Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

Т.А. ЕРОПКИНА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задания к типовым расчетам по математике

Учебное пособие

3-е издание, исправленное и дополненное

Владимир 2006

УДК 517.53 + 517.445
ББК 22.161.55+22.161.2
Е77

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры
Владимирского государственного педагогического университета
В.В. Жиков

Доктор технических наук, профессор кафедры
специальной техники и информационной технологии
Владимирского юридического института
В.В. Панюхин

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Еропкина, Т. А.

Е77 Теория функции комплексного переменного. Операционное исчисление : Задания к типовым расчётам по математике : учеб. пособие / Т. А. Еропкина ; Владим. гос. ун-т. – 3-е изд., испр. и доп. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 72 с. – ISBN 5-89368-656-X.

Содержит разбор предлагаемых задач, поэтому может быть полезно во время самостоятельной работы студентов при выполнении типовых расчетов.

Предназначено для студентов технических специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Библиогр.:5 назв.

УДК 517.53 + 517.445
ББК 22.161.55+22.161.2

ISBN 5-89368-656-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном пособии приведены задания к типовым расчётам по двум темам: "Теория функции комплексного переменного" и "Операционное исчисление". Материал разделён на два раздела. Каждый раздел состоит из двух частей. Сначала приводятся решения типовых задач, которые подготавливают к выполнению расчётов. Затем даны задания для самостоятельного решения. Каждое задание включает 31 вариант.

Несколько слов об обозначениях.

В первом разделе: $\oint$ – интеграл по замкнутому контуру, причем обход контура происходит против часовой стрелки, $\bar{z}$ – число, комплексно-сопряжённое с числом z.

Во втором разделе: $'$ – производная по времени t, $\risingdotseq$ – переход от оригинала к изображению.

В приложении приведена таблица, которая используется при решении задач второго раздела.

Материал данного учебного пособия соответствует третьему и четвёртому семестру программы по высшей математике.

При составлении заданий использованы задачник М.Л. Краснова, А.И. Киселева, Г.И. Макаренко "Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости" [3] и пособие В.Ф. Чудесенко "Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: Типовые расчеты " [4].

РАЗДЕЛ 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рассмотрим комплексные числа $z=x+iy$, где $i^2=-1$.

Задача 1.1. Найти все корни уравнения $x^3+7x^2+51x+45=0$ и вычислить величины $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ и $B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Решение. Подберем первый корень среди делителей числа 45 и получим $x_1=-1$, далее поделим в столбик левую часть уравнения и получим, что уравнение можно представить в виде:

$x^3+7x^2+51x+45=(x+1)(x^2+6x+45)=0$. Решим его.

Итак: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -3\pm6i$.

Вычислим: $$A = \frac{1}{-1} + \frac{1}{-3+6i} + \frac{1}{-3-6i} =$$

$$= \frac{(-3+6i)(-3-6i)-1(-3-6i)-1(-3+6i)}{-1(-3+6i)(-3-6i)} = \frac{51}{-45} = \frac{-17}{15};$$

$$B = (-1)^2 + (-3+6i)^2 + (-3-6i)^2 =1+9-18i-36+9+18i-36= -53.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_{2,3}=-3\pm6i$, $A= -\frac{17}{15}$; $B= -53$.

Задача 1.2. Вычислить $\bar{z}^n z$, если $z = -\sqrt{3} - i$, $n=13$.

Решение. Представим число z в показательной форме:

$$z=2e^{-\frac{5}{6}\pi i}, \text{ тогда } \bar{z}=2e^{+\frac{5}{6}\pi i}.$$

Следовательно, $$\bar{z}^{13}z= \left(2e^{\frac{5}{6}\pi i}\right)^{13} 2\,e^{-\frac{5}{6}\pi i} = 2^{13}\, 2e^{\frac{5}{6}\pi i(13-1)} =$$

$$= 2^{14}\, e^{\frac{5}{6}\pi i 12} = 2^{14}e^{10\pi i}= 2^{14}.$$

Ответ: 2^{14}.

Задача 1.3. Решить уравнение $e^z = i$.

Решение. Прологарифмируем уравнение $\mathrm{Ln}\, e^z = \mathrm{Ln}\, i \Rightarrow z = \mathrm{Ln}\, i$:

$$z = \ln|i| + i \arg i + 2\pi k i \Rightarrow$$
$$z = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i = i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i = \frac{\pi}{2}(1+4k)i.$$

Ответ: $z = \frac{\pi}{2}(1+4k)i$.

Задача 1.4. Проверить выполнение условий **Коши - Римана и** найти $f'(z_0)$.

Пусть $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{5\pi i}{2}$.

Решение. Выделим $\mathrm{Re} f(z)$ и $\mathrm{Im} f(z)$, считая $z = x + iy$, используя формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y.$$

Итак: $\mathrm{Re} f(z) = u = e^x\cos y$; $\mathrm{Im} f(z) = v = e^x\sin y$.

Проверим условие: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (1) и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (2),

так как $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$; $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$, то условие (1) выполнено,

так как $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$, то условие (2) выполнено.

Вычислим $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{5}{2}\pi i\right) = e^0\cos\frac{5\pi}{2} + i\, e^0\sin\frac{5\pi}{2} = e^0\cdot 0 + i\, e^0\cdot 1 = i.$$

Ответ: $f'\left(\frac{5}{2}\pi i\right) = i$.

Задача 1.5. Найти модуль и аргумент производной функции $f(z)$ в точке z_0, если $f(z) = e^{iz}$, $z_0 = -\frac{\pi}{4} + \pi i$.

Решение: так как функция $f(z)=e^{iz}$ – элементарная, то ее производная находится по тем же формулам, что и для действительных функций.

Итак: $f'(z)=ie^{iz} \Rightarrow f'(z_0)=ie^{i(-\frac{\pi}{4}+\pi i)}=ie^{-\frac{\pi}{4}i}e^{-\pi}$, так как $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$, то $f'(z_0)=e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}e^{-\pi}=e^{-\pi}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$, следовательно, $r=e^{-\pi}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $r=e^{-\pi}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Задача 1.6. Вычислить интеграл $\int\limits_C |z|^2dz$, где C–отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=0$, $z_2=1-i$.

Решение: на прямой C имеем, что $y=-x$, $x\in[0,1]$, при этом $|z|^2=x^2+y^2=2x^2$, а $dz=dx+idy=dx-idx=dx(1-i)$.

Подставляем в интеграл:

$$\int\limits_C |z|^2dz=\int\limits_0^1 2x^2dx(1-i)=2(1-i)\int\limits_0^1 x^2dx=2(1-i)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(1-i).$$

Ответ: $\frac{2}{3}(1-i)$.

Задача 1.7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\cos iz}{z^2+3z+2}\,dz,$$

используя интегральную формулу Коши.

Решение: так как $\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z+z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$, то имеем $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\cos iz}{(z+1)(z+2)}\,dz = \oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\frac{\cos iz}{z+2}}{z+1}\,dz = 2\pi i\,\frac{\cos i(-1)}{-1+2} = 2\pi i \operatorname{ch} 1.$

Ответ: $2\pi i \operatorname{ch} 1$.

Задача 1.8. Используя разложение основных элементарных функций, разложить $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости. Пусть $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}$, $z_0=-1$.

Решение. Сначала сделаем замену $w=z-z_0$, $w=z+1$, чтобы можно было использовать стандартные разложения, и получим:

$$f(w)=\frac{1}{(w-1)^2+5(w-1)+6}=\frac{1}{w^2+3w+2}=\frac{1}{(w+1)(w+2)}=\frac{1}{w+1}-\frac{1}{w+2}.$$

Используя стандартные разложения в ряд Тейлора

$$\sum_0^\infty(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z} \quad \text{при} \quad |z|<1,$$

получим:

$$\frac{1}{w+1}=\sum_0^\infty(-1)^n w^n; \quad \frac{1}{w+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+w/2}=\frac{1}{2}\sum_0^\infty(-1)^n\left[\frac{w}{2}\right]^n=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{w^n}{2^{n+1}};$$

оба ряда сходятся, когда $|w|<1$. Вернемся к переменной z.

Итак, $\displaystyle f(z)=\sum_0^\infty(-1)^n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right]w^n=\sum_0^\infty(-1)^n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right](z+1)^n$ при $|z+1|<1$.

Ответ: $\displaystyle\sum_0^\infty(-1)^n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right](z+1)^n$ при $|z+1|<1$.

Задача 1.9. Используя разложение основных элементарных функций, разложить $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1} \quad \text{при} \quad 2<|z+i|<\infty.$$

Решение: $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$.

Сделаем замену: $w=z+i$, тогда $z=w-i$, $2<|w|<\infty$.

$$f(z)=\frac{1}{w(w-i-i)}=\frac{1}{w(w-2i)}=\frac{1}{w^2}\,\frac{1}{(1-2\frac{i}{w})}.$$

Так как $\left|2\frac{i}{w}\right|=\left|\frac{2}{w}\right|<1$ по условию, $2<|w|<\infty$,

то, используя стандартное разложение, получим $\dfrac{1}{(1-2\frac{i}{w})}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[2\frac{i}{w}\right]^n$,

следовательно, $f(w)=\dfrac{1}{w^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[2\frac{i}{w}\right]^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n i^n}{w^{n+2}}$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n i^n}{(z+i)^{n+2}}.$$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n i^n}{(z+i)^{n+2}}$, $2<|z+i|<\infty$.

Задача 1.10. Указать все конечные особые точки заданных функций и определить их тип, $f(z)=\mathrm{sh}\frac{1}{z}$.

Решение: так как $\mathrm{sh}\frac{1}{z}$ непрерывна везде, кроме $z=0$, то единственная особая точка $z_0=0$.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана, считая, что $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. $|z|>1$, и получим

$$f(z) = \operatorname{sh}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{z}} - e^{-\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \ldots -\right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^2 2!} - \frac{1}{z^3 3!} + \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,2\left(\frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} + \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}(2k+1)!}.$$

Так как в разложении в ряд Лорана имеется бесконечное число отрицательных степеней, то точка $z_0=0$ является существенно особой точкой.

Ответ: $z_0=0$ является существенно особой точкой.

Задача 1.11. Найти вычеты в особых точках следующих функций.

$f(z)= \frac{1}{z^4}\, e^{iz}$.

Решение.

1-й способ: отметим, что $\operatorname{res}_0 f(z)=C_{-1}$,

где C_{-1} – коэффициент при z^{-1} разложения функции в ряд Лорана.

Разложим функцию в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{i}{z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{i}{3!z} + \frac{1}{4!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{-1} = -\frac{i}{3!} = \frac{-i}{6} \Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{i}{6}.$$

2-й способ: так как точка $z=0$ является полюсом 4-го порядка,

то $\underset{0}{\mathrm{res}} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{3!}\left[f(z)\, z^4\right]''' =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{3!}\left[\frac{e^{iz}}{z^4}\, z^4\right]''' = \lim_{z\to 0} \frac{1}{6}\, i^3 e^{iz} = \frac{1}{6} i^3 = -\frac{i}{6}.$$

Ответ: $-\frac{i}{6}$.

Задача 1.12. Используя теорему Коши о вычетах, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z^9(1+iz^2)}.$$

Решение. Так как внутрь области $|z|=1/2$ попадает только одна особая точка $z = 0$, то

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z^9(1+iz^2)} = 2\pi i \underset{0}{\mathrm{res}} f(z) = 2\pi i C_{-1}.$$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана при $|z|<1$:

$$f(z) = \frac{1}{z^9}\,\frac{1}{(1+iz^2)} = \frac{1}{z^9}\sum_{n=0}^{\infty}(-iz^2)^n = \frac{1}{z^9}(1-iz^2+i^2z^4-i^3z^6+i^4z^8-\ldots)=$$

$$= \frac{1}{z^9} - \frac{i}{z^7} + \frac{i^2}{z^5} - \frac{i^3}{z^3} + \frac{i^4}{z} - \ldots \Rightarrow C_{-1} = i^4 = 1.$$

Итак, $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z^9(1+iz^2)} = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i.$

Ответ: $2\pi i$.

Задача 1.13. Вычислить несобственный интеграл от действительной функции, используя теорему Коши о вычетах:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+200}{(x^2+100)^2}\,dx.$$

Решение: так как степень многочлена в знаменателе на две единицы больше чем числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+200}{(x^2+100)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{k} \underset{z_k}{\mathrm{res}} f(z),$$

где z_k - особые точки, лежащие в верхней полуплоскости функции

$$f(z) = \frac{z^2+200}{(z^2+100)^2}.$$

Эта функция имеет одну особую точку $z=10i$ - полюс 2-го порядка.

$$\underset{10i}{\mathrm{res}} f(z) = \lim_{z\to 10i} \left[f(z)(z-10i)^2\right]' = \lim_{z\to 10i} \left[\frac{(z^2+200)}{(z-10i)^2(z+10i)^2}(z-10i)^2\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 10i} \frac{20iz-400}{(z+10i)^3} = -i\frac{3}{40}.$$

Следовательно, $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+200}{(x^2+100)^2}\,dx = 2\pi i\left(-i\frac{3}{40}\right) = \frac{3}{20}\pi.$$

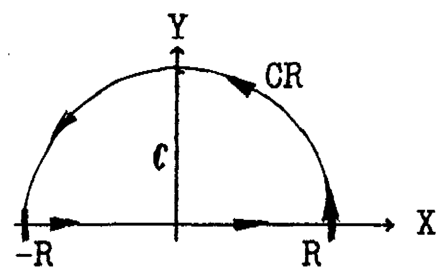
Ответ: $\frac{3}{20}\pi$.

<u>Задача 1.14.</u> Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+2x^2+x^4}\,dx$.

Решение: отметим сначала, что для четной функции

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+2x^2+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+2x^2+x^4}\,dx.$$

Введем вспомогательную функцию $f(z)= \dfrac{ze^{iz}}{1+2z^2+z^4} = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}$.



f(z) имеет в верхней полуплоскости одну особую точку $z = i$ – полюс 2-го порядка

По лемме Жордана $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{CR} \frac{ze^{iz}}{1+2z^2+z^4}\,dz=0$,

тогда $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+2x^2+x^4}\,dx = \operatorname{Im} \lim_{R\to\infty} \left[\int\limits_{-R}^{+R} f(Z)dZ + \int\limits_{CR} f(z)dz \right] =$$

$$= \operatorname{Im} \lim_{R\to\infty} \oint\limits_C f(z)dz = \operatorname{Im} 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = \operatorname{Im} \operatorname*{res}_{i} f(z)\, 2\pi i.$$

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i} \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}(z-i)^2 \right]' = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}((1+iz)(z+i)-2z)}{(z+i)^3} = \frac{1}{4e}.$$

Итак, $$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+2x^2+x^4}\,dx = \operatorname{Im}\frac{1}{2}\, 2\pi i\, \frac{1}{4e} = \frac{\pi}{2e}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2e}$.

