

Оглавление

Предисловие	5
1. Введение	6
1.1. Многообразия и отображения	6
1.2. Критические точки и критические значения	7
1.3. Отношение эквивалентности	13
1.4. Строгое определение многообразия	14
2. Понятие особенности. Особенности функции одной переменной	16
2.1. Определение особенности	16
2.2. Лемма Адамара	16
2.3. Простейшие особенности функций	17
3. Многообразие струй и близость отображений	18
3.1. Различные понятия близости функций: слабые и сильные топологии	19
3.2. Отношение эквивалентности контакта в точке	21
4. Сильная и слабая топология на пространстве отображений	24
5. Непрерывность отображений в тонких топологиях	29
6. Трансверсальность и теоремы трансверсальности	33
6.1. Понятие трансверсальности	33
6.2. Следствия из понятия трансверсальности	35
6.3. Теоремы трансверсальности	41
7. Методы локальной классификации особенностей	48
7.1. Простые алгебраические понятия	49
7.2. Локальная алгебра отображения в точке	52
8. Подготовительная теорема Вейерштрасса	56
8.1. Теорема Тужрона и ее следствия	60
8.2. Доказательство теорем	63
8.3. Простые особенности функций (потенциалов)	66
8.4. Версальные деформации особенностей	76

9. Устойчивость отображений	81
9.1. Определение и примеры	81
9.2. Инфинитезимальная устойчивость	84
10. Задачи к экзамену	89

Предисловие

Данный курс лекций по введению в теорию катастроф (теорию особенностей дифференцируемых отображений) был прочитан автором в университете города Порто (Португалия) для магистров и во Владимирском государственном университете для студентов математических специальностей как часть курса по качественной теории динамических систем. Он содержит изложение наиболее простых инструментов теории особенностей дифференцируемых отображений, полезных при изучении динамических процессов и бифуркаций в них.

Материал излагается достаточно подробно с большим числом примеров и рисунков, что должно способствовать его лучшему пониманию. В конце приведено большое количество задач, решение которых полезно для приобретения навыков применения теории особенностей дифференцируемых отображений к решению конкретных задач.

Курс рассчитан на студентов физико-математических специальностей, усвоивших программу первых двух лет обучения со стандартными курсами математических дисциплин. Дополнительных специальных знаний для успешного освоения курса не требуется.

Выражаю благодарность Михаилу Комарову и Ирине Петренко, – сначала слушателям курса, а затем моим аспирантам, – которые оказали мне существенную помощь при подготовке материалов к печати.

А.Давыдов

Владимир
февраль 2009 г.

1. Введение

Здесь мы даем понятие некоторых основных объектов, которые нужны будут нам в дальнейшем.

1.1. Многообразия и отображения

Определение 1. *Многообразие - это объект, который вблизи каждой своей точки устроен как арифметическое пространство R^n одной и той же размерности n , которая называется размерностью многообразия.*

Точное определение многообразия мы дадим ниже, когда объясним, что значит “локально устроено как арифметическое пространство”, а сейчас приведем примеры простейших многообразий.

Вещественная прямая R^1 - многообразие размерности 1 (рис. 1.1, а), единичная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в пространстве R^3 - многообразие размерности 2, а открытый шар, ограниченный этой сферой, является многообразием размерности 3 (рис. 1.1, б).

Пространство-время доставляет пример многообразия размерности 4.

Положение твердого тела в физическом трехмерном пространстве задается точкой многообразия размерности 6 (рис. 1.1, с).

Объединение осей координат на плоскости с индуцированной топологией (т.е. с топологией, где открытыми считаются пересечения открытых подмножеств плоскости с этим объединением) не является многообразием, ибо вблизи нуля это объединение устроено не как арифметическое пространство (рис. 1.1, d).

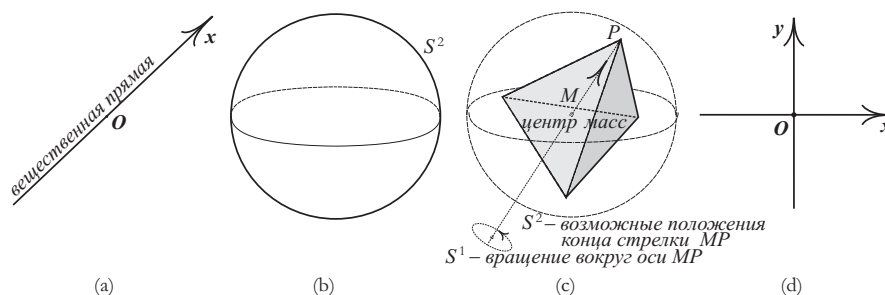


Рис. 1.1. Многообразия и нет.

Определение 2. *Отображение f одного многообразия M в другое многообразие N - это правило, по которому каждой точке $x \in M$ первого многообразия поставлена в соответствие некоторая точка $y \in N$*

второго,

$$f : x \mapsto y = f(x).$$

Понятно, что непрерывность и дифференцируемость отображения являются понятиями локальными, то есть определяются вблизи точки x и ее образа. Это позволяет ввести эти понятия так же как для отображений между арифметическими пространствами

(рис. 1.2), когда вблизи этих точек введены некоторые координаты. В этом случае отображение между многообразиями k раз непрерывно дифференцируемо (=является отображением класса C^k), если его компоненты являются таковыми в локальных координатах. Здесь k - неотрицательное целое число, и при $k = 0$ отображение просто непрерывно.

Множество всех отображений класса C^k между многообразиями M и N обозначается обычно через $C^k(M, N)$.

Замечание 1. Всегда, когда мы будем говорить об дифференцируемых отображениях без указания класса гладкости, будем подразумевать, что отображения достаточно гладкие, то есть класса C^k с достаточно большим k или даже класса C^∞ .

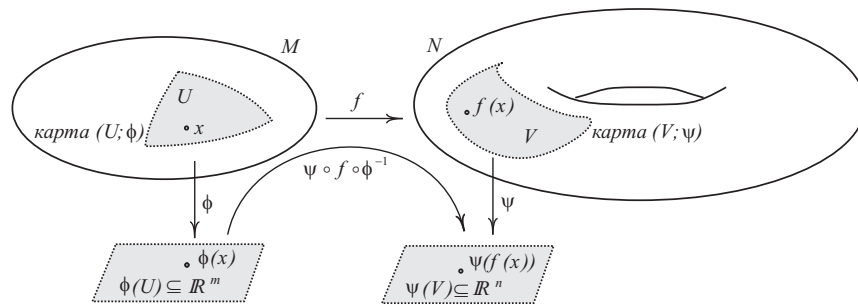


Рис. 1.2. Непрерывность и дифференцируемость отображения.

Пример 1. Функция высоты $h : (x, y, z) \mapsto z$, определенная на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, есть отображение между сферой и вещественной прямой (рис. 3). Вблизи северного полюса это отображение гладкое в координатах x, y на сфере и обычной координате на прямой:
 $h : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1.2. Критические точки и критические значения

Дифференцируемое отображение f между многообразиями M и N определяет естественным образом отображение между множествами скоростей движения на этих многообразиях, обозначаемыми через TM и

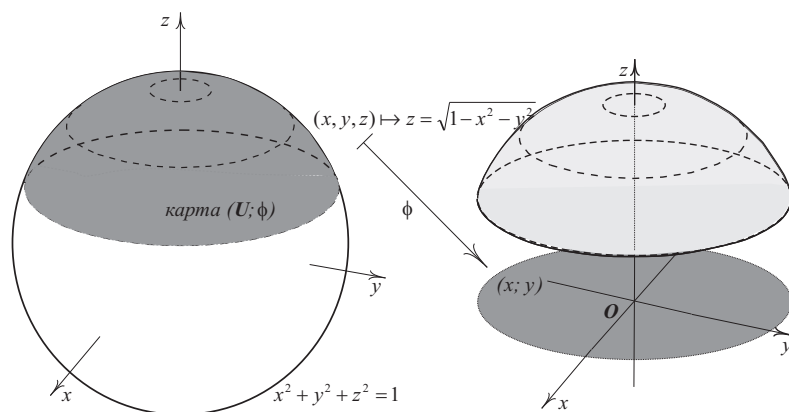


Рис. 1.3. Функция высоты на сфере дифференцируема.

TN , соответственно: скорость $v = \dot{x}(t)$ движения в точке $x(t)$ переходит в скорость $\dot{f}(x(t))$ в точке $f(x(t))$ (рис. 1.4). Это отображение скоростей называется *касательным отображением* к f и обычно обозначается через f_* :

$$f : M \rightarrow N \text{ определяет } f_* : TM \rightarrow TN.$$

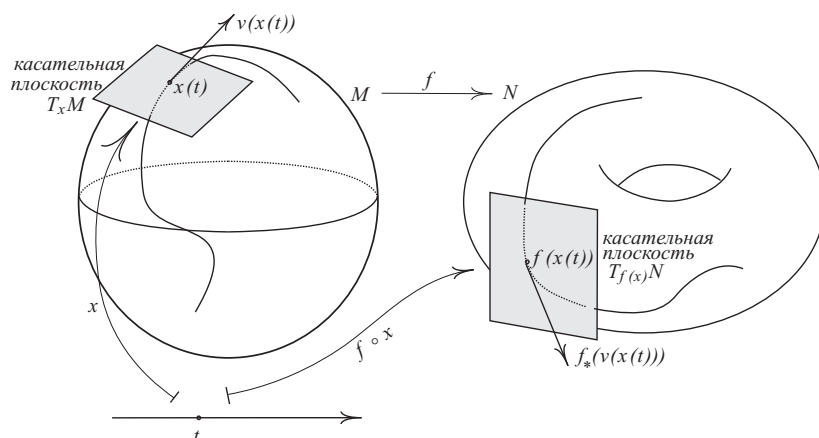


Рис. 1.4. Касательное отображение

В координатах x, v и y, w вблизи рассматриваемых точек P и $f(P)$ соответственно, отображение f_* задается формулой:

$$f_* : (x, v) \mapsto \left(y = f(x), w = \frac{\partial f}{\partial x}(x)v \right)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ - матрица Якоби отображения f , вычисленная в точке x .

Определение 3. Рангом дифференцируемого отображения $f : M \rightarrow N$ в точке $x \in M$ называется ранг его матрицы Якоби в

этой точке или, иными словами, размерность подпространства скоростей в точке $f(x)$, являющихся образами скоростей в точке x при касательном отображении f_* .

Определение 4. Регулярной точкой дифференцируемого отображения называется любая точка, в которой его ранг максимален.

Около регулярных точек отображение устроено довольно просто.

Предложение 1.1. Вблизи своей регулярной точки P гладкое отображение $R^m \rightarrow R^n$ приводится к виду

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{если } m \geq n, \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots \\ y_m = x_m \\ y_{m+1} = 0 \\ \dots\dots \\ y_n = 0 \end{cases} \quad \text{если } m \leq n, \quad (1.1)$$

подходящим выбором гладких координат x_1, \dots, x_m в пространстве-прообразе и y_1, \dots, y_n в пространстве-образе с началами в точке P и ее образе соответственно.

Доказательство этого простого утверждения мы оставляем читателю.

Определение 5. Отображение максимального ранга первого и второго типов называется субмерсией и иммерсией в точке P , соответственно, или просто субмерсией и иммерсией, если оно является таковым во всех точках.

Нетрудно видеть, что отображение, являющееся в некоторой точке и субмерсией и иммерсией одновременно, обратимо вблизи этой точки и обратное отображение дифференцируемо. Такие отображения называются локальными диффеоморфизмами.

Определение 6. Точка, не являющаяся регулярной точкой дифференцируемого отображения, называется его критической точкой, а ее образ при этом отображении называется критическим значением.

Пример 2. Критические точки отображения $(x_1, x_2) \mapsto (y_1 = x_1, y_2 = x_2^2)$ плоскости в плоскость заполняют прямую $x_2 = 0$, а соответствующие критические значения - прямую $y_2 = 0$. Прямая критических значений разделяет на плоскости-образе множества точек, у которых

либо нет прообразов при этом отображении, либо прообраз состоит из двух точек. У точки самой этой прямой прообраз состоит ровно из одной точки.

