 (075.8)

Сборник индивидуальных заданий по математической статистике: типовые расчеты/ **П.Л. Иванков, Ю.В. Муранов**; Владим. гос. ун-т, Владимир, 1998. 68 с. ISBN 5-89368-074-X

Приведены индивидуальные задания типовых расчетов по математической статистике. Предназначены для студентов технических и экономических специальностей. Разделы 1, 2 написаны Ю.В. Мурановым, разделы 3, 4, 5 — П.Л. Иванковым.

Табл. 6. Ил. 5. Библиогр.: 13 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского государственного университета.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Ю.А. Алхутов; кафедра математического анализа Владимирского государственного педагогического университета.

ISBN 5-89368-074-X

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие представляет собой сборник задач по математической статистике, предназначенный для студентов технических и экономических специальностей высших учебных заведений.

В настоящее время методы математической статистики используются практически во всех сферах человеческой деятельности для анализа сложных систем, возникающих в технике, экономике, экологии, социологии и даже в политике. Статистическими методами пользуются специалисты самых разных специальностей, включая инженеров и профессиональных математиков. Современный инженер или экономист, оставаясь на квалифицированном уровне, не может обойтись без знания и использования статистических методов в своей практической деятельности.

Имеющиеся сборники задач и упражнений по теории вероятностей и математической статистике не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат необходимого количества однотипных задач. Необходимость развития творческого подхода и повышения активности студентов требует использования индивидуальных домашних заданий в учебном процессе.

Основной целью данного пособия является именно организация индивидуальной работы студентов. Сборник содержит 150 задач по 5 основным темам математической статистики, изучаемым в высших технических учебных заведениях. В каждом разделе дается небольшое теоретическое введение с примерами решения типичных задач раздела.

В конце пособия приведен библиографический список и приложение, в котором приведены необходимые для решения задач таблицы. Это дает возможность использовать пособие при самостоятельном изучении статистических методов. Предлагаемое пособие может быть также использовано преподавателями для проведения практических занятий и контрольных работ.

1. Обработка результатов эксперимента

Совокупность значений $x_1, ..., x_n$ случайной величины X, полученная в результате n опытов называется выборкой объема n. Выборку $x_1, ..., x_n$ удобно считать реализацией многомерной случайной величины $X_1, ..., X_n$, компоненты которой независимы и имеют то же распределение вероятностей, что и случайная величина X. Выборочным средним называется $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$; выборочная дисперсия определяется формулой

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2 - \bar{X}^2$$

Выборочная функция распределения $F_n(x)$ определяется равенством $F_n(x) = \nu(x)/n$, где $\nu(x)$ — число элементов выборки, меньших x. При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы, представляя результаты эксперимента в виде группированного статистического ряда. Для этого область, занятую элементами выборки, разбивают на несколько интервалов $(a_{i-1}, a_i), i = 1, ..., k$, и вычисляют для каждого интервала частоту n_i попадания элементов выборки в этот интервал (элементы выборки, совпадающие с общей граничной точкой двух интервалов, можно включать в любой из них). Желательно, чтобы каждый такой интервал содержал не меньше 5–10 элементов выборки; по этому несколько соседних интервалов, на которых попало "мало" элементов выборки, можно объединить в один; если на каком–то интервале оказалось "*слишком много*" элементов выборки, то такой интервал можно разбить на несколько интервалов меньшей длины. Если на каждом интервале построить прямоугольник, площадь которого равна соответствующей относительной частоте n_i/n то получится так называемая гистограмма, дающая представление о плотности распределения случайной величины X. С помощью группированного статистического ряда можно приближенно построить выборочную функцию распределения и найти приближенные значения выборочных среднего и дисперсии. Для этого все элементы выборки, попавшие в какой–либо интервал (a_{i-1}, a_i), заменяют серединой z_i этого интервала. Одновременно вычисляют относительные частоты n_i/n и накопленные относительные частоты $\sum\limits_{j=1}^{i} n_j/n$. При построении выборочной функции распределения считают, что в точке a_i она приближенно равна накопленной частоте, соответствующей интервалу $(a_{i-1}, a_i), i = 1, ..., k$; при $x \le a_0$ и $x \ge a_k$ она равна соответственно нулю и единице. При построении графика функции распределения точки $(a_i, F_n(a_i))$ можно соединить отрезками прямой (или плавной линией; можно также считать $F_n(x)$ ступенчатой функцией). Выборочные числовые характеристики случайной величины обычно вычисляют с использованием "ложного нуля" C; в качестве C рекомендуется брать значение z_i, соответствующее наибольшей частоте (или ближайшее к этому значению целое число); соответствующие формулы имеют вид

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(Z_i - C)n_i + C;\ \bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(Z_i - C)^2 n_i - (\bar{X} - C)^2.$$

Следует иметь в виду, что группировка выборки вносит погрешности в вычисления, которые растут с уменьшением числа интервалов.

Пример. Имеется выборка, полученная с помощью генератора случайных чисел.

80,2	76	79,7	79	79,5	84,7	71,6	79,5	80,9	83,8
70,3	85,3	80,3	77,3	78,3	79,3	77,9	81,9	74,8	82,2
79,9	78,3	81,2	78,5	76,8	79,1	80,5	79,8	77	83,5
78	78	82,3	85,9	74,4	82,8	79,9	81,5	82,5	85,6
79,2	76,9	76,9	77,1	83	77,2	79,5	83,2	80,9	74,1
84,3	82,3	85,6	83,4	84,6	75,3	81,2	78,9	81,3	83
84,1	79,6	77,3	79,9	78,3	82,2	75,2	76,2	80,1	81,5
82,3	77,1	78,2	79.7	82	75,8	74,2	81,1	78,8	79,6
81,7	78,7	75,9	75,4	79,2	80,2	80,2	82	78,3	85,5
74,8	78,8	85,1	71,6	81,9	78,7	79,1	78,7	79,8	78,9
81,4	79.7	75,9	74,9	75,6	83	78,8	79,3	77,5	80,9
75,4	83,9	82,6	83,7	79,7	77,9	84,9	76,3	78,5	75,8
80,5	76,2	83,9	79,6	79,3	76,6	78,5	81,2	86,6	83,8
77,8	82,5	78,9	79,7	75,5	84,1	74,9	79,2	86,7	80
79,1	73,8	79	79,2	73,7	86,7	77,9	79,7	86	83,3
80,2	80	82,3	76,5	76,1	81,7	79,1	82,3	80,1	90,8
81,6	76,6	82,3	78.8	77,9	81,9	76,7	83,3	78,9	81,3
87,5	76,5	79,4	79	76,5	75,4	83,3	78	79	82,7
77,8	81,8	85,3	85,5	75,7	76,9	80,8	80,8	81,4	77,5
78,9	79,8	81,7	81.2	85,4	76	81,7	78,2	78,4	76,4

Требуется построить группированный статистический ряд и с его помощью найти приближенно выборочную функцию распределения и построить ее график; построить гистограмму; найти приближенно выборочные среднее и дисперсию.

Решение. Объем выборки составляет 200 элементов. Минимальный и максимальный элементы выборки суть соответственно 70,3 и 90,8, т.е. все элементы выборки находятся на интервале (70,91). Пусть $a_i = 70 + 2i, i = 0, 1, ..., 11$. Группированный статистический ряд можно представить в виде таблицы(при составлении группированного ряда элементы выборки, совпадающие с граничной точкой двух интервалов, включались в левый интервал).

Интервал a_{i-1}, a_i	70-72	72-74	74-76	76-78	78-80	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90	90-92
Частота n_i	3	2	22	30	59	36	27	16	4	0	1

Объединим интервалы, в которые попало "мало" элементов выборки: первый и второй, а также три последних. Далее, найдем середины интервалов, частоты, относительные частоты и накопленные относительные частоты; результаты вычислений занесем в таблицу.

Номер интервала i	Границы интервала a_{i-1}, a_i	Середина z_i	Частота n_i	Относит. частота n/n_i	Накопл. отн. частота $\sum_{j=1}^{i} n/n_j$
1	70-74	72	5	0,025	0.025
2	74-76	75	22	0,11	0,135
3	76-78	77	30	0,15	0,285
4	78-80	79	59	0,295	0,58
5	80-82	81	36	0,18	0,76
6	82-84	83	27	0,135	0,895
7	84-86	85	16	0,08	0,975
8	86-92	89	5	0,025	1

Теперь можно составить выборочную функцию распределения: $F_n(x) = 0$ при $x \leq 70$; если $x = a_i, i \geq 1$, то значение $F_n(x)$ есть число

из i-ой строки последнего столбца таблицы; если $x > 92$, то $F_n(x) = 1$. График (приближенный) выборочной функции распределения и гистограмма представлены на рис.1.

При вычислении выборочных среднего, дисперсии и среднего квадратического отклонения в качестве "ложного нуля" возьмем $C = 79$. Вычисление $\bar{X}$ и $\bar{s}^2$ по указанным выше формулам удобно оформить в виде таблицы.

z_i	n_i	$z_i - C$	$(z_i - C)n_i$	$(z_i - C)^2$	$(z_i - C)^2 n_i$
72	5	-7	-35	49	245
75	22	-4	-88	16	352
77	30	-2	-60	4	120
79	59	0	0	0	0
81	36	2	72	4	144
83	27	4	108	16	432
85	16	6	96	36	576
89	5	10	50	100	500
Σ	200	-	143	-	2369

Отсюда $\bar{X} = 143/200 + 79 = 79,715$; $\bar{s}^2 = 2369/200 - 0,715^2 \approx 11,33$.

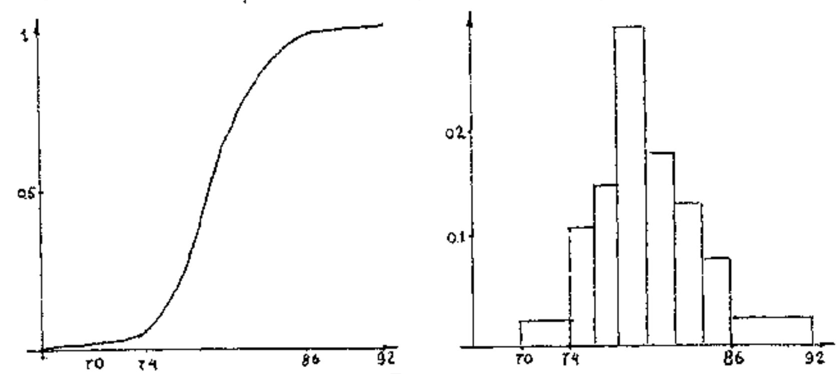

Рис. 1

Задачи для самостоятельного решения

По имеющейся выборке требуется построить группированный статистический ряд и с его помощью найти приближенно выборочную функцию распределения, построить ее график; построить гистограмму; найти приближенно выборочные среднее и дисперсию.

1.1

21,8	21,7	22	13,9	20,7	19,5	18,7	22,5	18,2	17,2	19,7	24,3
19,8	20	17,7	12,7	22	18,4	19	19,1	18,2	21,7	20,2	21,1
19,6	20	22,4	18,6	22,7	19,9	23,5	19,6	20,6	16,7	19,6	26,1
18,2	21,2	19,6	20,7	19	21,6	19,4	22,6	22,6	21,2	18,3	22,2
22,5	16,6	22,1	13,7	19,5	15,7	19,5	21,5	21,2	23,2	19,1	27,2
17,3	18,6	19,5	23,1	18,9	20,1	22,5	21,7	17,7	22,5	21,8	17
19,4	20,9	15,5	21	19,2	17,2	24,1	18,7	19,8	22,9	20,5	21,2
19,3	15,7	23,6	19,6	21	22,2	20,9	20,1	23	20,8	20,6	18
21,9	19,7	15,5	20,3	21,2	20,6	23,4	20,9	17,6	21,2	19,4	23,4
20,1	20,4	17,7	14,1	25,5	19,7	17,9	17,2	19,8	22	20,3	17,6
22,1	24	20,6	19,1	20,4	19	21,4	20,2	20,4	21,1	17,1	17,3
21,4	24,9	19,1	21,8	17,1	20,9	15,2	18,5	22,4	19,1	20,6	17,5
22,5	16,7	18,3	22,3	18,4	18,2	21,8	21,1	18,5	25,3	24	23,7
19,6	20,4	19,1	20,3	19,2	16,4	19,1	20,8	19,3	27,4	21,3	
16,8	18,3	23,5	21	19,3	20,1	20	22,7	24,8	22,4	19,3	
25,4	21,3	19,3	21,4	19,9	20,2	21,3	21,9	19,7	22,6	23,5	
17,6	16,5	24,7	21,7	20,7	17,8	24,7	23,6	19	12,7	22,5	

1.2

-39,1	-41	-42,2	-44,6	-37,9	-42,8	-38,4	-43,6	-42,7	-46,1	-39	-47,2
-44,7	-40,6	-38,6	-35,3	-41,2	-39,8	-40	-38,8	-42	-46,7	-44,5	-41,8
-40,1	-41,1	-41	-38,4	-44,4	-41,6	-44,2	-44,1	-41,8	-42,9	-43,6	-45,8
-41,4	-42,8	-42,4	-41,2	-43,6	-42,7	-43	-39,8	-39,2	-45	-38	-42,7
-42,4	-39,4	-40,8	-45,6	-42,2	-44,8	-41,3	-41,4	-42,3	-44,5	-43,7	-45,4
-37,2	-39,6	-45,8	-42,8	-40,4	-42,3	-41,2	-43,6	-40,5	-46,8	-44,9	-39,9
-40,3	-39,8	-40,3	-42,6	-42,3	-43,8	-43,8	-41,4	-44,7	-36,9	-45,2	-41,1
-45,6	-42,5	-38,3	-41	-37,6	-47,6	-42,2	-42,2	-44	-40,9	-45,4	-40,1
-43,7	-39,5	-35,4	-45,3	-39,7	-41,6	-41,8	-42,4	-46,5	-38,7	-41,3	-43
-38,9	-41,4	-40,8	-40,5	-41,6	-43,2	-42,8	-40	-42,3	-42,9	-41,9	-41,5
-44,4	-38,2	-40,8	-44,5	-40,5	-42,6	-43,5	-43	-42,2	-37,5	-42,2	-40,6
-43,6	-41,8	-41,1	-37,6	-41,3	-46,3	-42,5	-39,4	-42,8	-41,4	-41,7	-41,3
-37,3	-41,4	-41,5	-42,3	-38,2	-38,3	-35,2	-40,6	-42,6	-41,9	-40,6	-40,6
-42	-42,6	-40,3	-40,2	-41,4	-44,5	-37,9	-44,7	-45,1	-41,2	-41,5	
-47,6	-40,3	-45,6	-40,4	-36,7	-36,6	-36,9	-39,7	-39,8	-46,9	-41,6	
-40,6	-39,4	-43,4	-40,4	-43,8	-37	-46,7	-38,1	-45,6	-37	-43,3	
-40,6	-45,6	-45,7	-42,1	-39,3	-43,5	-41,3	-39,3	-43,3	-42,7	-36	

1.3

-36,3	-42,3	-35,4	-41,1	-39,8	-37,4	-43,9	-41,1	-41,9	-40,4	-41,7	-43,7
-38,7	-39	-41,7	-38,6	-40,4	-39	-42,8	-43,5	-37,4	-44,5	-41,5	-44,8
-35,6	-40,8	-37,8	-39,2	-43,4	-42,6	-43,6	-38	-36,7	-36,7	-39,5	-37,8
-35,6	-41,6	-38,5	-43,1	-38,6	-43,4	-42,6	-36,6	-37	-41	-41,2	-36,1
-37,1	-39,1	-35,5	-35,9	-41,4	-42,1	-40,3	-42,6	-37,2	-38,6	-35,8	-35,8
-43,5	-37,3	-40,5	-35,5	-44,8	-36,7	-39,8	-43,2	-42,7	-37,7	-38,7	-35,1
-43,2	-40,7	-35,4	-37,9	-41,6	-39,8	-43,6	-43,8	-42,4	-41,1	-39	-43,7
-36,6	-41,3	-40,1	-38,7	-42,6	-41,8	-36,4	-37	-44	-44,9	-36,3	-35,1
-41,3	-38,2	-36,5	-39,2	-38,5	-41,5	-44,8	-39,3	-44,1	-35	-39,8	-44,9
-36,1	-41,6	-37,7	-43,8	-39,8	-42	-40,4	-37,7	-40,7	-36,1	-35,4	-36,7
-38,2	-39	-41,2	-37,6	-44,3	-35,1	-38,8	-40,1	-42,6	-39	-43,3	-39,8
-41,1	-35,9	-35,7	-41	-35,6	-41	-39,3	-40,5	-35,3	-40	-40,8	-40,6
-38,8	-40,8	-40,1	-40,1	-42,3	-38,2	-39,3	-44,2	-36,2	-41	-35,1	-41,9
-44,5	-44,9	-44,4	-39,3	-41,3	-39,2	-37,3	-43,5	-39,8	-41	-38,6	
-37,9	-35,5	-40,5	-36,7	-44,8	-35,5	-38,3	-38,7	-44,9	-38,7	-41,8	
-41,1	-36,2	-43,2	-35,2	-44,9	-40,9	-36,8	-44,8	-35,6	-38,7	-38	
-35,7	-41,2	-39,1	-43,7	-44,5	-44	-39,1	-40,6	-37	-37,7	-43,6	

1.4

55,2	62,6	55,1	61,7	61,7	59,1	56,8	60	58,6	57,1	54,4	57,6
57,4	54,5	66,3	59,6	58,8	62,9	56,2	55,7	56,4	59,1	60,5	58,7
60,4	63,9	59	50,5	61,7	56,6	57,5	61,6	60,2	58,3	60,4	60,1
56,4	61,4	60,4	62,3	57,9	58,7	52,8	59,8	59,2	61,6	60,8	59,7
57	65,9	59,7	61,5	58,1	60,6	58	57	57,7	59,1	58,2	64,3
60,1	58	62,1	60,5	57,9	56,6	60,5	62,2	62	57,7	60,3	62,3
60,2	60,9	63,7	56,7	58,6	59	63	56,9	62,9	60,6	59,9	55,1
64,6	60,7	56,8	60,5	57,9	61,8	60,1	59,9	60,3	56,6	59,4	60,5
54,7	59,1	64,4	55,2	60,7	53,8	56,8	63,1	63,3	57,9	56,2	53,2
58,5	60	59,7	57,4	55,2	55,3	57,9	53,8	60,7	54,1	52,6	58
63,6	64,6	55,8	53,6	61,3	61,3	59,2	59,8	59,1	64,7	58,5	56,7
60,5	63,9	60,8	64,1	58,4	62,1	55,5	60,7	62	56,2	59,2	58,9
56,9	55,9	61,3	62,1	64,1	59,7	58,4	59,5	59,6	62	55,6	59,4
59,6	51,6	58,7	60,4	55,1	55	61,7	64	62,2	55,5	62,9	
66,5	58,7	54,2	58,7	56,3	59,8	62,5	62,8	63,2	54,7	60,1	
64,2	61,2	55,5	55,7	59,8	61,2	61,7	58,9	58,3	54,2	55,6	
57,9	57,6	57,3	58,2	63,6	63	55,2	58,8	63,5	58,9	58,5	