ЗАДАНИЯ

1.1. Найти все решения уравнений и вычислить величины:

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}; \qquad B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

1. $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0.$
2. $x^3 + 5x^2 + 12x + 8 = 0.$
3. $x^3 + 7x^2 + 19x + 13 = 0.$
4. $x^3 + 3x^2 + 12x + 10 = 0.$
5. $x^3 + 5x^2 + 17x + 13 = 0.$
6. $x^3 + 7x^2 + 31x + 25 = 0.$
7. $x^3 + 4x^2 + 9x + 10 = 0.$
8. $x^3 + 8x^2 + 25x + 26 = 0.$
9. $x^3 + 6x^2 + 16x + 16 = 0.$
10. $x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = 0.$
11. $x^3 + 6x^2 + 21x + 26 = 0.$
12. $x^3 + 8x^2 + 37x + 50 = 0.$
13. $x^3 + 3x^2 + 19x + 17 = 0.$
14. $x^3 + 4x^2 + 21x + 34 = 0.$
15. $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0.$
16. $x^3 + 5x^2 + 7x - 13 = 0.$
17. $x^3 + x^2 + 8x - 10 = 0.$
18. $x^3 + 3x^2 + 9x - 13 = 0.$
19. $x^3 + 5x^2 + 19x - 25 = 0.$
20. $x^3 + x^2 + 15x - 17 = 0.$
21. $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0.$
22. $x^3 - 3x^2 + 4x + 8 = 0.$
23. $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0.$
24. $x^3 - x^2 + 8x + 10 = 0.$
25. $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0.$
26. $x^3 - 5x^2 + 19x + 25 = 0.$
27. $x^3 - x^2 + 15x + 17 = 0.$
28. $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0.$
29. $x^3 - 5x^2 + 12x - 8 = 0.$
30. $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0.$
31. $x^3 - 7x^2 + 31x - 25 = 0.$

1.2. Вычислить:

$z^n \bar{z}$ (для вариантов 1 - 16)

1. $z = 1 + i\sqrt{3}$, $n=13$.
2. $z = -1 + i\sqrt{3}$, $n=13$.
3. $z = 1 - i\sqrt{3}$, $n=13$.
4. $z = -1 - i\sqrt{3}$, $n=13$.
5. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $n=17$.
6. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $n=17$.
7. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $n=17$.
8. $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $n=17$.
9. $z = \sqrt{3} + 3i$, $n=19$.
10. $z = \sqrt{3} - 3i$, $n=19$.
11. $z = -\sqrt{3} + 3i$, $n=19$.
12. $z = -\sqrt{3} - 3i$, $n=19$.
13. $z = \sqrt{3} + i$, $n=25$.
14. $z = \sqrt{3} - i$, $n=25$.
15. $z = -\sqrt{3} + i$, $n=25$.
16. $z = -\sqrt{3} - i$, $n=25$.

$\bar{z}^n z$ (для вариантов 17 - 31)

17. $z = 1 + i\sqrt{3}$, $n=19$.
18. $z = -i + \sqrt{3}$, $n=19$.
19. $z = 1 - i\sqrt{3}$, $n=19$.
20. $z = -i - \sqrt{3}$, $n=19$.
21. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $n=9$.
22. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $n=9$.
23. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $n=9$.
24. $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $n=9$.
25. $z = \sqrt{3} + 3i$, $n=25$.
26. $z = \sqrt{3} - 3i$, $n=25$.
27. $z = -\sqrt{3} + 3i$, $n=25$.
28. $z = -\sqrt{3} - 3i$, $n=25$.
29. $z = \sqrt{3} + i$, $n=13$.
30. $z = \sqrt{3} - i$, $n=13$.
31. $z = -\sqrt{3} + i$, $n=13$.

1.3. Решить уравнения.

1. $e^{z} - 1 - i = 0$.

2. $e^{z} - 1 + i = 0$.

3. $e^{\pi z} + 1 = 0$.

4. $e^{z-i} - 1 = 0$.

5. $ie^{\frac{\pi}{2}z} - 1 = 0$.

6. $ie^{\frac{\pi}{2}z} + 1 = 0$.

7. $e^{iz} + \pi i = 0$.

8. $e^{i\pi z} + e^{\pi} = 0$.

9. $e^{2z} + 2e^{z} - 3 = 0$.

10. $e^{2\frac{\pi}{z}} + 2e^{\frac{\pi}{z}} + 1 = 0$.

11. $\ln(z-i) = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}$.

12. $\ln iz = \pi i$.

13. $\ln(4z+5i) = 2{,}5\pi i$.

14. $\ln(\frac{1}{2}z^2 + z) + \pi i = 0$.

15. $\ln\left[z^2 - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right] = \frac{2}{3}\pi i$.

16. $\ln(z^3+2) = 2\pi i$.

17. $\sin z = 2i$.

18. $\cos z = 2$.

19. $\sin z = 2$.

20. $\cos z = 2i$.

21. $8z^3 + i = 0$.

22. $8z^3 - i = 0$.

23. $\sqrt{2}\, z^3 = 1 - i$.

24. $\sqrt{2}\, z^3 = 1 + i$.

25. $16z^4 + 1 = 0$.

26. $16z^4 - 1 = 0$.

27. $z^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

28. $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

29. $z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$.

30. $z^6 + 1 = 0$.

31. $z^6 - 1 = 0$.

1.4. Проверить выполнение условий Коши – Римана и в случае их выполнения найти $f'(z_0)$.

1. $f(z)=\sin 4z$, $z_0 = \frac{1}{8}(\pi+i\ln 2)$.
2. $f(z) =\sin iz$, $z_0=\ln 3$.
3. $f(z)=\sin 3z+2i$, $z_0=\frac{1}{6}\pi+\frac{i}{3}\ln 2$.
4. $f(z) =\sin\frac{z}{i}$, $z_0=-\ln 2$.
5. $f(z)=\cos 6z$, $z_0=\pi+\frac{i}{6}\ln 3$.
6. $f(z) =\cos zi$, $z_0=\ln 3$.
7. $f(z)=\cos 2z -3i$, $z_0 =\frac{i}{2}\ln 2$.
8. $f(z) =\cos\frac{z}{i}$, $z_0=\ln 5$.
9. $f(z)=e^{2z}$, $z_0= \ln 3+\frac{\pi}{4}i$.
10. $f(z) =e^{iz}$, $z_0=\frac{\pi}{2} +i$.
11. $f(z)=e^{-z}$, $z_0 = \pi i$.
12. $f(z) =e^{5z}$, $z_0= \frac{\pi}{2}i$.
13. $f(z)=ze^{z}$, $z_0=2\pi i$.
14. $f(z)=\sin(2z+3)$, $z_0=\frac{1}{2}(-3+i\ln 2)$.
15. $f(z)=\sin(z-i)$, $z_0=\frac{\pi}{2}+i$.
16. $f(z)=\sin(z+1-i)$, $z_0=\pi+i$.
17. $f(z)=z^3$, $z_0= 1- i$.
18. $f(z)=\frac{1}{z}$, $(z\neq 0)$ $z_0=1+i$.
19. $f(z)=e^{z-i}$, $z_0=(1+\pi)i+\ln\pi$.
20. $f(z)=\cos(z-i)$, $z_0=(1+\ln 2)i+\pi$.
21. $f(z)=\cos(3z-1)$, $z_0=\frac{1}{3}(1-i\ln 2)$.
22. $f(z)=\cos(z+1-i)$, $z_0=\pi+i$.
23. $f(z)=e^{2z-1}$, $z_0=\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}i$.
24. $f(z)=\frac{1}{iz}$, $(z\neq 0)$ $z_0=1-i$.
25. $f(z)=\frac{1}{z+i}$, $(z\neq -i)$ $z_0=-1$.
26. $f(z)=\frac{1}{z-i}$, $(z\neq i)$ $z_0=1+2i$.
27. $f(z)=(z+i)^3$, $z_0 =1-2i$.
28. $f(z)=(z-2i)^3$, $z_0=2i+5$.
29. $f(z)=z^4$, $z_0= 2i$.
30. $f(z)=z^5$, $z_0=i$.
31. $f(z)=\ln z$, $z_0 = -i$.

1.5. Найти модуль и аргумент $f'_0(z)$.

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=\pi+i\ln 2$.
2. $f(z)=\cos z$, $z_0=\frac{\pi}{2}+i\ln 2$.
3. $f(z)=\cos z$, $z_0=\pi-i\ln 2$.
4. $f(z)=\cos z$, $z_0=-\frac{\pi}{2}+i\ln 2$.
5. $f(z)=\sin z$, $z_0=\frac{\pi}{2}+i\ln 2$.
6. $f(z)=\sin z$, $z_0=-\frac{\pi}{2}+i\ln 2$.
7. $f(z)=\sin z$, $z_0=\pi+i\ln 2$.
8. $f(z)=\sin z$, $z_0=i\ln 2$.
9. $f(z)=z^2$, $z_0=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$.
10. $f(z)=z^2$, $z_0=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$.
11. $f(z)=z^2$, $z_0=\sin\frac{2}{3}\pi+i\cos\frac{2}{3}\pi$.
12. $f(z)=z^2$, $z_0=-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.
13. $f(z)=z^3$, $z_0=1+i$.
14. $f(z)=z^3$, $z_0=1-i$.
15. $f(z)=z^3$, $z_0=2+i$.
16. $f(z)=z^3$, $z_0=2-i$.
17. $f(z)=\cos iz$, $z_0=i$.
18. $f(z)=\cos iz$, $z_0=1+\frac{3\pi}{2}i$.
19. $f(z)=\cos iz$, $z_0=1+i\pi$.
20. $f(z)=\cos iz$, $z_0=\pi+i\frac{\pi}{4}$.
21. $f(z)=\sin iz$, $z_0=1$.
22. $f(z)=\sin iz$, $z_0=i$.
23. $f(z)=\sin iz$, $z_0=1+i\frac{\pi}{2}$.
24. $f(z)=\sin iz$, $z_0=\pi+i\frac{\pi}{4}$.
25. $f(z)=e^{2z}$, $z_0=i\frac{\pi}{8}$.
26. $f(z)=e^{2z}$, $z_0=1-i\frac{\pi}{8}$.
27. $f(z)=e^{2z}$, $z_0=\frac{1}{2}\ln\pi+i\frac{\pi}{4}$.
28. $f(z)=e^{2z}$, $z_0=\ln\pi-i\frac{\pi}{2}$.
29. $f(z)=e^{i\pi}$, $z_0=\frac{\pi}{2}-i$.
30. $f(z)=e^{iz}$, $z_0=-\frac{\pi}{2}+i$.
31. $f(z)=e^{i\pi}$, $z_0=-2i$.

1.6. Вычислить следующие интегралы.

1. $\int\limits_C (1-i+2\bar{z})dz$, где C – часть прямой $y=x$, соединяющей точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

2. $\int\limits_C (1-i+2\bar{z})dz$, где C – ломаная $z_1z_2z_3$; $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=1+i$.

3. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, где C – часть кубической параболы $y=x^3$, соединяющей точки $z_1=-1-i$, $z_2=0$.

4. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, где C – часть прямой $y=x$, соединяющей точки $z_1=-1-i$, $z_2=0$.

5. $\int\limits_C \mathrm{Im}\,z dz$, где C – часть параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z_1=-1+i$, $z_2=0$.

6. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z dz$, где C – ломаная $z_1z_2z_3$, $z_1=-1+i$, $z_2=i$, $z_3=0$.

7. $\int\limits_C (1+2i-2\bar{z})dz$, где C – часть параболы $y=-x^2$, соединяющей точки $z_1=0$, $z_2=1-i$.

8. $\int\limits_C (1+2i-2\bar{z})dz$, где C – ломаная $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1-i$.

9. $\int\limits_C z\bar{z}dz$, где C – отрезок прямой $y=x$, соединяющей точки $z_1=-\pi-\pi i$ и $z_2=0$.

10. $\int\limits_C \sin|z|dz$, где C – отрезок прямой $\begin{cases} x=+t, \\ y=-t, \end{cases}$

соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}-i\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

11. $\int\limits_C \cos|z|dz$, где C – отрезок прямой $\begin{cases} x=-t, \\ y=+t, \end{cases}$

соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+i\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

12. $\int\limits_C (z+1)\bar{z}dz$, где C – дуга окружности $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$

соединяющая точки $z_1=1$ и $z_2=i$.

13. $\int\limits_C \bar{z}dz$, где C – дуга эллипса $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t, \end{cases}$

соединяющая точки $z_1=3i$ и $z_2=-2$
и расположенная в полуплоскости $y\geq 0$.

14. $\int\limits_C i\bar{z}dz$, где C – часть кривой $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$

соединяющей точки $z_1=i$ и $z_2=-1$.

15. $\int\limits_C \bar{z}dz$, где C – часть кривой $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$

соединяющей точки $z_1=2$ и $z_2=5i$.

16. $\int\limits_C i\bar{z}dz$, где C – часть кривой $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$

соединяющей точки $z_1=i$ и $z_2=-1$ $(x\leq 0)$.

17. $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (4z+3z^2)dz$.

18. $\int\limits_{i}^{\pi} z\sin z dz$.

19. $\int\limits_{i}^{0} z\cos z\,dz.$ 20. $\int\limits_{1}^{\pi i} ze^{z}dz.$

21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\ln 2} \sin z\cos z\,dz.$ 22. $\int\limits_{0}^{1+i} z^{2}e^{z}dz.$

23. $\int\limits_{1-i}^{1+i} ze^{z^{2}}dz.$ 24. $\int\limits_{\pi/2}^{i} e^{-iz}dz.$

25. $\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{Re}\,z\,dz.$ 26. $\oint\limits_{|z|=2} z\,\mathrm{Im}\,z\,dz.$

27. $\oint\limits_{|z|=1} (2z+3\bar{z})dz.$ 28. $\int\limits_{C} (3z-1)\bar{z}dz$, где $C: |z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi.$

29. $\int\limits_{C} z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=0,\ z_2=1+i.$

30. $\int\limits_{C} z\,\mathrm{Im}\,z\,dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=0,\ z_2=-1+i.$

31. $\int\limits_{C} z\bar{z}dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=0,\ z_2=+1+2i.$

1.7. Вычислить интегралы по замкнутому контуру, используя интегральную формулу Коши (обход контура против часовой стрелки).

1. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{e^z}{z+i}\,dz$.

2. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{iz}}{z+1}\,dz$.

3. $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{\sin\pi z}{z+2i}\,dz$.

4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos\pi z}{z}\,dz$.

5. $\oint\limits_{|z+\pi i|=4} \frac{z^2}{z+\pi i}\,dz$.

6. $\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{(z+i)^3}{z+2}\,dz$.

7. $\oint\limits_{|z+3|=1} \frac{\sin iz}{z+3}\,dz$.

8. $\oint\limits_{|z+3i|=1} \frac{\cos z}{z+3i}\,dz$.

9. $\oint\limits_{|z-i|=1/2} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$.