Даже этот простой пример говорит о том, что множества критических точек и критических значений отображения являются его важными характеристиками. Следующие примеры подтверждают это.

Пример 3. Пусть наше дифференцируемое отображение представляет собой потенциал механической системы, описывающей, например, катание тела на горке в поле силы тяжести (рис. 1.5). Если в системе происходит уменьшение полной энергии с течением времени, например, в силу присутствия трения или сопротивления среды, то при неограниченном возрастании времени положение системы обычно стремится к одному из локальных минимумов потенциальной энергии. Но каждый локальный минимум дифференцируемого потенциала является его критическим значением.

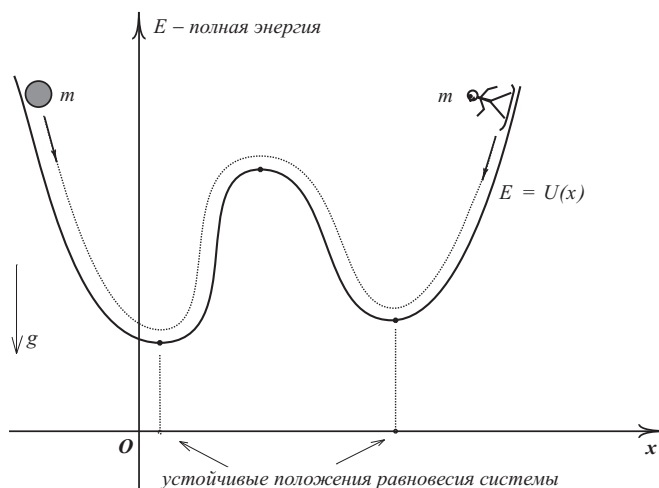


Рис. 1.5. Положения равновесия механической системы

Пример 4. В начале развития теории особенностей Уитни изучил типичные (точный смысл этого слова в изучаемой науке мы поясним позже) гладкие отображения между двумерными многообразиями. Он показал, что вблизи каждой точки типичное отображение принимает вид одного из трех отображений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right. , \quad \text{либо} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{array} \right. , \quad \text{либо еще} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2 \end{array} \right.$$

вблизи нуля в подходящих гладких локальных координатах (рис. 1.6, а - 1.6, с, соответственно).

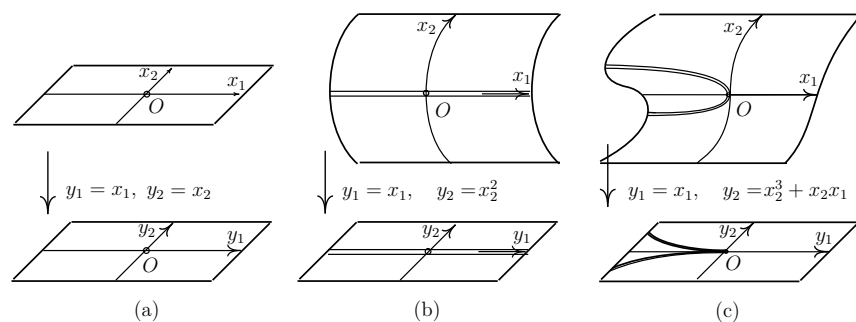


Рис. 1.6. Классификация Уитни.

Эти три особенности можно наблюдать при изучении видимого контура двух холмов (рис. 1.7, а). Каждая точка этого контура является критической точкой отображения поверхности холмов на сетчатку глаза. Видимый контур играет важную роль при распознавании знакомых образов (рис. 1.7, б).

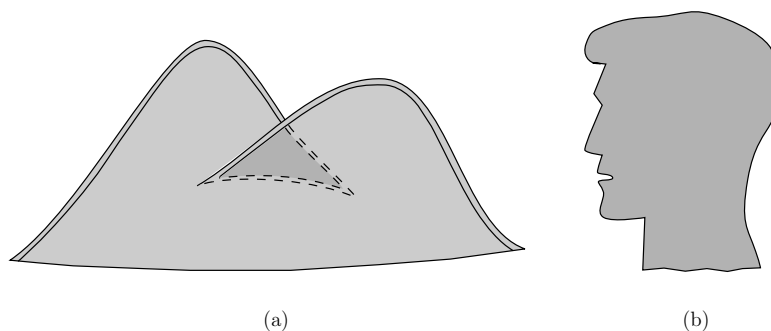


Рис. 1.7. Видимые контуры

Горизонт как видимый контур поверхности земли доставляет решение следующей параметрической экстремальной задачи: найти максимальную видимую высоту поверхности Земли по каждому из направлений (=азимуту). В этой задаче угол, под которым мы видим точку поверхности Земли является целевой функцией, то есть функцией, которая максимизируется, а параметром является азимут.

Более общим примером гладкой экстремальной задачей такого типа является отыскание максимума функции при наличии связей, например, проблема следующего вида:

$$\text{Найти максимум функции } f : x \mapsto f(x) \text{ при } g(x) = a,$$

где размерности переменной x и параметра a удовлетворяют естественному неравенству $\dim x \geq \dim a$. График решения этой задачи принад-

лежит объединению критических значений пары отображений (f, g) (рис. 1.8).

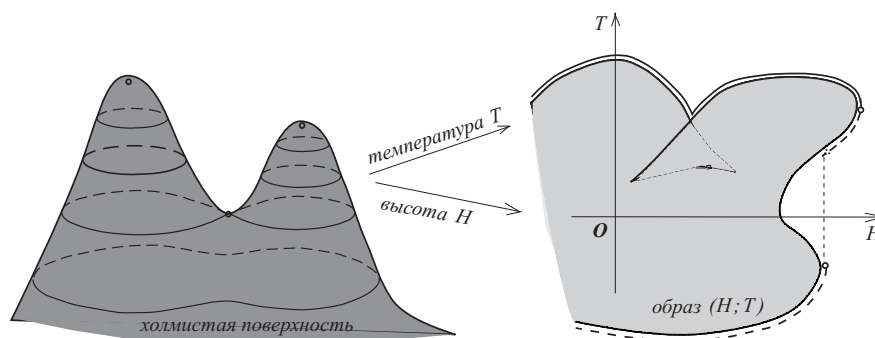


Рис. 1.8. График решения экстремальной задачи

Из этого простого наблюдения вытекает известное правило множителей Лагранжа:

Предложение 1.2. Если $\dim x \geq \dim a$, и точка P доставляет решение гладкой экстремальной задачи с ограничениями:

$$f(x) \longrightarrow \min(\max) \quad \text{при} \quad g(x) = a,$$

то существуют множители (Лагранжа) $\lambda_0 \in R$ и $\lambda \in R^{\dim a}$ такие, что не все они нулевые и

$$\lambda_0 df(P) + \lambda dg(P) = 0.$$

Доказательство. Пусть n - размерность x . Если размерность параметра a также равна n , то утверждение справедливо, поскольку в n -мерном пространстве любые $n + 1$ вектор линейно зависимы.

Пусть $n > \dim a$, и точка P доставляет решение нашей задачи. Рассмотрим отображения f и g как одно отображение пары

$$(f, g) : x \mapsto (t = f(x), a = g(x)).$$

Если нужных нам множителей λ_0 и λ нет, то точка P не является критической точкой этого отображения. В этом случае это отображение есть субмерсия в точке P , поскольку $n > \dim a$. Следовательно, точка $(f(P), g(P))$ - внутренняя точка образа отображения пары, а значит, сама точка P не может доставлять решение нашей экстремальной задачи.

Следовательно, наше предположение неверно, точка P обязана быть критической точкой отображения пары, и существуют нужные множители Лагранжа λ_0, λ .

Предложение доказано. □

1.3. Отношение эквивалентности

Бинарное (т.е. между двумя объектами) отношение “ \sim ” на множестве A объектов одной природы называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) для любого объекта $X \in A$ верно $X \sim X$ (*рефлексивность*);
- 2) для любых двух объектов $X, Y \in A$ верно $Y \sim X$, если $X \sim Y$ (*симметричность*);
- 3) для любых трех объектов $X, Y, Z \in A$ верно $X \sim Z$, если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$ (*транзитивность*).

Два объекта *эквивалентны* по некоторому отношению “ \sim ”, если они удовлетворяют этому отношению. Подмножество всех эквивалентных объектов образует *класс эквивалентности*, а любой элемент этого подмножества называется *представителем* этого класса.

Пример 5. Следующие бинарные отношения являются отношениями эквивалентности, что легко проверить.

- *Отношение качества Q объектов: два объекта удовлетворяют этому отношению, если они оба обладают этим качеством. Например, два материальных объекта эквивалентны, если целая часть их весов, выраженных в килограммах, одинакова.*
- *Отношение диффеоморфности многообразий: два многообразия удовлетворяют этому отношению, если существует обратимое отображение между ними, дифференцируемое вместе со своим обратным (= диффеоморфизм этих многообразий)*
- *Одинаковость отображений с точностью до диффеоморфизмов: два отображения f и g между многообразиями M и N удовлетворяют этому отношению, если существуют диффеоморфизмы $h : M \rightarrow M$ и $k : N \rightarrow N$ такие, что $g = k \circ f \circ h^{-1}$, то есть диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array} \quad (1.2)$$

коммулативна. Соответствующее отношение эквивалентности называется LR-эквивалентностью или право-левой эквивалентностью, поскольку диффеоморфизмы k и h^{-1}

действуют на отображение f слева (на пространстве-образе) и справа (на пространстве-прообразе), соответственно.

- *Отношение одинаковости в точке P многообразия: два объекта одной природы (кривые, подмножества, отображения, ...), определенные вблизи этой точки удовлетворяют этому отношению, если они совпадают в некоторой окрестности точки P . В этом случае класс эквивалентности данного объекта O называется ростком этого объекта в точке P и обозначается как (O, P) .*

Пример 6. *Функции x и $|x|$ вещественной переменной x имеют одинаковые ростки в любой точке положительной полуоси и разные в каждой из остальных точек вещественной прямой.*

1.4. Строгое определение многообразия

Теперь мы готовы пояснить, что значит, что многообразие локально устроено как арифметическое пространство некоторой размерности n .

Пусть X - некоторое хаусдорфово топологическое пространство, допускающее счетную базу топологии. Первое из этих качеств означает, что у двух различных точек обязательно есть непересекающиеся окрестности, а второе - что есть не более чем счетный набор открытых множеств такой, что любая окрестность любой точки содержит окрестность из этого набора. Например, вещественная прямая с обычной топологией допускает счетную базу из интервалов с рациональными концами, обычная декартова плоскость имеет счетную базу из окружностей рациональных радиусов с рациональными координатами центров.

Определение 7. *Набор гомеоморфизмов (= отображений, непрерывных вместе со своими обратными) между открытыми подмножествами пространства X и открытыми подмножествами арифметического пространства \mathbb{R}^n с некоторым неотрицательным целым n , определяет C^k -атлас (или просто атлас) на пространстве X , если:*

- *области определения этих гомеоморфизмов (называемые картами) покрывают все пространство X ;*
- *для любых двух гомеоморфизмов h_1 и h_2 из этого набора композиция $h_2 \circ h_1^{-1}$ либо неопределена либо есть отображение класса C^k на своей области определения.*

Например, на вещественной прямой с обычной топологией можно взять атлас из одной карты, задаваемой тождественным гомеоморфизмом. На окружности атласа из одной карты не существует, ибо любое непрерывное отображение на окружности (компакте) принимает свое минимальное и максимальное значение, а, значит, гомеоморфизма окружности на открытое множество на прямой не существует. Однако на окружности можно ввести атлас, состоящий из двух карт (постройте такой атлас).

Определение 8. Два атласа называются C^k -совместимыми, если их объединение является C^k -атласом.

Очевидно, что отношение совместимости атласов является отношением эквивалентности. Очевидно, что два атласа на одном и том же топологическом пространстве всегда C^0 -совместимы, однако они уже не обязаны быть C^1 -совместимыми (приведите пример).