1.5

63,3	59,5	56,3	58,7	60,8	66	67	59,4	62,3	60,1	64,5	63,9
56,2	62,2	55,5	66,6	63,7	60,4	57,1	57	60,9	54,6	55,8	64,5
56,4	53,7	58	62,3	59,6	56	58,5	60,3	57,1	60,3	64,3	63,7
65,9	59,8	59,6	58,3	57,2	64,1	59,2	59	59,1	58,5	59,3	59,7
66,3	57,6	58,1	59,8	63,2	57,3	63,6	58,8	63	56,4	53,7	55,2
61,1	59,9	57,6	59,8	56,8	58,1	65,5	60,7	62,2	61,2	64,2	61,5
61,3	64,6	60	62,4	66,9	60,1	60,2	59,6	58,5	62,9	63,8	56,4
64,9	61,1	58,3	55,4	62,2	64,4	60,7	60,1	60	60,6	63,4	62,6
60	64,4	57,9	59,4	58,5	57,4	59,3	59,7	60,4	58,6	61,1	62,6
55,6	59,4	60,4	61,1	58,2	58,2	56	61,5	55,4	56,2	57,3	54,7
58,4	59,2	57,7	58,3	57	62,2	56,1	54,9	61,4	62,8	57,7	61,2
63	60,1	63,7	54,3	63,2	60,1	63,5	59,4	66,9	59	60,3	60,3
59,2	61,6	60,1	56,2	57,2	62,7	60,8	60,5	62	64,6	67,3	61,2
57,1	64	66,6	61,4	64,4	60	62,1	57,6	56,7	60,8	61,2	
64,1	61,1	60,2	59,7	56,8	64	61,3	59,4	57,5	61,6	62,2	
60	58,5	63,4	61,4	63,3	64,6	66,7	63,6	56,2	58,3	58	
63,3	58	62,7	58,6	57,3	59,9	63,4	61,8	62,6	59,6	63,1	

1.6

18,6	23	13,3	31	23,9	21,9	25	12,9	22,4	31,5	29,4	26,7
22,1	25,7	20,5	18,4	29,3	18,8	26,9	14	24	31,4	13,7	15,4
21,6	18,5	23,8	16,9	29,4	31,6	31,8	21,8	16	23,4	13,3	13,7
21,8	29,2	23,6	23,3	28,5	30,9	27,2	26,8	15,3	19,4	13,7	29,9
21,6	21,2	20,7	12,3	22,1	24	19	16,5	14,2	28,3	21	14,4
24,4	18,7	28	19	13,6	22,9	17	15,5	27,3	32	22,2	18,8
30,5	28,4	12,7	28,9	15	17,7	20,6	26,1	16,3	28,8	22,3	14,5
29,6	19,1	25,9	27,6	22,4	29,5	28,2	17,2	31,6	25,9	14	17,3
23,3	30,8	21,4	21,4	24	23,7	25,5	17,3	20,6	12,9	24,3	16,2
17,7	16,1	19,8	22,6	30,5	15	16,4	19,5	20,5	19,1	31,9	31,2
13,7	25,3	21,6	27,9	27,8	27,7	31,2	14	27,7	24,4	19,2	19,5
16,5	15,9	23,7	26	21,3	21,3	16,3	16,3	20,5	28,3	15,6	14,5
12	21,2	23,7	22,3	29,6	24,6	20,1	27,8	26	26,4	13,3	16,5
30,5	16,8	26,7	16,5	19,9	29,4	18,8	14,8	29,9	18,3	12,8	
26	18,7	18,4	20	21,2	25,9	17,7	23,1	19,5	17,1	20,4	
12,5	14,5	19,2	31,5	27,9	12,1	30,8	16,3	17,6	24,1	13,1	
23,6	19,4	24,2	15,3	29,9	18,7	14,4	12,6	18,7	18,4	15,9	

1.7

76,5	75,2	75,6	74,1	78.4	73	70,4	78,4	73,5	71,2	73,2	71,7
75,5	77	76,7	74,9	78,7	75,2	69,7	74,9	73,5	75,1	70,8	74,2
76,7	73,5	73,2	77,1	75,6	75,8	76	76,1	75,4	74.1	72,7	72,6
75,8	74,3	73,1	74,1	76,6	74,4	73,7	73,4	76,2	75,8	78,4	79,3
76,5	69,8	77,3	69,8	74,8	75,6	76,2	76,3	74,4	76	73	75
75,3	76,5	75,1	76,3	75,4	78,3	71,8	74,8	72,5	76,9	73,4	78,5
73,8	73,6	73,3	74	73,9	76	73.5	71,7	74,3	71,2	76,5	72,3
72	74.5	82	80,2	71,2	72,3	75,3	74,1	71,7	74,3	76,3	80,3
79,1	74,6	74,2	77,6	76,1	76	69,3	78	70	74,2	76,7	75,1
71,3	75,6	75,3	72,2	72,3	76,1	77,1	75,7	72,9	74 4	74,2	78,7
80,4	74	73,1	73,2	75,1	75,6	74,7	70.2	77,3	81,2	75,7	74,6
74,2	73,1	71.8	75,6	75,1	75	72,6	72.9	73,8	73,6	73,7	76,8
76,9	81,1	75,1	74,4	75,8	79,3	77,9	80	74,6	76,5	79,8	76.9
79,2	76,3	77,2	71,3	81,3	70,9	73,3	75,2	77	78,5	68,9	
74,1	73,9	78,5	76,1	75,7	74,6	75,1	75,2	76,9	74,2	75.6	
73,4	71,4	78,2	72,4	70,3	76,8	73.6	75,4	74,8	76,1	73,8	
74	78,7	75,3	74	77,6	75,7	74,8	75.1	74,4	78,8	75,5	

1.8

26.8	26,7	29	28,2	25,3	25,3	28,6	26,7	27,7	27,2	29,3	29
32,7	27,8	34,1	32,3	29,1	26,1	30,4	28,1	27,4	30,1	28,1	32,9
31,4	23,5	27,2	27,4	30,3	28,7	29,8	26,1	28,8	30,9	29,4	27,3
29,1	28.8	32,6	32,9	27,2	32	27,5	25,7	30,1	26,5	23,5	31,3
31,8	29	30.2	28,3	27,8	27,9	33	27,5	26,8	31,7	26	25,1
27,1	30	27,5	26,8	25,4	29,6	27,2	30,6	29,6	25,9	29,2	29,9
30.3	29,3	27,8	28,2	26,7	34,2	31,1	28,4	24,3	28,5	31,1	32,7
28,5	28,6	34,7	29,6	29,8	34,2	32,8	25,4	25,3	28,7	27,8	26,5
33	33,7	27,5	29,8	28,1	31,6	28,4	28,7	31,4	27,9	32,7	30,8
27,9	32,3	27,6	28,8	25,5	27,6	30,5	28,3	24,2	28,9	29.8	26
29,2	34,7	32,5	26,7	29,7	27,4	34,2	34,7	28,9	26,2	31,1	28.6
27,8	27,8	25	26,2	26,5	32	32	29,2	30,8	30,8	26,3	30.5
31,2	25.7	30,6	26,6	32,6	29,7	30	28,4	29,6	28	28.3	24.9
31,5	27,6	24,8	30	26,1	31,5	33,1	27,9	29,6	27	27,8	
30,5	26,8	26.3	30,3	28	32,1	29	30,5	32.1	26,8	26,1	
32,4	28,3	29,6	30	32	28,6	28,2	34,6	28,4	28,6	29.4	
26,4	28,2	32,8	29,5	31,9	28,8	28,1	35,2	29	29,4	30.8	

1.9

39,5	33,4	34,7	26,3	21	28,4	22	34	29,4	28,1	30,1	31,6
38,2	26,2	24,3	27,3	26,5	33,9	36,6	25,7	22,6	21	22,6	23,1
21,1	37,4	22,6	24.3	37,4	21,7	34,7	37,8	31,8	22	38,5	24
27.3	35,1	37,1	28,3	32,7	28,3	35,9	36,2	36,4	32,2	26,1	26,2
21,9	26,3	30,7	30	28,9	27	21,8	20,5	33,7	20.4	27,1	37,7
31,3	27,9	33,4	25,4	32,4	27,7	25,4	33,8	38,6	21,5	28,2	20,2
29.1	27,2	31,5	23,4	21,6	28,7	22,7	25,3	20,7	22,7	29.2	29,4
37,4	33,9	35,6	20,8	31,6	38,3	35,2	21	22,5	26,3	24,2	30,6
38	25.3	35,8	33,1	28,2	33,3	22,9	20,6	34,4	22,7	27,3	30,6
38,1	27,2	24,1	25,4	22,4	29,7	38	35,4	28,9	24,2	21,7	38.5
23,3	30,7	32.8	34,4	33,2	35	37,4	27,5	31	32,9	20,7	37
24,6	29,6	28,9	23,1	29,6	36,4	24,5	22,8	26,1	32,8	20,7	36,2
32,3	36,9	33,2	20,7	40	33,4	38,4	39,4	22,7	20,4	36,3	31,1
21,1	25,6	24	28,6	39,2	31,5	21,6	23,4	32,1	22,6	34,7	
21,8	32,5	34,8	26,4	21,2	23,2	23,9	33,9	21	36,8	21,7	
22,7	30,2	24,5	36,5	29,5	33,5	32,7	29,6	40	22,4	35,4	
36,3	25,4	30,8	23	30,7	37,5	29,6	37,7	23,4	38,6	20,6	

1.10

40,4	45,9	41,8	44,2	45,6	40,3	40,6	46,6	46,2	43,5	42,6	45,7
44,5	45	45,7	45,1	42,8	39,8	45,3	43,5	45,1	47,3	48,1	39,9
43,7	42,3	43	45,4	42,1	40,5	40,9	43,6	45,5	48,2	43,2	41,8
51,3	41,4	46,8	43,8	45,4	45,8	42,3	38,4	42,4	41,7	45,7	43,1
42,8	47,6	43,1	38.8	38,3	41,7	42,1	43,1	45.2	44,3	42,8	45,4
42,8	39,2	43,4	40	43,6	40,3	46,1	41,2	40,7	43	51,3	41,8
44,4	49,4	40,8	47.5	44,9	42,7	40,8	45,1	39,9	37,5	41,8	49,6
44,8	45,4	43,6	43,2	46,1	44,2	43,9	45	46,8	38,9	43,7	47,3
41,2	46,2	46,6	45,4	41,1	45	43,7	46,5	43,4	45,7	41,7	43,2
44,2	43,8	46,5	43,8	44,1	46,8	43,4	44,1	43,3	41,9	41,5	42,7
40.3	38,7	42	46,2	43,9	44,1	48,7	46,4	42,2	44,8	43,2	41,4
40,4	42,8	46,7	42,1	42,7	43,6	38,9	39,6	50,1	46,9	37,2	42,7
41,4	47,3	40,9	41	45,6	44,2	45,7	46,5	49,6	44,7	45,1	47
47,5	39,2	44,3	48 5	40,6	43,9	47,6	44	41,9	47,2	43,1	
38,3	39,6	43,3	42,2	46,1	44	46,7	40,8	44,1	43,6	39,5	
48,9	41	43,6	39	47,9	35,7	41,5	42,9	42	38,7	42	
41,3	44.7	33,4	41,8	42,9	44,5	39,1	43,2	45,7	46,9	38,7	

1.11

33,3	34,8	34,5	36,1	36,3	39,8	36,2	36,3	42,3	37,5	37	40,3
31,7	41,5	35,2	40,1	39	39,1	35	35,4	39,7	39,7	33,5	33,9
38,3	35,9	36,7	36.2	35,6	32,9	33,8	42,9	36,6	37,6	34,8	35,4
32.5	35,5	42,5	34,7	33	34,8	37,2	36,6	35,8	41,6	34,2	34,9
38,7	35,1	34,1	35,6	37	42,8	37,4	34,7	40,5	41	40,9	32,5
39.2	42,2	38,1	36	41	39,8	38,1	36,2	34,1	36,3	34,8	33,8
33,2	38,5	35,5	36,3	38,5	39,3	35,9	36,1	39,3	41,1	36,4	43,2
35	37,2	34	41,5	37,1	35,9	38,3	41,1	36,5	38,8	42,6	35,6
35,2	37,8	37,8	38,8	39,2	37,8	35,5	36,1	35	38,8	39,9	35,6
35,2	39,1	35,1	36	37,1	39,5	35,3	40,8	38,5	32,7	35,4	38,9
37,6	36,2	37.8	35.9	36,8	35,2	41	37,4	35,3	41,8	31,4	37,1
41,8	37,4	37,6	38.1	38,7	41,2	39,2	36,5	37,4	37,3	34,6	39,3
38,6	32,9	36	38.1	44,7	35,5	39	36,7	38,4	39,1	35,5	35,5
39,1	36,2	35,5	38.5	36,9	34,9	37	36,2	36,3	34,5	38	
33,7	35.1	37,5	36,6	36,4	38,5	37,6	31,5	37,1	37,3	38,4	
35,7	39	40,3	39	37	36,1	39,8	35,4	31,3	36,7	36,7	
41,7	37	40,1	41,1	37,3	34.2	34.5	35,7	32,5	34,6	39,1	

1.12

-48,4	-46,7	-49,3	-47,1	-48,4	-49,4	-49,8	-48,2	-46,4	-46,2	-47,8	-46,2
-47,9	-46,6	-48,3	-48,8	-48	-49,7	-48,5	-48,8	-47,4	-48,3	-46,7	-46,4
-47,7	-49,3	-49,9	-47,8	-49,4	-48,2	-49,1	-49,1	-48,2	-47,3	-49,1	-46,4
-48,3	-47,3	-47,7	-48	-49	-47,2	-48,9	-48,3	-46,9	-49,2	-47,4	-47,8
-46,2	-46,7	-47,5	-49,4	-47,6	-46,2	-49,6	-46,9	-47,7	-47,4	-48,6	-47,7
-47,7	-49,4	-47,7	-47,8	-47,8	-46,5	-46,2	-48,5	-49,5	-49,8	-50	-46,9
-50	-46,2	-49,5	-48,1	-47,2	-47,5	-49,8	-46,3	-48,3	-47,9	-47,2	-47,3
-47.4	-47,5	-48,1	-47,3	-48,7	-48,6	-46,8	-49	-46,9	-48,5	-46,2	-49
-46,3	-46,4	-46,1	-47,1	-49	-49,1	-47,1	-46,1	-48,8	-47,5	-47,5	-46,2
-47,6	-47,6	-47,7	-47,3	-49,2	-47,1	-48,7	-47,3	-46,5	-47,7	-47	-47,1
-48,4	-47,4	-48	-47,4	-46,9	-49,1	-49,1	-49,8	-46,6	-48,8	-49,4	-47,9
-49,5	-47,8	-46,4	-49,4	-49	-47,8	-47,6	-46,2	-48,9	-46,2	-46,1	-49,1
-47,9	-46,8	-48	-47,4	-46,8	-48,4	-48	-46,8	-48,1	-46,7	-46,2	-46,5
-49,4	-48.9	-49,7	-49.3	-47,6	-48,5	-47,6	-47,3	-47,8	-46,8	-48	
-49,7	-48,2	-49,5	-49,3	-49,8	-46,5	-46,9	-49,5	-47,1	-49,5	-47,9	
-47.9	-49,9	-49,7	-47,1	-49	-49,9	-46,6	-49,8	-46,1	-48,1	-46,5	
-47,9	-48,3	-46.9	-49,7	-46,3	-49,6	-48,9	-49,4	-46,2	-46,3	-47,7	

1.13

78,3	73,4	74,4	83,4	78,7	77,7	73,5	77,2	80,1	77	78,5	68,6
71,4	75,8	74,9	76,1	79,9	77	75,3	81,5	77,2	74,9	77,4	76,5
78,6	74,9	73,2	74,8	73,7	79,8	72,6	74	80,8	78,9	75,7	73,1
75,2	78,5	70,4	75,9	83	76,3	79,5	75,5	79,7	75	76,5	70,8
83,2	75,6	73,5	78	77,4	73,7	76,6	78,2	73,7	75,5	75	80,3
74,9	78,7	76	77,7	74,8	76,6	75,5	76,3	77,2	81,8	73,9	80
77,8	72,1	77,8	78,4	74,5	75,5	76,8	76,7	77,1	78,3	73,2	77,7
78,8	74,9	76,6	78,9	71,9	76,2	81,4	77,2	73,9	73,5	76,2	74,1
72,4	73,3	75,8	75,5	72,6	78,2	74	77,8	80,6	71,3	76,3	73,3
77,6	76,3	71,9	79,8	75,8	72	73,2	70,3	78,4	79,7	78,5	80,1
78,3	75,3	72,8	77,4	72,3	77,4	74,5	85,3	73,8	74	75,5	71,1
78,8	77,8	75,5	75,6	76,9	77,8	75,7	72,2	78,7	74,9	81,2	74,8
77,7	75,5	74,4	78,9	78,9	75	77,8	78,1	75,3	78,3	77,4	70,9
75,5	71,6	77,8	72,7	74,8	74,4	82,4	76,9	76,3	78,7	76,4	
74,7	76,4	79,1	77,3	76,1	80,9	75,1	81,6	79,1	76,2	77	
77,1	77,8	78,5	77,3	74,7	77,8	71,7	73,7	74,8	77,6	77,2	
72,7	79,4	73,6	75,1	73,3	75,3	79,8	75,7	72,6	78,5	80,4	

1.14

-79,1	-77,7	-82,9	-80,2	-83,3	-80,5	-76,5	-82,7	-85,5	-79,5	-78,1	-80,9
-78,3	-79,8	-83,2	-82,4	-81,1	-78,8	-81,1	-80,9	-79,7	-74	-79,6	-78,7
-77,1	-83,9	-77,2	-77,5	-79,5	-81,5	-85,3	-81,5	-82,4	-77,7	-76,6	-78,7
-79	-77,7	-78,2	-80,1	-80,6	-79,6	-80,7	-79,5	-78,4	-74,6	-75,6	-79,9
-76,2	-79,2	-79,4	-75,8	-83,6	-80,4	-79,6	-77,6	-84,6	-81,5	-82	-85,5
-82,4	-78	-78,4	-79,6	-78,3	-83,4	-81	-76,9	-83,2	-80,8	-83	-81,1
-81,9	-79,9	-80,9	-73,5	-81,5	-80,7	-79,3	-83	-77,5	-81,4	-78,2	-78,7
-80,8	-77,8	-77	-75,4	-85,7	-80,8	-81,7	-86,5	-81,1	-79,7	-84,7	-80
-78,9	-78	-76,9	-76,4	-76,6	-81,1	-83,2	-82,5	-78,7	-83,3	-75,6	-81,2
-79,2	-79,8	-78,8	-77,1	-75,6	-77,2	-78,5	-78,5	-78,3	-78	-82,9	-78,3
-82,6	-77,4	-79,7	-83,8	-80	-74,4	-79	-79,6	-77,4	-79	-75	-76,6
-80,2	-78,3	-80,6	-80	-79,1	-83,4	-79,8	-78,7	-87,6	-83,2	-87,1	-72,7
-83,4	-82,3	-81	-76,8	-83,8	-84,7	-81,2	-86,7	-79,9	-80,7	-84,5	-81,9
-77	-82,1	-80,6	-79	-80,9	-86,6	-76,8	-86,6	-81,8	-82,7	-80	
-81,9	-84,8	-79,7	-80,5	-78,8	-78,6	-80,8	-75,3	-80,4	-79,7	-82,5	
-78,9	-79,9	-84,2	-78,7	-82,5	-74,7	-86,1	-79,1	-81,4	-83	-80,3	
-80,5	-77,9	-77,9	-82,8	-83,2	-78	-76,6	-80,5	-77,6	-85,5	-82,5	

1.15

-39,2	-45,2	-40,4	-38,5	-38,4	-44,7	-45,7	-44,4	-44,2	-40,1	-43,1	-39,3
-40,5	-45,5	-45,8	-45,6	-39,6	-46,7	-45,3	-43,2	-42,6	-46,7	-46,9	-37,6
-45,2	-39	-44,7	-42,4	-41,7	-43	-39,2	-42	-38,3	-42,6	-43,5	-45,9
-40,2	-45,6	-41,6	-38,7	-40,9	-42	-45,1	-43,6	-40,7	-39,8	-40,5	-43,3
-41,3	-37,4	-45,1	-38	-43,9	-40	-42,7	-39,3	-38,6	-39,5	-46,4	-41,8
-40,4	-44,7	-41,9	-42,5	-41,9	-43,3	-46,9	-46,9	-46,4	-39,7	-39,2	-44
-42,3	-41,3	-42,1	-43,3	-42,7	-39,6	-46,7	-39,6	-39,5	-44,2	-40,9	-44,8
-38,3	-39,3	-45,4	-37,3	-41,5	-41,1	-45,2	-42,1	-46,9	-42,9	-37,2	-43,4
-38,5	-38,9	-43,3	-38,5	-37,6	-42,4	-39,3	-37,7	-40,2	-39,4	-37,2	-40,4
-39,1	-44,1	-44,1	-37,4	-37	-45,8	-43,3	-44,6	-38	-44,9	-41,4	-45,1
-45,2	-37,8	-37,1	-45,8	-40,5	-46,6	-45,1	-42,5	-45,4	-45,6	-41,6	-38,8
-37,9	-39,1	-43,6	-39,8	-45,1	-42,5	-39,6	-39,4	-46,2	-42,3	-43,5	-39,1
-45,2	-45,9	-39,2	-38,6	-38,9	-37	-37,8	-39,6	-39,2	-38	-44,2	-40,5
-44,1	-44,6	-47	-42,8	-37,9	-44,3	-46,5	-42,1	-44,8	-44,7	-44,7	
-46	-41,3	-44	-38,8	-43,6	-42,7	-46,5	-41,5	-43,7	-42,7	-41,3	
-40,3	-45,4	-42,6	-42,9	-41,8	-45	-44,3	-38,9	-44,2	-45,3	-44,8	
-40,1	-40,7	-38,6	-43	-39,4	-43,8	-46,2	-37,1	-40	-41,4	-41,4	