10. $\oint\limits_{|z-2i|=3/2} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,dz$.

11. $\oint\limits_{|z+\pi i|=3} \frac{z^2}{z^2+\pi^2}\,dz$.

12. $\oint\limits_{|z+2i|=3/2} \frac{iz^2}{z^2+9}\,dz$.

13. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos iz}{z^2+z}\,dz$.

14. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\cos iz}{z^2+z}\,dz$.

15. $\oint\limits_{|z|=2/3} \frac{\sin(z+\pi i)}{z^2+2z}\,dz$.

16. $\oint\limits_{|z+2|=3/2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2+2z}\,dz$.

17. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$.

18. $\oint\limits_{|z-\pi i|=5/2} \frac{e^{iz}}{z^2+\pi^2}\,dz$.

19. $\oint\limits_{|z+2i|=2} \frac{z^3}{z^2+4}\,dz$.

20. $\oint\limits_{|z+3i|=4} \frac{\sin z}{z^2+9}\,dz$.

21. $\oint\limits_{|z-4i|=5} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2+16}\,dz$.

22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos\pi z}{z^2+z}\,dz$.   23. $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z}\,dz$.   24. $\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+1}{z^2-z}\,dz$.

25. $\oint\limits_{|z-3|=3/2} \frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z^2-4z+3}\,dz$.   26. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}z}}{z^2+2z-3}\,dz$.   27. $\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{\cos\frac{\pi}{3}z}{z^2-2z-3}\,dz$.

28. $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{\cos iz}{z^2+4z+3}\,dz$.   29. $\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{i\pi z}}{z^2-3z+2}\,dz$.   30. $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+z-2}\,dz$.

31. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos\pi z}{z^2-z-2}\,dz$.

1.8. Используя разложение основных элементарных функций, разложить следующие функции в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости.

1. $f(z)=\sin(z-1)$, $z_0=-1$.   2. $f(z)=\sin z$, $z_0=+i$.

3. $f(z)=\sin^2 z$, $z_0=-\pi/4$.   4. $f(z)=\sin^2\left[\frac{i}{2}z\right]$, $z_0=0$.

5. $f(z)=\cos(z+1)$, $z_0=-2$.   6. $f(z)=\cos z$, $z_0=-i$.

7. $f(z)=\cos^2 z$, $z_0=+\pi/4$.   8. $f(z)=\cos^2\left[\frac{i}{2}z\right]$, $z_0=0$.

9. $f(z)=e^{2z}$, $z_0=-\pi$.   10. $f(z)=e^{iz}$, $z_0=\pi i$.

11. $f(z)=e^{z^2-2iz-1}$, $z_0=i$.   12. $f(z)=e^{2z-1-z^2}$, $z_0=1$.

13. $f(z)=\ln(4-z)$, $z_0=3$. 14. $f(z)=\ln(2z+z^2+2)$, $z_0=-1$.

15. $f(z)=\ln(1-3z+2z^2)$, $z_0=0$. 16. $f(z)=\ln z$, $z_0=1$.

17. $f(z)=\frac{1}{4z+1}$, $z_0=-1$. 18. $f(z)=\frac{i}{z+i}$, $z_0=0$.

19. $f(z)=\frac{z}{z^2+9}$, $z_0=0$. 20. $f(z)=\frac{i}{z+i}$, $z_0=0$.

21. $f(z)=\frac{2}{z^2-4z+3}$, $z_0=0$. 22. $f(z)=\frac{1}{2z^2+3z+1}$, $z_0=0$.

23. $f(z)=\sin z\cos z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$. 24. $f(z)=\sin 3z+z\cos 3z$, $z_0=0$.

25. $f(z)=\operatorname{sh}\left(\frac{z}{2}\right)$, $z_0=0$. 26. $f(z)=\operatorname{ch}\left(\frac{z}{2}\right)-1$, $z_0=0$.

27. $f(z)=\operatorname{sh}(iz)$, $z_0=0$. 28. $f(z)=\operatorname{ch}(iz)$, $z_0=0$.

29. $f(z)=\frac{9}{20-z-z^2}$, $z_0=0$. 30. $f(z)=\frac{5}{z^2+z-6}$, $z_0=1$.

31. $f(z)=\ln(1-z-20z^2)$, $z_0=0$.

1.9. Используя разложение основных элементарных функций, разложить следующие функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости.

1. $f(z)=(z+i)^2e^{\frac{1}{iz-1}}$, $z_0=-i$. 2. $f(z)=(z-i)^2e^{\frac{1}{iz+1}}$, $z_0=i$.

3. $f(z)=z^3e^{-\frac{1}{iz}}$, $z_0=0$. 4. $f(z)=e^{\frac{i\pi z}{z-1}}$, $z_0=1$.

5. $f(z)=\sin\frac{1}{iz-1}$, $z_0=-i$. 6. $f(z)=\sin\frac{1}{iz+1}$, $z_0=i$.

7. $f(z) = \sin\frac{\pi z}{z+\pi i}$, $z_0=-\pi i$. 8. $f(z) = \sin\frac{\pi z}{z-\pi i}$, $z_0=\pi i$.

9. $f(z) = \cos\frac{1}{iz-1}$, $z_0=-i$. 10. $f(z) = \cos\frac{1}{iz+1}$, $z_0=i$.

11. $f(z) = \cos\frac{\pi z}{z+\pi i}$, $z_0=-\pi i$. 12. $f(z) = \cos\frac{\pi z}{z-\pi i}$, $z_0=\pi i$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

13. $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$, $0<|z|<1$. 14. $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$, $1<|z|<\infty$.

15. $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$, $0<|z+1|<1$. 16. $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$, $1<|z+1|<\infty$.

17. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $0<|z-1|<3$. 18. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $3<|z-1|<\infty$.

19. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $0<|z+2|<3$. 20. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $3<|z+2|<\infty$.

21. $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$, $0<|z-2|<2$. 22. $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$, $2<|z-2|<\infty$.

23. $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$, $0<|z|<2$. 24. $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$, $2<|z|<\infty$.

25. $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$, $0<|z+2|<2$. 26. $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$, $2<|z+2|<\infty$.

27. $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$, $0<|z|<2$. 28. $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$, $2<|z|<\infty$.

29. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$. 30. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $2<|z-i|<\infty$.

31. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $0<|z+i|<2$.

1.10. Найти все конечные особые точки и указать их тип.

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-i)^3}$. 2. $f(z)= \dfrac{1}{(z^2+i)^3}$. 3. $f(z)= \dfrac{1}{(z^3-i)^3}$.

4. $f(z) = \dfrac{1}{(z^3+i)^2}$. 5. $f(z)= \dfrac{1}{(z^4-1)^2}$. 6. $f(z)= \dfrac{1}{(z^4+1)^2}$.

7. $f(z) = \dfrac{1}{(e^z-2)^3}$. 8. $f(z)= \dfrac{1}{(e^z+i)^2}$. 9. $f(z)= \dfrac{1}{(e^z+2)^2}$.

10. $f(z)= \dfrac{1}{(e^z-i)^3}$. 11. $f(z)= \dfrac{z}{e^z+i^2}$. 12. $f(z)= \dfrac{z-\pi}{e^{iz}+1}$.

13. $f(z)= \dfrac{1+\cos z}{3\pi-z}$. 14. $f(z)= \dfrac{1-\cos z}{z^2}$. 15. $f(z)= \dfrac{\sin z-1}{z-\pi/2}$.

16. $f(z)= \dfrac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}$. 17. $f(z)= \dfrac{1-\cos z}{z^3}$. 18. $f(z)= \dfrac{1+\cos z}{(z-\pi)^2}$.

19. $f(z)= \dfrac{z}{\sin z}$. 20. $f(z)= \dfrac{\sin z}{z^2}$. 21. $f(z)= \dfrac{(e^z-1)}{z(z-1)^2}$.

22. $f(z)= \dfrac{e^{2z}-2e^z+1}{z^2(z-1)}$. 23. $f(z)= \dfrac{1+\sin z}{(2z+\pi)^2}$. 24. $f(z)= \dfrac{1-\sin z}{(2z-\pi)z}$.

25. $f(z)= e^{\frac{1}{z-i}}$. 26. $f(z)= \cos\dfrac{\pi}{z+i}$. 27. $f(z)= \sin\dfrac{\pi}{z+i}$.

28. $f(z)= \cos\dfrac{1}{z^2}$. 29. $f(z)= \sin\dfrac{1}{z^2}$. 30. $f(z)= e^{\frac{1}{z^2}}$.

31. $f(z)= z^3e^{\frac{1}{z}}$.

1.11. Найти вычеты в особых (конечных) точках следующих функций.

1. $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2+1}$.   2. $f(z)=\dfrac{\cos i-\frac{\pi}{2}z}{z^2+4}$.   3. $f(z)=\dfrac{iz}{z^2+9}$.

4. $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{z^2-z}$.   5. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} iz}{z^2+z}$.   6. $f(z)=\dfrac{\cos i\pi z}{z^2+iz}$.

7. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} iz}{z^2-3z+2}$.   8. $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z-3)}$.   9. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^2}$.

10. $f(z)=\dfrac{e^{2iz}+1}{z-\pi}$ 11. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$.   12. $f(z)=\dfrac{e^z+1}{z^4}$.

13. $f(z)=\dfrac{\sin iz}{z^4}$.   14. $f(z)=\dfrac{\cos iz}{z^4}$.   15. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^4}$.

16. $f(z)=\dfrac{e^{iz}+1}{z^5}$.   17. $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}$.   18. $f(z)=\dfrac{iz^2}{(z+1)(z-i)^2}$.

19. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2i)^2}$.   20. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z+1)z^2}$.   21. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)z^3}$.

22. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2z^3}$.   23. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z^2)z^3}$.   24. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)z^3}$.

25. $f(z)=z^2e^{\frac{i}{z}}$.   26. $f(z)=z^4\sin\frac{i}{z}$.   27. $f(z)=z^3\cos\frac{i}{z}$.

28. $f(z)=\dfrac{1}{z^6(1-iz)}$.   29. $f(z)=\dfrac{1}{z^6(1+iz)}$.   30. $f(z)=\dfrac{1}{z^5(1+z^2)}$.

31. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)z^3}$.

1.12. Используя теорему Коши о вычетах, вычислить следующие интегралы.

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz$.   2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z^2(z^2+4)}$.   3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{1+e^{2z}}{z^2}\,dz$.

4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 2z}{(z-\pi/2)^2(z-1)}dz$. 5. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin 2z}{(z-1)^4} dz$. 6. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}dz$.

7. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z(1-z)^2} dz$. 8. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \frac{\cos 2z}{(z-1)^3} dz$. 9. $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{e^{iz}}{z^2+9} dz$.

10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z+1)^3(z-2)} dz$. 11. $\oint\limits_{|z-\pi/4|=1} \frac{\sin z}{(z^2-\frac{\pi}{4}z)} dz$. 12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z-1)}dz$.

13. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z+1)^3(z-2)}dz$. 14. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \frac{\sin 2z}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2} dz$. 15. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{(1-\cos z)}{z^2(z-3)}dz$.

16. $\oint\limits_{|z|=20} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}dz$. 17. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi/2)}dz$. 18. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3} dz$.

19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos 2z}{z^2(z-i)} dz$. 20. $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}z)}{(z-1)(z-2)}dz$. 21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2\sin z}{\cos z} dz$.

22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \mathrm{ctg}\,\pi z\,dz$. 23. $\oint\limits_{|z|=1/2} z\,\mathrm{ctg}\,\pi z\,dz$. 24. $\oint\limits_{|z|=1/2} z^2\mathrm{ctg}\,\pi z\,dz$.

25. $\oint\limits_{|z|=1} \mathrm{tg}\,\pi z\,dz$. 26. $\oint\limits_{|z|=2} z\,\mathrm{tg}\,z\,dz$. 27. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z}{(z-1)^2(z-2)^2} dz$.

28. $\oint\limits_{|z|=1} z^5\cos\frac{i}{z}dz$. 29. $\oint\limits_{|z|=1} z^3e^{\frac{i}{z}}dz$. 30. $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{i}{z} dz$.

31. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^{11}(1-iz)^2} dz$.

1.13. Вычислить несобственный интеграл от действительной функции, используя теорему Коши о вычетах.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+81)(x^2+4)}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+100)(x^2+9)}\,dx.$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-4}{(x^2+100)(x^2+9)}\,dx.$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{(x^2+81)(x^2+25)}\,dx.$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+9}{(x^2+1)(x^2+81)}\,dx.$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+1)(x^2+100)}\,dx.$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+8}{(x^2+4)(x^2+16)}\,dx.$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6}{(x^2+16)(x^2+1)}\,dx.$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-2}{(x^2+16)(x^2+25)}\,dx.$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+36)(x^2+25)}\,dx.$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6}{(x^2+36)(x^2+9)}\,dx.$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-9}{(x^2+36)(x^2+81)}\,dx.$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+36)(x^2+100)}\,dx.$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx.$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+4)^2}\,dx.$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+8}{(x^2+4)^2}\,dx.$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+9)^2}\,dx.$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+15}{(x^2+9)^2}\,dx.$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-6}{(x^2+9)^2}\,dx.$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+16)^2}\,dx.$

24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+48}{(x^2+16)^2}\,dx.$

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+8}{(x^2+16)^2}\,dx.$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{(x^2+25)^2}\,dx.$

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+50}{(x^2+25)^2}\,dx.$

28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+100}{(x^2+25)^2}\,dx.$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6}{(x^2+36)^2}\,dx.$

30. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+25}{(x^2+100)^2}\,dx.$

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+72}{(x^2+36)^2}\,dx.$

1.14. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+1)^2}\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}\,dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\cos x}{(x^2+9)^2}\,dx.$

11. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx.$

12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$

13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^4+10x^2+9}\,dx.$

15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2}\,dx.$

17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+100)^2}dx.$

18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx.$

19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+20x^2+64}dx.$

20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^2+64)^2}dx.$

21. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}dx.$

22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+16)^2}dx.$

23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+25)^2}dx.$

24. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx.$

25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx.$

26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx.$

27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$

28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

29. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx.$

30. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx.$

31. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx.$

РАЗДЕЛ 2

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача 2.1. Найти $F(p)$, если $f(t)=te^{12t}\sin 5t$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f_1(t)=t\sin 5t$. Используя таблицу оригиналов, получим:

$$t\sin 5t \risingdotseq \frac{2p5}{(p^2+5^2)^2}.$$

Далее применим теорему смещения. Так как $f_1(t)e^{12t} \risingdotseq F(p-12)$, то в полученном ранее изображении надо заменить p на $p-12$. Следовательно,

$$te^{12t}\sin 5t \risingdotseq \frac{2(p-12)5}{[(p-12)^2+25]^2} = \frac{10p-120}{(p^2-24p+169)^2}.$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{10p-120}{(p^2-24p+169)^2}$.