Определение 9. Класс эквивалентности атласов по отношению C^k -совместимости называется C^k -дифференциальной структурой на X , а само X вместе с этой структурой называется C^k -многообразием. C^0 -многообразие, C^k -многообразие с $k > 0$ и C^∞ -многообразие называются обычно топологическим, дифференцируемым и гладким соответственно. При этом при использовании слова "дифференцируемое" предполагают, что k достаточно велико, в том числе возможно $k = \infty$.

Замечание 2. Отметим, что на одном и том же пространстве можно ввести различные дифференциальные структуры.

Определение 10. Подмножество C^k -многообразия называется C^l -подмногообразием, если его росток в каждой его точке совпадает с ростком в нуле координатной плоскости в подходящих локальных координатах класса C^l , $l \leq k$. Размерность r этой плоскости называется размерностью этого подмногообразия, разница $n - r$ - его коразмерностью, где n - размерность обьемлющего многообразия.

Пример 7. На двумерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в пространстве R^3 экватор - пересечение сферы с плоскостью $z = 0$ - подмногообразие размерности (и коразмерности) один.

2. Понятие особенности. Особенности функции одной переменной

2.1. Определение особенности

Рассмотрим какую-либо группу G , действующую на пространстве ростков объектов в точке. Например, ростки в некоторой точке многообразия его диффеоморфизмов, оставляющие эту точку на месте, образуют группу, которая действует на пространстве ростков объектов (кривых, функций, ...) в этой точке.

Определение 11. *Локальной особенностью объекта в точке относительно действия группы G называется орбита его ростка в этой точке под действием этой группы. Нормальной формой этой особенности называется любая точка этой орбиты.*

В качестве нормальных форм разумно брать точки орбиты, имеющие наиболее простую форму. Например, вблизи своей регулярной точки P гладкая функция f может быть выбрана в качестве первой координаты x_1 со значением $f(P)$ в самой точке, а отображение вблизи регулярной точки имеет вид субмерсии или иммерсии относительно действия группы лево-правой эквивалентности.

Отметим, что нормальная форма особенности, вообще говоря, определена неоднозначно, например, в качестве последней нормальной формы можно было взять ax_1 с любой ненулевой вещественной константой a .

2.2. Лемма Адамара

Одна из важных прикладных задач - найти наиболее простые формы гладких функций вблизи их особых точек относительно гладких замен координат. В простейшем случае, а именно для функций на прямой, эти формы можно найти с помощью леммы Адамара.

Лемма Адамара 1. *Функция f класса C^k , $k \geq 1$, в R^n с нулевым значением в некоторой точке может быть записана вблизи этой точки в виде*

$$f(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x)$$

с некоторыми функциями f_i , $1 \leq i \leq n$, класса C^{k-1} , в любых гладких локальных координатах x_1, x_2, \dots, x_n с началом в этой точке.

Доказательство. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n произвольная гладкая система координат с началом в точке P . Возьмем в этой системе координат небольшой шар с центром в начале координат и рассмотрим точку x из этого шара. Имеем

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Все функции $f_i, f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$, определены на рассматриваемом шаре и являются функциями класса C^{k-1} , что нетрудно видеть. \square

Следствие 2.1. *Функция f класса $C^k, k \geq 1$, в R^n , определенная в окрестности некоторой точки $P \in R^n$ и имеющая в этой точке нулевые производные до порядка $r, r < k$, включительно, может быть записана вблизи этой точки в виде*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=r+1} x^\alpha f_\alpha(x)$$

с некоторыми функциями f_α класса C^{k-r-1} , где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - вектор неотрицательных целых чисел, а $|\alpha|$ - сумма этих чисел, в любых гладких локальных координатах x_1, x_2, \dots, x_n с началом в этой точке.

Здесь и ниже $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Доказательство этого следствия мы оставляем читателю. Используя лемму Адамара, его достаточно легко провести методом математической индукции.

2.3. Простейшие особенности функций

Следствие 2.1 позволяет получить локальные нормальные формы гладкой вещественной функции f одной переменной $x \in R$ относительно гладких замен координат на вещественной прямой, то есть группы R -эквивалентности. Если в точке $P \in R$ все производные этой функции до порядка r нулевые, то в силу следствия 2.1 вблизи точки P эта функция может быть записана в виде

$$f(x) = f(P) + x^{r+1} f_{r+1}(x),$$

где f_{r+1} есть гладкая функция, в любой гладкой системе координат с началом в этой точке; при этом $f_{r+1}(P) \neq 0$, если $f^{(r+1)}(P) \neq 0$, что

нетрудно видеть. Выбирая в последнем случае вблизи начала координат новую гладкую координату $\tilde{x} = x|f_{r+1}(x)|^{1/(r+1)}$, мы приведем нашу функцию к виду:

$$f(\tilde{x}) = f(P) + \tilde{x}^{r+1} \operatorname{sign} f_{r+1}(P).$$

Следовательно, гладкая вещественная функция одной вещественной переменной с ненулевым рядом Тейлора в своей критической точке приводится вблизи этой точки к одной из трех нормальных форм:

или x^{2s+1} , когда $r = 2s$, или $\pm x^{2s}$, когда $r = 2s - 1$,

подходящим выбором гладкой координаты с началом в этой точке.

Теперь легко видеть, что критическая точка функции не является локальным экстремумом функции в первом случае и доставляет локальный максимум либо минимум во втором. (рис. 2.1)

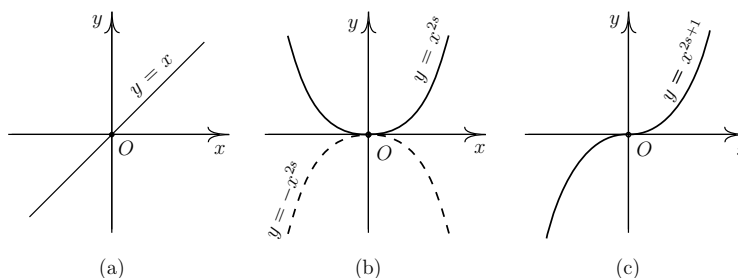


Рис. 2.1. Нормальные формы и локальные экстремумы.

Определение 12. Критическая точка гладкой функции (функции класса C^2) называется невырожденной, если ее второй дифференциал в этой точке невырожден, то есть доставляет невырожденную квадратичную форму.

В гладких локальных координатах невырожденность второго дифференциала функции - это невырожденность матрицы ее вторых производных (=матрицы Гессе).

3. Многообразие струй и близость отображений

Здесь мы введем топологию на пространстве отображений между многообразиями.

3.1. Различные понятия близости функций: слабые и сильные топологии

Мы начнем с простого примера, иллюстрирующего важность контроля при малых возмущениях функций не только их значений, но и первых производных. Буквальную ценность этого хорошо знают опытные водители: разумный контроль и скорости и ускорения позволяет существенно экономить топливо.

Пример 8. На вещественной прямой рассмотрим механическую систему с гладким потенциалом $U(x) = x^2$. Этот потенциал имеет только один минимум и, соответственно, у системы есть только одно устойчивое положение равновесия. Посмотрим, что происходит с устойчивыми положениями равновесия нашей системы при малых возмущениях потенциала.

Если мы контролируем только значение потенциала при его возмущении, то сколь угодно близко от рассматриваемого потенциала есть гладкий потенциал с бесконечным числом локальных максимумов и минимумов, и, таким образом, устойчивых (и неустойчивых) положений равновесия системы, которые к тому же могут находиться сколь угодно далеко от нуля - единственного положения равновесия исходной системы. (рис. 3.1, а).

Если имеется возможность контролировать и производную потенциала, то при его малых возмущениях положения равновесия могут появиться лишь вблизи нуля, но не их не будет далеко от нуля (рис. 3.1, б). Таким образом, и все устойчивые положения равновесия системы будут вблизи нуля.

Наконец, если контролировать и вторую производную потенциала, то любой потенциал, достаточно близкий к исходному, имеет отделенную от нуля положительную производную, и, следовательно, единственную точку (локального и глобального) минимума и соответствующее устойчивое положение равновесия системы. Более того, это положение равновесия расположено вблизи нуля - положения равновесия исходной системы (рис. 3.1, в).

Дополнительный контроль последующих производных потенциала не меняет картины явления, наблюдаемого при контроле лишь значений потенциала и его первых производных.

Контроль не только значений отображения, но и его производных приводит к оснащению изучаемого пространства отображений слабой

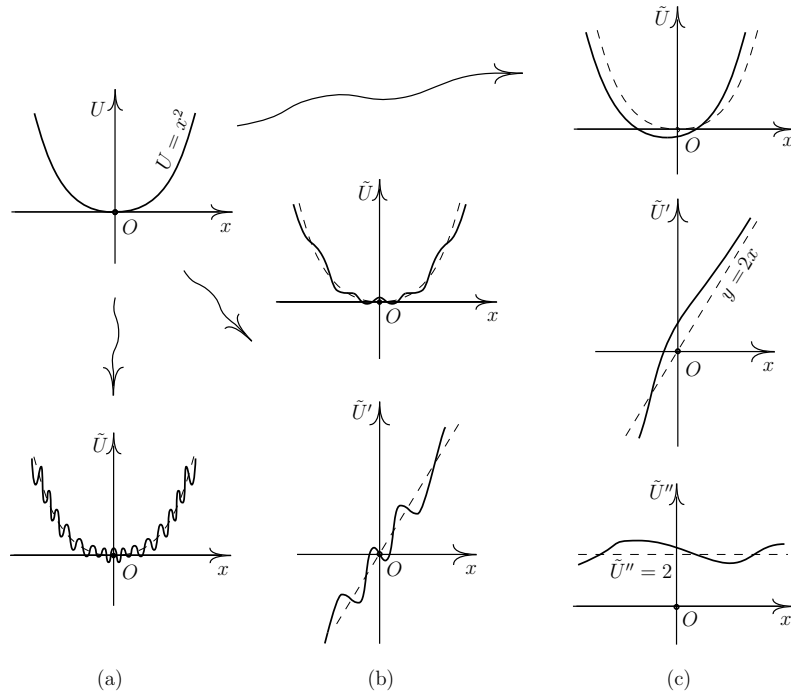


Рис. 3.1. Положения равновесия системы с возмущенным потенциалом

или сильной C^r -топологией. На пространстве функций $C^k(R^m, R)$ (или $C^k(U, R)$, где U - открытое подмножество в R^m) можно ввести любую из этих топологий с $r \leq k$. Нам нужно понять, какие множества считаются открытыми в каждой из этих топологий. С этой целью зафиксируем какие-либо гладкие координаты на пространствах прообраза и образа. Для

- i) любого подмножества K пространства ($= R^m$) определения функций,
- ii) и любой непрерывной положительной функции ϵ на этом пространстве

определим подмножество $V(f, K, \epsilon)$ гладких функций (отображений) g с производными, удовлетворяющими неравенству

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}(g - f)}{\partial x^\alpha}(P) \right| < \epsilon(P)$$

при любом индексе α , $|\alpha| \leq r$, и в любой точке P подмножества K .

В C^r -топологии открытое подмножество есть или объединение любого числа подмножеств типа $V(f, K, \epsilon)$ или пересечение их конечного числа. При этом подмножество K должно быть компактным в случае слабой топологии и совпадать со всем пространством-прообразом (то есть

R^n или U) в случае сильной (=тонкой) топологии. Сильная (тонкая) топология называется также топологией Уитни.

Для лучшего понимания этих топологий и оснащения ими пространств гладких отображений между произвольными многообразиями нам нужно ввести важное понятие контакта отображений в точке.

3.2. Отношение эквивалентности контакта в точке

Определение 13. Два отображения f, g класса C^r из пространства пространства R^m в пространство R^n имеют в точке x прообраза контакт порядка $k, k \leq r$, если

$$\frac{|f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x} \rightarrow x, \tilde{x} \in R^n$$

где $|\cdot|$ - обычная норма на арифметическом пространстве:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Понятно, что отношение контакта - понятие локальное, и оно не зависит от выбора гладких координат. Следовательно, оно полностью аналогично вводится и для отображений между гладкими многообразиями с той лишь разницей, что используемые координаты локальные.