1.16

-37,7	-37,5	-45,9	-37	-40,2	-44,6	-38	-41	-40,5	-37,9	-41,2	-42,8
-39,6	-40,4	-40,6	-43,2	-40	-42,9	-40,3	-38,2	-39,3	-40,4	-40,5	-38,5
-42,2	-39,4	-46,4	-42,2	-46,5	-39,4	-43,2	-41,5	-39,5	-41,2	-41,2	-37,2
-36,2	-41,2	-40	-41	-41,3	-40,8	-38,2	-35,1	-41,8	-42,1	-42,9	-42
-39,1	-38,9	-42	-41,9	-38,3	-42	-42,9	-43,7	-40,1	-44,7	-42,5	-40,4
-45	-41,9	-39,7	-43,7	-36,3	-42,1	-38,4	-45,1	-37,7	-44,3	-40,4	-36,9
-40,3	-38	-43,7	-41,2	-41,9	-38,1	-39,8	-41,7	-42,4	-38,3	-42,4	-38,9
-44,2	-40,2	-38,6	-43,1	-43,6	-44,7	-36,3	-41,2	-42,9	-42,1	-38,6	-43,6
-39,6	-41,4	-37,3	-41,9	-43	-40,7	-45,6	-43,6	-41,8	-38,4	-43,7	-36
-41,4	-38,4	-40,3	-38,3	-40,9	-40,5	-39,3	-39,3	-41,5	-40,4	-38,6	-43
-42	-40,1	-43,2	-41,7	-44,1	-40,8	-39	-38,5	-42,6	-41,2	-38,8	-39,3
-40,7	-41,3	-43,1	-38,5	-42,2	-45,7	-43	-43,9	-38,7	-38,2	-46,2	-40,2
-41,7	-44,6	-44	-42,3	-40,1	-35,3	-41,8	-41,6	-39,7	-39,9	-41,5	-38,9
-42,2	-38,8	-40,7	-41,1	-42,6	-45,2	-42,7	-39,9	-37,1	-41,1	-41,8	
-40,2	-40,6	-42,9	-40,2	-40,9	-39,7	-41,7	-40,6	-39,3	-38,3	-38,4	
-39,4	-44,6	-37,9	-46,8	-38,9	-43,2	-41,5	-40,8	-39,9	-36,5	-38,5	
-39,3	-39,4	-47,7	-46,5	-43,6	-38,5	-38,8	-41,3	-44,1	-41,8	-42,6	

1.17

28,5	30,8	33	34,7	26	32,8	33,3	33,4	35,5	31,7	29,3	27,8
36,6	33,2	31,9	30,8	34,1	30,1	29,2	33,9	33,1	36	31,2	32,1
31,2	32,5	35	29	30,5	34,3	31,8	35	36,2	29,6	33,4	31,5
25,5	29,9	32,5	34,9	28,8	37,4	27,5	31,1	37,8	31,6	39,6	28,1
35,8	30,9	34,5	35,2	28,8	31,3	36,5	32	34,1	33,3	33	32,8
34,1	29,2	28,1	34	29,8	30,4	31,6	33,2	32,3	31,7	32	30,6
30,3	29,8	36,9	36,4	31,4	35	32,7	34,4	31,8	28,7	34	29,7
29,6	29	33,7	34,3	29,9	30,9	30,5	30,2	29,9	33,4	28	31,9
32,6	31,3	30,8	33,5	33,9	28,8	33,9	31,2	32,3	34,2	35,1	33,2
33,2	34,4	39,5	36,9	32,6	30	29,6	34,8	36,3	34,1	30,6	29,2
32,4	30,4	33,5	33,3	33,2	27,9	32,8	29,7	30,8	32,8	32,9	31,2
30,3	31,8	35,3	33,6	32,6	30,7	34,1	24,4	27,7	33,9	32	28,8
33,9	28,9	35,1	29,4	32,7	37,2	32,2	28,5	33,2	35,8	33,4	28,6
30,8	32,9	33,1	29,8	33,4	29,9	28,3	31,5	32,5	31,7	33,1	
27,5	27,7	33,1	34,4	28,4	29,1	28,2	34,2	33,7	25,9	30,8	
32,8	33	31,4	32,8	32,2	27,7	33,5	32,8	33	37,1	31,1	
26,5	34,3	30,5	29,3	30,5	28,8	35,5	28,8	34,5	31	29,4	

1.18

-24	-18	-21,1	-23,6	-24,8	-18,2	-21,4	-21,7	-16,6	-23,5	-15	-19,3
-18,3	-15,9	-24,5	-23,5	-18,7	-22,2	-24	-18	-24,1	-16	-20,3	-18,2
-19,9	-16	-18,8	-20	-23,2	-21,2	-24,4	-16,9	-17,8	-21,9	-19,4	-21,2
-15,4	-16,7	-19	-21,4	-16,9	-25	-24,5	-16,5	-17,2	-15	-17,1	-22,5
-16,1	-16	-20,3	-19,1	-19,6	-15,7	-15,5	-23,8	-25	-21,9	-17,6	-22
-22,9	-17,7	-16,2	-24,3	-19,3	-20,7	-18	-15,1	-22,1	-15,7	-17,1	-22,5
-24,4	-19,8	-18,5	-17,5	-19,3	-20,9	-21,1	-21	-18	-18,2	-15,6	-22,5
-16,3	-24,7	-24	-22,6	-21,6	-22,1	-16,7	-24,2	-15,1	-16,5	-21,3	-21,7
-20,9	-15,3	-22,1	-22,9	-17,5	-15,4	-23,3	-19,3	-23,8	-21,5	-24,1	-20
-23,1	-15,1	-19,7	-18,2	-19	-22,4	-16,1	-24,1	-16,6	-23,4	-22,3	-17,5
-21,8	-18,2	-19,2	-23,1	-23,4	-24,6	-16,7	-20,7	-19,4	-22,2	-19,2	-16,3
-23,9	-16,4	-22,7	-24,6	-24,5	-19,4	-20,6	-16,2	-17,2	-19,7	-23,5	-21
-18,5	-18,4	-20,4	-18,2	-22,6	-23	-23,9	-21,6	-22,2	-17,5	-20,5	-19,5
-20,8	-19,8	-16,4	-21,9	-16,4	-24,2	-19	-18	-23,1	-20,7	-17,3	
-20,6	-18,9	-19,3	-16,8	-19,4	-18,2	-20,2	-19,5	-20,4	-21,6	-19,2	
-16	-15,8	-19,5	-24,1	-24,3	-23,2	-18,2	-21,5	-20,5	-20,8	-21,8	
-18,4	-19,8	-23,3	-15,8	-16,6	-21	-16,4	-23,6	-20,7	-21,3	-23,9	

1.19

-23,2	-29,2	-24,6	-24,1	-27,9	-27,2	-22,9	-24,7	-27,2	-23	-26,8	-29
-29,9	-24,2	-27,4	-25,3	-26,6	-28,6	-30,4	-23,2	-26,9	-27,1	-26,1	-28,7
-26,2	-30,5	-23,9	-28,8	-24	-22,4	-19,1	-25,7	-25,8	-26,6	-27,9	-27,7
-29,6	-24	-26,4	-25,2	-23,5	-24,6	-26,3	-27,6	-25,8	-23,1	-26,9	-25,3
-26,2	-28,3	-26	-28,9	-19,6	-24,8	-26,3	-26,1	-22,9	-25,9	-28	-19
-26,5	-30,5	-23,2	-23,6	-29,2	-22,5	-24,1	-23,5	-25,9	-32,1	-32,1	-27,1
-27	-24,4	-25,9	-27,3	-22,7	-27,4	-22,7	-23,3	-23,8	-25	-26,1	-27
-25,6	-28	-27,7	-27,8	-26,8	-28,4	-31,4	-28,4	-23,6	-27,7	-25	-22,7
-26,2	-27,7	-22,6	-24,8	-27,9	-26,4	-26,8	-25,3	-24,2	-23,3	-26,7	-26,1
-27,7	-25,8	-25,6	-31,4	-25,4	-32,9	-28,9	-28,4	-26,5	-20,3	-20,1	-28
-28,3	-26,7	-23,9	-31,9	-26,3	-22,5	-26,7	-29,8	-25,3	-29,9	-26,5	-30
-26,5	-25,1	-27,3	-30,9	-25,5	-23,6	-24,5	-24,8	-28,8	-29	-31,1	-28
-24,7	-26,4	-22,3	-21,4	-18,6	-28,6	-32	-25,6	-29	-28,6	-21,5	-26,7
-29,2	-28,5	-25,6	-27,3	-29,5	-30,4	-25,7	-28,8	-25,9	-23,3	-26	
-19,3	-26,7	-21,8	-25,9	-29,8	-27	-27,8	-31	-20,7	-31,5	-26,2	
-23,4	-22,8	-21,2	-27,3	-26,4	-29,2	-32,6	-24,4	-22,9	-21,9	-28,8	
-28,7	-24,9	-23,4	-24,2	-23,9	-17,8	-28,4	-22,4	-28,6	-27,2	-30,1	

1.20

-53,6	-53,3	-51,6	-53,7	-51,3	-49,6	-54,7	-54	-51,2	-57	-52,3	-53,3
-52	-49,4	-53,2	-58,5	-53,5	-54,9	-54,8	-50,3	-49,3	-53,9	-49,6	-49,2
-54,1	-47,6	-49,7	-49,6	-51,3	-52,8	-54,4	-54,7	-56	-51,5	-53,2	-55,9
-48,8	-51,6	-48,9	-50,8	-50,3	-50,9	-51,5	-52	-50	-51,4	-50,5	-51,3
-55,8	-51,1	-54	-52,7	-51,1	-50,5	-52	-57,2	-56,1	-51,2	-52	-50
-56,6	-53,8	-50,4	-50,6	-53,1	-52,9	-52,4	-50,8	-51,3	-51,2	-51,7	-54,6
-49,6	-53,9	-53,3	-51,5	-50,3	-55,3	-53,8	-51,1	-54,4	-55,5	-48,1	-57,2
-53,6	-54,4	-49,3	-54,1	-52,7	-49,9	-49,3	-52,4	-51,7	-51,8	-54,7	-52,1
-49,6	-50,2	-50,8	-49,4	-53,6	-54,2	-52,7	-48,8	-47,6	-53,2	-48,7	-47,5
-53,9	-48,7	-50	-49,9	-51,3	-52,3	-54,4	-50,5	-48,7	-53	-50,7	-56,9
-46,6	-51,7	-51,2	-50	-52,6	-54,7	-58,7	-48,2	-51,3	-55	-51,2	-53,2
-54,8	-50,3	-51,4	-54,2	-51,3	-51,2	-53,5	-50,2	-52,6	-53,2	-54,7	-53,2
-53,9	-49	-51,3	-50,9	-52,9	-52,9	-51,7	-51,3	-49,6	-48,5	-53,9	-52,3
-51,2	-56	-49,2	-50,6	-52,3	-55,1	-54,4	-53,9	-52,3	-53,4	-54,2	
-53,1	-50,1	-52	-50,4	-53,9	-48,9	-54,2	-52,3	-47,6	-55	-50,3	
-50,7	-51	-51	-53,5	-53,3	-53,1	-54,1	-55,2	-51,6	-51,6	-52,3	
-50	-55	-55,3	-52,1	-52,2	-53,1	-51,6	-54,1	-52,2	-54,3	-54,9	

1.21

-37,2	-40,2	-35,1	-36,5	-35,6	-37,5	-32,4	-36,1	-33,2	-32,2	-34,6	-37,2
-38,6	-39,2	-40,3	-38,3	-34,7	-35,2	-37,7	-35,2	-32,5	-31,3	-36	-33,7
-37,5	-38	-39,2	-40,9	-33,6	-35,7	-32,7	-35,7	-37,4	-37,6	-34	-33,5
-38,6	-37,1	-38,8	-32,3	-34,7	-37,1	-32,1	-33,2	-38,2	-33,3	-37,2	-39,5
-36,2	-38,2	-31,7	-38	-39,1	-39,2	-32,8	-32,8	-37	-36,6	-31,9	-36,4
-34,3	-34,7	-39,8	-38,1	-40,4	-32,4	-33,7	-32	-33,3	-36,2	-36,7	-35,8
-36,9	-32,6	-39,8	-35,8	-37,6	-31,7	-40,3	-37,7	-31,5	-39,2	-33	-34,7
-38,1	-40	-39,5	-36,7	-40,7	-39,2	-33,5	-31,2	-41	-33,5	-35,7	-34,3
-37	-39,9	-35,4	-38	-31,7	-34,4	-34,5	-34,7	-32,8	-36,9	-40,8	-40,1
-38,8	-35,5	-34,1	-37,1	-33,7	-36,7	-34	-34,8	-35,5	-33,8	-33,2	-39,8
-39	-31,9	-33,3	-37,4	-40,4	-38,5	-38,2	-35,8	-32,4	-31,5	-32,5	-40,8
-37,5	-32,3	-38,3	-32,2	-40,4	-34,1	-40,3	-37,1	-33,8	-36,8	-39,7	-34,6
-40,5	-34,9	-39,1	-33,4	-36,6	-31,7	-38,5	-39,3	-37,1	-36,7	-32,4	-37,8
-39,4	-37,4	-32,3	-37,5	-36,7	-34,5	-40,5	-32,7	-36	-31,3	-31,1	
-32	-34,2	-35,6	-33,2	-34	-38,5	-35,9	-31,4	-34,3	-34,1	-35,1	
-36,8	-35,6	-36,9	-34,8	-34,7	-31,6	-34,4	-39,8	-34,2	-38,5	-40,2	
-34,6	-32,2	-37,3	-36,3	-32,1	-33,8	-33,1	-31,4	-34,9	-33,2	-36,3	

1.22

69,4	68,9	69,4	66,6	71,5	71,86	67,7	68,5	73,4	69,9	69,5	71
70,2	70,4	67,6	68,8	72,8	67,3	72,6	69,1	69,3	65,7	70,2	72,8
67,2	70,1	68,7	69,8	70,1	69,43	69,9	71,1	72,7	69,6	74,6	67,9
70	74,4	67,4	69,5	70,8	71,03	69,8	67,8	72,7	67,4	72	70,8
69,5	67,2	69,8	63,3	69,7	71,08	70	68,6	68,8	70,6	68,4	69
67,6	70,4	72,9	70,2	71,7	67,27	67,1	71,9	71,6	70,1	68,8	68,7
69,5	74,4	65,9	71,4	66,9	67,57	66,8	70,4	69,1	72,1	69,5	68,4
64,6	73,2	67,6	72,5	69,5	71,62	66,2	68,7	73,3	70,9	71,8	72,5
68,2	66,8	69,4	68,6	66,9	69,74	66,1	69,9	69,6	71,5	72,8	71,4
67,9	67,9	72,7	70,5	70	68,48	69,7	69,8	73,1	68,5	68,4	69,1
67,5	71,5	72,6	68	72,5	69,9	72,9	68,8	64,6	69,1	71,8	67,3
70,3	72,5	67,9	73	72,5	68,79	70,3	70,3	70,8	69,2	71,6	68,7
70,6	70,1	68,2	72,7	66,8	66,88	69,1	66,4	70,2	68,4	67	69,3
69,5	68,3	66,6	68	71,9	71,46	68,6	66,7	68,4	70,7	69,4	
68,7	67,6	72,5	72,7	68,7	69,5	71,5	71,7	73,7	70	70,6	
69,2	72,6	69,1	67,1	72,9	70,2	70,9	71,3	68	71,8	69,4	
68,7	75,7	72,1	72,1	68,6	67,68	69,4	67,4	68,9	69	65,3	

1.23

65,9	63	67,6	65,3	66,8	65,19	64,4	68,2	69,5	66,7	66,1	68
65,7	63,4	63,9	62,4	68,1	65,76	68,1	63,2	65,2	65,9	66,2	67,3
69,1	66,3	69,5	65,6	69,1	65,98	66,6	61,9	69,7	66	66,9	63,1
67,2	62,5	65,5	64	62,8	64,2	67,2	65,7	64,8	65	61,5	66,2
63,3	65,8	69,4	65,7	60,8	66,72	65,4	64	69,8	67,8	66,3	67,6
63	67,8	65,5	65,9	73,8	66,21	65,9	62,1	65,9	64,1	71	71,1
72,1	66,1	66,3	69,8	72,7	65,1	64,9	71,1	60,9	65,7	71	60,6
64	70,9	67,8	71,5	66,6	66,38	66,6	64,8	65,8	66,5	63,5	67,6
71,6	67,5	64,7	65	64,9	69,39	67,5	66,9	67,6	68	62,7	66,7
67,3	69,7	64,5	68,2	66,7	65,59	67,6	73,3	64,6	65,2	69,4	67,8
68,6	70,6	65,3	64,2	67,4	68,6	67,1	68,5	66,2	63,7	66,6	66,2
72	69,4	67,8	64,3	69,5	67,91	64,5	66,5	64,1	69,6	64,2	63,6
65,3	68,5	71,2	68,9	67,1	69,03	66,6	64,1	67,3	68,6	67,5	66,9
65,4	66,7	64	65,5	73,8	65,88	68,9	65,5	61,8	66,5	66,4	
65,4	66,5	61,8	65,5	59,5	64,57	67,9	67,5	67,6	67,6	66,2	
63,2	70,4	68	58,5	69,2	62,37	63,5	67	64,9	63,3	68,1	
68,3	62,9	68,1	67,9	67,4	67,31	65,2	64,7	64,6	65,5	66,7	

1.24

24,1	31,5	25,3	29,2	25,7	29,42	28,4	27,2	30,7	29,4	31,6	23,2
30,6	24,6	28,1	25,3	26,8	25,16	21,2	30,4	20,8	31,3	27,8	29,5
21,5	22,3	23,2	30,2	22,5	28,91	20,7	27,3	21,7	26	27,2	31,1
22,5	27,3	31,7	30,1	31,4	22,3	21,7	27,8	24,9	28,2	26,7	20,5
21,9	30,8	28	24,1	30,7	24,97	22,9	25,2	29,5	26,9	21,4	23,3
26,3	27,3	25	25,9	21,4	21,66	27,9	20,4	26	28	30,7	30,8
20,2	22,9	24,6	23,6	27,2	30,94	29,9	25,7	20,6	22	27,7	21,5
20,1	20,3	24,8	23,7	21,1	30,1	31,2	22,1	29,7	27,7	20,6	22
27,6	31,8	26,4	23	20,7	20,94	24,3	31,8	28,3	24,5	27,9	22,5
26,4	21,5	26,5	21,3	24	22,96	23	30,3	21	20,2	27,4	21,4
30,1	29,8	25,9	27	26,9	26,63	21,2	27	25,9	31,1	29,6	24,4
25,8	22,8	25	26,1	32	29,48	26,6	26,5	22,1	27,9	31,2	22,9
26	31	24,9	31,8	28,3	31,36	26,2	31,3	22,9	21,4	22,8	29
22,9	23,8	30,3	31,6	30,5	27,79	28,1	27,1	23,8	29,9	23,6	
24,1	25,9	24,1	20,3	24,8	21,87	24,4	26,3	25,2	28,9	27,9	
23,6	27,4	30,8	31,1	31,1	21,34	22,9	27,4	21,8	22,5	29,4	
24,6	27,2	20,4	30,8	31,8	29,55	24,3	26,2	26,7	23,1	31,4	