Задача 2.2. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 11t\cdot\sin 5t}{t}\,dt.$$

Решение. Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$, и пусть несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad \text{сходится,}$$

тогда из теоремы об интегрировании изображения следует:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(p)dp.$$

Таким образом, вычисление левого интеграла (часто неберущегося) сводится к вычислению более простого интеграла от функции F(p). Преобразуем сначала числитель подынтегрального выражения:

$$\sin 11t\cdot\sin 5t = \frac{1}{2}\,[\cos(11t-5t) - \cos(11t+5t)] = \frac{1}{2}[\cos 6t-\cos 16t].$$

Далее изображение определяется по таблице:

$$\sin 11t\cdot\sin 5t = \frac{1}{2}[\cos 6t-\cos 16t] \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+6^2} - \frac{p}{p^2+16^2}\right] = F(p).$$

Подставляем F(P) и вычисляем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+6^2} - \frac{p}{p^2+16^2}\right]dp = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{d(p^2+6^2)}{p^2+6^2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{d(p^2+16^2)}{p^2+16^2} =$$

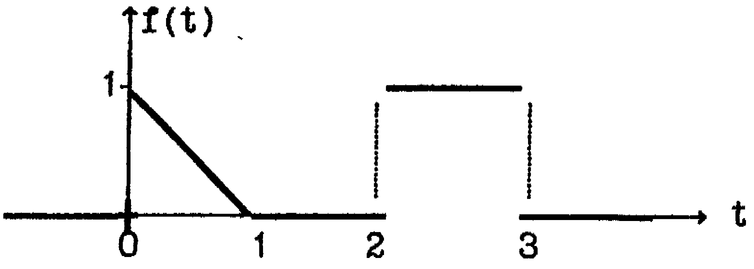
$$= \left[\frac{1}{4}\ln(p^2+6^2) - \frac{1}{4}\ln(p^2+16^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+6^2}{p^2+16^2}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{p\to+\infty}\ln\frac{p^2+6^2}{p^2+16^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{6^2}{16^2} = \frac{1}{4}\left[\ln 1 - \ln\left(\frac{6}{16}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{16}{6} = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$$

Итак, $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 11t\cdot\sin 5t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

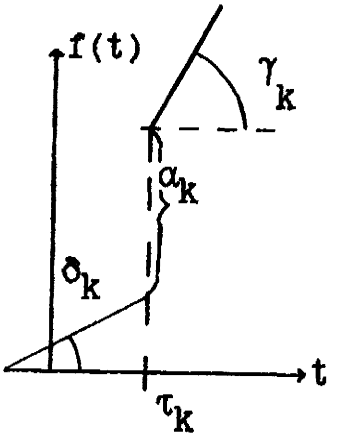
Задача 2.3. Найти изображение кусочно-линейной функции:



Решение. Изображение кусочно-линейной функции можно определить по формуле

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\tau_k p} \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right),$$

где τ_k – точки разрыва функции $f(t)$ или $f'(t)$;
α_k – скачок функции в точке разрыва;
β_k – скачок производной в узлах "стыка":
$\beta_k = tg\gamma_k - tg\delta_k$.



В рассматриваемой задаче точки разрыва следующие:
$\tau_1=0,\ \tau_2=1,\ \tau_3=2,\ \tau_4=3$;

скачки функции $f(t)$: $\alpha_1=1,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=-1$;

скачки производной $f'(t)$: $\beta_1=-1,\ \beta_2=1,\ \beta_3=0,\ \beta_4=0$.

Следовательно, подставляя α_k и β_k в формулу, можем найти

$$F(p)= e^{-0\cdot p}\left(-\frac{1}{p} + \frac{-1}{p^2}\right) + e^{-1p}\left(\frac{0}{p} + \frac{1}{p^2}\right) + e^{-2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{0}{p^2}\right) + e^{-3p}\left(\frac{-1}{p} + \frac{0}{p^2}\right).$$

Ответ: $F(p)= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p} - \frac{1}{p}e^{-3p}$.

Задача 2.4. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{10p+15}{p^3+4p^2+5p}=\frac{10p+15}{p(p^2+4p+5)}.$$

Решение. Сначала надо правую часть разложить на сумму элементарных дробей:

$$\frac{10p+15}{p(p^2+4p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+5}.$$

Определяем, что $A=3,\ C=-2,\ B=-3.$

Следовательно, $F(p)=\dfrac{3}{p}+\dfrac{-3p-2}{p^2+4p+5}.$

Выделим полный квадрат в знаменателе,
а в числителе - скобку $(p+2)$:

$$F(p)=\frac{3}{p}+\frac{-3p-2}{p^2+4p+5}=\frac{3}{p}-\frac{3(p+2)}{(p+2)^2+1^2}+\frac{4}{(p+2)^2+1^2}.$$

Далее определяем оригинал каждого слагаемого в $F(p)$:

$$\frac{3}{p}\risingdotseq 3\cdot 1;$$

$$\frac{3(p+2)}{(p+2)^2+1^2}\risingdotseq 3\cdot e^{-2t}\cos t;$$

$$\frac{4}{(p+2)^2+1^2}\risingdotseq 4\cdot e^{-2t}\sin t.$$

Следовательно, $F(p)\risingdotseq 3-3e^{-2t}\cos t+4e^{-2t}\sin t=f(t).$

Ответ: $f(t)=3-3e^{-2t}\cos t+4e^{-2t}\sin t.$

Задача 2.5. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

$$y'' - y = te^{-t}.$$

Решение. Сначала надо от дифференциального уравнения перейти к алгебраическому, для этого перейдем от исходной функции к ее изображению:

$$y(t) \risingdotseq Y(p);$$

$$y'(t) \risingdotseq p\,Y(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

Применяя свойство линейности, перейдем к уравнению

$$p^2Y(p) - Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2},$$

где $\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t}$ – образ правой части дифференциального уравнения.

Решим полученное алгебраическое уравнение

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p^2-1)}$$

и найдем оригинал правой части.

Для этого ее разложим на элементарные дроби.

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^3(p-1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{(p+1)^3} + \frac{D}{p-1}.$$

Далее определим, что $A=-1/8$, $B=-1/4$, $C=-1/2$, $D=1/8$. Итак,

$$Y(p) = \frac{-1/8}{p+1} + \frac{-1/4}{(p+1)^2} + \frac{-1/2}{(p+1)^3} + \frac{1/8}{p-1}.$$

Определяем по таблице оригиналы и получаем:

$$Y(p) \risingdotseq -\frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2e^{-t} + \frac{1}{8}e^t = y(t).$$

Ответ: $y(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{4}t^2e^{-t} + \frac{1}{8}e^t.$

Задача 2.6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=1$.

$$y'' - 2y' + y = e^t.$$

Решение. Переходим от функции к ее изображению:

$$y(t) \risingdotseq Y(p);$$
$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p);$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Перейдем к алгебраическому уравнению:

$$p^2Y(p) - 1 - 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

или $\quad Y(p)[p^2 - 2p + 1] = \frac{1}{p-1} + 1.$

Решим это уравнение:

$$Y(p) = \left[\frac{1}{p-1} + 1\right]\frac{1}{(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

В данном случае правая часть представима в виде элементарных дробей, следовательно, сразу можно найти оригинал по таблице.

$$\frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t;$$

$$\frac{1}{(p-1)^3} \risingdotseq \frac{1}{2}\, t^2e^t.$$

Итак, $Y(p) \risingdotseq te^t + \frac{1}{2}\, t^2e^t = y(t)$.

Ответ: $y(t) = te^t + \frac{1}{2}\, t^2e^t$.

Задача 2.7. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=-1$, $y''(0)=-1$.

$y''' - 2y'' = e^t$.

Решение. Переходим от функции к ее изображению:

$$y(t) \risingdotseq Y(p);$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 1;$$

$$y'''(t) \risingdotseq p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y + p + 1.$$

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Перейдем к алгебраическому уравнению:

$$p^3Y(p) + p + 1 - 2[p^2Y(p)+1] = \frac{1}{p-1}$$

или $Y(p)[p^3 - 2p^2] = \frac{1}{p-1} + 1 - p = \frac{-p^2+2p}{p-1} = \frac{-p(p-2)}{p-1}$.

Решим это уравнение:

$$Y(p) = \frac{-p(p-2)}{(p-1)(p-2)p^2} = \frac{-1}{p(p-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

В данном случае правая часть представима в виде элементарных дробей, следовательно, сразу можно найти оригинал по таблице.

$$\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t;$$

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1.$$

Итак, $Y(p) \risingdotseq -e^t + 1 = y(t)$.

Ответ: $y(t) = -e^t + 1$.

<u>Задачи 2.8 и 2.9</u>. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - y, & x(0)=1, \\ y' = -x + 2y + 3, & y(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Перейдем к операторной системе.
Заменим $x(t)$, $y(t)$ на их образы:

$$x(t) \risingdotseq X(p), \qquad x'(t) \risingdotseq pX - 1,$$

$$y(t) \risingdotseq Y(p), \qquad y'(t) \risingdotseq pY, \qquad 3 \risingdotseq \frac{3}{p}.$$

Подставим в систему и получим:

$$\left.\begin{aligned} pX - 1 &= 2X - Y, \\ pY &= -X + 2Y + \frac{3}{p}, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} X(p-2) + Y = 1, \\ +X + Y(p-2) = \dfrac{2}{p}. \end{cases}$$

Решим полученную алгебраическую систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ +1 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 - 1 = (p-1)(p-3);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{p} & p-2 \end{vmatrix} = p-2 - \frac{3}{p} = \frac{p^2-2p-3}{p};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ +1 & \frac{3}{p} \end{vmatrix} = \frac{3(p-2)}{p} - 1 = \frac{2p-6}{p};$$

$$X = \frac{p^2-2p-3}{p(p-1)(p-3)}; \qquad Y = \frac{2p-6}{p(p-1)(p-3)}.$$

Разложим на простые дроби и по таблице определим оригиналы:

$$X = \frac{p^2-2p-3}{p(p-1)(p-3)} = \frac{-1}{p} + \frac{2}{p-1} + \frac{0}{p-3} \risingdotseq -1+2e^t = x(t);$$

$$Y = \frac{2p-6}{p(p-1)(p-3)} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p-1} + \frac{0}{p-3} \risingdotseq -2+2e^t = y(t).$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = 2e^t - 1, \\ y(t) = 2e^t - 2. \end{cases}$

<u>Задача 2.10.</u> Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -x + y + z, & x(0)=2, \\ y' = x - y + z, & y(0)=2, \\ z' = x + y - z, & z(0)=-1. \end{cases}$$

Решение. Перейдем к изображениям:

$$x(t) \risingdotseq X(p), \qquad x'(t) \risingdotseq pX - 2,$$
$$y(t) \risingdotseq Y(p), \qquad y'(t) \risingdotseq pY - 2,$$
$$z(t) \risingdotseq Z(p), \qquad z'(t) \risingdotseq pZ + 1.$$

Подставим в систему и получим операторную систему

$$\left.\begin{array}{l} pX - 2 = -x+Y+z, \\ pY - 2 = X-Y+Z, \\ pZ + 1 = X+Y-Z \end{array}\right\} \text{ или } \left\{\begin{array}{l} (p+1)X - Y - Z = 2, \\ -X + (p+1)Y - Z = 2, \\ -X - Y + (p+1)Z = -1. \end{array}\right.$$

Решая, получим алгебраическую систему, найдем:

$$X = Y = \frac{2p+1}{p^2+p-2}; \qquad Z = \frac{4-p}{p^2+p-2}.$$

Разлагая полученные дроби на элементарные и пользуясь таблицей, найдем:

$$X = Y = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+2} \risingdotseq e^t + e^{-2t} = x(t) = y(t);$$

$$Z = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p+2} \risingdotseq e^t - 2e^{-2t} = z(t).$$

Ответ: $x(t) = y(t) = e^t + e^{-2t}$;

$z(t) = e^t - 2e^{-2t}$.

Задача 2.11. С помощью формулы Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

$$y'' - 4y' = \frac{16e^{8t}}{4 + e^{4t}}.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$x'' - x' = 1, \quad x(0)=x'(0)=0.$$

Решая ее, получим:

$$X(p) = -\frac{1}{16}\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{p-4};$$

$$x(t) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}e^{4t};$$

$$x'(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{4t}.$$

Решение исходной задачи можно записать в виде интеграла

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot x'(t-\tau)d\tau,$$ где $f(\tau)$ – правая часть.

$$y(t) = \int_0^t \frac{16e^{8\tau}}{4+e^{4\tau}}\cdot\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4(t-\tau)}\right]d\tau.$$

Вычислим этот интеграл и получим, что

$$y(t) = (4+e^{4t})\left[\ln(4+e^{4t}) - \ln 5\right] - e^{4t} + 1.$$

Ответ: $y(t) = (4+e^{4t})\left[\ln(4+e^{4t}) - \ln 5\right] - e^{4t} + 1.$

Задача 2.12. Решить интегральное уравнение Вольтера

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Решение. Перейдем к изображениям и, используя

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \risingdotseq F_1(p)F_2(p),$$

получим

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p).$$

Следовательно, $\Phi(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p+1}$.

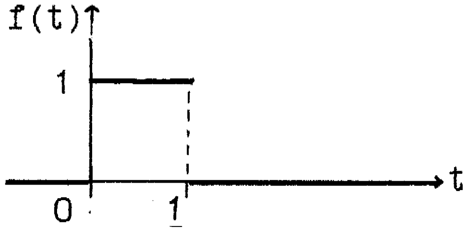
Найдем оригинал: $\varphi(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t)$.

Заменим t на x и получим окончательный ответ.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$.

Задача 2.13. Решить задачу Коши, если $f(t)$ задана графически.

$$x'' + x = f(t), \quad x(0)=0,\ x'(0)=0.$$



Решение. Перейдем к операторному уравнению:

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p), \quad x''(t) \risingdotseq p^2X(p).$$

Образ $f(t)$ определим по формуле из задачи 2.3:

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

Подставляем все в уравнение:

$$p^2X + X = \frac{1-e^{-p}}{p} \quad \text{или} \quad (p^2+1)X = \frac{1-e^{-p}}{p}, \text{следовательно,}$$

$$X = \frac{1-e^{-p}}{p(p^2+1)} = \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right](1-e^{-p}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right).$$

Для отыскания оригинала используем таблицу и теорему запаздывания:

$$f(t-\tau)\eta(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p), \quad \text{где } \eta(t-\tau)=\begin{cases} 1, & t>\tau, \\ 0, & t<\tau. \end{cases}$$

Получим: $\dfrac{1}{p} \risingdotseq 1$; $\dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t$;

$$e^{-p}\frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t-1); \qquad e^{-p}\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos(t-1)\eta(t-1).$$

Следовательно: $x(t) = ((1-\cos t) - (1-\cos(t-1))\eta(t-1), \quad t>0.$

Ответ: $x(t)=((1-\cos t) - (1-\cos(t-1))\eta(t-1), \ t>0.$

ЗАДАНИЯ

2.1. Найти изображение функции.