Предложение 3.1. Отношение контакта порядка r в точке является отношением эквивалентности.

Доказательство. Очевидно, что рефлексивность и симметричность справедливы для этого отношения, ибо $|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \equiv 0$ и $|f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})| \equiv |g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})|$, соответственно.

Проверим, что и транзитивность также имеет место. Пусть для пар функций f, g и g, s справедливы условия контакта

$$\frac{|f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{|g(\tilde{x}) - s(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x} \rightarrow x;$$

тогда, используя неравенство треугольника, для пары f, s получаем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|f(\tilde{x}) - s(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} &= \frac{|f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) - s(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} \leq \\ &\leq \frac{|f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k} + \frac{|g(\tilde{x}) - s(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x|^k}. \end{aligned}$$

Но в силу условия контакта для пар f, g и g, s каждое из слагаемых в правой части стремиться к нулю, когда $\tilde{x} \rightarrow x$. Следовательно, пара f, s

также удовлетворяет условию контакта, и, таким образом, имеет место транзитивность. \square

Итак, отношение контакта является отношением эквивалентности.

Определение 14. *Класс эквивалентности по отношению контакта порядка k в точке называется k -струей (или струей порядка k) отображения в этой точке.*

Как обычно, любой элемент f из этого класса называется *представителем* этой струи. Сама струя обозначается $j^k f(x)$, где k и x - порядок и точка контакта, соответственно, и о классе эквивалентности говорят как о k -струе отображения f в этой точке.

Предложение 3.2. *Два гладких отображения имеют одинаковые k -струи в точке, если и только если в (любой) локальных гладких координатах их производные в этой точке совпадают до порядка k включительно.*

Доказательство. Достаточность совпадения производных для равенства струй сразу вытекает из следствия из леммы Адамара.

Докажем необходимость от противного, то есть предположим, что в некоторой точке k -струи у двух отображений одинаковы, но имеются различные производные порядка $\leq k$. Наши рассуждения локальные вблизи изучаемой точки и ее образа при отображении, поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы проведем их в локальных (гладких) координатах с началами в этих точках.

Обозначим через l наименьший порядок различных производных наших отображений в нуле и возьмем компоненты наших отображений, у которых l -производные в нуле различны.

В силу леммы Адамара разность f между этими компонентами может быть представлена вблизи начала координат O в виде

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} x^\alpha f_\alpha(x),$$

где функции f_α непрерывны, и хотя бы одна из них отлична от нуля в нуле, поскольку эти компоненты имеют различные производные в нуле.

Ограничим функцию f на линию $x = tv$ с некоторым вектором $v \neq 0$ и достаточно малыми значениями t :

$$f(tv) = t^l \sum_{|\alpha|=l} v^\alpha f_\alpha(tv).$$

При $t = 0$ сумма в правой части последнего уравнения является однородным полиномом степени l от компонент v . Этот полином имеет по меньшей мере один ненулевой коэффициент, поскольку хотя бы одна из функций $f_\alpha(O)$ ненулевая. Следовательно, его значение отлично от нуля при некотором векторе v_0 , что для $x = tv_0$ дает

$$\frac{|f(tv_0)|}{|tv_0|^k} = \frac{|t|^l \sum_{|\alpha|=l} |v_0^\alpha f_\alpha(tv_0)|}{|t|^k |v_0|^k} = |t|^{l-k} \frac{|\sum_{|\alpha|=l} v_0^\alpha f_\alpha(tv_0)|}{|v_0|^k}.$$

Правая часть последнего выражения не стремится к нулю, когда $t \rightarrow 0$, поскольку при $l \leq k$ дробь

$$\frac{|\sum_{|\alpha|=l} v_0^\alpha f_\alpha(tv_0)|}{|v_0|^k}$$

отлична от нуля при $t = 0$, что противоречит наличию контакта порядка k в нуле у изучаемых отображений. Следовательно, наше предположение ошибочно, и предложение справедливо. \square

Замечание 3. В силу доказанного утверждения бесконечная струя ($= j^\infty f(\cdot)$) аналитической функции f в некоторой точке определяет росток этой функции в этой точке. Это не всегда так для гладкой функции. Например, две функции на вещественной прямой $f \equiv 0$ и g , равная нулю при $x = 0$ и e^{-1/x^2} при $x \neq 0$, имеют в нуле контакт бесконечного порядка (=любого конечного порядка), однако значения этих функций различны всюду вне нуля (рис. 3.2)! Дело в том, что вторая из функций не является аналитической.

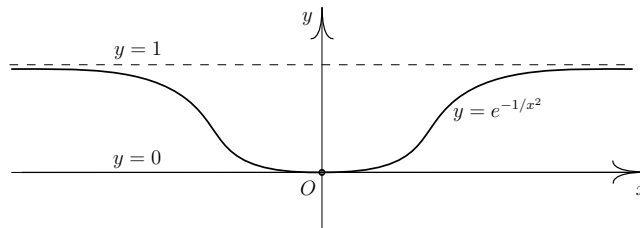


Рис. 3.2. Бесконечные струи и ростки могут не определять ростки

Пространство k -струй гладких отображений f между гладкими многообразиями M и N обозначается как $J^k(M, N)$. Это также гладкое многообразие, поскольку в картах (локальных координатах) на многообразиях M и N точка $j^k f(x)$ этого пространства естественным образом

задается координатами точки x на пространстве-прообразе и производными отображения f в этой точке до порядка k включительно:

$$x_1, x_2, \dots, x_m; f(x); \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq m; \dots; \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x) \text{ с } |\alpha| \leq k.$$

Например, пространство k -струй гладких функций на вещественной прямой есть многообразие размерности $(k+2)$ с координатами x, f, f', \dots, f^k .

Используя формулу для производной сложной функции, легко увидеть, что гладкие замены локальных координат на многообразиях M и N приводят к гладким заменам координат на многообразии струй. Например, замена координат на пространстве-прообразе приводит к следующей замене координат на пространстве 1-струй:

$$(x, f(x), f'(x)) \mapsto (y, f(\phi(y)), f'(\phi(y))\phi'_y(y))$$

где $x = \phi(y)$, а y - новая гладкая (локальная) координата на многообразии-прообразе.

Разложение гладкой функции f по формуле Тейлора в точке x до порядка k определяет струю $j^r f(x)$ для любого $r, r < k$. Следовательно, существует естественная проекция пространства струй порядка большего порядка на пространство струй меньшего порядка, что приводит к цепочке проекций

$$J^0(M, N) \leftarrow J^1(M, N) \leftarrow J^2(M, N) \leftarrow \dots$$

Понятно, что пространство 0-струй есть произведение $M \times N$, на котором определены естественные проекции на каждый из сомножителей:

$$M \longleftarrow J^0(M, N) = M \times N \longrightarrow N.$$

4. Сильная и слабая топология на пространстве отображений

Здесь мы введем слабую и сильную топологии на пространстве гладких отображений между гладкими многообразиями M и N .

Как мы отметили выше пространство струй $J^r(M, N)$ есть гладкое многообразие с топологией и дифференциальной структурой, происходящими естественным образом от топологий и дифференциальных структур многообразий M и N . На гладком многообразии существует расстояние ρ , которое задает топологию на этом многообразии (локально

существование такого расстояния очевидно) [4]. Это позволяет нам легко ввести слабую и сильную C^r -топологии на пространстве отображений $C^k(M, N)$, $k \geq r$, так же как мы сделали это выше на пространстве функций. Точнее, окрестность точки f пространства $C^k(M, N)$, $k \geq r$, определяется следующим образом.

Определение 15. Для любого подмножества K многообразия-прообраза и для любой непрерывной положительной функции ϵ на этом многообразии подмножество $V(f, K, \epsilon)$ состоит из отображений g таких, что справедливо неравенство

$$\rho(j^r f(P), j^r g(P)) < \epsilon(P)$$

во каждой точке P множества K . Как и выше в C^r -топологиях открытое подмножество есть или объединение любого числа или пересечение конечного числа подмножеств типа $V(f, K, \epsilon)$, и аналогично, подмножество K - это компакт в случае слабой топологии и совпадает со всем многообразием-прообразом в случае сильной (тонкой) топологии.

Отметим, что в случае компактного многообразия-прообраза слабая и сильная топологии совпадают.

Отображение $j^k f : x \mapsto j^k f(x)$, $x \in M$, называется k -струйным расширением отображения f . База сильной C^r -топологии также может быть определена в $C^k(M, N)$, $k \geq r$, следующим образом.

Для любого открытого подмножества U в пространстве струй $J^r(M, N)$ в подмножество $B(U)$ включим все отображения, у которых образ r -струйных расширений лежит в U . Множество всех таких подмножеств также определяет тонкую C^r -топологию, что нетрудно проверить.

Гладкая (то есть C^∞) тонкая топология на пространстве гладких отображений определяется включением в ее базу всех открытых множеств конечных гладких топологий. Точнее, нетрудно видеть, что открытое множество в сильной C^r -топологии доставляет открытое множество в любой тонкой C^{r+l} -топологии как прообраз при естественных проекциях из пространств струй большего порядка в пространства струй меньшего порядка. Следовательно, базу тонкой C^∞ -топологии доставляют все открытые множества из конечных тонких топологий.

Покажем, что сильная топология действительно является очень тонкой.

Предложение 4.1. *Последовательность отображений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ класса C^k сходится в тонкой C^r -топологии, $r \leq k$, если и только если, начиная с некоторого номера n_0 все члены последовательности совпадают вне некоторого компакта, а на самом этом компакте имеет место равномерная сходимость отображений вместе с производными до порядка r включительно, то есть равномерная сходимость последовательности отображений $\{j^r f_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Очевидно, что существование компакта, вне которого все отображения совпадают, начиная с некоторого номера, и равномерная сходимость струйных расширений являются достаточными условиями для сходимости в тонкой C^r -топологии.

Докажем необходимость этих условий. Для компактного многообразия-прообраза это утверждение тривиально. Рассмотрим случай многообразия, не являющегося компактным. Полезны следующие утверждения.

Лемма 4.2. *На любом многообразии существует последовательность открытых множеств, замыкание каждого из которых компактно и принадлежит следующему множеству последовательности, а объединение замыканий всех членов последовательности совпадает со всем многообразием.*

Лемма 4.3. *Для компактного подмножества многообразия и любой его окрестности существует гладкая функция, имеющая единичное значение на этом компакте и нулевое вне этой окрестности и принимающая значения между нулем и единицей.*

Используем эти леммы для завершения доказательства предложения 4.1 и затем докажем леммы.

Обозначим через f предел нашей последовательности. Он является отображением класса C^r , поскольку на любом компакте имеем равномерную сходимость r -струйных расширений членов последовательности.

Предположим противное, что для любого компакта не существует номера последовательности, начиная с которого все члены последовательности совпадают вне этого компакта, и покажем, что в этом случае существуют подпоследовательность отображений $\{f_{i_j}\}$, последовательность точек $\{x_{i_j}\}$ и также положительная непрерывная функция ϵ (на многообразии-прообразе) такие, что $\rho(j^r f_{i_j}(x_{i_j}), j^r f(x_{i_j})) \geq \epsilon(x_{i_j})$, где ρ - метрика, задающая топологию на $J^r(M, N)$. Это будет противоречить сходимости нашей последовательности в тонкой топологии, поскольку бесконечное число ее членов, а именно вся подпоследовательность

$\{f_{i_j}\}$ будет лежать вне следующей окрестности отображения f в C^r -топологии, задаваемой функцией ϵ (рис. 12):

$$U_\epsilon(f) = \{\tilde{f} \mid \rho(j^r \tilde{f}(x), j^r f(x)) < \epsilon(x)\}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Выберем последовательность компактов $\{K_i\}_{i=1}^\infty$, доставляемую открытыми множествами из леммы 4.2.

В силу предположения о противном, существуют индекс i_1 и точка x_1 такие, что величина $\rho(j^r f_{i_1}(x_1), j^r f(x_1))$ положительна. Обозначим через a_1 эту величину, через s_1 наименьший номер такой, что компакт K_{s_1} содержит точку x_1 , а через ϵ_1 постоянную функцию со значением a_1 . Все это - первый шаг индукции.