1.25

-43,4	-41,4	-39,3	-36,3	-41	-40,6	-35,9	-37,7	-38,6	-40,9	-42,2	-39,4
-42,1	-39,2	-38,7	-40,5	-37,5	-37,2	-42,8	-38,2	-39,4	-39,6	-39,3	-35,5
-42,2	-39,8	-38,2	-39,9	-43,3	-41,6	-35,8	-39	-39,3	-36,1	-37,9	-41,9
-40,6	-41,2	-35,5	-40,1	-42,8	-41,7	-42,5	-38,5	-39	-40,4	-41	-40
-40,9	-36,8	-44,2	-37,4	-34,2	-40,7	-40,4	-40	-37,1	-39,8	-39,7	-38,2
-40,3	-40,2	-37,5	-42,2	-39,8	-39,9	-36,4	-36,7	-43,3	-39,8	-39,3	-42
-37,2	-38,4	-43,5	-38,7	-40,5	-38,7	-42,7	-39,5	-41	-40,6	-37,9	-38,8
-37,9	-41,9	-38	-41,8	-44	-40,7	-37,7	-38	-42,3	-39,7	-38,4	-41,6
-41,5	-36,9	-37,9	-41	-43,3	-41,4	-38,6	-39,9	-38,6	-40,9	-41,2	-40,6
-41	-41,2	-41,1	-39,1	-42,2	-40,6	-44,2	-43,8	-44	-42,6	-41,4	-40,1
-40,9	-36,7	-41,4	-39,3	-39	-41,8	-40,5	-40	-38,5	-40,1	-38,2	-42,6
-40,5	-37,6	-36,8	-42	-40,7	-41,9	-40,4	-40,9	-39,2	-40,6	-42,3	-37,2
-38,8	-38	-36,7	-40,5	-37,4	-40,4	-40	-38,7	-36,3	-41,9	-36,4	-40
-40,6	-41,7	-33,9	-41,2	-39,4	-38,4	-42	-37,7	-43,8	-40,8	-40,6	
-42,9	-43,7	-39,6	-39,3	-37,4	-39,3	-44,7	-36,8	-38,6	-37,9	-38,6	
-35,9	-38	-39,9	-38,3	-35,3	37,8	-40,3	-42	-41,4	-41,7	-39	
-38,8	-41,4	-46,1	-38,3	-44,2	-40,5	-38,4	-37,5	-39,1	-38,2	-41,9	

1.26

45,1	46	47,6	44,9	44,1	44,9	40,6	41,4	44,3	50,5	46,6	45,3
47	43,5	48,2	49,4	45,7	45	45,3	46	45	49,1	44,4	49,6
48	50,5	45,4	44,7	43,4	47,4	46,7	42,3	49,7	45,5	49,6	47,3
50,4	47	45,4	46,2	49	41,9	43,2	46,4	50,7	48	47,4	48,9
48,8	46,3	48,6	48,7	45	46,5	45,5	47,5	46,7	47	49,6	40,2
44,7	42,6	47	49,2	46,5	49,2	45,4	43,8	42,2	42,1	46,8	50,2
47,9	54	44,3	43,2	48,1	44,2	49,9	49,3	52,9	41,5	45,1	48,4
46,1	46,9	47,7	50,1	44,2	47,8	46	47,1	49	44,9	47,8	48,2
43,5	49,3	42,8	47,5	43,4	51,7	49,7	45,7	47,9	49,2	46,8	50,4
45,8	42,1	43,9	47,6	49,7	50,5	45,2	42,9	47,9	47,6	49,7	48
48,2	49,7	44,8	46,9	45,9	47,3	45,8	51,4	48,9	44,9	51,5	48
45,6	44,1	46,2	48,7	46,4	45,6	47,4	48,7	50,8	47,3	45,1	50,1
48,9	47,8	44,2	46	46,4	45,6	47	46,6	48	49,7	47,9	42,7
48,3	49,5	45,4	44,2	44,4	46,8	48,5	44,5	44,7	46,4	45,5	
47	46,5	48,1	46	47,9	48,4	45,8	43,6	46,2	48	46,8	
48,8	46,2	46,5	44,5	48,4	45,4	50,4	48,8	46,9	46,9	49,2	
45,7	50,7	46,3	48,5	47,9	47,8	46,9	47,3	48	48,7	50,6	

1.27

41	27,9	33,4	31,7	38,5	37,4	37,5	25,2	35,2	28,7	38,2	31,3
33,4	33	38,6	34,4	27,4	26,4	39,3	28,4	33,6	26,7	31,5	38,1
41,6	39,9	30,5	40,4	37,4	25,6	38,2	25,6	41,8	40,4	31,5	25,5
26,5	30,8	32,5	29,2	41,9	31	36,4	31,4	28,9	32,7	38,8	27,8
38,1	26,4	41,1	29,9	40,9	26,2	37,1	29,4	38,3	34,3	29,9	25,5
26,9	27	31,4	27,8	33,3	39,6	41	40,4	32,4	39,9	26,8	29,9
29,6	41,4	38,4	31,3	35	28,6	34,8	27	25,2	40,9	32,6	31,7
27,3	40,9	37,4	30,8	29,8	31,6	25,1	35,6	25,8	30,3	30,3	30,4
28	26	31	31,5	38,9	36,1	25,7	38,2	37	32,8	27,6	29,2
28,7	25,9	31,4	28,6	40,8	36,6	32,9	28,1	36,3	29,6	41,1	41,1
34,9	30,6	41	37,8	29,4	37	34,8	34,8	32,5	34,5	36,4	41,8
31,3	33,7	41,2	33,5	29,1	29,7	36,7	35,2	40,6	39,2	40,2	35,6
29,2	31,8	25,4	26,1	29,1	28,1	29,8	36,9	32,5	30,6	32,9	33,2
35,6	40,5	34,7	28,7	30,9	32,9	40	41,2	31,4	39,1	41,6	
33	40,2	28,7	26,4	35,9	41	29,1	40,1	31	28,4	25,9	
37,5	30,5	25,9	37,8	29,8	31,4	39,7	28	27,9	26,5	26,4	
35,2	40	39,8	41,5	30	33,8	35,6	30,3	35,8	38,8	33	

1.28

38,6	39,2	38	37,9	31,2	37,6	39,2	35,2	32,5	34	32,7	37
33	36,7	37	36,5	36,7	34,9	35	39,1	35,8	36,1	36,5	38,1
37,7	36	42,1	36,7	35,7	33,5	35,1	35	36,5	34,6	35,2	36,2
36,3	37	41,6	34,8	33,3	36,6	42,8	43	39,5	31,8	35,6	34,4
39,6	34,9	35,9	31,2	40,1	34,1	36,2	34,2	33,2	34,4	35,6	39,9
36,1	37,3	38,2	37,6	34,2	34,8	33,3	35,2	31,7	30,1	35	39,7
28,4	35,7	33,5	31,7	40,7	41,9	36,3	34,4	37,2	34,3	29,9	37
36,9	36,7	35,7	35,2	35,7	42,4	37,9	35,9	34	36,1	32,9	38,9
38,1	37,5	32,7	38,6	42,3	36,4	34,7	33,7	37	34,8	40,8	32,5
42,6	38,7	34,7	36,5	33,1	39,9	35,7	36,2	34,4	39,9	35,3	40,4
35,1	35,6	39,7	35,7	35,6	37,1	37	36,6	37,3	37,8	34,4	33,7
34,3	31,9	31,6	33,8	36,4	34,7	38,3	37,6	39,6	42,5	37,9	38,1
33,8	31,6	33,2	35,6	36	37,6	36,2	39,3	32,4	37,2	34,9	30,1
38,3	36,3	33,6	37,3	37,5	39,6	39,7	29,8	35,6	35,7	39,8	
39,7	32,4	35,4	36,6	39,5	34,5	35	34,6	34,8	34,3	38,3	
36,7	35	38,4	36,9	38,7	33,1	38	33,8	34,4	40,1	32,6	
38,1	33	32	34,6	34,1	39,3	32,3	33,2	35,6	38,5	36,4	

1.29

54,1	52,8	49,7	53	57,4	51,5	58	49,4	50,9	54	55,2	51,4
47,4	49,8	48,7	51,3	52,7	53,3	56,7	50,5	53,5	52,4	57,9	50
52,3	53,8	47,9	53,9	49,1	55	59,5	53,1	52	50,8	55,5	50
46	52,6	56,7	51,5	58,5	47,1	47	55,5	54,6	63,9	51,6	52,8
54,2	50	56,5	50	53,5	47,8	52	57,4	51,9	51,5	58,2	53,3
50,2	54,4	51,6	49,9	53,8	52,9	61,1	52,9	55,3	55,4	53,8	55,4
59	50,2	52,5	48,5	50,7	51,6	51,7	55,7	56,4	52,2	56,7	49,5
48,1	57,5	55,4	53,8	53,5	49,8	51,4	55,2	52,8	56	54,4	44,7
56,1	56,9	49,4	53,4	53,2	51,1	55,9	54,4	52,8	51,1	51,5	56,5
53,7	56	55,7	51,5	52,7	53,7	51,8	52,6	52,7	47,3	52,3	48,5
52	49,6	52,7	52,9	53,3	53,8	52	54,8	50,3	51,7	51,8	50,2
53,7	49,2	48,7	50,9	57,1	47,8	47,7	50,9	57,9	53,9	53,5	55,8
57,2	57,6	54,9	51,5	56,7	57	53,4	56,9	58,8	54,2	51,9	51,4
55	52,5	54,1	54,5	51,5	51,9	51,5	51,5	47,7	53,1	54	
52,9	53,2	56,2	51,2	48,3	57,6	52,8	53,1	53,7	53,4	54,1	
55,6	50,5	57,4	51,1	50,8	47,5	50	53,8	54,1	53,8	50,8	
52,1	52	55,4	61,4	53,7	53,2	51,5	52,9	53,4	48,6	51,5	

1.30

74,6	92	80,7	80,5	87,9	82,1	89,4	90	73,8	75,1	75,5	83,4
87,5	77,6	72,4	74,3	74	75,2	91,2	72,5	87,5	77	80,7	84,5
82	85,5	88,8	80,4	83,7	82,7	78,6	83,8	85,9	87,4	86,9	74,8
76,6	74,9	79,4	78,7	80,2	75,2	87,9	78,8	82,9	77,8	87,4	83,4
83,6	83,5	75,5	91,2	79,6	87,9	72,5	90,7	89	77,3	86	76,6
79,8	84,8	76,8	89,4	85,9	83,4	91,2	73,3	81,9	85,3	74,6	80,7
75,7	85,9	74,2	73,5	90,9	79	83,6	82,6	79,1	83,3	77,6	77,9
72,2	86,8	90,2	77,5	76,4	88,2	84,2	82,6	77,7	82,2	85,6	79,7
79,9	89,3	90,1	84,8	85,1	74,6	76,1	89,8	78,8	76,9	90,7	73,5
88,5	75,1	84,2	88,3	77,3	89,3	78,4	80,5	83,2	85,6	83,9	84,6
84,3	83,1	73,8	79,6	81,2	89,4	87	75	76	85,3	88,8	90,2
80,4	84,7	82,9	82,2	91,1	88,3	81,9	83,7	85,8	80,7	90,3	88,1
78,1	86,7	86,9	91,5	83,5	76,4	81,8	89,4	75,9	77,5	73,5	75,5
86,8	81,1	81,2	78,4	85,9	82	80,2	89	75,3	78,2	72,2	
77,3	91	80,3	78,2	86	91,2	80,9	91,4	84,5	91,6	80,2	
77,1	72,2	90,2	81,3	77,5	77,5	89,7	73	84,5	73	86,4	
84,1	80,6	85,4	89	90,6	78,4	79,3	87,7	85,3	86,3	86,7	

2. Точечные оценки

Пусть для случайной величины X плотность распределения $p(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$ известна с точностью до параметров ϑ_1, ϑ_2. Требуется по выборке $x_1, ..., x_n$ получить сведения об этих параметрах. Как обычно, выборку $x_1, ..., x_n$ будем считать реализацией многомерной случайной величины $X_1, ..., X_n$, компоненты которой независимы и имеют то же распределение вероятностей, что и случайная величина X. Точечной оценкой $\hat{\vartheta}_i$ параметра ϑ_i называется функция $\hat{\vartheta}_i = \hat{\vartheta}_i(X_1, ..., X_n)$, которая в определенном статистическом смысле близка к $\vartheta_i (i = 1, 2)$. В качестве оценок математического ожидания и дисперсии обычно берут соответственно $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ и $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; при "малом" объеме выборки последнюю оценку следует заменить на $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, которая называется несмещенной оценкой дисперсии. Существуют различные методы получения точечных оценок неизвестных параметров распределения, из которых рассмотрим лишь метод моментов. Согласно этому методу оценки $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$ подбирают так, чтобы первые два момента

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, \hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2)dx; \;\; D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x, \hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2)dx$$

совпадали с соответствующими выборочными характеристиками. Пусть случайная величина X распределена равномерно на интервале (a, b); тогда, как известно, $m_x = (a+b)/2$, $D_x = (a-b)^2/12$. Поэтому, если имеется выборка $X_1, ..., X_n$, отвечающая этой случайной величине, то для получения оценок параметров a и b методом моментов имеем систему уравнений

$$(\hat{a} + \hat{b})/2 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \;\; (\hat{a} - \hat{b})^2/12 = \tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Решая эту систему, находим оценки a и b: $\hat{a} = \bar{X} - \tilde{s}\sqrt{3}$; $\hat{b} = \bar{X} + \tilde{s}\sqrt{3}$. Если выборка $X_1, ..., X_n$ получена по результатам наблюдений над случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ, то, учитывая вероятностный смысл этих параметров, получаем с помощью метода моментов такие оценки

$$\hat{m} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \;\; \hat{\sigma} = \tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2};$$

Пример 1. По результатам наблюдений над случайной величиной X, распределенной равномерно на интервале (a, b), получен следующий группированный статистический ряд:

Интервал a_{i-1}, a_i	50-51	51-52	52-53	53-54	54-55	55-56	56-57	57-58	58-59	59-60
Частота n_i	16	27	20	26	15	18	16	18	19	25

Требуется с помощью метода моментов получить точечные оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b и изобразить (можно для наглядности на одном чертеже) гистограмму, отвечающую данному статистическому ряду и сглаживающую ее кривую распределения случайной величины, распределенной равномерно на интервале $(\hat{a}, \hat{b})$.

Решение. Объем выборки составляет 200 элементов. Найдем относительные частоты и оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X; вычисления удобно оформить в виде таблицы. Обозначим через z_i середину интервала $(a_{i-1}, a_i), i = 1, ..., 10$; в качестве ложного нуля возьмем $C = 54.5$.

z_i	n_i	n_i/n	$z_i - C$	$(z_i - C)n_i$	$(z_i - C)^2$	$(z_i - C)^2 n_i$
50,5	16	0,08	-4	-64	16	256
51,5	27	0,135	-3	-81	9	243
52,5	20	0,1	-2	-40	4	80
53,5	26	0,13	-1	-26	1	26
54,5	15	0,075	0	0	0	0
55,5	18	0,09	1	18	1	18
56,5	16	0,08	2	32	4	64
57,5	18	0,09	3	54	9	162
58,5	19	0,095	4	76	16	304
59,5	25	0,125	5	125	25	625
Σ	200	-	-	94	-	1778

Отсюда

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(z_i - C)n_i + C = 94/200 + 54.5 = 54,97;$$

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(z_i - C)^2 n_i - (\bar{X} - C)^2} \approx 2,94$$

Таким образом, $\hat{a} = \bar{X} - \tilde{s}\sqrt{3} \approx 49,88$; $\hat{b} = \bar{X} + \tilde{s}\sqrt{3} \approx 60,06$. Гистограмма, отвечающая исходному статистическому ряду и сглаживающая ее кривая распределения случайной величины, распределенной равномерно на интервале $(\hat{a}, \hat{b})$, изображены соответственно на рис. 2 и 3.

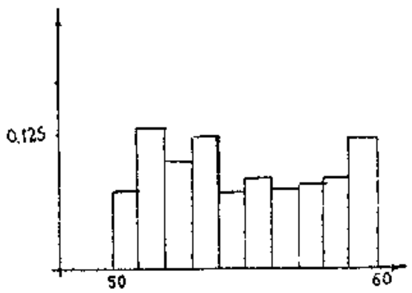

Рис.2

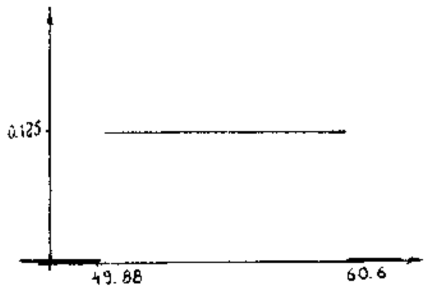

Рис.3

Пример 2. По результатам наблюдений над случайной величиной X, распределенной нормально с параметрами m и σ, получен следующий группированный статистический ряд:

Интервал a_{i-1}, a_i	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60	60-62	62-64	64-66	66-68	68-70
Частота n_i	1	1	17	54	64	41	16	4	1	1

Требуется с помощью метода моментов получить точечные оценки $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$ параметров m и σ и изобразить (можно для наглядности на одном чертеже) гистограмму, отвечающую данному статистическому ряду, и сглаживающую ее кривую распределения случайной величины, распределенной нормально с параметрами $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$

Решение. Объем выборки составляет 200 элементов. Объединим интервалы, в которые попало "мало" элементов выборки: три первых и три последних; статистический ряд приобретет следующий вид

Интервал a_{i-1}, a_i	50 – 56	56 – 58	58 – 60	60 – 62	62 – 64	64 – 70
Частота n_i	19	54	64	41	16	6

Найдем относительные частоты и оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X; вычисления удобно оформить в виде таблицы. Обозначим через z_i середину интервала $(a_{i-1}, a_i), i = 1, \ldots, 6$; в качестве ложного нуля возьмем $C = 59$.

z_i	n_i	n_i/n	$z_i - C$	$(z_i - C)n_i$	$(z_i - C)^2$	$(z_i - C)^2 n_i$
53	19	0,095	-6	-114	36	684
57	54	0,27	-2	-108	4	216
59	64	0,32	0	0	0	0
61	41	0.205	2	82	4	164
63	16	0,08	4	64	16	256
67	6	0,03	8	48	64	384
Σ	200	-	-	-28	-	1704

Отсюда $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(z_i - C)n_i + C = -28/200 + 59 = 58,86$;

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(z_i - C)^2 n_i - (\bar{X} - C)^2} \approx 2,92$$

Таким образом, $\hat{m} = \bar{X} \approx 59,16; \hat{\sigma} = \tilde{s} \approx 2,92$. Гистограмма, отвечающая исходному статистическому ряду и сглаживающая ее кривая распределения случайной величины, распределенной нормально с параметрами $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$, изображены соответственно на рис. 4 и 5.

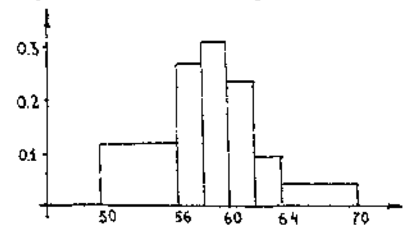

Рис.4

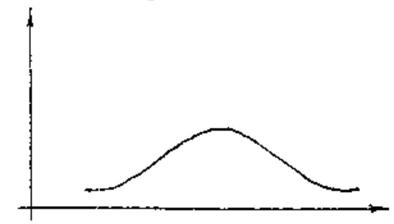

Рис.5

Задачи для самостоятельного решения

Имеется группированный статистический ряд, полученный по результатам наблюдений над случайной величиной X. В задачах 2.1 – 2.10 случайная величина X распределена равномерно на интервале (a, b). Требуется с помощью метода моментов получить точечные оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b и изобразить (можно для наглядности на одном чертеже) гистограмму, отвечающую данному статистическому ряду и сглаживающую ее кривую распределения случайной величины, распределенной равномерно на интервале $(\hat{a}, \hat{b})$. В задачах 2.11 – 2.30 предлагаемый группированный статистический ряд отвечает случайной величине, распределенной нормально с параметрами m, σ. Требуется с помощью метода моментов получить точечные оценки $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$ параметров m и σ и изобразить (можно для наглядности на одном чертеже) гистограмму, отвечающую данному статистическому ряду и сглаживающую ее кривую распределения случайной величины, распределенной нормально с параметрами $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$.