1. $f(t) = t \cdot e^{-5t} \sin 11t$.

2. $f(t) = t \cdot e^{-4t} \cos 15t$.

3. $f(t) = t \cdot e^{3t} \sin 4t$.

4. $f(t) = t \cdot e^{-3t} \cos 8t$.

5. $f(t) = t \cdot e^{-2t} \sin 6t$.

6. $f(t) = t \cdot e^{-5t} \cos 12t$.

7. $f(t) = t \cdot e^{-4t} \sin 13t$.

8. $f(t) = t \cdot e^{-11t} \cos 10t$.

9. $f(t) = t \cdot e^{-14t} \sin 7t$.

10. $f(t) = t \cdot e^{2t} \sin 5t$.

11. $f(t) = t \cdot e^{3t} \sin 2t$.

12. $f(t) = t \cdot e^{-3t} \sin 2t$.

13. $f(t) = t \cdot e^{7t} \cos 2t$.

14. $f(t) = t \cdot e^{-2t} \sin 5t$.

15. $f(t) = t \cdot e^{-3t} \cos 7t$.

16. $f(t) = t \cdot e^{-4t} \cos 4t$.

17. $f(t) = t \cdot e^{-7t} \sin 3t$.

18. $f(t) = t \cdot e^{-t} \cos 11t$.

19. $f(t) = t \cdot e^{-11t} \cos 9t$.

20. $f(t) = t \cdot e^{-9t} \cos 10t$.

21. $f(t) = t \cdot e^{-5t} \cos 7t$.

22. $f(t) = t \cdot e^{-5t} \sin 6t$.

23. $f(t) = t \cdot e^{-10t} \sin 9t$.

24. $f(t) = t \cdot e^{3t} \cos 10t$.

25. $f(t) = t \cdot e^{-3t} \sin 10t$.

26. $f(t) = t \cdot e^{-8t} \sin 10t$.

27. $f(t) = t \cdot e^{8t} \cos 10t$.

28. $f(t) = t \cdot e^{8t} \sin 5t$.

29. $f(t)= t\cdot e^{-8t}\cos 7t$.

30. $f(t)= t\cdot e^{2t}\sin 3t$.

31. $f(t)= t\cdot e^{2t}\sin 9t$.

2.2. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}\,dt$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 4t}{t}\,dt$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\,dt$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t}\sin 4t}{t}\,dt$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 5t}{t}\,dt$.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 7t}{t}\,dt$.

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-4t}\sin 3t}{t}\,dt$.

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-4t}\sin 5t}{t}\,dt$.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-5t}\sin 3t}{t}\,dt$.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-5t}\sin 4t}{t}\,dt$.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 5t-\cos 3t}{t}\,dt$.

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 7t-\cos 3t}{t}\,dt$.

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2t-\cos 5t}{t}\,dt$.

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 3t-\cos 7t}{t}\,dt$.

15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4t - \cos 7t}{t}\, dt.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4t - \cos 5t}{t}\, dt.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 7t}{t}\, dt.$

18. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 9t}{t}\, dt.$

19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 7t - \cos 11t}{t}\, dt.$

20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 7t - \cos 9t}{t}\, dt.$

21. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 9t - \cos 8t}{t}\, dt.$

22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 10t - \cos 7t}{t}\, dt.$

23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3t \cdot \sin 5t}{t}\, dt.$

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 4t \cdot \sin 5t}{t}\, dt.$

25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5t \cdot \sin 7t}{t}\, dt.$

26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 6t \cdot \sin 5t}{t}\, dt.$

27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 7t \cdot \sin 10t}{t}\, dt.$

28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 8t \cdot \sin 9t}{t}\, dt.$

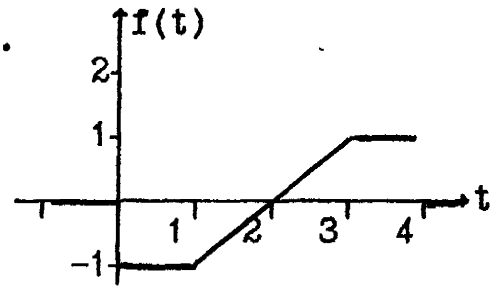
29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 9t \cdot \sin 6t}{t}\, dt.$

30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 10t \cdot \sin 17t}{t}\, dt.$

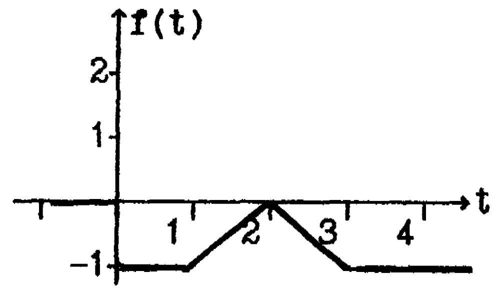
31. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t}\, dt.$

2.3. По данному графику f(t) найти изображение F(p).

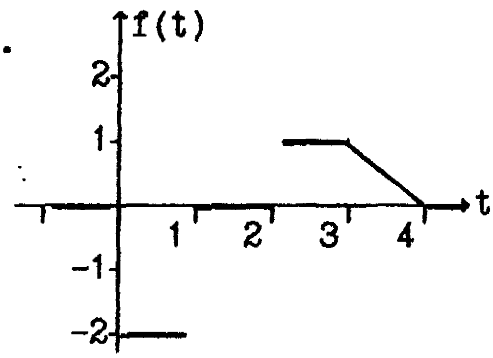
1.



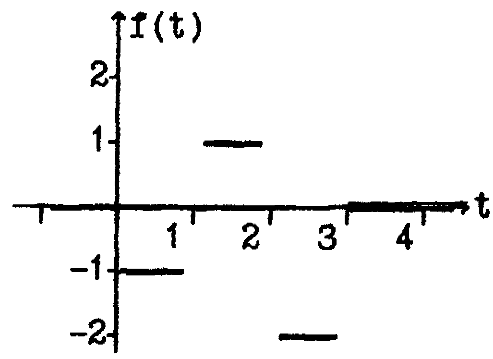
2.



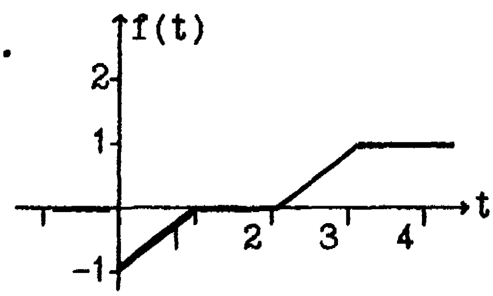
3.



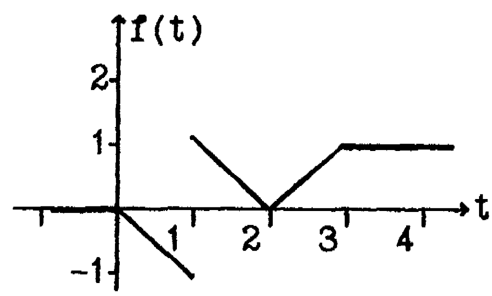
4.



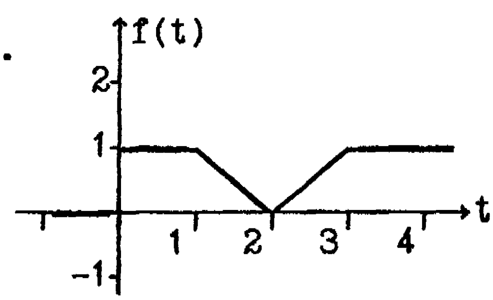
5.



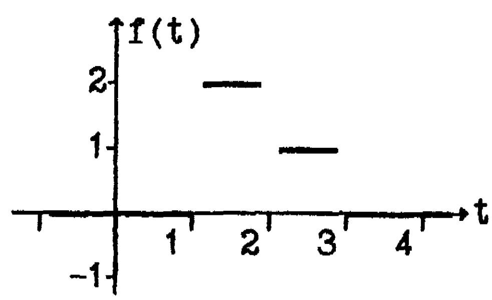
6.



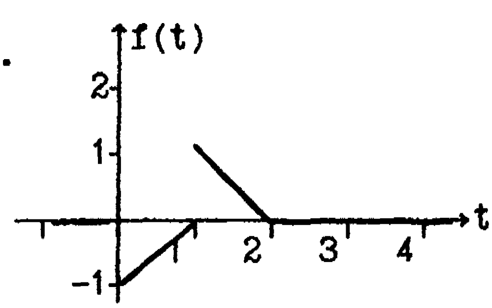
7.



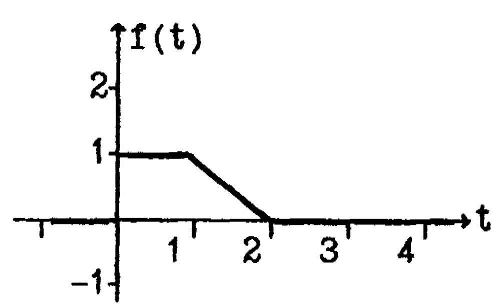
8.



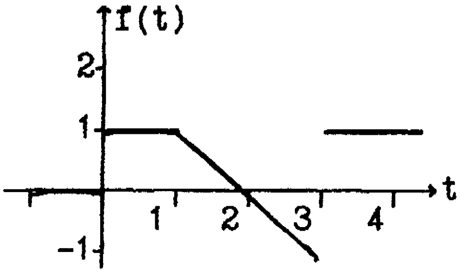
9.



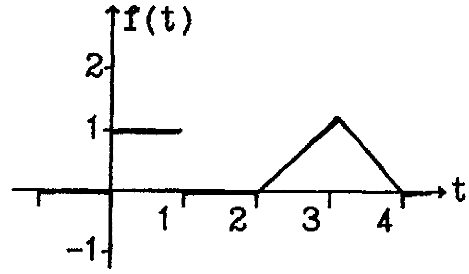
10.



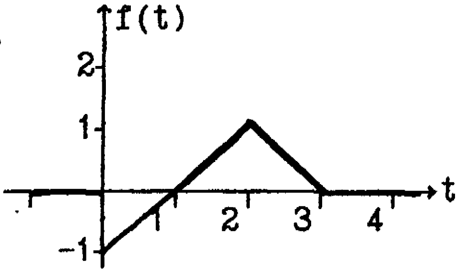
11.



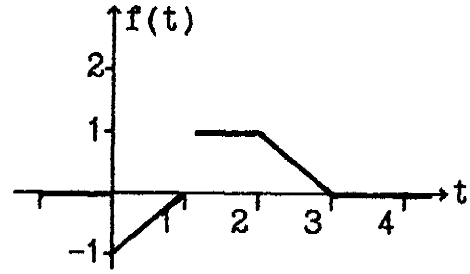
12.



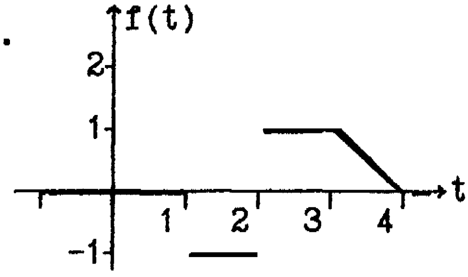
13.



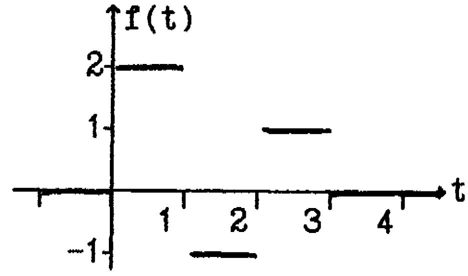
14.



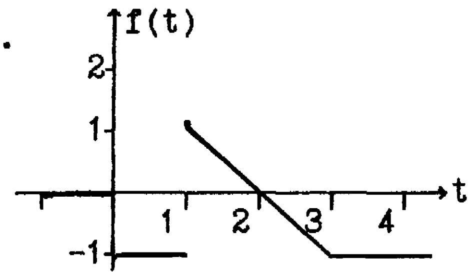
15.



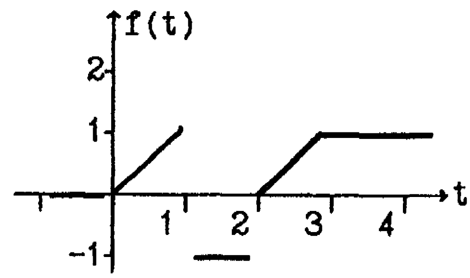
16.



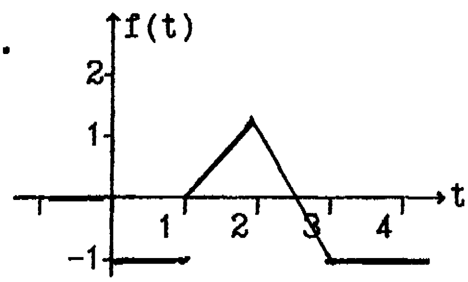
17.



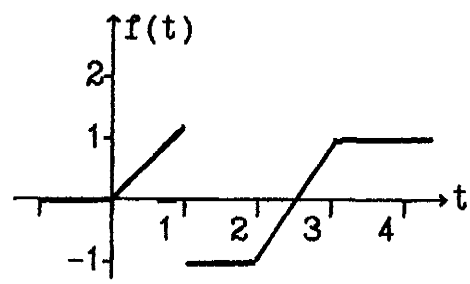
18.



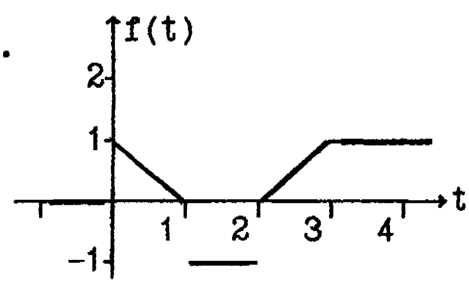
19.



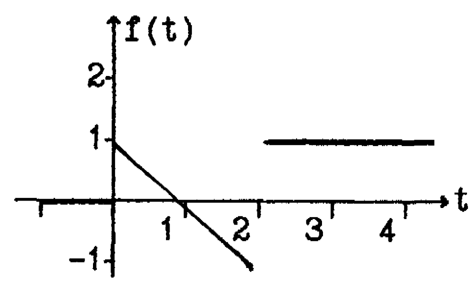
20.



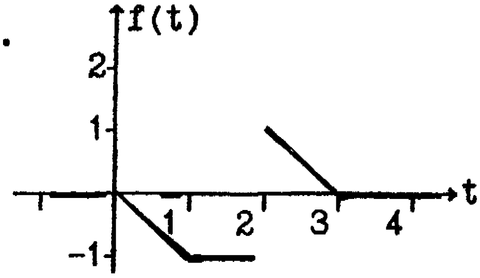
21.



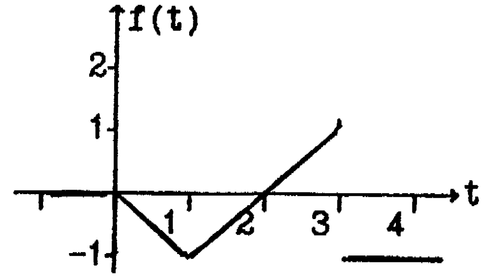
22.