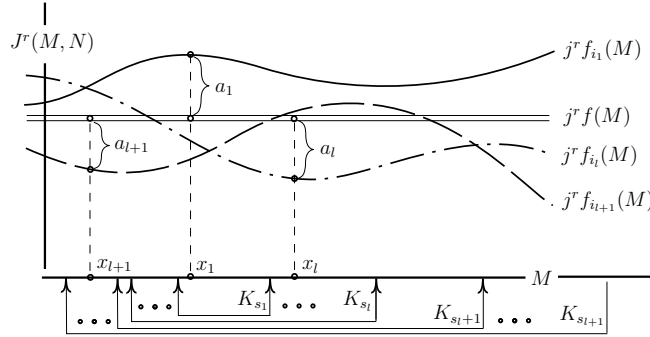


Рис. 4.1. Тонкая топология действительно сильная

Теперь, на втором шаге индукции, предположим, что мы уже нашли точки x_1, x_2, \dots, x_l , отображения $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_l}$ с $i_1 < i_2 < \dots < i_l$, компакт K_{s_l} , содержащий эти точки, и положительную функцию ϵ_l такие, что

$$\rho(j^r f_{i_j}(x_{i_j}), j^r f(x_{i_j})) \geq \epsilon_l(x_{i_j}) \quad \forall j, 1 \leq j \leq l.$$

Наконец, на третьем, завершающем шаге индукции, необходимо построить по $l + 1$ членов каждой из этих последовательностей.

В силу предположения о противном для компакта $K_{s_{l+1}}$ не существует номера, начиная с которого все члены последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ совпадают вне его. Следовательно, существует отображение $f_{i_{l+1}}$ с индексом $i_{l+1} > i_l$, отличающееся от предельного отображения в некоторой точке $x_{i_{l+1}}$, лежащей вне компакта $K_{s_{l+1}}$.

Пусть s_{l+1} - наименьший индекс, что компакт $K_{s_{l+1}}$ содержит точку $x_{i_{l+1}}$. Положим $a_{l+1} = \rho(j^r f_{i_{l+1}}(x_{i_{l+1}}), j^r f(x_{i_{l+1}}))$ и возьмем неотрицательную гладкую функцию ϕ , доставляемую леммой 4.3 и имеющую един-

ичное значение на компакте K_{s_l} и нулевое значение вне компакта $K_{s_{l+1}}$. Нужная нам функция ϵ_{l+1} определяется следующей формулой:

$$\epsilon_{l+1}(x) = \phi(x)\epsilon_l(x) + (1 - \phi(x))a_{l+1}.$$

Эта функция положительна и совпадает с ϵ_l на компакте K_{s_l} .

Таким образом, существуют точки $x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}$, отображения $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_l}, f_{i_{l+1}}$ с $i_1 < i_2 < \dots < i_l < i_{l+1}$, компакт $K_{s_{l+1}}$, содержащий эти точки, и положительная функция ϵ_{l+1} такие, что

$$\rho(j^r f_{i_j}(x_{i_j}), j^r f(x_{i_j})) \geq \epsilon_{l+1}(x_{i_j}) \quad \forall j, 1 \leq j \leq l + 1.$$

Применяя теперь метод математической индукции, получаем, что вне окрестности предельного отображения f , определяемой функцией ϵ_∞ , лежит бесконечное число функций $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ из нашей последовательности. Этот факт противоречит сходимости этой последовательности к f .

Следовательно, наше предположение неверно, и нужный компакт и номер, с которого все члены последовательности совпадают вне этого компакта, существуют. Предложение 4.1 доказано. \square

Предложение доказано по модулю лемм. Докажем леммы.

Доказательство леммы 4.2. По определению, многообразие имеет счетную базу топологии. Рассмотрим элементы этой базы с компактным замыканием и занумеруем их: $U_1, U_2, \dots, U_l, \dots$. Понятно, что их объединение равно всему многообразию, поскольку каждая точка имеет окрестность с компактным замыканием.

Определим компакт K_1 как замыкание U_1 и, индуктивно, компакт K_{i+1} как замыкание объединения множеств U_1, U_2, \dots, U_r с наименьшим номером r , которые покрывают компакт K_i . По определению, последовательность компактов $K_1, K_2, \dots, K_l, \dots$ удовлетворяет условиям леммы. \square

Доказательство леммы 4.3. Рассмотрим покрытие нашего многообразия, состоящее из двух окрестностей: U_1 и U_2 , являющихся выбранной окрестностью нашего компакта и дополнением к нему, соответственно. Возьмем гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, и определим функцию ϕ как сумму функций этого разбиения с носителями в U_1 . Функция ϕ гладкая со значениями между нулем и единицей, равная единице на нашем компакте и нулю вне окрестности U_1 . Таким образом, эта функция удовлетворяет условиям леммы. \square

Замечание 4. Гладкое разбиение единицы - это набор гладких неотрицательных функций таких, что

- их носители покрывают все многообразие;
- в каждой точке лишь конечное число функций имеет ненулевое значение (т.е. это покрытие локально конечно) и
- их сумма тождественно равна единице.

Разбиение единицы *подчинено* некоторому покрытию многообразия, если для носителя каждой из функций этого разбиения существует элемент этого покрытия, содержащий этот носитель. Для любого покрытия многообразия существует разбиение единицы, ему подчиненное [4].

Отображение между многообразиями называется *собственным*, если для него прообраз любого компакта является компактом. Из предложения 4.1 вытекает

Следствие 4.4. Множество собственных отображений класса C^k , $k \geq 0$, между гладкими многообразиями открыто в пространстве отображений в тонкой C^r -топологии при $0 \leq r \leq k$.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать для случая $k = 0$. Предположим противное, что существует собственное отображение f , у которого нет окрестности из собственных отображений. Рассмотрим сходящуюся к f последовательность отображений, не являющихся собственными.

В силу предложения 4.1 существует компакт K и номер n такие, что, начиная с этого номера, все члены последовательности совпадают с f вне K . Но ограничения непрерывных отображений на компакт являются отображениями собственными. Отсюда получаем, что, начиная с номера n все члены нашей последовательности являются отображениями собственными.

Таким образом, получаем противоречие. Следовательно, наше предположение неверно, а утверждение следствия справедливо. \square

5. Непрерывность отображений в тонких топологиях

Здесь мы установим непрерывность некоторых отображений в тонких топологиях.

Предложение 5.1. Для гладких многообразий M и N отображение k -струйного расширения

$$j^k : f \mapsto j^k f \quad \text{между} \quad C^\infty(M, N) \quad \text{и} \quad C^\infty(M, J^k(M, N))$$

непрерывно в тонких C^{k+s} - и C^s -топологиях, соответственно, для любого целого неотрицательного s , и, следовательно, в тонких гладких ($= C^\infty$) топологиях.

Из этого предложения вытекают следующие утверждения.

Следствие 5.2. Если образ замкнутого множества при k -струйном расширении гладкого отображения не пересекается с некоторым замкнутым подмножеством в пространстве k -струй, то его образ при k -струйном расширении достаточно близкого отображения в тонкой C^{k+s} -топологии с $s \geq 0$ также не пересекается с этим подмножеством.

Следствие 5.3. Множество иммерсий (субмерсий) открыто в пространстве гладких отображений в тонкой C^1 -топологии.

Следствие 5.4. Множество функций класса C^2 на гладком многообразии, имеющих лишь невырожденные критические точки, открыто в пространстве таких функций в тонкой C^2 -топологии.

Следствие 5.5. Множество дифференцируемых векторных полей на многообразии, имеющих лишь невырожденные особые точки, открыто в пространстве таких полей в тонкой C^1 -топологии.

Доказательство следствий. Первое следствие вытекает из непрерывности отображения k -струйного расширения, доставляемой предложением 5.1. Действительно, в силу отсутствия пересечения между замкнутым подмножеством в пространстве струй и образом многообразия-прообраза при струйном расширении исходного отображения этот образ имеет окрестность, которая также не пересекается с этим множеством, что нетрудно видеть. В силу непрерывности отображения k -струйного расширения это остается справедливым и при достаточно малых возмущениях исходного отображения в тонкой C^{k+s} -топологии.

Последующие следствия вытекают из первого. Рассуждения аналогичны во всех трех случаях и мы приведем лишь доказательство первого (оставив два других случая в качестве упражнений читателю).

Если отображение не является субмерсией или иммерсией в некоторой точке, то 1-струя этого отображения в этой точке принадлежит замкнутому подмножеству в пространстве струй, определяемому в локальных

координатах как пересечение нулевых уровней максимальных минором матрицы Якоби. В силу следствия 5.2, множество дифференцируемых отображений, для которых образы 1-струйного расширения не пересекаются с этим подмножеством, открыто в тонкой C^1 -топологии. \square

Замечание 5. Отметим, что во всех этих примерах необходимо хорошо контролировать изучаемые объекты на бесконечности в пространстве - прообразе.

Например, векторное поле $v(x) = e^{-|x|} \sin x$ класса C^1 , определенное на вещественной прямой, имеет лишь невырожденные особые точки $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако собственные числа в этих особых точках, экспоненциально стремятся к нулю, когда $|n| \rightarrow \infty$. Следовательно, для сохранения невырожденности особых точек при малых возмущениях поля необходимо рассматривать окрестности этого поля, определяемые положительными функциями ϵ , по меньшей мере экспоненциально убывающими на бесконечности.

Доказательство предложения 5.1. По существу предложение утверждает, что s -струя k -струйного расширения гладкого отображения непрерывно зависит от этого отображения, что понятно. Для доказательства рассмотрим открытое подмножество U в пространстве $J^s(M, J^k(M, N))$. Достаточно показать, что для соответствующего элемента $B(U)$ базы топологии в $C^\infty(M, J^k(M, N))$ подмножество $(j^k)^{-1}(B(U))$ также открыто в $C^\infty(M, N)$.

Нетрудно видеть, что $(k+s)$ -струя отображения определяет s -струю k -струйного расширения этого отображения. Обозначим через $j_{k,s}$ соответствующее отображение, а именно

$$j_{k,s} : j^{k+s} f(x) \mapsto j^s(j^k f)(x),$$

которое несомненно непрерывно. Отображения $j^s \circ j^k$ и $j_{k,s} \circ j^{k+s}$ - аналогичные отображения в $C^\infty(M, J^s(M, J^k(M, N)))$ (см. рис. 5.1).

Таким образом,

$$(j^k)^{-1}(B(U)) = B((j_{k,s})^{-1}(U))$$

Но подмножество $(j_{k,s})^{-1}(U)$ открыто как прообраз открытого множества при непрерывном отображении, а, значит, подмножество $B((j_{k,s})^{-1}(U))$ открыто как подмножество из базы топологии. Следовательно, подмножество $(j^k)^{-1}(B(U))$ также открыто. \square

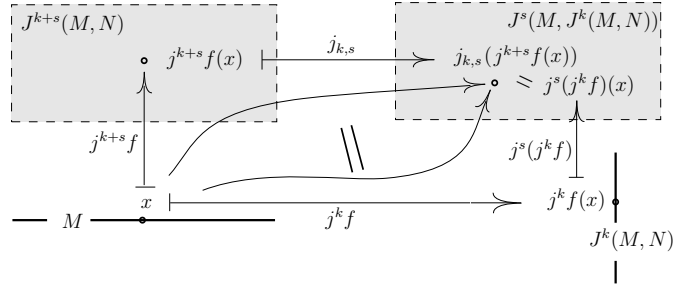


Рис. 5.1. Коммутативная диаграмма со струйными расширениями.

Предложение 5.6. Для гладких многообразий L , M и N и гладкого отображения $\phi : M \rightarrow N$ отображение $\phi_* : f \mapsto \phi \circ f$ между $C^\infty(L, M)$ и $C^\infty(L, N)$ непрерывно в любой тонкой C^k -топологии, и, таким образом, в гладкой тонкой топологии.