2.1

Интервал a_{i-1}, a_i	25-26	26-27	27-28	28-29	29-30	30-31	31-32	32-33	33-34	34-35	35-36
Частота n_i	23	20	22	25	15	16	20	21	20	17	1

2.2

Интервал a_{i-1}, a_i	34-35	35-36	36-37	37-38	38-39	39-40	40-41	41-42	42-43	43-44	44-45
Частота n_i	20	15	19	18	24	25	15	23	19	18	4

2.3

Интервал a_{i-1}, a_i	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24	24-25	25-26
Частота n_i	17	18	17	27	16	15	19	18	21	18	4

2.4

Интервал a_{i-1}, a_i	48-49	49-50	50-51	51-52	52-53	53-54	54-55	55-56	56-57	57-58	58-59
Частота n_i	26	21	22	24	21	15	19	16	16	18	2

2.5

Интервал a_{i-1}, a_i	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
Частота n_i	12	20	18	23	12	19	18	21	26	28	3

2.6

Интервал a_{i-1}, a_i	57-58	58-59	59-60	60-61	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68
Частота n_i	11	21	23	21	19	21	21	22	12	25	4

2.7

Интервал a_{i-1}, a_i	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71	71-72
Частота n_i	16	27	16	23	17	25	16	20	19	18	3

2.8

Интервал a_{i-1}, a_i	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Частота n_i	12	21	22	17	17	11	26	21	18	22	10

2.9

Интервал a_{i-1}, a_i	81-82	82-83	83-84	84-85	85-86	86-87	87-88	88-89	89-90	90-91	91-92
Частота n_i	18	16	23	23	10	19	16	22	16	30	7

2.10

Интервал a_{i-1}, a_i	72-73	73-74	74-75	75-76	76-77	77-78	78-79	79-80	80-81	81-82
Частота n_i	23	25	12	19	27	17	18	19	24	16

2.11

Интервал a_{i-1}, a_i	19-20,5	20,5-22	22-23,5	23,5-25	25-26,5	26,5-28	28-29,5	29,5-31	31-32,5
Частота n_i	7	20	31	43	38	30	22	8	1

2.12

a_{i-1}	55,5	57	58,5	60	61,5	63	64,5	66	67,5	69
a_i	57	58,5	60	61,5	63	64,5	66	67,5	69	70,5
Частота n_i	1	5	19	32	46	45	35	14	2	1

2.13

a_{i-1}	44	45,5	47	48,5	50	51,5	53	54,5	56	57,5
a_i	45,5	47	48,5	50	51,5	53	54,5	56	57,5	59
Частота n_i	1	0	16	25	41	50	33	21	12	1

2.14

a_{i-1}	29,5	31	32,5	34	35,5	37	38,5	40	41,5	43
a_i	31	32,5	34	35,5	37	38,5	40	41,5	43	44,5
Частота n_i	2	3	16	23	47	47	34	19	7	2

2.15

a_{i-1}	18	19,5	21	22,5	24	25,5	27	28,5	30	31,5	33
a_i	19,5	21	22,5	24	25,5	27	28,5	30	31,5	33	34,5
Частота n_i	1	0	12	23	33	47	48	19	8	7	2

2.16

a_{i-1}	18	19,4	20,8	22,2	23,6	25	26,4	27,8	29,2	30,6
a_i	19,4	20,8	22,2	23,6	25	26,4	27,8	29,2	30,6	32
Частота n_i	2	6	13	38	41	49	34	13	3	1

2.17

a_{i-1}	58,8	60,5	62,2	63,9	65,6	67,3	69	70,7	72,4	74,1	75,8
a_i	60,5	62,2	63,9	65,6	67,3	69	70,7	72,4	74,1	75,8	77,5
Частота n_i	1	1	5	10	29	43	52	31	19	5	4

2.18

a_{i-1}	40,5	42	43,5	45	46,5	48	49,5	51	52,5	54
a_i	42	43,5	45	46,5	48	49,5	51	52,5	54	55,5
Частота n_i	2	3	18	32	46	43	35	13	7	1

2.19

Интервал a_{i-1}, a_i	73,5-75,5	75,5-77,5	77,5-79,5	79,5-81,5	81,5-83,5	83,5-85,5	85,5-87,5
Частота n_i	8	21	39	52	40	27	13

2.20

a_{i-1}	82,2	83,5	84,8	86,1	87,4	88,7	90	91,3	92.6	93,9
a_i	83,5	84,8	86.1	87,4	88,7	90	91,3	92,6	93,9	95,2
Частота n_i	1	0	2	14	36	53	42	36	10	6

2.21

a_{i-1}	67	68,4	69,8	71,2	72,6	74	75,4	76,8	78,2	79,6
a_i	68,4	69,8	71.2	72,6	74	75,4	76,8	78,2	79,6	81
Частота n_i	1	4	16	37	53	42	31	10	5	1

2.22

a_{i-1}	28,5	30	31,5	33	34,5	36	37,5	39	40,5	42
a_i	30	31,5	33	34,5	36	37,5	39	40,5	42	43,5
Частота n_i	3	2	14	38	42	48	32	14	5	2

2.23

Интервал a_{i-1}, a_i	35,3-36,6	36,6-37,9	37,9-39,2	39,2-40,5	40.5-41,8	41,8 43,1	43.1-44,4	44.4-45,7	45,7-47
Частота n_i	5	10	29	40	50	26	25	11	4

2.24

a_{i-1}	39	40,7	42,4	44,1	45,8	47,5	49,2	50,9	52,6	54.3
a_i	40,7	42,4	44.1	45.8	47,5	49,2	50,9	52.6	54.3	56
Частота n_i	2	8	18	44	45	37	25	14	5	2

2.25

a_{i-1}	25	26,7	28.4	30,1	31,8	33,5	35,2	36,9	38,6	40,3
a_i	26,7	28,4	30,1	31,8	33,5	35,2	36,9	38,6	40,3	42
Частота n_i	2	6	12	28	29	53	32	24	9	5

2.26

a_{i-1}	51,1	52,7	54,3	55,9	57,5	59,1	60,7	62,3	63,9
a_i	52.7	54,3	55,9	57,5	59,1	60,7	62,3	63,9	65,5
Частота n_i	3	17	24	50	42	40	18	5	1

2.27

a_{i-1}	61	62.8	64.6	66,4	68,2	70	71,8	73,6	75,4	77,2	79
a_i	62.8	64,6	66.4	68,2	70	71.8	73,6	75,4	77.2	79	80,8
Част. n_i	1	2	14	35	46	46	28	20	6	1	1

2.28

Интервал a_{i-1}, a_i	57,6-58,7	58,7-59.8	59,8-60,9	60,9-62	62-63,1	63,1-64,2	64,2-65,3	65.3-66,4	66,4-67,5
Частота n_i	3	10	30	50	47	39	11	7	3

2.29

a_{i-1}	38	39,4	40.8	42,2	43,6	45	46.4	47,8	49,2	50,6
a_i	39.4	40.8	42.2	43,6	45	46,4	47,8	49.2	50,6	52
Част. n_i	2	4	18	29	46	41	26	25	6	3

2.30

a_{i-1}	78	79,3	80,6	81,9	83,2	84,5	85,8	87,1	88,4	89,7
a_i	79,3	80,6	81,9	83,2	84,5	85,8	87,1	88,4	89,7	91
Част. n_i	1	4	11	21	42	32	46	23	17	3

3. Интервальные оценки

Пусть $\underline{\Theta}$ и $\bar{\Theta}$ - некоторые функции элементов $X_1, ..., X_n$ выборки, отвечающей случайной величине X. Если закон распределения случайной величины X зависит от параметра Θ и интервал $(\underline{\Theta}, \bar{\Theta})$ с вероятностью P содержит (накрывает) параметр Θ.то этот интервал называется доверительным интервалом для Θ, соответствующим доверительной вероятности P. Квантилью уровня p случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ называется такое число u_p, что $P(X < u_p) = F(u_p) = p$.

Пусть случайная величина X распределена нормально, и ее среднее квадратическое отклонение σ известно. Тогда доверительный интервал для математического ожидания m этой случайной величины,соответствующий доверительной вероятности P, имеет вид $(\bar{X} - u_p\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + u_p\sigma/\sqrt{n}) = \bar{X} \pm u_p\sigma/\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i)$, а u_p - квантиль уровня $p = (P+1)/2$ нормального распределения $N(0,1)$. В случае, когда σ неизвестно, доверительный интервал для m, соответствующий доверительной вероятности P, имеет вид $\bar{X} \pm t_p(n-1)s/\sqrt{n}$, где $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, а $t_p(n-1)$ - квантиль уровня $p = (P+1)/2$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Предположим теперь, что математическое ожидание m случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известно, и требуется по выборке $X_1, ..., X_n$ построить доверительные интервалы для дисперсии D_x и среднего квадратического отклонения σ. Пусть $s_0{}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$, а $\chi_q{}^2(n)$ и $\chi_p{}^2(n)$ - квантили уровней соответственно $q = (1-P)/2$ и $p = (1+P)/2$ распределения χ^2 с n степенями свободы. Тогда доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения имеют соответственно вид

$$\left(ns_0{}^2/\chi_p{}^2(n), ns_0{}^2/\chi_q{}^2(n)\right) \text{ и } \left(s_0\sqrt{n/\chi_p{}^2(n)}, s_0\sqrt{n/\chi_q{}^2(n)}\right).$$

При неизвестном математическом ожидании соответствующие доверительные интервалы имеют вид

$$\left((n-1)s^2/\chi_p{}^2(n-1), (n-1)s^2/\chi_q{}^2(n-1)\right)$$

и

$$\left(s\sqrt{(n-1)/\chi_p{}^2(n-1)}, s\sqrt{(n-1)/\chi_q{}^2(n-1)}\right),$$

где $\chi_p{}^2(n-1)$ и $\chi_q{}^2(n-1)$ — квантили уровней $q = (1-P)/2$ и $p = (1+P)/2$ распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Пример. Имеется выборка

16,67; 16,75; 16,54; 16,72; 16,7; 16,48; 16,42; 17,14; 16,74; 16,73; 16,65; 16,72; 16,33; 16,83; 16,83; 16,35; 16,76; 16,45; 16,42; 16,84; 16,61; 16,64; 17,02; 16,69; 17,02,

отвечающая нормально распределенной случайной величине X. Требуется построить: 1) доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности $p = 0,9$, считая, что среднее квадратическое отклонение известно и равно $\sigma = 0,2$; 2) доверительный интервал для математического ожидания m, соответствующий доверительной вероятности $p_2 = 0,95$, считая, что среднее квадратическое отклонение неизвестно; 3) доверительные интервалы для дисперсии D_x и среднего квадратического отклонения σ, соответствующие доверительной вероятности $p_3 = 0,8$, считая, что математическое ожидание $m = m_x$ известно и равно 16,7; 4) доверительные интервалы для дисперсии D_x и среднего квадратического отклонения σ, соответствующие доверительной вероятности $p_4 = 0,99$, если математическое ожидание неизвестно.

Решение. Сначала найдем $\bar{X}, s_0{}^2, s^2$ по формулам

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - C) + C = \frac{1}{\Delta n}\sum_{i=1}^{n}\Delta(X_i - C) + C;$$

$$s_0{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 = \frac{1}{\Delta^2 n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta(X_i - m))^2;$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - C)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - C)^2 =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta(X_i - C))^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - C)^2,$$

где множитель $\Delta = 100$ вводится для того, чтобы соответствующие числа стали целыми; $C = m = 16,7$. Вычисления, как обычно, будем выполнять с помощью таблицы. По указанным выше формулам получаем: $\bar{X} = -45/2500 + 16,7 = 16,682$; $s_0{}^2 = 10291/250000 = 0,0412$; $s^2 = 10291/240000 - (25/24) \cdot (16,7 - 16,682)^2 \approx 0,0426$.

N	X_i	$\Delta(X_i-C)=$ $=\Delta(X_i-m)$	$\Delta(X_i-C)^2=$ $\Delta(X_i-m)^2$
1	16,67	-3	9
2	16,75	5	25
3	16,54	-16	256
4	16,72	2	4
5	16,7	0	0
6	16,48	-22	484
7	16,42	-28	784
8	17,14	44	1946
9	16,74	4	16
10	16,73	3	9
11	16,65	-5	25
12	16,72	2	4
13	16,33	-37	1369
14	16,83	13	169

N	X_i	$\Delta(X_i-C)=$ $=\Delta(X_i-m)$	$\Delta(X_i-C)^2=$ $\Delta(X_i-m)^2$
15	16,83	13	169
16	16,35	-35	1225
17	16,76	6	36
18	16,45	-25	625
19	16,42	-28	784
20	16,84	14	196
21	16,61	-9	81
22	16,64	-6	36
23	17,02	32	1024
24	16,69	-1	1
25	17,02	32	1024
Σ		-45	10291

По табл. II приложения находим для $p_1 = 0,9$ квантиль $u_p \approx 01,645$ нормального распределения уровня $p = (p_1+1)/2 = 0,95$. Теперь можно построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $p_1 = 0,9$, для математического ожидания при известном

$$\sigma : \bar{X} \pm u_p\sigma/\sqrt{n} \approx 16,682 \pm 1,645 \cdot 0,2/5 = 16,682 \pm 0,0658.$$

Для построения доверительного интервала для математического ожидания при неизвестном σ найдем по табл. V приложения квантиль уровня $p = (p_2+1)/2 = 0,975$ распределения Стьюдента с $n-1 = 24$ степенями свободы: $t_p(n-1) \approx 2,064$. Соответствующий доверительный интервал имеет вид

$$\bar{X} \pm t_p(n-1)s/\sqrt{n} \approx 16,682 \pm 2,064 \cdot 0,21/5 \approx 16,682 \pm 0,087.$$

Чтобы построить доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения при известном математическом ожидании, найдем по табл. III, IV приложения квантили распределения χ^2 с $n = 25$ степенями свободы уровней $q = (1-p_3)/2 = 0,1$ и $p = (1+p_3)/2 = 0,9$; имеем

$$\chi_q{}^2(n) \approx 16,5, \chi_p{}^2(n) \approx 34,4.$$

Доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения имеют соответственно вид

$$(ns_0{}^2/\chi_p{}^2(n); ns_0{}^2/\chi_q{}^2(n)) \approx (1,03/34,4;\ 1,03/16,5) \approx (0,03; 0,06);$$

$$\left(s_0\sqrt{n/\chi_p{}^2(n)};\ s_0\sqrt{n/\chi_q{}^2(n)}\right) \approx (0,17; 0,25)$$

Для доверительной вероятности $p = 0.99$ найдем квантили распределения χ^2 с $n-1 = 24$ степенями свободы уровней $q = (1-p_4)/2 = 0,005$ и $p = (1+p_4)/2 = 0.995$; имеем $\chi_q{}^2(n-1) \approx 9.89$, $\chi_p{}^2(n-1) \approx 45,6$. Отсюда получаем доверительные интервалы, о которых идет речь в последнем пункте примера:

$$\left((n-1)s^2/\chi^2_p(n-1); (n-1)s^2/\chi^2_q(n-1)\right) \approx (1.02/45,6; 1,02/9,89) \approx (0,02;$$

$$\left(s\sqrt{(n-1)/\chi^2_p(n-1)}; s\sqrt{(n-1)/\chi^2_q(n-1)}\right) \approx (0,15; 0,32);$$

Задачи для самостоятельного решения

Имеется выборка, отвечающая нормально распределенной случайной величине X. Требуется построить: 1) доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности p_1, считая, что среднее квадратическое отклонение случайной величины X известно и равно указанному числу σ; 2) доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности p_2, считая, что среднее квадратическое отклонение неизвестно; 3) доверительные интервалы для дисперсии D_x и среднего квадратического отклонения σ, соответствующие доверительной вероятности p_3, считая, что математическое ожидание случайной величины X известно и равно указанному числу m; 4) доверительные интервалы для дисперсии D_x и среднего квадратического отклонения σ, соответствующие доверительной вероятности p_4, если математическое ожидание неизвестно.

3.1. $m = -12; \sigma = 0,15; p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = p_4 = 0,99;$

-11,9; -12; -12,2; -12,3; -12; -11,7; -12; -12;
-12,2; -12,2; -12,2; -11,9; -11,9; -11,8; -11,9; -12,3;
-12; -12; -11,9; -12,2; -11,9; -12,3; -11,9; -12,2;
-11,9; -12; -12,3.

3.2. $m = 14; \sigma = 0,16; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,98;$

14; 13,9; 13,8; 14,1; 14; 14,4; 14,1; 13,9 14,2;
13,9; 13,7; 13,9 14; 14; 14,3; 13,8; 24,2; 13,7;
13,9; 13,8; 13,9; 14,1; 14,3; 14,1; 14; 13,1.

3.3. $m = -20; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = p_4 = 0,99;$

-19,98; -20,04; -20,13; -19,95 -20,1; -19,97 -19,86;
-19,97; -20,04; -19,95; -20,05; -19,78; -20;
-20,03; -19,99;

3.4. $m = -24; \sigma = 0,13; p_1 = 0,98; p_2 = 0,8; p_3 = p_4 = 0,95;$

-23,98; -23,97; -24,06; -24,12; -23,73; -23,92; -24,1;
-24,04; -23,94; -24,04; -24,03; -23,8; -23,99; -24,12;
-23,98; -24,02; -24,06; -24,02; -23,91; -24,06; -23,99.

3.5. $m = -6; \sigma = 0,1; p_1 = 0,99; p_2 = 0,9; p_3 = p_4 = 0,95;$

-6,01; -5,74; -6,14; -6,13; -5,93; -6,05; -6,14; -5,96;
-5,91; -6,02; -5,9; -5,92; -5,84; -5,98; -6,14; -5,82;
-5,95; -5,98; -6,09; -5,9; -6,09; -6,14; -6,05; -6,03;
-6,06; -5,97.

3.6. $m = -8; \sigma = 0,12; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = p_4 = 0,99;$

-8,1; -8,12; -8,12; -8,13; -8,08; -7,92; -7,73; -8;
-8,06; -8,1; -7,8; -7,97; -8,07; -8,17; -7,89; -8,2;
-7,7; -8,2; -8,2; -7,84; -8,01; -8,03; -8,03; -8,05;
-8,03; -7,94; -7,94.

3.7. $m = 42; \sigma = 0,11; p_1 = 0,99; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9; p_4 = 0,95;$

42,22; 42,05; 41,96; 41,86; 41,92; 41,86; 41,91; 41,86;
41,94; 42,08; 41,95; 41,96; 41,92; 41,92; 41,74; 41,93;
42,02; 42,01; 42,28; 41,86; 42,12; 41,98; 42,11; 42,04.

3.8. $m = -10; \sigma = 0,1; p_1 = 0,99; p_2 = 0,95; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$

-10,11; -10,04; -10,14; -9,97; -9,95; -9,85; -10,1;
-10,09; -10,04; -9,93; -9,98; -10,1; -10,08; -10,08;
-10,08; -10,06; -9,95; -9,86; -10,04; -10,13; -9,87;
-9,97; -9,86; -9,94; -9,84; -10,18.

3.9. $m = 20,3; \sigma = 0,12; p_1 = 0,98; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$

20,38; 20,17; 20,4; 20,26; 20,17; 20,28; 20,47; 20,19;
20,17; 20,07; 20,34; 20,23; 20,4; 20,18; 20,34; 20,1;
20,24; 20,2; 20,18; 20,41; 20,35; 20,35; 20,19; 20,41;
20,43.