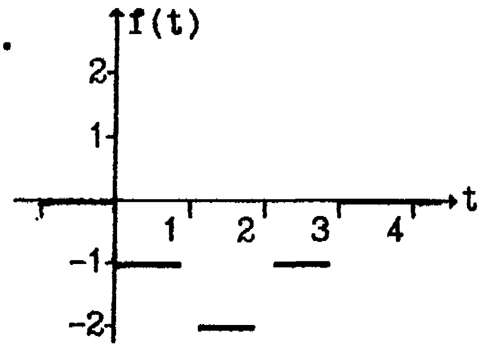
23.



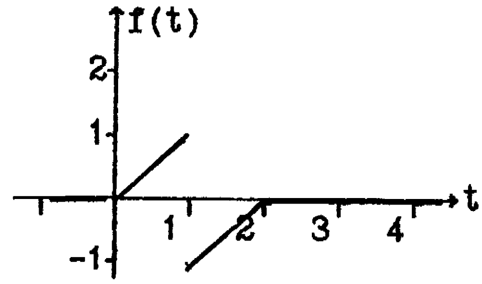
24.



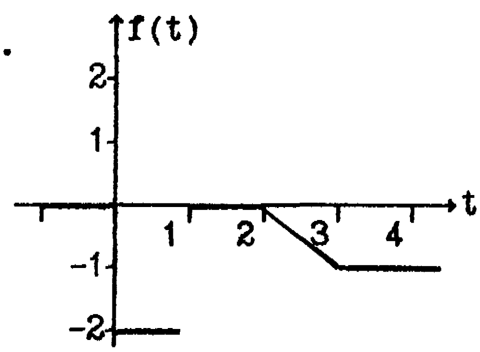
25.



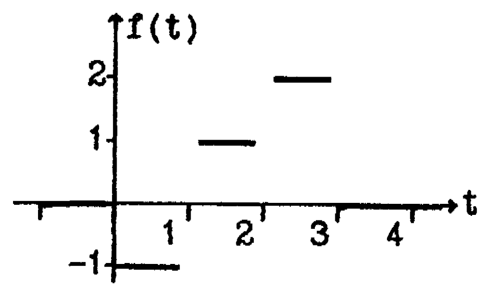
26.



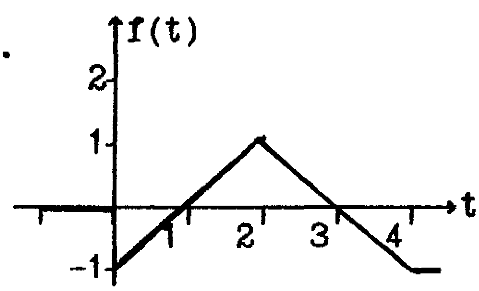
27.



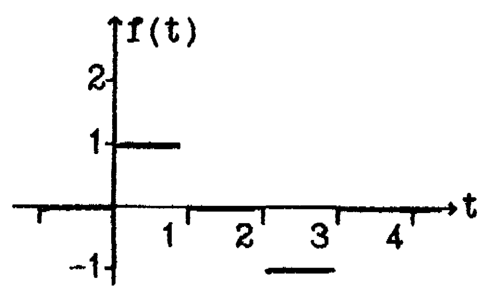
28.



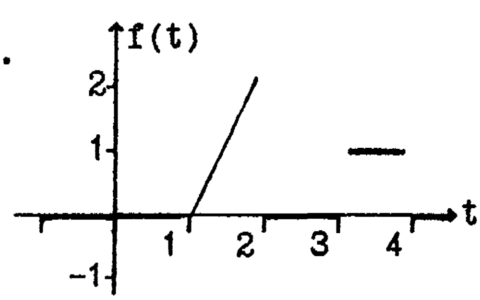
29.



30.



31.



2.4. Найти оригинал по заданному изображению.

1. $F(p)=\dfrac{6p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

3. $F(p)=\dfrac{3p+8}{(p+1)(p^2+4p+8)}$.

4. $F(p)=\dfrac{2p-p^2+1}{p(p+1)(p^2+1)}$.

5. $F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2+2p+3)}$.

6. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

7. $F(p)=\dfrac{6}{p^3-8}$.

8. $F(p)=\dfrac{12}{p^3+8}$.

9. $F(p)=\dfrac{8}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

10. $F(p)=\dfrac{p-5}{p(p^2+4p+5)}$.

11. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

12. $F(p)=\dfrac{2p+10}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

13. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+2p+1)}$.

14. $F(p)=\dfrac{2(3p+2)}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

15. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

16. $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2-4)}$.

17. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

18. $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2-1)}$.

19. $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

20. $F(p)=\dfrac{10}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

21. $F(p)=\dfrac{10}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22. $F(p)=\dfrac{13}{(p-2)(p^2+2p+5)}$.

23. $F(p)=\dfrac{p+8}{p(p^2+4p+8)}$.

24. $F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2+2p+3)}$.

25. $F(p)=\dfrac{5}{(p+1)(p^2-2p+2)}$.

26. $F(p)=\dfrac{-8p+17}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

27. $F(p)=\dfrac{11p-23}{(p-1)(p^2-p-12)}$.

28. $F(p)=\dfrac{p+5}{p(p^2-2p+5)}$.

29. $F(p)=\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

30. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-4)(p^2-4p+5)}$.

31. $F(p)=\dfrac{7-2p}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

2.5. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

1. $y'' + y = t.$	2. $y'' + 4y = 8t.$
3. $y'' + 9y = 27t.$	4. $y'' + 16y = 64t.$
5. $y'' + 25y = 125t.$	6. $y'' + 36y = 216t.$
7. $y'' + 2y' = 2.$	8. $y'' - 3y' = 3.$
9. $y'' - 4y' = 4.$	10. $y'' - 5y' = 5.$
11. $y'' - y = 2t.$	12. $y'' - 4y = 32t.$
13. $y'' - 9y = 27t.$	14. $y'' - 16y = 64t.$
15. $y'' - 25y = 125t.$	16. $y'' - y = 4t.$
17. $y'' - 4y = 16t.$	18. $y'' - 9y = 54t.$
19. $y'' - 16y = 128t.$	20. $y'' - 25y = 250t.$
21. $y'' + y = 2t.$	22. $y'' + 4y = 16t.$
23. $y'' + 9y = 54t.$	24. $y'' + 16y = 128t.$
25. $y'' + 25y = 250t.$	26. $y'' + 36y = 432t.$
27. $y'' + y = 2\sin t.$	28. $y'' + 4y = 4\sin 2t.$
29. $y'' + 9y = 6\sin 3t.$	30. $y'' + 16y = 8\sin 4t.$
31. $y'' + 25y = 10\sin 5t.$	

2.6. Найти решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + y = 2e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
2. $y'' - y = t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
3. $y'' + y = 2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
4. $y'' - y = 3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
5. $y'' + 2y' = 6e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=6$.
6. $y'' + y' - 2y = 1-2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
7. $y'' + 9y = 6\sin 3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.
8. $y'' + 2y' = 3e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.
9. $y'' - y' = 6e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
10. $y'' + 2y' = 3e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-3$.
11. $y'' + y = t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
12. $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
13. $y'' + 3y' + 2y = e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
14. $y'' + 3y' = 4e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$.
15. $y'' - 2y' - 3y = 3$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.
16. $y'' + 4y = 4t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
17. $y'' + 9y = 9t$, $y(0)=0$, $y'(0)=9$.
18. $y'' + 5y' = 25t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
19. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0)=3$ $y'(0)=0$.
20. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
21. $y'' + 4y = 4t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
22. $y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
23. $y'' - 3y' + 2y = 12$, $y(0)=0$, $y'(0)=6$.
24. $y'' + 4y = 12\cos 2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
25. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
26. $y'' + 3y' - 10y = 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

27. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

28. $y'' - 2y' = -3e^{t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

29. $y'' + y' = 2\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

30. $y'' - y = 4\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

31. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

2.7. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y''' - y''=-12t^2 + 18t + 6$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

2. $y''' - 2y''=-24t^2 + 36t - 6$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

3. $y''' - 3y''=-36t^2 + 27t - 1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

4. $y''' - 4y''= 12t^2 - 30t + 6$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

5. $y''' - 5y''=-15t^2 - 24t + 6$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

6. $y''' + y''= t^2 + 2t + 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

7. $y''' + 2y''= 2t^2 + 2t - 4$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$.

8. $y''' + 3y''= 6t^2 + 4t -18$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-6$.

9. $y''' + 4y''= 4t^2 + 2t + 4$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

10. $y''' + 5y''= 60t^2 +100t^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

11. $y''' - y''= e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$.

12. $y''' - 2y'' = 4e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=4$.

13. $y''' - 3y'' = 9e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=6$.

14. $y''' - 4y'' = 16e^{4t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=8$.

15. $y''' - 5y'' = 25e^{5t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=10$.

16. $y''' - y' = 2e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$.

17. $y''' - 4y' = 8e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=4$.

18. $y''' - 9y' = 18e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=6$.

19. $y''' - 16y' = 32e^{4t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=8$.

20. $y''' - 25y' = 50e^{5t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=10$.

21. $y''' - y' = (4t+6)e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

22. $y''' - 4y' = (16t+12)e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

23. $y''' - 2y'' + y' = 2e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

24. $y''' - 4y'' + 4y' = 4e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

25. $y''' + y'' - 2y' = (6t+8)e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

26. $y''' - y'' - 2y' = (12t+10)e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8t+10)e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

28. $y''' + 2y'' - 8y' = (24t+16)e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

29. $y''' + y'' = e^{-t}$, $\quad y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=-2.$

30. $y''' + 2y''=4e^{-2t}$, $\quad y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=-4.$

31. $y''' + 6y''=72t^2+60t+6$, $\quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0.$

2.8. Решить систему дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, & x(0)=-1, \\ y' = x - y + 1, & y(0)=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=-x + 3y + 1, & x(0)=1, \\ y' = x + y, & y(0)=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 4y, & x(0)=1, \\ y'=2x - y + 9, & y(0)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, & x(0)=0, \\ y'=4x - y, & y(0)=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=2x + 5y, & x(0)=1, \\ y' = x - 2y + 2, & y(0)=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=-2x + 5y + 1, & x(0)=0, \\ y' = x + 2y + 1, & y(0)=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'=3x + y, & x(0)=2, \\ y'=-5x - 3y + 2, & y(0)=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=-3x - 4y + 1, & x(0)=0, \\ y' = 2x + 3y, & y(0)=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'=-2x + 6y + 1, & x(0)=0, \\ y'=2x + 2y, & y(0)=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'=2x + 3y + 1, & x(0)=0, \\ y'=4x - 2y, & y(0)=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, & x(0)=0, \\ y'=2x + y + 1, & y(0)=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, & x(0)=-1, \\ y'=-4x + 4, & y(0)=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'=-x - 2y + 1, & x(0)=1, \\ y'=-1{,}5x + y, & y(0)=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x'=3x + 5y - 6, & x(0)=0, \\ y'=3x + y, & y(0)=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x'=3x + 2y, & x(0)=0, \\ y'=2{,}5x - y + 2, & y(0)=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 2y, & x(0)=-1, \\ y'=2x + 3, & y(0)=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x'=2x+8y+1, & x(0)=0, \\ y'=3x+4y, & y(0)=1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x'=2x+2y+2, & x(0)=0, \\ y'=4y, & y(0)=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x'=x+y, & x(0)=1, \\ y'=4x+y+1, & y(0)=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x'=x-2y+1, & x(0)=0, \\ y'=-3x, & y(0)=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x'=3y+2, & x(0)=0, \\ y'=x+2y, & y(0)=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x'=x+4y+1, & x(0)=0, \\ y'=2x+3y, & y(0)=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x'=2y, & x(0)=2, \\ y'=2x+3y+1, & y(0)=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x'=-2x+y, & x(0)=1, \\ y'=3x+1, & y(0)=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x'=4x+3, & x(0)=0, \\ y'=x+2y, & y(0)=1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x'=y+3, & x(0)=1, \\ y'=x+2, & y(0)=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x'=x+3y+1, & x(0)=0, \\ y'=x-y, & y(0)=1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'=-x+3y+1, & x(0)=0, \\ y'=x+y, & y(0)=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x'=3y, & x(0)=2, \\ y'=3x+1, & y(0)=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x'=x+3y+4, & x(0)=2, \\ y'=x-y, & y(0)=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x'=-2x+y, & x(0)=0, \\ y'=3x+3, & y(0)=1. \end{cases}$

2.9. Решить систему, если $x(0)=0$, $y(0)=0$.

1. $\begin{cases} x'=11x-20y+10e^t, \\ y'=12x-20y+9e^t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=-23x+12y+13e^{2t}, \\ y'=-20x+8y+14e^{2t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'=-21x-12y+10e^t, \\ y'=24x+13y-12e^t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'=-17x-20y-e^{2t}, \\ y'=12x+14y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -6x - 6y + e^{t}, \\ y' = 12x + 11y - 2e^{t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -14x + 20y - 4e^{-2t}, \\ y' = -12x + 17y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -7x - 6y - 2e^{-t}, \\ y' = 12x + 10y + 3e^{-t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 10x - 12y + 4e^{-2t}, \\ y' = 6x - 7y + 3e^{-2t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -8x + 12y - 3e^{t}, \\ y' = -20x + 23y - 2e^{t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 17x - 12y - 3e^{2t}, \\ y' = 24x - 17y - 5e^{2t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 26x - 30y + 7e^{3t}, \\ y' = 20x - 23y + 6e^{3t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 10x + 6y - 5e^{-t}, \\ y' = -12x - 7y + 6e^{-t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x + 6y + 8e^{3t}, \\ y' = -12x - 16y - 7e^{3t}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 15x + 12y - 4e^{-2t}, \\ y' = -24x - 19y + 6e^{-2t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 14x - 12y + e^{3t}, \\ y' = 20x - 17y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -14x + 6y + 7e^{-t}, \\ y' = -12x + 3y + 8e^{-t}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -17x + 20y, \\ y' = -12x + 14y + e^{3t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 17x + 12y + 6e^{-t}, \\ y' = -20x - 14y - 7e^{-t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -7x - 6y + 4e^{3t}, \\ y' = 12x + 10y - 5e^{3t}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 11x - 24y + 12e^{-t}, \\ y' = 12x - 23y + 10e^{-t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 19x + 12y - 9e^{-2t}, \\ y' = -20x - 12y + 10e^{-2t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -22x + 20y, \\ y' = -12x + 9y + e^{-2t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -11x - 12y + 3e^{2t}, \\ y' = 6x + 6y - 2e^{2t}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 9x + 24y + 13e^{-2t}, \\ y' = -12x - 25y - 11e^{-2t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -9x - 24y - 11e^{4t}, \\ y' = 12x + 25y + 9e^{4t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -11x + 24y + 8e^{6t}, \\ y' = -12x + 23y + 6e^{6t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x'=14x-6y-4e^{4t}, \\ y'=12x-3y-5e^{4t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'=5x-y, \\ y'=-x+5y-2e^{5t}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x'=7x-2y-4e^{4t}, \\ y'=-4x+5y+7e^{4t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x'=7x-4y-10e^{5t}, \\ y'=-2x+5y+2e^{5t}. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x'=-3x+y+4e^{-4t}, \\ y'=8x-y+22e^{-4t}. \end{cases}$

2.10. Решить систему уравнений.