Доказательство. Пусть U - открытое подмножество в $J^k(L, N)$ и пусть $B(U)$ - соответствующий элемент базы топологии в $C^\infty(L, N)$. Достаточно показать, что $(\phi_*)^{-1}(B(U))$ - открытое подмножество.

Отображение ϕ индуцирует естественным образом следующее гладкое отображение:

$$\Phi : j^k f(x) \mapsto j^k(\phi \circ f)(x)$$

между пространствами струй $J^k(L, M)$ и $J^k(L, N)$ (см. рис. 5.2). Следовательно, прообраз $\Phi^{-1}(U)$ - открытое подмножество, и соответствующий элемент базы топологии $B(\Phi^{-1}(U))$ открыт в $C^\infty(L, M)$ по определению.

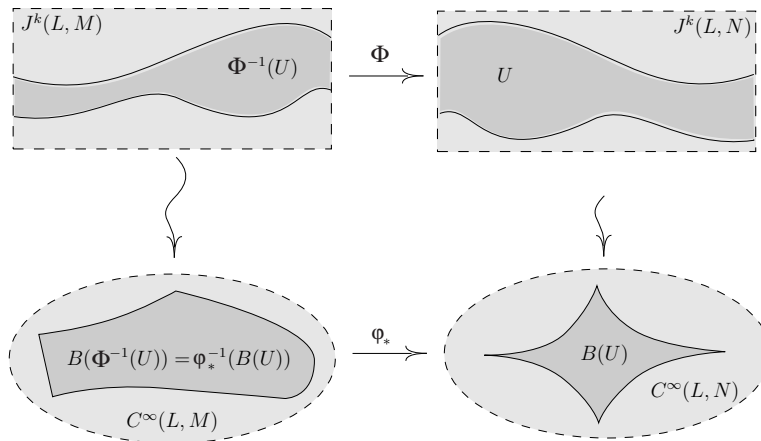


Рис. 5.2. Непрерывность L -эквивалентности

Но последнее подмножество совпадает с $(\phi_*)^{-1}(B(U))$, что нетрудно видеть. Следовательно, отображение ϕ_* непрерывно в любой тонкой C^k -топологии, а, значит, и в гладкой тонкой топологии. \square

Замечание 6. Предложение 5.6 доставляет непрерывность L -эквивалентности в тонких топологиях. Что касается аналогичного предложения для отображений $\phi : L \rightarrow M$ и $f \circ \phi$, где $f : M \rightarrow N$, то непрерывность зависит от свойств отображения ϕ . Например, рассмотрим гладкую функцию ϕ , $\phi(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, определенную на вещественной прямой и отображение $f \circ \phi$ с произвольной гладкой функцией f , также определенной на вещественной прямой. Если соответствующее отображение $\phi_* : f \mapsto f \circ \phi$ непрерывно в тонкой C^k -топологии, то прообраз при этом отображении окрестности $\{f \mid \rho(j^k(f \circ \phi), 0) < e^{-x^2}\}$ нулевой функции, задаваемой положительной функцией $\epsilon(x) = e^{-x^2}$, должен быть открытым множеством. Но любая функция из этого прообраза имеет нулевое значение в точках $x = \pm 1$. Следовательно, этот прообраз не может быть открытым множеством, а отображение ϕ_* не является непрерывным.

Однако непрерывность этого отображения будет и в этом случае, если дополнительно предположить собственность отображения ϕ . В частности, это требование выполнено, если отображение ϕ - диффеоморфизм, так что правая эквивалентность также непрерывна в тонких топологиях.

6. Трансверсальность и теоремы трансверсальности

Обычно система трех уравнений с двумя неизвестными не совместна, две прямые в трехмерном пространстве не пересекаются, а многочлен общего положения имеет лишь невырожденные корни. Здесь мы вводим понятие трансверсальности, являющееся далеким обобщением перечисленных случаев типичности ситуаций.

6.1. Понятие трансверсальности

Определение 16. Для гладких многообразий L, M и N два отображения $f : L \rightarrow N$ и $g : M \rightarrow N$ трансверсальны в точках $P \in L$ и $Q \in M$, если

- либо образы $f(P)$ и $g(Q)$ различны
- либо $f(P) = g(Q)$ и справедливо равенство

$$f_*(P)T_P L + g_*(Q)T_Q M = T_S N, \quad (6.1)$$

где $T_P L, T_Q M, T_S N$ - пространства скоростей на многообразиях L, M и N в точках P, Q и S соответственно, и $S = f(P) = g(Q)$.

Трансверсальность отображений f и g в точках P и Q обозначается $f \pitchfork_{P,Q} g$. Если трансверсальность этих отображений имеет место для любых точек $P \in A$, $A \subset L$, и $Q \in B$, $B \subset M$, то говорят о *трансверсальности этих отображений на множествах A и B* , а при $A = L$, $B = M$ говорят просто о *трансверсальности отображений f и g* ; обозначают $f \pitchfork_{A,B} g$, $f \pitchfork g$, соответственно.

Пример 9. Пусть L и M - вещественные прямые с координатами u и v , соответственно, и пусть N - вещественная плоскость $R^2_{x,y}$. Рассмотрим отображение $f : L \rightarrow R^2_{x,y}$, задаваемое вложением оси абсцисс в эту плоскость, и отображение $g : v \mapsto (x = v, y = v^2 + \epsilon)$, где ϵ - вещественный параметр. Существенно различаются следующие три случая:

$$(a) \epsilon < 0, \quad (b) \epsilon = 0, \quad \text{и} \quad (c) \epsilon > 0$$

(см. рис. 6.1).

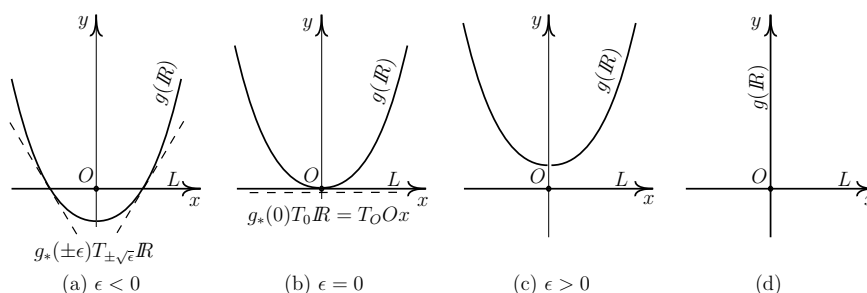


Рис. 6.1. Трансверсальность и ее отсутствие.

В случае (c) образы наших отображений не пересекаются, поэтому отображения f и g трансверсальны по определению.

В случае (a) эти отображения также трансверсальны, но здесь их образы уже пересекаются. Условие трансверсальности нужно проверить только в прообразах точек из пересечения образов отображений. В уравнении (6.1) первое слагаемое доставляет горизонтальные скорости $R(1, 0)$ в любой точке образа, а второе - скорости $R(1, 2v)$ в каждой точке $(v, v^2 + \epsilon)$ образа. Сумма этих слагаемых даёт все скорости на плоскости, если $v \neq 0$. В случае (a) в точках пересечения $v^2 = -\epsilon > 0$, и следовательно, имеет место трансверсальность.

Наконец, в случае (c) в единственной точке пересечения $v = 0$, и, следовательно, сумма этих двух слагаемых даёт лишь горизонтальные скорости, и условие трансверсальности не выполняется. В этом случае трансверсальность нарушается в прообразах нуля.

Если отображение g определяется как $x = 0, y = v^3$, то образы отображений f и g снова пересекаются в нуле, при этом в нуле у этих образов множества касательных к ним скоростей дают все пространство скоростей на плоскости (см. рис. 6.1). Однако, как и в предыдущем случае, отображения не трансверсальны на прообразах нуля, поскольку сейчас второе слагаемое в левой части уравнения (6.1) просто нулевое, что нетрудно видеть.

Если в определении понятия трансверсальности одно из многообразий-прообразов, например, M , является дифференцируемым подмногообразием в многообразии-образе, а соответствующее отображение g есть вложение $g = i : M \hookrightarrow N$, то получим для отображения f понятия его трансверсальности к M в точке, трансверсальности к M на подмножестве $A \subset L$ и трансверсальности к M ($A = M$), соответственно. Обозначаются эти типы трансверсальности как $f \pitchfork_P M, f \pitchfork_A M$, и $f \pitchfork M$.

6.2. Следствия из понятия трансверсальности

Пусть L, M, N - гладкие многообразия, а f и g - гладкие отображения $L \rightarrow N$ и $M \rightarrow N$, соответственно. Ряд полезных утверждений вытекает сразу из определения трансверсальности.

Следствие 6.1. *Если для дифференцируемого подмногообразия L ко-размерности k многообразия N размерности n образ $g(Q) \in L$ для некоторой точки $Q \in M$, и вблизи точки $g(Q)$ это подмногообразие задается уравнениями $z_1 = z_2 = \dots = z_k = 0$ в подходящих гладких локальных координатах z_1, z_2, \dots, z_n на многообразии N с началом в точке $g(Q)$, то $g \pitchfork_Q L$, если и только если в точке Q отображение $\tilde{g} : (\cdot) \mapsto (g_1, g_2, \dots, g_k)$ является субмерсией.*

Доказательство. В выбранных z -координатах касательное пространство к подмногообразию L в точке $g(Q)$ совпадает с линейным пространством, порожденным единичными векторами осей Oz_i с $k < i \leq n$ (см. рис. 6.2).

Таким образом, если отображение \tilde{g} является субмерсией в точке Q , то образ $g_*(Q)T_Q M$ содержит k векторов, которые вместе с этими единичными векторами образуют набор из n линейно независимых векторов, являющийся базисом пространства $T_{g(Q)}N$. Следовательно, $g \pitchfork_Q L$.

Обратно, если $g \pitchfork_Q L$, то образ $g_*(Q)T_Q M$ содержит векторы, дополняющие набор единичных векторов осей $Oz_i, k < i \leq n$, до базиса пространства скоростей в точке $g(Q)$ многообразия N . Следовательно, отображение \tilde{g} имеет максимальный ранг в точке Q и, тем самым, оно является субмерсией в этой точке. \square

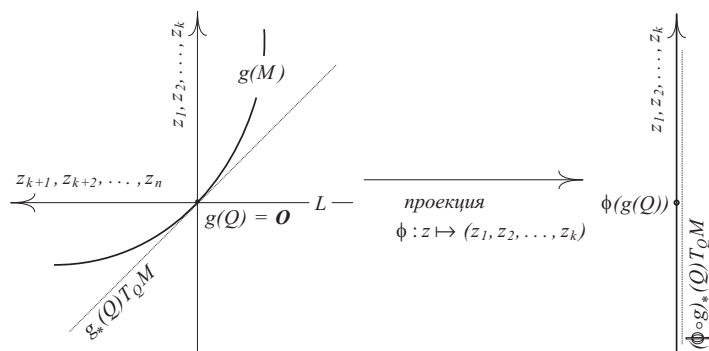


Рис. 6.2. Трансверсальность \Leftrightarrow субмерсия.

Пример 10. Рассмотрим дифференцируемое векторное поле v на вещественной прямой. Рассмотрим его как сечение $g : x \mapsto (x, v(x))$ пространства скоростей на прямой. Положения равновесия поля v - это в точности точки пересечения этого сечения с нулевым сечением $v \equiv 0$ этого пространства. Нулевое сечение - гладкое подмногообразие пространства скоростей коразмерности 1. В силу следствия 6.1 сечение g трансверсально этому подмногообразию в точке $Q, v(Q) = 0$, если и только если отображение $x \mapsto v(x)$ имеет максимальный ранг. Здесь это означает, что $v'(Q) \neq 0$. Таким образом, трансверсальность здесь означает невырожденность положения равновесия Q поля v .

Точно такое же утверждение справедливо и для дифференцируемого поля на гладком многообразии любой размерности, а именно, трансверсальность сечения пространства скоростей (=касательного пространства) к нулевому сечению означает невырожденность положений равновесия векторного поля.