3.10. $m = 12,2; \sigma = 0,14; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,99; p_4 = 0,99;$

12,2; 12,1; 12,2; 12,3; 12,4; 12; 12,5; 12,2; 12,2;
12,3; 12,4; 12,4; 12; 12,2; 12,5; 11,9; 12,1; 12,4;
12; 12,4; 12,2; 12,4; 12,5; 12; 12,2; 11,9; 12,1;
12,1; 12,3; 12,3.

3.11. $m = 52; \sigma = 0,12; p_1 = 0,8; p_2 = 0,95; p_3 = 0,9; p_4 = 0,99;$

51,8; 52,19; 52,02; 1,86; 52,14; 52,1; 51,88; 51,94;
51,99; 52,02; 51,96; 52; 52; 52,06; 51,91; 52,09;
52,02; 51,98; 52,15; 52,11; 51,98; 52; 51,74; 52,06;
52,06; 52,17; 51,98.

3.12. $m = -10,2; \sigma = 0,1; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9; p_4 = 0,99;$

-10,29; -10,12; -10,26; -10; -10,27; -10,33; -10,25;
-10,3; -10,19; -10,15; -10,3; -10,17; -10,11; -10,25;
-10,21; -10,14; -10,12; -10,22; -10,15; -10,36; -10,03;
-10,06; -9,98; -10,35; -10,91; -10,11; -10,31; -10,36;
-10,03.

3.13. $m = 12,4; \sigma = 0,14; p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = 0,99; p_4 = 0,95;$

12,3; 12,3; 12,6; 12,6; 12,4; 12,5; 12,5; 12,6; 12,3;
12,4; 12,3; 12,4; 12,5; 12,5; 12,4; 12,5; 12,6; 12,3;
12,5; 12,6; 12,4; 12,4; 12,4; 12,7; 12,7; 12,2; 12,4;
12,4; 12,1.

3.14. $m = 32,1; \sigma = 0,12; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = 0,98; p_4 = 0,99;$

32,09; 32,04; 32,15; 32,01; 32.09; 32.28; 32,08; 32,28;
32,29; 32,18; 32.2; 32,09; 31,91; 32,19; 32,06; 32,04;
32,15; 32,25; 32,07; 32,09; 32,26; 32,13; 32; 32,18;
31,88; 32,29; 32,26; 31,98.

3.15. $m = -10,2; \sigma = 0,1; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,98; p_4 = 0,95;$

-10,17; -10,21; -10,26; -10.21; -10,23; -10.02; -10,18;
-10,26; -10,15; -10,28; -10,09; -10,1; -10.22; -10.08;
-10,29; -10,11; -10,28; -10,26; -10,19; -10.2; -10.21;
-10,22; -10,19; -10,06; -10,08.

3.16. $m = 28,2; \sigma = 0,13; p_1 = 0,99; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,98;$

28,19; 28,2; 28,32; 28.24; 28,11; 28,27; 28.29; 27,87;
28,21; 28.22; 28.22; 28,08; 28.11; 28,2; 28,26; 28.06;
28.05; 28.18; 28,01; 28.23; 28.37; 28,24; 27,95; 28.2;
28,06; 28,27; 28.23.

3.17. $m = 15,6; \sigma = 0,12; p_1 = 0,98; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,9;$

15.74; 15,66; 15,46; 15.56; 15,48; 15,46; 15.58; 15.52;
15.59; 15,44; 15.39; 15.7; 15,6; 15,55; 15.81; 15,65;
15.71; 15,32; 15,62; 15,54; 15.47; 15,63; 15,61; 15.82;
15,48; 15,79.

3.18. $m = 72; \sigma = 0,11; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = 0,98; p_4 = 0,8;$

72,05; 71,93; 71.91; 71,95; 72,2; 72,08; 71,96; 72,14;
72,01; 72,1; 71.99; 71,92; 72,01; 71,96; 72,28; 71,97;
71,95; 71,86; 72.06; 71,86; 72.03; 71,8; 71,94; 71,8;
71,03; 72,07; 71,97.

3.19. $m = 15,6; \sigma = 0,15; p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$

15,6; 15,6; 15,5; 15,8; 15,7; 15,7; 15,3; 15,5; 15,8;
15,7; 15.3; 15,6; 15,7; 15,7; 15.6; 15,7; 15,6; 15,3;
15,8; 15,8; 15,6; 15,7; 15,6; 15,8; 15,8; 15,5; 15,6;
15,8; 15.6; 15,7.

3.20. $m = -30; \sigma = 0,14; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9; p_4 = 0,99;$

-30,02; -30.04; -30,12; -29,92; -30,21; -30.15; -30,04;
-30,09; -29,99; -29,85; -29,93; -29,98; -29,99; -30,29;
-30,13; -30,15; -30,11; -29,95; -29,87; -30.05; -29,95;
-29,87; -30,05; -30,14; -30.17; -30,11; -29,74; -30,21.

3.21. $m = 42; \sigma = 0,1; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$

42,03; 41,93; 42,22; 41,86; 42,12; 41,92; 42,06; 41,92;
41,99; 41,98; 41,96; 42,01; 42,03; 41,95; 41,98; 42,01;
42,17; 41,83; 42,08; 41,93; 41,87; 41,96; 41,82; 42;
42,11; 42,04; 41.94; 42,18.

3.22. $m = 65,1; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,98; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$

65,21; 65,19; 64,94; 65,08; 65; 65,22; 65,33; 65,26;
65,03; 65; 65,07; 65,33; 65,11; 65,19; 65,13; 65,15;
65,13; 65,21; 65,14; 64,88; 65,1; 65,27; 65,03; 65,14;
65,02; 65.05; 64.94.

3.23. $m = -24; \sigma = 0,13; p_1 = 0.95; p_2 = 0,9; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$

-23,85; -23.86; -24,19; -24,18; -23,98; -23,95; -23,93;
-23,92; -23.9; -23,96; -24,13; -24,05; -23,92; -23,86;
-23,88; -24,01; -23,84; -23,94; -24,07; -24,06; -23,87;
-24,17; -23,93; -23,94; -24,22; -24,25.

3.24. $m = -44; \sigma = 0,12; p_1 = 0,8; p_2 = 0,95; p_3 = 0,9; p_4 = 0,98;$

-44; -43,9; -44; -44; -44; -44; -44,1; -44,3; -43.9;
-44,2; -43,8; -44,1; -43,9; -44; -43,9; -44,3; -44; -44,2;
-44,1; -44,1; -43,7; -44,3; -44; -43,9; -44; -43,9; -43,9.

3.25. $m = 18,2; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0.95; p_4 = 0,99;$

18.52; 18,2; 18,3; 18,21; 18,38; 18,03; 18,12; 18,19;
18.27; 18,29; 18.31; 18,21; 18.37; 18,21; 18,25; 18,25;
18.36; 18,36; 18.01; 18,36; 18,18; 18.12; 17,9; 18,45;
18.3; 18.36; 18,41; 18,27; 17.99.

3.26. $m = 15,3; \sigma = 0,13; p_1 = 0,8; p_2 = 0,95; p_3 = 0,9; p_4 = 0,98;$

15,2; 15,17; 15,43; 15,08; 15,15; 15,24; 15,26; 15,07;
15,29; 15,38; 15,1; 15,61; 15,29; 15,22; 15,19; 15,45;
15,48; 15,43; 15,35; 15,28; 15,3; 15,41; 15,34; 15,25;
15,18; 15,41; 15,43; 15,31.

3.27. $m = 16,4; \sigma = 0,14; p_1 = 0,95; p_2 = 0,9; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$

16.3; 16.5; 16.5; 16.3; 16; 16.6; 16.3; 16.3; 16.4;
16.6; 16.4; 16.3; 16.3; 16.6; 16.3; 16.6; 16.6; 16.6;
16.4; 16.2; 16.5; 16.2; 16.3; 16.4; 16.3; 16.3; 16.3.
16.5; 16.5.

3.28. $m = 25,2; \sigma = 0,1; p_1 = 0,98; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,8;$

25,27; 25,13; 25,33; 25,27; 25,23; 25,22; 25.2; 25,18;
25,2; 25,18; 25,31; 25,28; 25,14; 25.1; 25.19; 25,35;
25,24; 25,04; 25; 25,24; 25,11; 25,46; 25,19; 25,36;
25,21; 25,08.

3.29. $m = 41; \sigma = 0,15; p_1 = 0,99; p_2 = 0,95; p_3 = 0,99; p_4 = 0,8;$

41.2; 40.7; 41.1; 41.1; 41.3; 40.9; 40.8; 40.8; 40.7;
41; 40.9; 41.1; 40.9; 41; 41.2; 41; 41.1; 41.2;
41; 41; 41.4; 41.1; 40.8; 41; 41; 41.

3.30. $m = -50; \sigma = 0,15; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$

-50,2; -49,9; -50,1; -50,3; -49,8; -50; -49,8; -50,1;
-50,1; -49,9; -49,9; -50,1; -50,1; -49,9; -50; -50,2;
-50,3; -49,9; -49,8; -50; -50,1; -50,1; -50,1; -50,1.

4. Параметрические гипотезы

Статистической гипотезой называется любое утверждение о законе распределения случайной величины X (или нескольких случайных величин). Часто тип распределения случайной величины X известен, и по результатам опытов надо проверить лишь предположение о параметрах этого распределения. Соответствующие гипотезы называются параметрическими. Проверяемая гипотеза H_0 называется основной; наряду с ней выдвигается также конкурирующая гипотеза H_1, которая принимается в случае отклонения основной гипотезы. Статистическим критерием называется правило, в соответствие с которым принимается или отклоняется гипотеза H_0. Обычно статистический критерий включает в себя функцию $Z = Z(X_1, \ldots, X_n \mid H_0)$ выборочных значений $X_1, \ldots, X_n$, распределение которой известно при условии справедливости гипотезы H_0. При решении конкретной задачи область возможных значений случайной величины Z разбивают на две части: критическую область K, вероятность попадания в которую случайной величины Z равна некоторому заранее оговоренному малому числу α (называемому уровнем значимости), и область D принятия гипотезы H_0, которая является дополнением области K до области возможных значений случайной величины Z. Если $Z \in K$, то гипотезу H_0 отклоняют и принимают конкурирующую гипотезу H_1; если $Z \in D$, то принимают гипотезу H_0.

Пусть выборка $X_1, \ldots, X_n$ получена в результате наблюдений над случайной величиной X, распределенной нормально с параметрами μ и σ. Правила принятия гипотезы H_0 относительно величины математического ожидания μ (на уровне значимости α) приведены в таблице.

Проверяемая гипотеза H_0	Предположение относительно σ	Функция Z	Распределение Z при условии H_0	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1: \mu \neq \mu_0$	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1: \mu > \mu_0$
$\mu = \mu_0$	σ известно	$\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$	$N(0,1)$	$\lvert Z\rvert < u_{1-\alpha/2}$	$z < u_{1-\alpha}$
	σ неизвестно	$\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$	$T(n-1)$	$\lvert Z\rvert < t_{1-\alpha/2}(n-1)$	$Z < t_{1-\alpha}(n-1)$

В этой и в последующих таблицах через $N(0,1)$ и $T(n-1)$ обозначены соответственно нормальное распределение с параметрами 0,1 и распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы; u_p и $t_p(n-1)$ – квантили уровня p этих распределений;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad (1)$$

Пример 1. По результатам наблюдений над случайной величиной X, распределенной нормально с параметрами μ и $\sigma = 0,3$, получена следующая выборка:
12,41; 12,2; 12,07; 12,48; 11,57; 12,5; 12,53; 11,91; 12,24; 12,45; 12,21; 12,26; 12,09; 11,96; 11,99; 12,89; 12,78; 12,38; 12,31; 12,3; 12,46; 12,28.

Пусть $\mu_0 = 12,1$; требуется на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : \mu > \mu_0$.

Решение. Найдем сначала $\bar{X}$ по формуле $\bar{X} = \frac{1}{\Delta n}\sum_{i=1}^{n}\Delta(X_i - C) + C$, где $\Delta = 100$, $n = 22$, $C = 12,1$; вычисления будем проводить с помощью следующей таблицы.

I	X_i	$\Delta(X_i - C)$	I	X_i	$\Delta(X_i - C)$	I	X_i	$\Delta(X_i - C)$
1	12,41	31	9	12,24	14	17	12,78	68
2	12,2	10	10	12,45	35	18	12,38	28
3	12,07	-3	11	12,21	11	19	12,31	21
4	12,48	38	12	12,26	16	20	12,3	20
5	11,57	-53	13	12,09	-1	21	12,46	36
6	12,5	40	14	11,96	-14	22	12,28	18
7	12,53	43	15	11,99	-11			
8	11,91	-19	16	12,89	79	Σ	–	407

Отсюда

$$\bar{X} = 407/2200 + 12,1 = 12,285, (\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma = 0,085 \cdot \sqrt{22}/0,3 \approx 2,89.$$

Далее находим по табл. II приложения квантиль нормального распределения уровня $1 - \alpha = 0,95 : u_{1-\alpha} \approx 1,645$. Так как в рассматриваемом случае $Z = (X - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma \approx 2,89 > 1,645 \approx u_{1-\alpha}$, то гипотеза H_0 отклоняется и принимается конкурирующая гипотеза $H_1 : \mu > \mu_0$.

Рассмотрим теперь правила принятия гипотезы о дисперсии нормально распределенной случайной величины X.

Проверяемая гипотеза H_0	Предположение относительно μ	Функция Z	Распределение Z при условии H_0	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1 : \sigma > \sigma_0$
$\sigma = \sigma_0$	$\mu = \mu_0$ известно	ns_0^2/σ_0^2	$\chi^2(n)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n) < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$	$Z < \chi^2_{1-\alpha}(n)$
	μ неизв.	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$Z < \chi^2_{1-\alpha}(n-1$

В этой таблице $\chi^2(k)$ – распределение χ^2 с k степенями свободы; $\chi^2_p(k)$ — квантиль уровня p такого распределения,

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2,$$

s^2 определяется равенством (1).

Пример 2. По результатам наблюдений над случайной величиной X, распределенной нормально с параметрами μ и σ, получена следующая выборка:

15,8; 15; 15,6; 16,3; 15; 15,9; 15,4; 14,6; 14,4; 16,6; 15,1; 16,1; 15,2; 15,1; 14,7; 16,1; 15; 15,1; 15,3; 15,2; 16,3; 15,4; 15,5; 14,6.

Пусть $\sigma_0 = 0,4, \alpha = 0,01$. Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma = \sigma_0$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$.

Решение. Вычислим $(n-1)s^2$, используя формулы из примера, разобранного в разделе 3:

$$n(\bar{X} - C) = (1/\Delta) \cdot \sum_{i=1}^{n}\Delta(X_i - C);$$

$$(n-1)s^2 = (1/\Delta^2) \cdot \sum_{i=1}^{n}(\Delta(X_i - C))^2 - (1/n)(n(\bar{X} - C))^2.$$

Положим $\Delta = 10, C = 15,4$; вычисления оформим в виде таблицы.

i	X_i	$\Delta(X_i-C)$	$(\Delta(X_i-C))^2$
1	15,8	4	16
2	15	-4	16
3	15,6	2	4
4	16,3	9	81
5	15	-4	16
6	15,9	5	25
7	15,4	0	0
8	14,6	-8	64
9	14,4	-10	100
10	16,6	12	144
11	15,1	-3	9
12	16,1	7	49
13	15,2	-2	4
14	15,1	-3	9
15	14,7	-7	49
16	16,1	7	49
17	15	-4	16
18	15,1	-3	9
19	15,3	-1	1
20	15,2	-2	4
21	16,3	9	81
22	15,4	0	0
23	15,5	1	1
24	14,6	-8	64
Σ	-	-3	811

Отсюда

$$n(\bar{X} - C) = -0,3; (n-1)s^2 = 8,11 - (-0,3)^2/24 \approx 8,11;$$

$$Z = (n-1)s^2/\sigma_0^2 \approx 8,11/0,16 \approx 50,69.$$

По табл. III, IV приложения квантилей распределения χ^2 с $n-1 = 23$ степенями свободы находим квантили

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.005}(23) \approx 9,26 \text{ и } \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.995}(23) \approx 44,2.$$

Так как

$$Z = (n-1)s^2/\sigma_0^2 \approx 50,9 > 44,2 \approx \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),$$

то основная гипотеза $H_0 : \sigma = \sigma_0$ отклоняется и принимается конкурирующая гипотеза $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$.

Пусть имеются две выборки $X_1, ..., X_n$ и $Y_1, ..., Y_m$, отвечающие нормально распределенным случайным величинам X и Y, и пусть требуется проверить гипотезу $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — математические ожидания соответственно случайных величин X и Y. Правила принятия относящихся к такой гипотезе решений содержатся в следующей таблице.

Проверяемая гипотеза H_0	Предположение относительно σ_1 и σ_2	Функция Z	Распределение Z при условии H_0	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\mu_1 = \mu_2$	σ_1 и σ_2 известны	$(\bar{X} - \bar{Y})/ /\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}$	$N(0,1)$	$\|Z\| < u_{1-\alpha/2}$	$Z < u_{1-\alpha}$
	σ_1 и σ_2 неизв., но изв., что они равны	$(\bar{X} - \bar{Y})/(S \cdot \sqrt{1/n + 1/m})$; $S = ((n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2)/ /(n+m-2)$	$T(n+m-2)$	$\|Z\| < t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$	$Z < t_{1-\alpha}(n+m-2)$

В этой таблице σ_1 и σ_2 — средние квадратические отклонения соответственно случайных величин X и Y;

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2; s_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y});$$

$\bar{X}$ и $\bar{Y}$ определяются, как обычно.

Пример 3. Имеются две выборки:
41,3; 41,8; 42,4; 41,9; 42,3; 42,3; 42,5; 41,9; 41,8; 42,3; 41,9; 41,9; 41,8; 42;

40,4; 39; 39,7; 39,9; 40,1; 39,7; 39,3; 40; 39,4; 39,6; 39,6; 39,9; 39,9; 39,9; 40,5; 40,
отвечающие нормально распределенным случайным величинам X и Y с параметрами соответственно (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2). Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ в предположении, что σ_1 и σ_2 неизвестны, но известно, что они равны.

Решение. Найдем $\bar{X}$, $(n-1)s_1$, Y, $(m-1)s_2$ с помощью следующих таблиц, в которых $C_1 = 42, C_2 = 40, \Delta = 10$.

i	X_i	$\Delta(X_i-C_1)$	$(\Delta(X_i-C_1))^2$
1	41,3	-7	49
2	41,8	-2	4
3	42,4	4	16
4	41,9	-1	1
5	42,3	3	9
6	42,3	3	9
7	42,5	5	25
8	41,9	-1	1
9	41,8	-2	4
10	42,3	3	9
11	41,9	-1	1
12	41,9	-1	1
13	41,8	-2	4
14	42	0	0
Σ	–	1	133

i	X_i	$\Delta(X_i-C_2)$	$(\Delta(X_i-C_2))^2$
1	40.4	4	16
2	39	10	100
3	39,7	-3	9
4	39,9	-1	1
5	40,1	1	1
6	39.7	-3	9
7	39,3	-7	49
8	40	0	0
9	39,4	-6	36
10	39,6	-4	16
11	39.6	-4	16
12	39,9	-1	1
13	39,9	-1	1
14	39,9	-1	1
15	40,5	5	25
16	40	0	0
Σ	–	-11	281

Таким образом,

$$\bar{X} = (1/\Delta n)\sum_{i=1}^{n}(\Delta(X_i - C_1)) + C_1 = 1/140 + 42 \approx 42,007;$$

$$Y = (1/\Delta n)\sum_{j=1}^{m}(\Delta(Y_j - C_2)) + C_2 = -11/160 + 40 \approx 40,07;$$

$$(n-1)s_1^2 = (1/\Delta^2)\sum_{i=1}^{n}(\Delta(X_i - C_1))^2 - n(\bar{X} - C_1)^2 = 1,33 - 14/140^2 \approx 1,33;$$

$$(m-1)s_2^2 = (1/\Delta^2)\sum_{j=1}^{m}(\Delta(Y_j - C_2))^2 - m(\bar{Y} - C_2)^2 = 2,81 - 16\cdot(11/160)^2 \approx 2,735.$$

Теперь можно найти значение функции Z :

$$S = ((n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2)/(n+m-2) \approx 0,145;$$

$$Z = (\bar{X} - \bar{Y})/(S\sqrt{1/n + 1/m}) \approx 36,50.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента, приведенной в табл. V приложения, с $n+m-2 = 28$ степенями свободы находим $t_{1-\alpha}(n+m-2) =$

$t_{0,99}(28) \approx 2,467$. Так как $Z \approx 36,50 > 2,467 \approx t_{0,99}(28)$, то гипотеза H_0 отклоняется и принимается конкурирующая гипотеза $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ применяют правила, приведенные в следующей таблице.