1. $\begin{cases} x'=-y-z, & x(0)=-1, \\ y'=-x-z, & y(0)=0, \\ z'=-x-y, & z(0)=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=y+z, & x(0)=0, \\ y'=3x+z, & y(0)=5, \\ z'=3x+y, & z(0)=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'=2x+y, & x(0)=0, \\ y'=x+z, & y(0)=1, \\ z'=-3x+y-z, & z(0)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'=-2x-2y-4z, & x(0)=1, \\ y'=-2x+y-2z, & y(0)=0, \\ z'=5x+2y+7z, & z(0)=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=4x-2y-z, & x(0)=0, \\ y'=-x+3y-z, & y(0)=0, \\ z'=x-2y+2z, & z(0)=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=2x-y, & x(0)=2, \\ y'=-x+2y, & y(0)=0, \\ z'=x-y+2z, & z(0)=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'=2x-y+z, & x(0)=2, \\ y'=2y-z, & y(0)=0, \\ z'=-y+2z, & z(0)=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=4x-y-z, & x(0)=2, \\ y'=4y-z, & y(0)=2, \\ z'=-y+4z, & z(0)=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'=2x-z, & x(0)=2, \\ y'=x+2y-z, & y(0)=1, \\ z'=-x+2z, & z(0)=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'=4x+y, & x(0)=1, \\ y'=x+4y, & y(0)=-1, \\ z'=-x+y+4z, & z(0)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'=5x-4y+4z, & x(0)=1, \\ y'=2x+y+2z, & y(0)=1, \\ z'=2x+3z, & z(0)=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x'=2x-2y+2z, & x(0)=3, \\ y'=3y, & y(0)=1, \\ z'=2y+z, & z(0)=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0)=0, \\ y' = 2x + 5y + 2z, & y(0)=0, \\ z' = z, & z(0)=-1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0)=0, \\ y' = 4x + 3y + 4z, & y(0)=0, \\ z' = z, & z(0)=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0)=0, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0)=0, \\ z' = 3z, & z(0)=2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, & x(0)=0, \\ y' = -x + 4y - z, & y(0)=0, \\ z' = z, & z(0)=2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0)=2, \\ y' = 2x + 5y + 2z, & y(0)=0, \\ z' = 4z, & z(0)=-1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 15x + 2y - 2z, & x(0)=1, \\ y' = 7y - 4z, & y(0)=0, \\ z' = -2y + 5z, & z(0)=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y, & x(0)=1, \\ y' = -x + 2y, & y(0)=1, \\ z' = x - y + 5z, & z(0)=1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = x - y - z, & x(0)=0, \\ y' = 3y - z, & y(0)=0, \\ z' = -y + 3z, & z(0)=2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0)=0, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0)=0, \\ z' = 6z, & z(0)=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0)=1, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0)=1, \\ z' = 6z, & z(0)=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, & x(0)=0, \\ y' = 7y - 4z, & y(0)=0, \\ z' = -2y + 5z, & z(0)=4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 9x + y - z, & x(0)=1, \\ y' = 4y - z, & y(0)=0, \\ z' = -y + 4z, & z(0)=4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 11x + y - z, & x(0)=1, \\ y' = 4y - z, & y(0)=0, \\ z' = -y + 4z, & z(0)=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x + y - z, & x(0)=1, \\ y' = 5y - z, & y(0)=4, \\ z' = -y + 5z, & z(0)=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 13x + 2y - 2z, & x(0)=0, \\ y' = 9y - 2z, & y(0)=0, \\ z' = -2y + 9z, & z(0)=2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 13x + 6y + 2z, & x(0)=1, \\ y' = 2x + 9y - 2z, & y(0)=0, \\ z' = -2x - 6y + 5z, & z(0)=0. \end{cases}$

$$29.\ \begin{cases} x' = 7x - 6y + 6z, & x(0)=1, \\ y' = 2x + 3y + 2z, & y(0)=1, \\ z' = 2x + 2y + 3z, & z(0)=0. \end{cases} \qquad 30.\ \begin{cases} x' = 7x + 2y + 2z, & x(0)=1, \\ y' = -6x + 3y + 2z, & y(0)=-2, \\ z' = 6x + 2y + 3z, & z(0)=1. \end{cases}$$

$$31.\ \begin{cases} x' = 15x + 2y - 2z, & x(0)=-1, \\ y' = 7y - 4z, & y(0)=3, \\ z' = -2y + 5z, & z(0)=0. \end{cases}$$

2.11. С помощью формулы Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

1. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^t}$. 2. $y'' - y' = \dfrac{1}{2+e^t}$. 3. $y'' - 2y' = \dfrac{4}{1+e^{2t}}$.

4. $y'' - 2y' = \dfrac{4}{2+e^{3t}}$. 5. $y'' - 3y' = \dfrac{9}{1+e^{3t}}$. 6. $y'' - 3y' = \dfrac{9}{3+e^{3t}}$.

7. $y'' - 4y' = \dfrac{16}{1+e^{4t}}$. 8. $y'' - 4y' = \dfrac{16}{4+e^{4t}}$. 9. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^t}$.

10. $y'' + y' = \dfrac{1}{2+e^t}$. 11. $y'' + 2y' = \dfrac{4}{1+e^{2t}}$. 12. $y'' + 2y' = \dfrac{4}{2+e^{2t}}$.

13. $y'' + 3y' = \dfrac{9}{1+e^{3t}}$. 14. $y'' + 3y' = \dfrac{9}{3+e^{3t}}$. 15. $y'' + 4y' = \dfrac{16}{1+e^{4t}}$.

16. $y'' + 4y' = \dfrac{16}{4+e^{4t}}$. 17. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{1+e^t}$. 18. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{2+e^t}$.

19. $y'' + 2y' = \dfrac{4e^{2t}}{1+e^{2t}}$. 20. $y'' + 2y' = \dfrac{4e^{2t}}{2+e^{2t}}$. 21. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3t}}{1+e^{3t}}$.

22. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3t}}{3+e^{4t}}$. 23. $y'' + 4y' = \dfrac{16e^{4t}}{1+e^{4t}}$. 24. $y'' + 4y' = \dfrac{16e^{4t}}{4+e^{4t}}$.

25. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$. 26. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$. 27. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{4t}}{1+e^{2t}}$.

28. $y'' - 2y' = \frac{4e^{4t}}{2 + e^{2t}}$. 29. $y'' - 3y' = \frac{9e^{6t}}{1 + e^{3t}}$. 30. $y'' - 3y' = \frac{9e^{6t}}{3 + e^{3t}}$.

31. $y'' - 4y' = \frac{16e^{8t}}{1 + e^{4t}}$.

2.12. Решить интегральное уравнение Вольтера.

1. $\varphi(x) = \sin 2x + 4\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 2. $\varphi(x) = \sin 3x + 9\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

3. $\varphi(x) = \sin 4x + 16\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 4. $\varphi(x) = \sin 5x + 25\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

5. $\varphi(x) = \sin 6x + 36\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 6. $\varphi(x) = \sin 7x + 49\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

7. $\varphi(x) = \cos 2x + 4\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 8. $\varphi(x) = \cos 3x + 9\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

9. $\varphi(x) = \cos 4x + 16\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 10. $\varphi(x) = \cos 5x + 25\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

11. $\varphi(x) = \cos 6x + 36\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$. 12. $\varphi(x) = \cos 7x + 49\int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$.

13. $\varphi(x) = x + 4\int_0^x (x - t)^2\varphi(t)dt$. 14. $\varphi(x) = x + \frac{27}{2}\int_0^x (x - t)^2\varphi(t)dt$.

15. $\varphi(x)=x+32\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$ 16. $\varphi(x)=x+\frac{125}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$

17. $\varphi(x)=x+108\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$ 18. $\varphi(x)=x+\frac{7^3}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$

19. $\varphi(x)=x+2\int_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)dt.$ 20. $\varphi(x)=x+3\int_0^x \sin 3(x-t)\varphi(t)dt.$

21. $\varphi(x)=x+4\int_0^x \sin 4(x-t)\varphi(t)dt,$ 22. $\varphi(x)=x+5\int_0^x \sin 5(x-t)\varphi(t)dt.$

23. $\varphi(x)=x+6\int_0^x \sin 6(x-t)\varphi(t)dt.$ 24. $\varphi(x)=x+7\int_0^x \sin 7(x-t)\varphi(t)dt.$

25. $\varphi(x)=\cos 2x+2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)dt.$ 26. $\varphi(x)=\cos 3x+3\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi(t)dt.$

27. $\varphi(x)=\cos 4x+4\int_0^x e^{4(x-t)}\varphi(t)dt.$ 28. $\varphi(x)=\cos 5x+5\int_0^x e^{5(x-t)}\varphi(t)dt.$

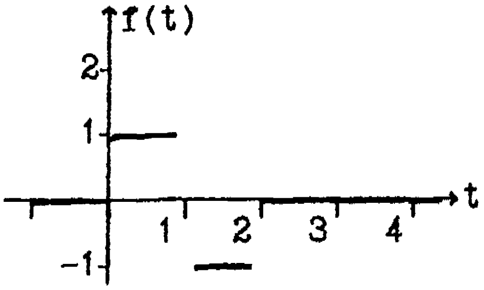
29. $\varphi(x)=\cos 6x+6\int_0^x e^{6(x-t)}\varphi(t)dt.$ 30. $\varphi(x)=\cos 7x+7\int_0^x e^{7(x-t)}\varphi(t)dt.$

31. $\varphi(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$

2.13. Решить задачу Коши $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, если $f(t)$ задана графически.

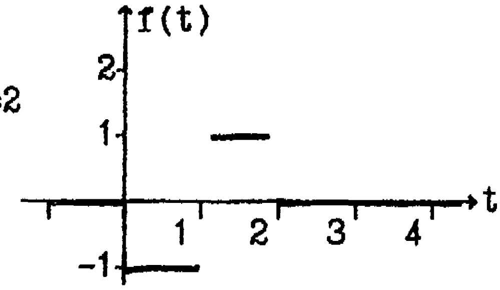
1.

$\omega=1$



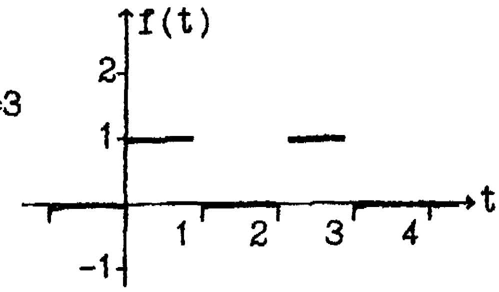
2.

$\omega=2$



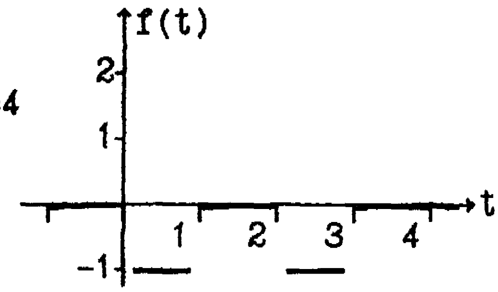
3.

$\omega=3$



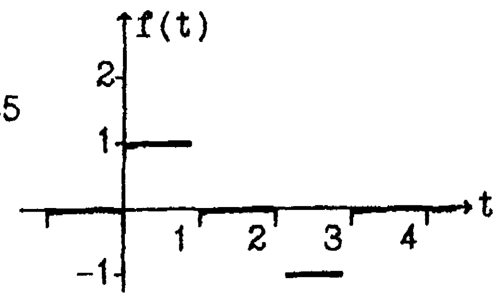
4.

$\omega=4$



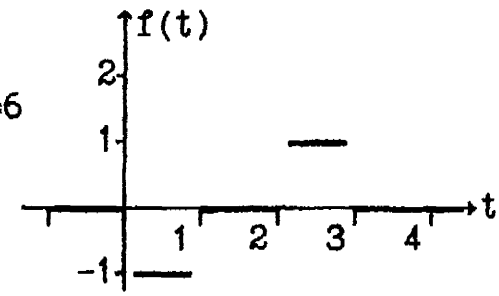
5.

$\omega=5$



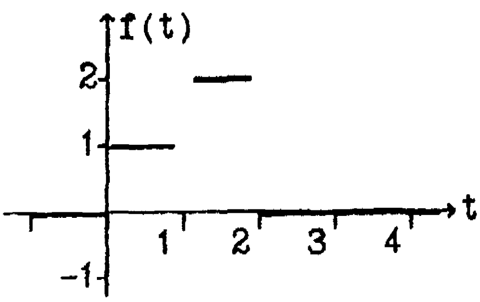
6.

$\omega=6$



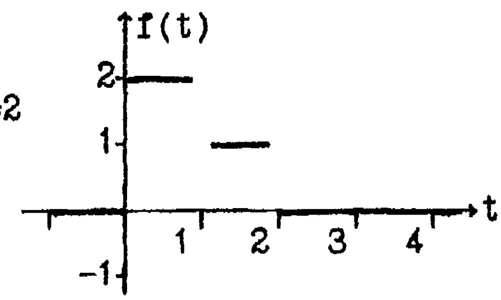
7.

$\omega=1$



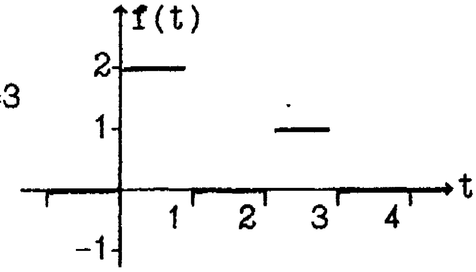
8.

$\omega=2$



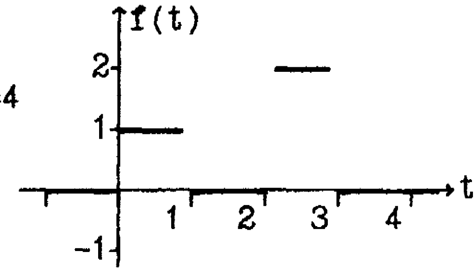
9.

ω=3



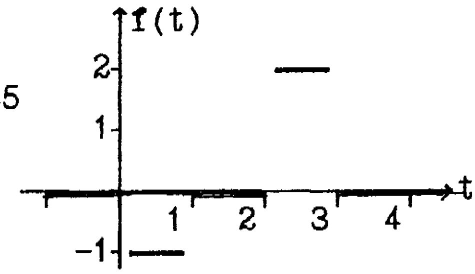
10.