Пример 11. Рассмотрим C^2 -потенциал U на арифметическом пространстве R_x^m , $U : R_x^m \rightarrow R$. Его критические точки (=возможные положения равновесия системы) есть в точности точки, где $dU = 0$. Следовательно, появление таких точек связано с пересечением образа 1-струйного расширения этого потенциала с гладким подмногообразием в пространстве струй $U' = 0$. В силу следствия 6.1, отображение 1-струйного расширения потенциала трансверсально этому

подмногообразию, если отображение $x \mapsto U'(x)$ в каждой из критических точек потенциала U имеет максимальный ранг. Это означает, что второй дифференциал потенциала U в каждой из его критических точек невырожден, то есть задает невырожденную квадратичную форму. В локальных координатах это означает, что матрица вторых производных (=матрица Гессе) потенциала невырождена в каждой из его критических точек, то есть все эти точки невырожденные.

Точно такой же пример имеет место на любом гладком многообразии.

Следствие 6.2. Если отображения $f : L \rightarrow N$ и $g : M \rightarrow N$ класса $C^k, k \geq 1$, трансверсальны, то подмножество S всех точек $P \in L, Q \in M$, удовлетворяющих равенству $f(P) = g(Q)$, либо пусто, либо является C^k -подмногообразием размерности $\dim L + \dim M - \dim N$ (коразмерности $\dim N$) в прямом произведении $L \times M$. В частности, при $\dim L + \dim M - \dim N < 0$ это подмногообразие всегда пусто.

Доказательство. Если подмножество S пусто, то утверждение справедливо. Пусть $S \neq \emptyset$ и $(P, Q) \in S$. Если r - ранг отображения f в точке P , то в любых гладких локальных координатах есть в точности r компонент этого отображения, дифференциалы которых в точке P линейно независимы. Возьмем эти компоненты как первые r локальных координат x_i вблизи точки P на пространстве-прообразе. После подходящей перенумерации локальных координат на пространстве образе вблизи точки $f(P)$ отображение f примет вид

$$z_i = x_i, 1 \leq i \leq r; z_j = f_j(x), r < j \leq n,$$

где x_1, x_2, \dots, x_l и z_1, z_2, \dots, z_n - локальные координаты класса C^k и C^∞ , на многообразии-прообразе и многообразии-образе с началами в точках P и $f(P)$, соответственно. Отметим, что все функции $f_j, r < j \leq n$, являются функциями класса C^k , и что все производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P), r < j \leq n, r < i \leq l$, нулевые, поскольку ранг отображения f в точке Q равен r . Выбором новых гладких координат z_{r+1}, \dots, z_n добьемся зануления дифференциалов $df_j(P), r < j \leq n$; это возможно, что нетрудно видеть. Таким образом, в выбранных координатах образ $f_*(P)T_P L$ совпадает с линейным пространством, порожденным первыми r единичными векторами (= единичными векторами осей $Oy_i, 1 \leq i \leq r$).

По условию отображения f и g трансверсальны в точках P, Q . Следовательно, подпространство $g_*(Q)T_Q M$ должно дать нам дополнительные $n - r$ базисных векторов пространства скоростей $T_{f(P)}N$. Следова-

тельно, в выбранных z -координатах последние $n - r$ компонент отображения g имеют независимые дифференциалы в точке Q . Таким образом, вблизи этой точки их можно взять как последние $(n - r)$ локальные координаты y_i класса C^k с некоторыми дополнительными координатами y_1, \dots, y_{m-n+r} также класса C^k .

В выбранных координатах отображение g принимает форму

$$z_i = g_i(y), \quad 1 \leq i \leq r; \quad z_j = y_{m-n+j}, \quad r < j \leq n,$$

где все g_j являются функциями класса C^k .

Следовательно, в выбранных локальных координатах множество S вблизи точки (P, Q) задается системой n уравнений

$$x_i - g_i(y) = 0, \quad 1 \leq i \leq r; \quad y_{m-n+j} - f_j(x) = 0, \quad r < j \leq n.$$

В левой части этих уравнений стоят функции класса C^k с линейно независимыми дифференциалами в точке (P, Q) , ибо матрица их производных, вычисленная в этой точке, имеет треугольную подматрицу размера $n \times n$ с единицами на диагонали. Следовательно, по теореме о неявной функции, эта система уравнений задает вблизи точки (P, Q) подмногообразие класса C^k коразмерности n (размерности $\dim L + \dim M - \dim N$).

□

Замечание 7. Если дополнительно к условиям последнего следствия отображение f является собственным, то ограничение на подмногообразии S естественной проекции прямого произведения $L \times M$ на второй сомножитель также является отображением собственным.

Замечание 8. Если в последнем следствии многообразии L есть подмногообразие в N , а отображение f - вложение этого подмногообразия в N , то подмногообразие S естественно определено в M , и в этом случае оно либо пусто, либо имеет в M ту же коразмерность, что и L в N .

Пример 12. На гладком многообразии M рассмотрим гладкое семейство потенциалов с параметром λ , пробегающим гладкое многообразие Λ . В пространстве 1-струй семейства множество струй, удовлетворяющих уравнению $U'_x = 0$, где x - гладкая локальная координата на многообразии M , образуют гладкое подмногообразие коразмерности $t = \dim M$. В силу последнего следствия трансверсальность 1-струйного расширения семейства к этому подмногообразию влечет, что критические точки потенциалов семейства образуют гладкое подмногообразие коразмерности t (и, таким образом, размерности $\dim \Lambda$) в прямом произведении $M \times \Lambda$.

Отметим, что здесь трансверсальность не означает, что критическая точка потенциала семейства должна быть невырожденной. Например, 1-струйное расширение семейства потенциалов $U(x, \lambda) = x^3 + \lambda x$ на вещественной оси с вещественным параметром λ трансверсально подмногообразию $U'_x = 0$, но при $\lambda = 0$ потенциал этого семейства имеет вырожденную критическую точку (рис. 6.3). Множество всех критических точек потенциалов семейства - это парабола $\lambda = -3x^2$, которая является подмногообразием коразмерности (и размерности) 1 на плоскости переменных x, λ , как это и должно быть.

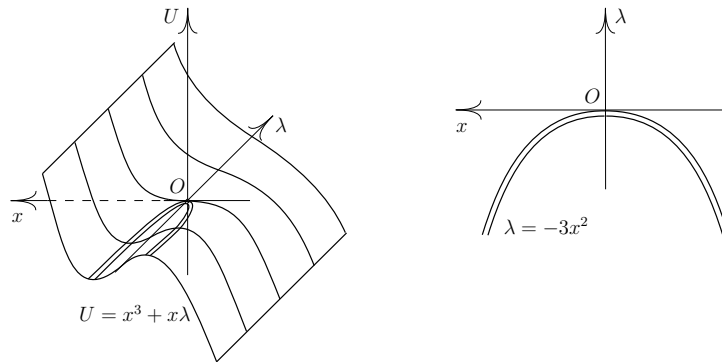


Рис. 6.3. Критические точки потенциалов семейства $x^3 + x\lambda$.

Предложение 6.3. Для дифференцируемого собственного отображения $g : M \rightarrow N$ множество всех гладких отображений $f : L \rightarrow N$, трансверсальных g , открыто в тонкой C^1 -топологии.

Как и выше, здесь L, M и N - гладкие многообразия.

Доказательство. В силу следствия 5.2 достаточно показать, что в пространстве $J^1(L, N)$ множество струй S , для которых нет нужной нам трансверсальности, замкнуто.

Пусть $\{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ - сходящаяся последовательность струй S , а σ - предел этой последовательности. Покажем, что $\sigma \in S$.

Обозначим через $P_i, H_i, (P, H)$ образы струи σ_i (σ) на многообразиях L и N , соответственно, при естественных проекциях из пространства струй на эти многообразия.

Возьмем произвольный представитель f_i струи σ_i и произвольную точку Q_i из прообраза H_i для отображения g такую, что отображения f_i и g не являются трансверсальными в точках P_i, Q_i . Здесь отсутствие трансверсальности означает, что ранг линейного отображения

$$\begin{pmatrix} f_{i*}(P_i) & 0 \\ 0 & g_*(Q_i) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

касательного пространства $T_{P_i}L \times T_{Q_i}M$ на касательное пространство $T_{H_i}N$ меньше $\dim N$. Понятно, что этот ранг не зависит от выбора представителя f_i струи σ_i .

Рассмотрим произвольную окрестность точки H с компактным замыканием и прообраз K этого замыкания при отображении g . K – компакт, ибо отображение g собственное. Начиная с некоторого номера i_0 , все точки H_i лежат в этой окрестности, а, значит, все точки Q_i принадлежат этому компактному. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\{Q_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ из этих точек. Без нарушения общности можно предположить, что эта подпоследовательность и есть сама $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$. Обозначим через Q ее предел.

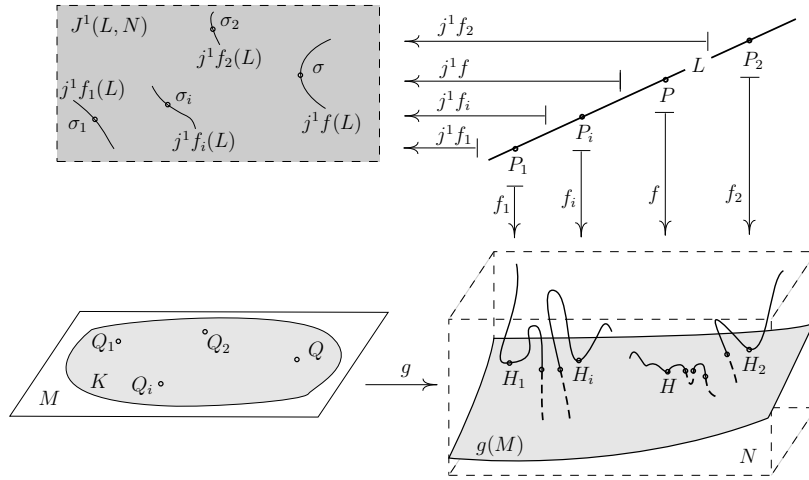


Рис. 6.4. Замкнутость множества струй.

В силу непрерывной зависимости линейного отображения (6.2) от струи σ_i и точки Q_i , ранг этого отображения для струи σ в точке Q также меньше $\dim N$. Следовательно, предел σ также лежит в S .

Предложение доказано. \square

Замечание 9. В предложении 6.3 требование собственности отображения g крайне важно для получения открытости множества отображений, трансверсальных g . Утверждение предложения неверно без этого предположения. Например, рассмотрим отображение $g : u \mapsto (0, u/(1+u^2)^{1/2})$, $u \in \mathbb{R}$. Отображение f вложения окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ в плоскость трансверсально с g , ибо образы этих отображений не пересекаются. Но существуют сколь угодно малое возмущение отображения

f , не являющееся трансверсальным g (рис. 6.5).

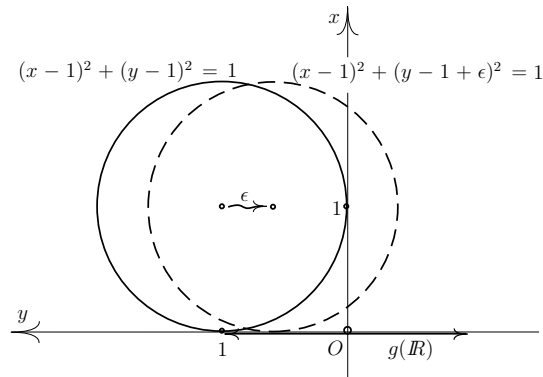


Рис. 6.5. Собственность отображения важна.

6.3. Теоремы трансверсальности

Здесь мы формулируем и доказываем теоремы трансверсальности, доставляющие один из важнейших инструментов теории особенностей. Как и выше, в этом параграфе L , M и N - гладкие многообразия.

Теорема трансверсальности Бахтина-Лина 1. *Для любого собственного дифференцируемого отображения $g : M \rightarrow N$ множество гладких отображений $f : L \rightarrow N$ трансверсальных g открыто в тонкой C^1 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Струйная теорема трансверсальности Бахтина-Лина 1. *Для любого собственного дифференцируемого отображения $g : M \rightarrow J^k(L, N)$ множество гладких отображений $f : L \rightarrow N$ с трансверсальным к g k -струйным расширением открыто в тонкой C^{k+1} -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Из этих теорем вытекают следующие утверждения.