Проверяемая гипотеза H_0	Предположение относительно μ_1 и μ_2	Функция Z	Распределение Z при условии H_0	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$	Область принятия H_0 при конкурирующ. гипотезе $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$
$\sigma_1 = \sigma_2$	μ_1 и μ_2 известны	s_{01}^2/s_{02}^2 $s_{01}^2 > s_{02}^2$	$F(n,m)$	$Z < F_{1-\alpha/2}(n,m)$	$Z < F_{1-\alpha}(n,m)$
	μ_1 и μ_2 неизв.	s_1^2/s_2^2 $s_1^2 > s_2^2$	$F(n-1, m-1)$	$Z < F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)$	$Z < F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$

В этой таблице

$$s_{01}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2;\ s_{02}^2 = (1/n)\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \mu_2)^2;$$

s_1 и s_2 определяются, как в предыдущей таблице; $F(k_1,k_2)$ — распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы; $F_p(k_1,k_2)$ — квантиль такого распределения уровня p.

Пример 4. Имеются две выборки
18,2; 18,2; 18,3; 18,2; 18,1; 18,1; 18,1; 17,9; 18,3; 18,2; 18,6; 18,1; 18,5; 18,2; 18,4; 18,3; 18,2; 18,2; 18,3; 18,3; 18,6; 18,6; 18,2; 18,5,

15,9; 15,8; 16,4; 15,8; 16; 16,2; 16,4; 16,4; 16,5; 16; 16,1; 16; 16,2; 15,9; 15,9; 16,2; 16,1; 15,8; 15,8; 15,8.

отвечающие нормально распределенным случайным величинам X и Y, математические ожидания которых известны и равны соответственно $\mu_1 = 18,2, \mu_2 = 16$. Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,02$ осуществить выбор из двух гипотез $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ и $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.

Решение. Вычисление s_{01}^2 и s_{02}^2 оформим в виде таблиц (в которых $\Delta = 10$).

I	X_i	$\Delta(X_i-\mu_1)$	$(\Delta(X_i-\mu_1))^2$
1	18,2	0	0
2	18,2	0	0
3	18,3	1	1
4	18,2	0	0
5	18,1	-1	1
6	18,1	-1	1
7	18,1	-1	1
8	17,9	-3	9
9	18,3	1	1
10	18,2	0	0
11	18,6	4	16
12	18,1	-1	1
13	18,5	3	9
14	18,2	0	0
15	18,4	2	4
16	18,3	1	1
17	18,2	0	0
18	18,2	0	0
19	18,3	1	1
20	18,3	1	1
21	18,6	4	16
22	18,6	4	16
23	18,2	0	0
24	18,5	3	9
Σ	–	–	88

I	Y_i	$\Delta(Y_i-\mu_2)$	$(\Delta(Y_i-\mu_2))^2$
1	15,9	-1	1
2	15,8	-2	4
3	16,4	4	16
4	15,8	-2	4
5	16	0	0
6	16,2	2	4
7	16,4	4	16
8	16,4	4	16
9	16,5	5	25
10	16	0	0
11	16,1	1	1
12	16	0	0
13	16,2	2	4
14	15,9	-1	1
15	15,9	-1	1
16	16,2	2	4
17	16,1	1	1
18	15,8	-2	4
19	15,8	-2	4
20	15,8	-2	4
Σ	–	–	110

Таким образом,

$$s_{01}/s_{02} = (88 \cdot 20 \cdot \Delta^2)/(24 \cdot 110 \cdot \Delta^2) = 2/3 < 1;$$

поэтому выборки, отвечающие X и Y, следует поменять местами, т.е. считать, что $Z = s_{02}^2/s_{01}^2 = 3/2 = 1,5$, и Z имеет распределение Фишера $F(m,n)$. По табл. VI приложения $F_{0,99}(20,24) \approx 2,74$. Так как $Z \approx 1,5 < 2,74$, то гипотеза H_0 принимается: предположение о равенстве дисперсий не противоречит опытным данным.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.1 – 4.16 дана выборка, отвечающая нормально распределенной случайной величине X с параметрами μ и σ. В задачах 4.17 – 4.30 даны две выборки, отвечающие нормально распределенным случайным величинам X и Y с параметрами соответственно μ_1, σ_1 и μ_2, σ_2. Требуется на уровне значимости α проверить гипотезу H_0 при конкурирующей гипотезе H_1.

4.1. 17,7; 18,2; 18,1; 18,1; 18,2; 18,2; 18,1; 18; 18,6; 18; 18,4; 18,2; 18; 18,2; 18,1; 17,6; 17,8; 17,9; 17,9; 18,2; 18,3; 18,3; 18,2; 18,6; 17,8; 18,23; 18; 18,2; 18,1;

$\alpha = 0,01; H_0 : \mu = \mu_0 = 18,1; H_1 : \mu \neq \mu_0$, среднее квадратическое отклонение случайной величины X известно: $\sigma = 0,2$.

4.2. 46,1; 46,5; 46,7; 46,4; 46,1; 46,1; 46,1; 46,9; 46; 46; 46,4; 46,1; 46,4; 45,7; 46,6; 45,1; 46,6; 45,9; 45,9; 46,5; 46,3; 45,8; 46,4; 46,4; 46,7; 46; 46,1;

$\alpha = 0,05; H_0 : \mu = \mu_0 = 46; H_1 : \mu > \mu_0$; среднее квадратическое отклонение случайной величины X известно: $\sigma = 0,4$.

4.3. 15,2; 15,2; 15; 15,2; 15,1; 15,2; 15,3; 14,9; 15,4; 15,2; 14,6; 14,6; 14,3; 14,6; 14,5; 14,4; 14,4; 14,8; 14,9; 14,4; 14,7; 1 4,3; 14,8; 14,5; 14,4; 14,4; 14,5; 14,1; 14,3; 14,5;

$\alpha = 0,01; H_0 : \mu = \mu_0 = 15,2; H_1 : \mu \neq \mu_0$; среднее квадратическое отклонение случайной величины X неизвестно.

4.4. 14,6; 14,8; 14,5; 14,4; 14,4; 14,5; 14,8; 14,5; 14,4; 14,4; 14,6; 14,6; 14,3; 14,6; 14,5; 14,4; 14,4; 14,8; 14,9; 14,4; 14,7; 14,3; 14,8; 14,5; 14,4; 14,4; 14,5; 14,1; 14,3; 14,5;

$\alpha = 0,05; H_0 : \mu = \mu_0 = 14,5; H_1 : \mu > \mu_0$; среднее квадратическое отклонение случайной величины X неизвестно.

4.5. 15,8; 15,6; 15,1; 15,1; 15,6; 14,6; 15,4; 15,1; 15,3; 15,5; 14,6; 15,5; 15,4; 15,5; 15,5; 14,6; 15,9; 15,3; 14,8; 14,8; 14,8; 15,1; 14,8; 15,7; 15,6; 14,8;
$\alpha = 0,05; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,5; H_1 : \sigma \neq \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X известно: $\mu = 15,2$.

4.6. 22,5; 22,8; 22,6; 22; 22; 22,6; 22,8; 22,3; 22,2; 22,9; 22,2; 22,4; 22,2; 22,5; 22,1; 22,5; 22,1; 22,3; 22,7; 22,9; 22,2; 22,5; 22,8; 22,2; 22,4; 21,9; 22,4;
$\alpha = 0,01; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,32; H_1 : \sigma > \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X известно: $\mu = 22,3$.

4.7. 25,2; 25,1; 25,4; 25,3; 25,1; 25; 25,2; 25,3; 25,4; 25; 25; 25,3; 25,2; 25,2; 25,3; 25,1; 25,5; 25,3; 25,3; 25,2; 25,3; 25; 25; 25; 25,1; 25,4; 25,3;
$\alpha = 0,05; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,15; H_1 : \sigma \neq \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X неизвестно.

4.8. 42,5; 42,7; 42,5; 42,2; 42,1; 41,9; 42,3; 42,4; 42,1; 42,1; 42,5; 41,7; 42,3; 42,2; 42,3; 42,2; 42,2; 42,2; 42,2; 42,2; 42; 42; 42,1; 42,1; 42,2; 42,1; 42,1; 42,3;
$\alpha = 0,01; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,25; H_1 : \sigma > \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X неизвестно.

4.9. 27,7; 28,2; 27,9; 27,7; 27,9; 28,1; 28; 27,7; 28,1; 27,9; 28,2; 27,9; 28,2; 28; 27,6; 28; 27,9; 28; 28; 27,8; 28; 27,9; 28,7; 27,6; 28,3; 27,7; 28,3; 27,6;
$\alpha = 0,01; H_0 : \mu = \mu_0 = 28,1; H_1 : \mu \neq \mu_0$, среднее квадратическое отклонение случайной величины X известно: $\sigma = 0,25$.

4.10. 26,6, 26,4; 26,5; 26,3; 26,5; 26,8; 26,4; 26,5; 26,5; 26,5; 26,5; 26,3; 26,4; 26,5; 26,5; 26,7; 26,5; 26,4; 26,2; 26,3; 25,9; 26,5; 26,5; 26,3; 26,8; 26,8; 26,5;
$\alpha = 0,05; H_0 : \mu = \mu_0 = 26; H_1 : \mu > \mu_0$, среднее квадратическое отклонение случайной величины X известно: $\sigma = 0,18$.

4.11. 25,8; 25,5; 25,8; 25,5; 25,6; 25,4; 25,5; 25,2; 25,9; 25,2; 24,8; 24,9; 25,6; 25,8; 25,6; 25,5; 25,7; 25,6; 25,9; 25; 25,4; 25,1; 25,8; 25,9; 25,5; 25,4;
$\alpha = 0,01; H_0 : \mu = \mu_0 = 25,4; H_1 : \mu \neq \mu_0$, среднее квадратическое отклонение случайной величины X неизвестно.

4.12. 24,2; 24,4; 24,6; 24; 23,8; 24,5; 24,2; 23,9; 23,8; 23,9; 24,3; 24,4; 24,1; 24,6; 24,4; 24,2; 24,1; 24; 24,3; 24,1; 24,2; 24,1; 24; 24,2; 24,3; 24; 24,1; 24,6;
$\alpha = 0,05; H_0 : \mu = \mu_0 = 24,2; H_1 : \mu > \mu_0$, среднее квадратическое отклонение случайной величины X неизвестно.

4.13. 25,9; 25,9; 25,9; 25,8; 26,2; 25,8; 26; 26,3; 25,5; 26,2; 26,3; 25,9; 26,1; 26,4; 26,1; 26,5; 26,9; 26; 26; 25,8; 25,5; 26,5; 25,9; 25,9; 25,5;
$\alpha = 0,01; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,3; H_1 : \sigma \neq \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X известно: $\mu = 26$.

4.14. 39,4; 39,6; 39,6; 39,2; 39,4; 39,3; 39,1; 39,6; 39,5; 39,6; 39,4; 39,6; 39,4; 39,4; 39,5; 39,5; 39,4; 39,6; 39,5; 39,4; 39,1; 39,1; 39,7; 39,3; 39,1; 39;
$\alpha = 0,05; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,15; H_1 : \sigma > \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X известно: $\mu = 39,4$.

4.15. 44,8; 44,7; 45,3; 45,6; 45,3; 45,4; 44,9; 45,1; 44,5; 45,2; 44,7; 45,6; 44,8; 44,9; 44,6; 45,4; 45; 44,6; 44,7; 45,6; 45,3; 44,8; 45,2; 44,9; 45,6; 45,7; 45,3;
$\alpha = 0,01; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,32; H_1 : \sigma \neq \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X неизвестно.

4.16. 27,4; 28; 27,2; 28; 27,2; 27,1; 27,2; 27,6; 27,4; 27; 27,2; 26,7; 27,1; 28,1; 26,8; 27,1; 27,7; 27; 28; 27,2; 27,3; 27; 27,3; 27,9;
$\alpha = 0,05; H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0,4; H_1 : \sigma > \sigma_0$; математическое ожидание случайной величины X неизвестно.

4.17. 16,5; 16,9; 16,6; 16,5; 16,7; 16,4; 17; 16,9; 16,2; 16,6; 16,8; 16,7; 16,6; 16,2; 16,9;
15,8; 16,5; 16,8; 16,3; 16,1; 17,6; 15,9; 16,9; 16,6; 16,6; 16,5; 16; 15,5; 17; 17,4; 16,6;
$\alpha = 0,05; H_0 : \mu_1 = \mu_2; H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y известны: $\sigma_1 = 0,3, \sigma_2 = 0,5$.

4.18. 14,8; 15; 15,2; 15,1; 15,1; 15; 15,1; 15,3; 15,3; 15,2; 15,4; 15,2; 15,2; 15; 15; 14,9; 15; 15,1; 15; 14,9;
14,2; 14,3; 14,1; 14,8; 14,9; 14,2; 14,5; 14,4; 14,5; 14,6; 14,7; 15,1; 14,4; 14,8; 14,7; 14,2; 14,4; 14,3;
$\alpha = 0,05; H_0 : \mu_1 = \mu_2; H_1 : \mu_1 > \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y известны: $\sigma_1 = 0,2, \sigma_2 = 0,3$.

4.19. 17,6; 18,8; 18,3; 18,1; 18,6; 18,4; 18,3; 17,8; 17,7; 18,5; 18,5; 18,3; 17,9; 18,2; 17,6; 18,1;
18,1; 17,9; 18,9; 18,1; 18,5; 18.5; 18.2; 18,5; 18; 18,6; 18,5; 18,1; 18,8; 17,6; 18,1; 17,4;

$\alpha = 0,01$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y неизвестны, но известно, что они равны.

4.20. 24,2; 24,1; 23,9; 24; 24,5; 24,5; 24; 24,2; 24,3; 23,9; 24; 24,2; 23,8; 23,6; 23,9; 23,9;
15,5; 15,8; 15,9; 16,2; 16,6; 15,6; 16,6; 15,9; 16,4; 16,2; 15,5; 16; 16,3; 15,9; 16,2; 16,1;

$\alpha = 0,05$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y неизвестны, но известно, что они равны.

4.21. 15,8; 16,2; 16; 16,1; 16,4; 16; 16,6; 16,3; 16; 16.2; 16,4; 16,4; 16,5; 16; 16,2;
14,4; 14,4; 14,7; 14,1; 14,7; 14,1; 14,4; 14.5; 14,2; 14; 14,3; 14,4; 14,2; 14,3; 14,4; 14,2; 14,4; 14.8; 14,4; 14,7;

$\alpha = 0,2$; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y известны: $\mu_1 = 16.2, \mu_2 = 14.4$.

4.22. 26,3; 26,5; 27,6; 25,8; 26,2; 26.2; 26,7; 26,1; 28,7; 24,4; 25.4; 27,9; 25,5; 25,6; 24,8; 27,8; 26,4; 26,4; 25,5; 27,6;
30,7; 30; 30,4; 29,7; 29,4; 30; 30.2; 29,8; 30,3; 30.2; 30; 29,6; 30,2; 31; 30,2; 30,8; 30; 30,8; 29,9; 29.7;

α =0,05; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y известны: $\mu_1 = 26.6, \mu_2 = 30$.

4.23. 15,1; 15,3; 14,8; 15,1; 15,3; 15; 15; 15,1; 14,7; 14,8; 15,1; 15.3; 14,7; 15; 15; 15,2;
16,2; 16,2; 16.1; 16; 16; 16.3; 16; 15,6; 16,1; 15,9; 15,8; 16,6; 16,1; 16,3; 15,9; 16; 16; 16,1; 16,2; 15,9; 16,1;

$\alpha = 0,1$; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y неизвестны.

4.24. 15,1; 15,1; 15; 14,9; 14,8; 15,1; 15,1; 15,1; 15; 14,9; 14,9; 15; 15,1; 15,1; 15,1; 14,9; 14,8; 15; 15; 15,1; 15;
16; 16; 16,1; 15,9; 16; 16,1; 16,1; 15,9; 16,1; 15,9; 16; 15,7; 16; 16,1; 16; 15,9; 16; 16; 16; 16; 16;

$\alpha = 0,1$; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y неизвестны.

4.25. 15,8; 16; 15,6; 15,9; 16; 16; 16; 16,1; 16; 15,7; 16,1; 16,4; 16,2; 16,2; 16,2;
17,9; 17,8; 17,8; 18,2; 18; 18,1; 17,9; 18,3; 18; 18,3; 18; 18; 18,3; 18,2; 18,3; 18; 17,8; 17,4; 17,9; 17.9;

$\alpha = 0,05$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y известны: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,22$.

4.26. 23,5; 23,5; 23.9; 23,8; 23,4; 24,2; 23.8; 24,3; 24,3; 23,4; 24,1; 23,5; 23,9; 23,9; 24,4; 23.5; 23,1; 24.3; 23,6; 23,7;
23; 23; 22.8; 23; 23,1; 23; 23; 23; 23; 22,8; 23; 23; 23,1; 23; 23,1; 22,9; 23; 23; 22,8; 23,1; 22,9;

$\alpha = 0,05$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y известны: $\sigma_1 = 0,4, \sigma_2 = 0,1$.

4.27. 15,1; 15; 15.5; 15,3; 15,1; 15,2; 15,2; 15; 15,2; 15,1; 15,4; 15; 15; 15,4; 15,2; 15,5;
15,6; 15; 15.3; 15,4; 15.4; 15,3; 15; 15,2; 15,1; 14,9; 14,9; 15,2; 15; 15,6; 15,4; 15.4; 15.1; 14,9; 15,1; 15,3; 15,2; 15;

$\alpha = 0,01$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y известны: $\sigma_1 = 0,2, \sigma_2 = 0,31$.

4.28. 13,4; 14,6; 14.1; 14,5; 14; 12,9; 14,2; 14,2; 13,7; 14,3; 14,2; 13,2; 14,1; 13,9; 14,3; 14,7; 13,9; 14.4; 13,6; 14,3; 14;
13,3; 14,4; 14,2; 14,3; 13,6; 13,8; 13.7; 14,6; 13,8; 13,8; 14,5; 14,4; 14,5; 13,4; 14,5; 14,5; 13,6; 14,6; 14,3; 13,6; 15,1; 14; 13,9;

$\alpha = 0,05$; $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, средние квадратические отклонения случайных величин X и Y неизвестны, но известно, что они равны.

4.29. 32,2; 32; 32,4; 31,9; 31.2; 32,1; 32,2; 31,6; 31,4; 31,5; 32; 31,9; 31,6; 31,6; 33;
28,9; 28,5; 28,8; 28,6; 28,8; 29,1; 28.8; 29,4; 28,8; 28,9; 28,9; 27,9; 29,4; 29,2; 28,9; 28,4; 29; 29.7; 29,1; 28,9;

$\alpha = 0,2$; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y известны: $\mu_1 = 32, \mu_2 = 29$.

4.30. 17,7; 18,3; 17,8; 18; 17.8; 18,2; 17,8; 18; 18,5; 17,7; 17,8; 18,4; 18,4; 18,1; 17,9; 18.2; 18; 18; 18,1; 18,3;
19,4; 19,3; 19; 19,2; 19,2; 19,6; 19,3; 19; 18,7; 19; 18,9; 18,3; 18,9; 19,3; 18,9; 19,4; 18,6; 18,7; 18.3; 19,3;

α =0,05; $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$; математические ожидания случайных величин X и Y известны: $\mu_1 = 18, \mu_2 = 19$.