ω=4



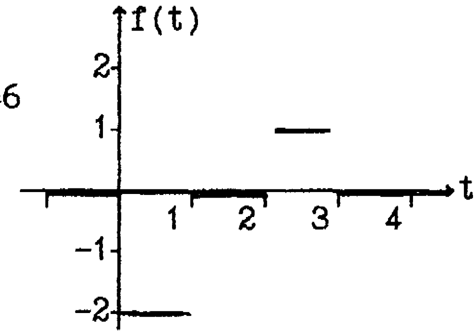
11.

ω=5



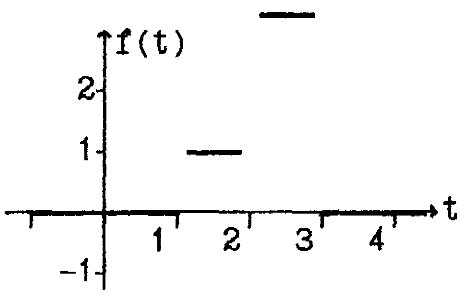
12.

ω=6



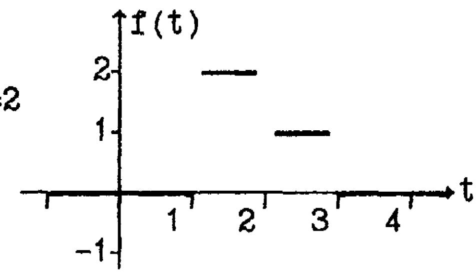
13.

ω=1



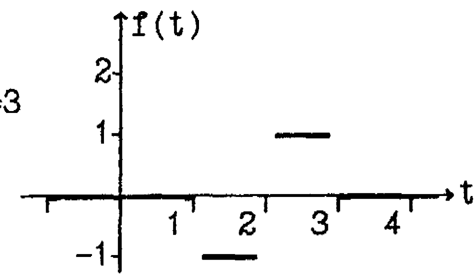
14.

ω=2



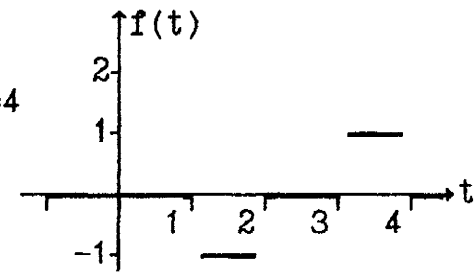
15.

ω=3



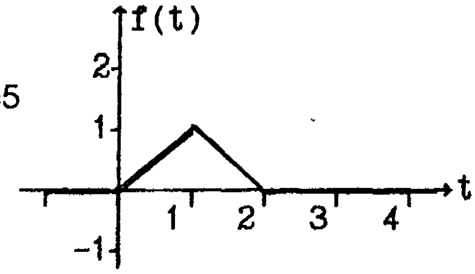
16.

ω=4



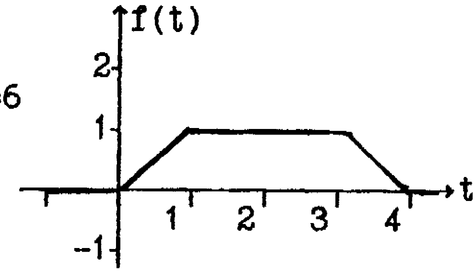
17.

ω=5



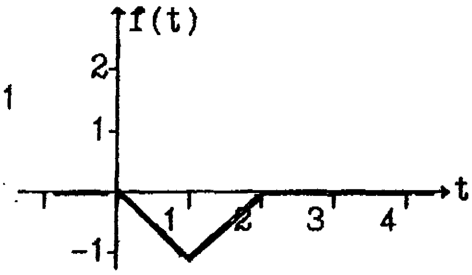
18.

ω=6



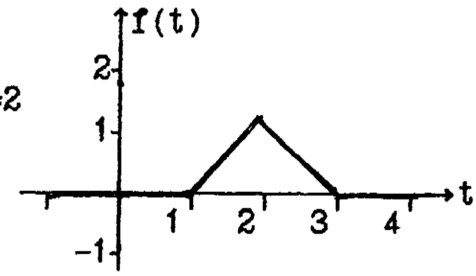
19.

ω=1



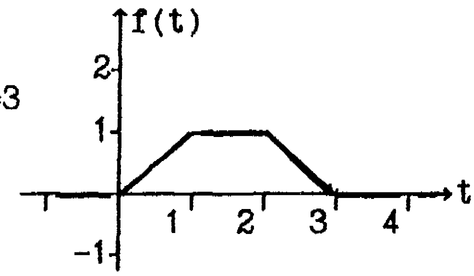
20.

ω=2



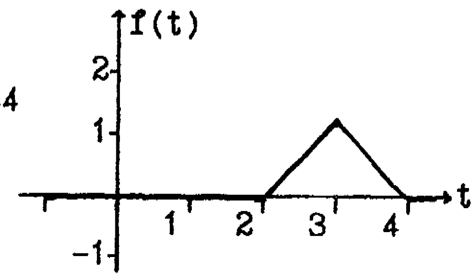
21.

ω=3



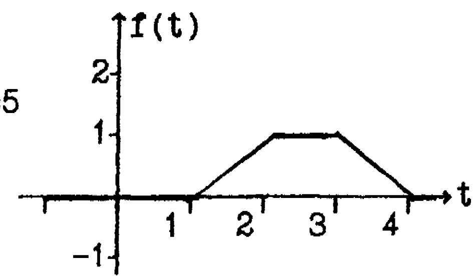
22.

ω=4



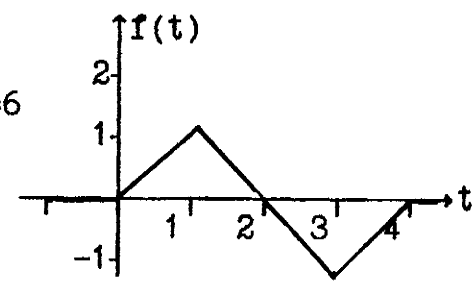
23.

ω=5



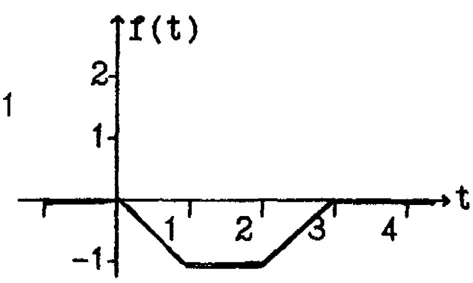
24.

ω=6



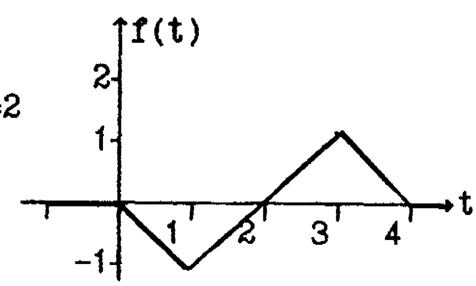
25.

ω=1



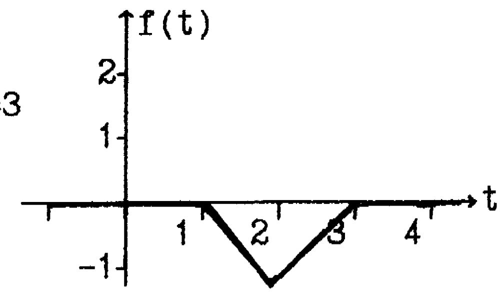
26.

ω=2



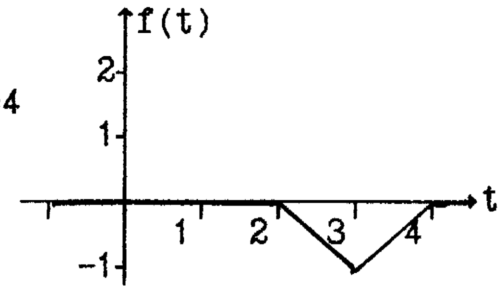
27.

$\omega=3$



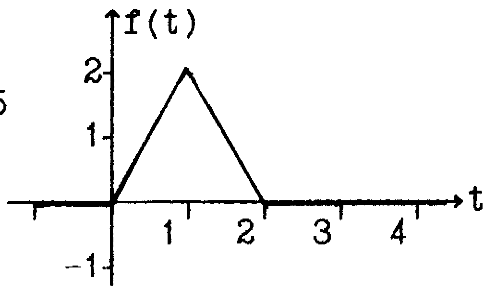
28.

$\omega=4$



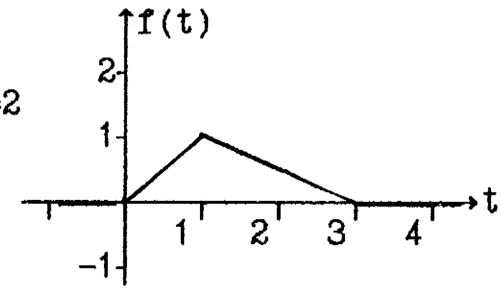
29.

$\omega=5$



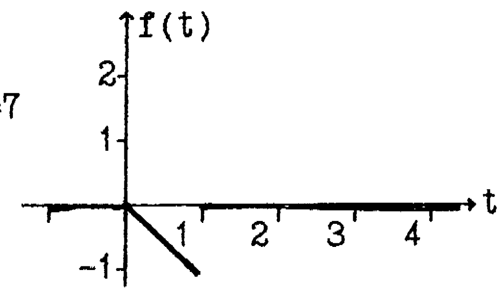
30.

$\omega=2$



31.

$\omega=7$



2.14. Решить систему уравнений.

1. $\begin{cases} x'=-21x+2y, & x(0)=2, \\ y'=-149x+13y, & y(0)=17. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=-23x+16y, & x(0)=0, \\ y'=-16x+9y, & y(0)=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'=10x-2y, & x(0)=0, \\ y'=113x-20y, & y(0)=-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'=-21x+17y, & x(0)=0, \\ y'=-17x+13y, & y(0)=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=-7x+2y, & x(0)=2, \\ y'=-53x+11y, & y(0)=9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=-13x+9y, & x(0)=0, \\ y'=-25x+17y, & y(0)=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'=-14x+5y, & x(0)=0, \\ y'=-50x+16y, & y(0)=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=10x+4y, & x(0)=0, \\ y'=-x+6y, & y(0)=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'=-9x-5y, & x(0)=0, \\ y'=52x+23y, & y(0)=-2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'=17x+y, & x(0)=0, \\ y'=-x+15y, & y(0)=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'=25x-15y, & x(0)=0, \\ y'=39x-23y, & y(0)=-3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x'=18x-5y, & x(0)=1, \\ y'=5x+8y, & y(0)=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'=6x-4y, & x(0)=2, \\ y'=2x+10y, & y(0)=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x'=4x-2y, & x(0)=3, \\ y'=5x+2y, & y(0)=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x'=6x-4y, & x(0)=1, \\ y'=2x+2y, & y(0)=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x'=-10x-5y, & x(0)=2, \\ y'=4x-6y, & y(0)=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x'=6x+5y, & x(0)=-3, \\ y'=-2x+4y, & y(0)=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x'=8x+4y, & x(0)=-1, \\ y'=-2x+4y, & y(0)=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x'=4x - 4y, & x(0)=-2, \\ y'=5x + 8y, & y(0)=5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x'=-10x + 5y, & x(0)=0, \\ y'=-5x - 4y, & y(0)=4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x'=12x - 8y, & x(0)=4, \\ y'= 5x + 8y, & y(0)=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x'=10x - 2y, & x(0)=2, \\ y'= 5x + 8y, & y(0)=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x'=-8x - 5y, & x(0)=0, \\ y'= 2x - 10y, & y(0)=-3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x'=-10x - 4y, & x(0)=0, \\ y'= 2x - 14y, & y(0)=-1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x'=10x + 5y, & x(0)=5, \\ y'=-5x + 4y, & y(0)=-3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x'= 21x - y, & x(0)=0, \\ y'=289x - 13y, & y(0)=1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x'= 50x + 8y, & x(0)=0, \\ y'=-61x + 6y, & y(0)=1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'=40x - 17y, & x(0)=0, \\ y'=17x + 6y, & y(0)=-1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x'=13x + 9y, & x(0)=1, \\ y'=-4x + y, & y(0)=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x'=13x + 9y, & x(0)=3, \\ y'=-5x + y, & y(0)=-2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x'= 3x + 2y, & x(0)=3, \\ y'=-2x - y, & y(0)=3. \end{cases}$

Заключение

В данном учебном пособии рассмотрены несколько наиболее простых тем из теории функции комплексного переменного и операционного исчисления, которые входят в программу для студентов технических специальностей.

Для дальнейшего изучения данного материала можно рекомендовать сборники типовых расчётов [4, 5], в которых данные темы содержат более сложные задачи, а также учебники [1, 2] и сборник задач и упражнений [3].

В заключение отметим, что данное пособие может быть полезно инженерам, желающим вспомнить данные разделы высшей математики.

Приложение

№ п/п	$F(p)$	$f(t)$
1	$\dfrac{1}{p}$	1
2	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\dfrac{1}{p+\lambda}$	$e^{-\lambda t}$
5	$\dfrac{a}{(p+\lambda)^2+a^2}$	$e^{-\lambda t}\sin at$
6	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+a^2}$	$e^{-\lambda t}\cos at$
7	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
8	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
9	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
10	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
11	$\dfrac{1}{(p+\lambda)^n}$	$\dfrac{t^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$
12	$\dfrac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$	$t^n e^{-\lambda t}$
13	$\dfrac{1}{p^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

Список рекомендуемой литературы

1. **Привалов, И.И.** Введение в теорию функции комплексного переменного / И.И. Привалов. – М. : Наука, 1974. – 432 с.

2. **Свешников, А.Г.** Теория функции комплексного переменного / А.Г. Свешников, А.И. Тихонов. – М. : Наука, 1979. – 319 с.

3. **Краснов, М.Л.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 303 с.

4. **Чудесенко, В.Ф.** Сборник заданий по специальным курсам высшей математики :Типовые расчёты / В.Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1983. – 112 с. – (Высш. образование).

5. **Данченко, В.И.** Индивидуальные задания по теории функций комплексного переменного : практикум / В.И. Данченко, Д.Я. Данченко, С.А. Голопуз ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 43 с. – ISBN 5-89368-243-2.

Оглавление

Учебное издание

ЕРОПКИНА Татьяна Александровна

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задания к типовым расчетам по математике

Учебное пособие

Редактор И.А. Арефьева
Технический редактор Н.В. Тупицына
Компьютерная верстка Б.Г. Еропкина
ЛР № 020275. Подписано в печать 28.03.06.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 4,18.Уч-изд. л. 4,69. Тираж 150 экз.

Заказ 73-2006г.
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.