5. Критерий χ^2 Пирсона

Пусть результаты n наблюдений над случайной величиной X оформлены в виде группированного статистического ряда

Интервал	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{k-1}, a_k)
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Требуется проверить, согласуются ли результаты эксперимента с гипотезой H о том, что случайная величина X имеет данный закон распределения (который обычно называют теоретическим). Зная теоретический закон распределения, можно найти вероятности $p_1, \dots, p_n$ попадания случайной величины X на интервалы $(a_{i-1}, a_i), i = 1, \dots, k$. Далее, рассмотрим величину

$$U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i};$$

при достаточно больших n эта величина имеет распределение, близкое к распределению χ^2 с $r = k - l - 1$ степенями свободы, где l равно числу параметров теоретического закона распределения, определяемых на основании статистических данных. Задав малое число α, называемое, как обычно, уровнем значимости, по таблице находим критическое значение $\chi^2_{1-\alpha(r)}$– квантиль уровня $1-\alpha$ распределения χ^2 с r степенями свободы. Если $U > \chi^2_{1-\alpha}(r)$, то гипотезу H отклоняют, в противном случае принимают. Изложенное правило принятия (или отклонения) гипотезы о виде закона распределения случайной величины называется критерием χ^2 Пирсона. Квантили χ^2 распределения приведены в табл. III, IV приложения.

Пример 1. Имеется группированный статистический ряд, полученный по результатам наблюдений над случайной величиной X :

Интервал	94,2 – 95,2	95,2 – 96,2	96,2 – 97,2	97,2 – 98,2	98,2 – 99,2	99,2 – 100,2	100,2 – 101,2	101,2 – 102,2	102,2 – 103,2
Частота	3	24	106	167	133	55	9	2	1

Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу, состоящую в том, что случайная величина X распределена по нормальному закону.

Решение. При применении критерия χ^2 рекомендуется сначала объединить, если необходимо, некоторые соседние интервалы с таким расчетом, чтобы частота, отвечающая каждому интервалу, была не меньше пяти. Объединим два первых интервала и три последних: получим следующий статистический ряд:

Интервал	94,2–96,2	96,2–97,2	97,2–98,2	98,2–99,2	99,2–100,2	100,2–103,2
Частота	27	106	167	133	55	12

В качестве параметров μ и σ закона распределения случайной величины X возьмем соответствующие оценки (таким образом, мы определяем два параметра на основании статистических данных, поэтому $l = 2$) :

$$\mu = \bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^{k} n_i(z_i - C) + C;$$

$$\sigma^2 = (1/n) \sum_{i=1}^{k} n_i(z_i - C)^2 - (\bar{X} - C)^2,$$

где n_i — частота, соответствующая i-му интервалу, z_i — середина этого интервала, $C = 98,7$ (ложный нуль), $k = 6, n = n_1 + \dots + n_6 = 500$. Вычисления оформим в виде таблицы:

z_i	n_i	$z_i - C$	$(z_i - C)n_i$	$(z_i - C)^2$	$(z_i - C)^2 n_i$
95,2	27	-3,5	-94,5	12,25	330,75
96,7	106	-2	-212	4	424
97,7	167	- 1	-167	1	167
98,7	133	0	0	0	0
99,7	55	1	55	1	55
101,7	12	3	36	9	108
Σ	–	–	-382,5	–	1084,75

Отсюда

$$\mu = -382,5/500 + 98,7 = 97,935;$$

$$\sigma = \sqrt{1084,75/500 - (97,935 - 98,7)^2} \approx 1,2587.$$

Вычислим теперь вероятности p_i по формуле

$$p_i = \Phi\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \mu}{\sigma}\right),$$

где a_{i-1}, a_i – концы i – го интервала, а $\Phi(x)$ – нормальная функция распределения, значения которой приведены в табл. I приложения.

i	n_i	a_i	$(a_i-\mu)/\sigma$	$\Phi((a_i-\mu)/\sigma)$	p_i	$(n_i-np_i)^2/(np_i)$
0	–	94,2	-2,97	0.0015	–	–
1	27	96,2	-1,38	0,0838	0,0823	4,87
2	106	97,2	-0,58	0,281	0,1972	0,56
3	167	98,2	0,21	0,5832	0,3022	1,67
4	133	99,2	1,01	0,8438	0,2606	0,06
5	55	100,2	1,8	0,9641	0,1203	0,44
6	12	103,2	4,18	1	0,0359	1,97
Σ	–	–	–	–	–	9,57

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем $U = 9,57$. Далее, $r = k - l - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$; $\alpha = 0,05$; $\chi^2_{1-\alpha}(r) = \chi^2_{0,95}(3) \approx 7,81$; так как $U > \chi^2_{1-\alpha}(r)$, то гипотеза о нормальном распределении случайной величины X отклоняется.

Пример 2. По результатам наблюдений над случайной величиной X получен следующий группированный статистический ряд:

Интервал	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27
Частота	17	59	45	40	52	54	53	59	54	44	23

Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о равномерном распределении случайной величины X.

Решение. В качестве параметров a и b закона распределения случайной величины X возьмем соответствующие оценки, найденные по схеме, указанной в разд. 2. Сначала вычислим выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{k}(z_i - C)n_i + C;$$

$$\tilde{s}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_i(z_i - C)^2 - (\bar{X} - C)^2,$$

(обозначения те же, что и в предыдущем примере), в качестве C возьмем $C = 21,5$. Вычисления оформим в виде таблицы.

z_i	n_i	$z_i - C$	$(z_i - C)n_i$	$(z_i - C)^2$	$(z_i - C)^2 n_i$
16,5	17	-5	-85	25	425
17,5	59	-4	-236	16	944
18,5	45	-3	-135	9	405
19,5	40	-2	-80	4	160
20,5	52	-1	-52	1	52
21,5	54	0	0	0	0
22,5	53	1	53	1	53
23,5	59	2	118	4	236
24,5	54	3	162	9	486
25,5	44	4	176	16	704
26,5	23	5	115	25	575
Σ	–	–	36	–	4040

Отсюда

$$\bar{X} = 36/500 + 21,5 = 21,572;$$

$$\tilde{s} = \sqrt{4040/500 - (21,572 - 21,5)^2} \approx 2,8416.$$

Имеем, далее,

$$a = \bar{X} - \tilde{s}\sqrt{3} \approx 21,572 - 2,8416 \cdot 1,7321 \approx 16,65;$$

$$b = \bar{X} + \tilde{s}\sqrt{3} \approx 21,572 + 2,8416 \cdot 1,732 \approx 26,49.$$

Теперь можно вычислить теоретические вероятности

$$p_i : p_1 = (17 - a)/(b - a) \approx 0,35/9,84 = 0,0356;$$

$$p_i = 1/(b - a) \approx 1/9,84 \approx 0,1016, i = 2, ..., 9;$$

$$p_{10} = (b - 26)/(b - a) \approx 0,49/9,84 \approx 0,0498.$$

Вычисление величины U оформим в виде таблицы.

n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$(n_i - np_i)^2/(np_i)$
17	0,04	20	-3	9	0,45
59	0,1	50	9	81	1,62
45	0,1	50	-5	25	0,5
40	0,1	50	-10	100	2
52	0,1	50	2	4	0,08
54	0,1	50	4	16	0,32
53	0,1	50	3	9	0,18
59	0,1	50	9	81	1,62
54	0,1	50	4	16	0,32
44	0,1	50	-6	36	0,72
23	0,05	25	-2	4	0,16
Σ	–	–	–	–	7,97

В рассматриваемом случае $k = 11, l = 2$, следовательно, $r = 11 - 2 - 1 = 8; 1 - \alpha = 0,95$. Поэтому $\chi^2_{1-\alpha}(r) = \chi^2_{0,95}(8) = 15,5$. Так как $U = 7,97 < 15,5$, то гипотеза о равномерном распределении случайной величины X принимается.

Задачи для самостоятельного решения

Имеется группированный статистический ряд (в первой строчке таблиц указаны интервалы, во второй — соответствующие частоты), полученный по результатам наблюдений над случайной величиной X. Требуется на уровне значимости α проверить в задачах 5.1 – 5.20 гипотезу о нормальном, а в задачах 5.21 – 5.30 о равномерном распределении случайной величины X.

5.1. $\alpha = 0,01$

22,1-22,8	22,8-23,5	23,5-24,2	24,2-24,9	24,9-25,6	25,6-26,3	26,3-27	27-27,7	27,7-28,4	28,4-29,1
4	14	37	70	114	113	73	54	16	5

5.2. $\alpha = 0,05$

34,8-35,1	35,1-35,4	35,4-36	36-35,7	35,7-36,3	36,3-36,6	36,6-36,9	36,9-37,2	37,2-37,5	37,5-37,8
4	16	37	85	116	97	80	40	20	5

5.3. $\alpha = 0,025$

39,6-40,1	40,1-40,6	40,6-41,1	41,1-41,6	41,6-42,1	42,1-42,6	42,6-43,1	43,1-43,6	43,6-44,1	44,1-45,1
1	7	17	39	97	109	120	69	28	13

5.4. $\alpha = 0,01$

25,8-26	26-26,2	26,2-26,4	26,4-26,6	26,6-26,8	26,8-27	27-27,2	27,2-27,4	27,4-27,6	27,6-28
5	6	43	82	101	131	66	50	12	4

5.5. $\alpha = 0,005$

46,7-48,1	48,1-48,8	48,8-49,5	49,5-50,2	50,2-50,9	50,9-51,6	51,6-52,3	52,3-53	53-53,7	53,7-54,4
8	21	47	118	119	93	56	29	8	1

5.6. $\alpha = 0,1$

30,8-31,6	31,6-32,4	32,4-33,2	33,2-34	34-34,8	34,8-35,6	35,6-36,4	36,4-37,2	37,2-38	38-39,1
1	11	42	66	112	131	81	44	11	1

5.7. $\alpha = 0,05$

13,4-14,4	14,4-14,9	14,9-15,4	15,4-15,9	15,9-16,4	16,4-16,9	16,9-17,4	17,4-17,9	17,9-18,4	18,4-18,9
5	12	31	67	108	122	77	53	17	8

5.8. $\alpha = 0,025$

71,7-71,9	71,9-72,1	72,1-72,3	72,3-72,5	72,5-72,7	72,7-72,9	72,9-73,1	73,1-73,3	73,3-73,5
28	59	95	117	105	55	26	12	3

5.9. $\alpha = 0,01$

13,8-14,2	14,2-14,6	14,6-15	15-15,4	15,4-15,8	15,8-16,2	16,2-16,6	16,6-17	17-17,4	17,4-17,8
4	14	37	70	114	113	73	54	16	5

5.10. $\alpha = 0,005$

20,7-20,9	20,9-21,1	21,1-21,3	21,3-21,5	21,5-21,7	21,7-21,9	21,9-22,1	22,1-22,3	22,3-22,5	22,5-22,7
2	18	46	85	103	120	68	44	10	4

5.11. $\alpha = 0,1$

10,1-12,1	12,1-14,1	14,1-16,1	16,1-18,1	18,1-20,1	20,1-22,1	22,1-24,1	24,1-26,1	26,1-28,1	28,1-30,1
1	46	111	117	105	83	26	6	4	1

5.12. $\alpha = 0,05$

50,2-50,4	50,4-50,6	50,6-50,8	50,8-60	60-60,2	60,2-60,4	60,4-60,6	60,6-60,8	60,8-61	61-61,2
4	43	110	137	98	66	21	18	2	1

5.13. $\alpha = 0,025$

30,6-30,8	30,8-40	40-40,2	40,2-40,4	40,4-40,6	40,6-40,8	40,8-41	41-41,2	41,2-41,4	41,4-41,6
4	25	96	132	100	85	28	18	6	6

5.14. $\alpha = 0,01$

42,8-43	43-43,2	43,2-43,4	43,4-43,6	43,6-43,8	43,8-44	44-44,2	44,2-44,4	44,4-44,6	44,6-44,8
5	16	84	113	119	78	50	19	11	5

5.15. $\alpha = 0,005$

26,4-28,1	28,1-28,8	28,8-29,5	29,5-30,2	30,2-30,9	30,9-31,6	31,6-32,3	32,3-33	33-33,7	33,7-34,4
2	8	80	138	139	72	35	18	6	2

5.16. $\alpha = 0,1$

10,8-11,6	11,6-12,4	12,4-13,2	13,2-14	14-14,8	14,8-15,6	15,6-16,4	16,4-17,2	17,2-18	18-18,8
4	6	10	91	157	125	75	21	7	4

5.17. $\alpha = 0,05$

5,8-6,2	6,2-6,6	6,6-7	7-7,4	7,4-7,8	7,8-8,2	8,2-8,6	8,6-9	9-9,4	9,4-9,8
5	35	70	101	131	93	35	18	10	2

5.18. $\alpha = 0,025$

75,2-75,4	75,4-75,6	75,6-75,8	75,8-76	76-76,2	76,2-76,4	76,4-76,6	76,6-76,8	76,8-77	77-77,2
1	1	35	99	156	127	53	19	8	1

5.19. $\alpha = 0,01$

16,4-16,8	16,8-17,2	17,2-17,6	17,6-18	18-18,4	18,4-19,2	19,2-19,6	19,6-20	20-20,4	20,4-20,8
1	2	57	152	155	98	28	5	1	1

5.20. $\alpha = 0,005$

34,2-34,6	34,6-35	35-35,4	35,4-35,8	35,8-36,2	36,2-36,6	36,6-37	37-37,4	37,4-37,8	37,8-38,2
14	66	101	116	88	61	30	15	4	5

5.21. $\alpha = 0,1$

26,3-26,4	26,4-26,5	26,5-26,6	26,6-26,7	26,7-26,8	26,8-26,9	26,9-27	27-27,1	27,1-27,2	27,2-27,3
38	63	41	56	47	52	57	58	37	51

5.22. $\alpha = 0,05$

16,3-16,4	16,4-16,5	16,5-16,6	16,6-16,7	16,7-16,8	16,8-16,9	16,9-17	17-17,1	17,1-17,2	17,2-17,3
58	63	48	54	34	41	46	59	53	44

5.23. $\alpha = 0,025$

29,6-29,8	29,8-30	30-30,2	30,2-30,4	30,4-30,6	30,6-30,8	30,8-31	31-31,2	31,2-31,4	31,4-31,6
51	50	56	52	50	56	44	49	45	47

5.24. $\alpha = 0,025$

75,1-77,1	77,1-79,1	79,1-81,1	81,1-83,1	83,1-85,1	85,1-87,1	87,1-89,1	89,1-91,1	91,1-93,1	93,1-95,1
54	49	42	52	46	59	49	45	58	46

5.25. $\alpha = 0,01$

14,3-14,6	14,6-14,9	14,9-15,2	15,2-15,5	15,5-15,8	15,8-16,1	16,1-16,4	16,4-16,7	16,7-17	17-17,3
65	43	51	37	61	41	52	51	52	47

5.26. $\alpha = 0,005$

26,6-27	27-27,4	27,4-27,8	27,8-28,2	28,2-28,6	28,6-29	29-29,4	29,4-29,8	29,8-30,2	30,2-30,6
53	49	42	54	54	63	55	47	49	34

5.27. $\alpha = 0,1$

21,2-22,2	22,2-23,2	23,2-24,2	24,2-25,2	25,2-26,2	26,2-27,2	27,2-28,2	28,2-29,2	29,2-30,2	30,2-31,2
27	64	58	77	57	55	50	58	49	5

5.28. $\alpha = 0,05$

39,6-40,6	40,6-41,6	41,6-42,6	42,6-43,6	43,6-44,6	44,6-45,6	45,6-46,6	46,6-47,6	47,6-48,6	48,6-49,6
22	46	61	52	50	57	51	59	49	53

5.29. $\alpha = 0,025$

18,4-18,6	18,6-18,8	18,8-19	19-19,2	19,2-19,4	19,4-19,6	19,6-19,8	19,8-20	20-20,2	20,2-20,4
62	36	54	67	56	40	43	60	44	38

5.30. $\alpha = 0,01$

44,2-44,4	44,4-44,6	44,6-44,8	44,8-45	45-45,2	45,2-45,4	45,4-45,6	45,6-45,8	45,8-46	46-46,2
29	60	46	55	42	51	49	42	67	59

Приложение

Таблица I. Нормальная функция распределения

$$\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.5000	5040	5080	5120	5159	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7518	7549
0,7	7580	7612	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8380
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8718	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9083	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9387	9394	9406	9418	9430	9441
1,6	9452	9463	9474	9485	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9758	9762	9767
2,0	9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9865	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9980	9980	9981
2.9	9981	9982	9983	9984	9984	9984	9985	9985	9986	9986

Таблица II. Квантили u_p нормального распреления $N(0,1)$

p	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
u_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Таблица III. Квантили хи-квадрат распределения $\chi^2_p(n)$

$n \backslash p$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3
1	$393 \cdot 10^{-7}$	$157 \cdot 10^{-6}$	$982 \cdot 10^{-6}$	$393 \cdot 10^{-5}$	0.0158	0.0642	0.148
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.05	1.65	2.19
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1

Таблица IV. Квантили хи-квадрат распределения $\chi_p^2(n)$

$n \backslash p$	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	17.37	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.3
20	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	23.9	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4

Таблица V. Квантили $t_p(n)$ распределения Стьюдента

$n \backslash p$	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	¿318
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.3
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.2
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	1.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.0557	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.758	3.398
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

$p = 0,9$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	1.97	1.92	1.90	1.87
20	1.84	1.79	1.77	1.74
24	1.78	1.73	1.70	1.67
30	1.72	1.67	1.64	1.61

$p = 0,95$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	2.40	2.33	2.29	2.25
20	2.35	2.28	2.24	2.19
24	2.11	2.03	1.98	1.94
30	2.01	1.93	1.89	1.84

$p = 0,975$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	2.86	2.76	2.70	2.64
20	2.57	2.46	2.41	2.35
24	2.44	2.33	2.27	2.21
30	2.31	2.20	2.14	2.07

$p = 0,99$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	3.52	3.37	3.29	3.21
20	3.09	2.94	2.86	2.78
24	2.89	2.74	2.66	2.58
30	2.70	2.55	2.47	2.39

$p = 0,995$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	4.07	3.88	3.79	3.69
20	3.50	3.32	3.22	3.12
24	3.25	3.06	2.97	2.87
30	3.01	2.82	2.73	2.63

$p = 0,999$

$m \backslash n$	15	20	24	30
15	5.54	5.25	5.10	4.95
20	4.56	4.29	4.15	4.00
24	4.14	3.87	3.74	3.59
30	3.75	3.49	3.36	3.22

Библиографический список

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.С. Таблицы математической ста- тистики. М.: Наука, 1965.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая ста- тистика. М.: Высш. шк., 1972.

4. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математи- ческой статистики. М.: Высш. шк., 1971.

5. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1982.

6. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1991.

7. Крамер Г. Математические методы статистики. М: Мир, 1976.

8. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая ста- тистика. М.: Наука, 1979.

9. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. М.: Наука, 1970.

10. Сборник задач по математике для втузов, специальные курсы / Под ред. А.В.Ефимова. М.: Наука, 1984.

11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под общей ред. А.А.Свешникова. М.: Наука. 1970.

12. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероят- ностей и математической статистики для технических при- ложений. М.: Наука, 1969.

13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ИВАНКОВ Павел Леонидович
МУРАНОВ Юрий Владимирович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ: ТИПОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Ответственный за выпуск — зав. кафедрой профессор К.В. Валиков
Редактор Е.П. Викулова

Изд.лиц. N 020275 от 13.11.96. Подписано в печать 01.04.98.
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура *Роман*. Печать офсетная. Усл.печ.л. 3,95. Уч.-изд.л. 4,22. Тираж 100 экз. С-52.
Заказ - 147-98.
Владимирский государственный университет.
Подразделение оперативной полиграфии
Владимирского государственного университета.
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:
600026, Владимир, ул.Горького, 87.