Следствие 6.4 (Слабая теорема трансверсальности). *Для любого замкнутого C^1 -подмногообразия M в N множество трансверсальных к M гладких отображений $f : L \rightarrow N$ открыто в тонкой C^1 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Следствие 6.5 (Теорема трансверсальности Тома). *Для любого замкнутого C^1 -подмногообразия M в $J^k(L, N)$, множество гладких отображений $f : L \rightarrow N$ с трансверсальным к M k -струйным расширением открыто в тонкой C^{k+1} -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Сначала мы докажем следствия, используя теоремы трансверсальности Бахтина-Лина.

Доказательство. Слабая теорема трансверсальности вытекает непосредственно из теоремы трансверсальности Бахтина-Лина. Достаточно взять в качестве отображения g вложение M в N , которое, очевидно, является собственным отображением в силу замкнутости M в N . Аналогично, струйная теорема трансверсальности Бахтина-Лина влечет струйную теорему трансверсальности Тома. \square

Замечание 10. Теоремы трансверсальности Бахтина-Лина и следствия из них также справедливы и для отображений класса C^r с достаточно большим r . Однако в этом случае плотность будет также в тонкой C^r -топологии. Заметим, что в пространстве отображений класса C^r гладкие отображения всюду плотны [6].

Сформулируем и докажем некоторые полезные утверждения, вытекающие из следствий 5.4, 5.5 и иллюстрирующие полезность теорем трансверсальности.

Следствие 6.6. *В пространстве гладких функций на гладком многообразии множество функций с невырожденными критическими точками открыто в тонкой C^2 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Следствие 6.7. *В пространстве гладких векторных полей на гладком многообразии множество полей с невырожденными особыми точками открыто в тонкой C^1 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии.*

Доказательство. Эти следствия вытекают из струйной теоремы трансверсальности Бахтина-Лина.

В критической точке функции ее 1-струя принадлежит подмногообразию M струй с нулевой первой производной. В силу струйной теоремы трансверсальности, множество функций, для которых 1-струйное расширение трансверсально M , открыто в тонкой C^2 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии. Но трансверсальность здесь означает, что все критические точки невырождены.

Аналогично, 0-струя дифференцируемого векторного поля в его особой точке принадлежит подмногообразию M струй с нулевым значением скорости. В силу струйной теоремы трансверсальности, множество полей, 1-струйное расширение которых трансверсально M , открыто в тонкой C^1 -топологии и плотно в тонкой C^∞ -топологии. Но трансверсальность здесь означает, что все особые точки векторного поля невырождены. \square

Замечание 11. Будем говорить, что *типичный* (или *объект общего положения*) обладает свойством A , если этим свойством обладает объект из некоторого открытого всюду плотного множества в пространстве объектов в подходящей топологии. В нашем случае мы будем использовать тонкие гладкие или достаточно гладкие топологии. Например, в силу следствия 6.6 типичная гладкая функция на многообразии имеет лишь невырожденные критические точки.

Доказательство теоремы Бахтина-Лина. Достаточно показать, что множество трансверсальных отображений плотно в тонкой гладкой топологии, ибо в силу предложения 6.3 это множество открыто.

Полезны следующие утверждения.

Теорема 6.8. *Для гладких многообразий L, E, M и отображения $F : L \times E \rightarrow N$, трансверсального собственному отображению $g : M \rightarrow N$, множество значений $\epsilon \in E$, для которых отображение $f_\epsilon : (\cdot, \epsilon) \mapsto F(\cdot, \epsilon)$ трансверсально g , содержит не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств E .*

Теорема 6.9. *Пространство отображений класса C^k с тонкой C^r -топологией, $0 \leq r \leq k$, есть пространство Бэра.*

Замечание 12. Топологическое пространство называется пространством Бэра, если любое не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных его подмножеств всюду плотно. Например, любое многообразие является пространством Бэра, ибо локально оно устроено как арифметическое пространство, где указанное свойство, очевидно, выполнено.

В силу определения тонкой гладкой топологии для доказательства теоремы трансверсальности Бахтина-Лина достаточно показать плотность трансверсальных отображений в любой тонкой C^k -топологии, $k \geq 1$.

Пусть U - элемент счетной базы топологии в многообразии N с компактным замыканием, лежащим в некоторой локальной карте V , и K - замыкание множества с такими же свойствами, но в L . Достаточно показать плотность множества всех отображений f , трансверсальных g на компактах K и $g^{-1}(\bar{U})$, соответственно ($g^{-1}(\bar{U})$ компакт, поскольку \bar{U} - компакт, а отображение g собственное).

Действительно, в силу предложения 6.3 это множество открыто. Следовательно, взяв пересечение всех таких множеств по не более чем счетному числу пар таких компактов, получим множество трансверсальных g отображений, ибо любое многообразие покрывается такими компактами.

Но такое пересечение плотно в $C^\infty(L, N)$ в любой тонкой топологии в силу теоремы 6.9, что нам и требовалось показать.

Итак, нужно показать, что для любого отображения $f \in C^\infty(L, N)$ существует сколь угодно малое его возмущение, которое трансверсально g на компактах K и $g^{-1}(\bar{U})$, соответственно.

Если пересечение $f(K) \cap \bar{U}$ пусто, то возмущение можно взять нулевым, что нетрудно видеть. Пусть $f(K) \cap \bar{U} \neq \emptyset$. Рассмотрим $K' = K \cap f^{-1}(\bar{U})$.

В силу непрерывности функции f существуют окрестности W, W' компакта K' с компактными замыканиями и такие, что $\bar{W} \subset W'$ и $f(\bar{W}') \subset V$. Образ компакта \bar{W}' для любого достаточно близкого к f отображения принадлежит локальной карте V . Но находясь в этой карте, можно считать, что находимся в n -мерном арифметическом пространстве R^n . Следовательно, для достаточно малых значений $\epsilon \in R^n$ возмущение исходного отображения

$$f_\epsilon : x \mapsto f(x) + \epsilon\phi(x), \quad (6.3)$$

где гладкая функция ϕ равна единице на компакте \bar{W} и нулю вне компакта \bar{W}' , корректно определено.

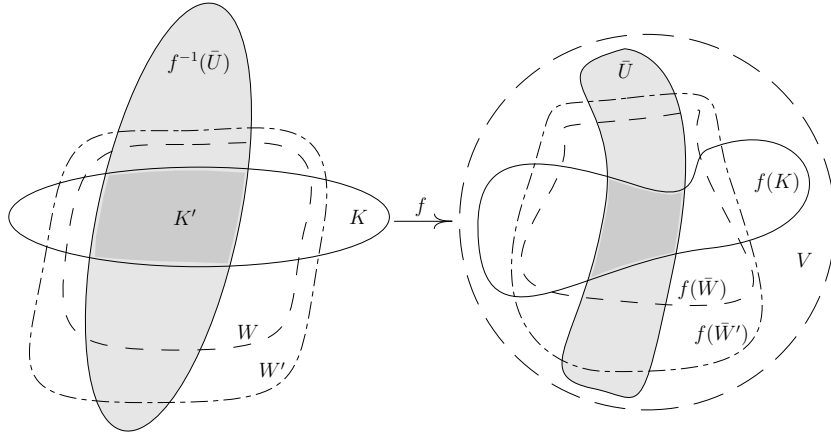


Рис. 6.6. Трансверсальность на компактах K и $g^{-1}(\bar{U})$

Разность $K \setminus W$ есть компакт в силу выбора W , а образ этой разницы при отображении f не имеет пересечений множеством \bar{U} . Следовательно, для достаточно малых значений ϵ образ этого компакта под действием отображения f_ϵ также не пересекает множество \bar{U} . Но это означает, что отображения f_ϵ и g трансверсальны на компактах $K \setminus W$ и $g^{-1}(\bar{U})$. Но отображение $F : (x, \epsilon) \mapsto f_\epsilon(x)$ является субмерсией в точке (x, ϵ) , если $x \in \bar{W}$ и значение ϵ достаточно мало (что возмущение отображения корректно определено). Но субмерсия трансверсальна любому отображению.

Итак, существует положительное число δ такое, что для любого значения ϵ , $|\epsilon| \leq \delta$, отображение F трансверсально g на компактах $(K \setminus W) \cup \bar{W}$ и $g^{-1}(\bar{U})$, соответственно. Но $K \subset (K \setminus W) \cup \bar{W}$. Следовательно, для таких значений ϵ отображения F и g трансверсальны на компактах K и $g^{-1}(\bar{U})$, соответственно, а, значит, и на некоторых окрестностях L' и M' этих компактов, соответственно.

В силу теоремы 6.8, множество значений ϵ , доставляющих трансверсальные g отображения f_ϵ на множествах L' и M' , соответственно, есть пересечение не более чем счетного числа открытых всюду плотных в шаре $E = \{\epsilon \mid |\epsilon| < \delta\}$ множеств. Следовательно, существует сколь угодно малое ϵ доставляющее такую трансверсальность и, следовательно, трансверсальность между f_ϵ и g на компактах K и $g^{-1}(\bar{U})$, соответственно.

Но наше возмущение локальное, поскольку наше отображение локализовано на компакте \bar{W}' , и зависит непрерывно от параметра ϵ . Следовательно, для любой окрестности отображения f отображение f_ϵ принадлежит этой окрестности для достаточно малых ϵ . Следовательно, множество трансверсальных g отображений f на компактах $g^{-1}(\bar{U})$ и K плотно.

Следовательно, справедлива теорема трансверсальности Бахтина-Лина. \square

Замечание 13. Доказательство струйной теоремы трансверсальности Бахтина-Лина можно провести аналогично, делая вместо использованного выше возмущения полиномиальные возмущения степени k и используя окрестности в пространстве струй.

Теорема 6.8 вытекает из следствия 6.2 и следующего утверждения.

Теорема Бертини-Сарда 1. *Для гладких многообразий M и N и отображения $g : M \rightarrow N$ класса C^r мера критических значений этого отображения нулевая, если $r > \min\{0, m - n\}$. Помимо этого, множество точек в N , не являющихся критическими значениями отображения, содержит пересечение не более счетного числа открытых плотных множеств.*

Замечание 14. Мы не приводим доказательство этой теоремы. Его можно найти в [1], [4]. Отметим, что при $\dim M < \dim N$ образ C^1 -отображения $g : M \rightarrow N$ имеет нулевую меру и является нигде не плотным множеством [6], то есть любое открытое множество содержит подмножество, не пересекающееся с этим образом. В частности, дополнение этого образа является множеством второй категории (= нетощим множеством).

Доказательство теоремы 6.8. В силу следствия 6.2 из трансверсальности между F и g вытекает, что уравнение $F(x, \epsilon) = g(y)$ определяет на пространстве $L_x \times E_\epsilon \times M_y$ гладкое подмногообразие S коразмерности $\dim N$. Ограничение τ на это подмногообразие стандартной проекции на E_ϵ является гладким отображением. По теореме Бертини-Сарда множество регулярных значений этого ограничения есть множество второй категории. Но точки этого множества есть в точности те значения ϵ , для которых отображения $F(., \epsilon) : L \rightarrow N$ и g трансверсальны.

В самом деле, если некоторое ϵ_0 не принадлежит образу τ , то пересечение $F(L, \epsilon_0) \cap g(M)$ пусто, и по определению имеет место необходимая трансверсальность. При $\dim S < \dim E$ множество таких ϵ_0 есть множество второй категории (см. замечание выше).

В случае $\dim S \geq \dim E$ рассмотрим некоторое значение ϵ_0 , лежащее в образе отображения τ и являющееся его регулярным значением. Пусть $A = (P, \epsilon_0, Q)$ – некоторая точка прообраза этого значения при отображении τ . Покажем, что отображения $F(., \epsilon_0)$ и g трансверсальны в точках P и Q , соответственно. В точке A касательное пространство к $L \times E \times M$ является суммой двух подпространств, а именно, ядра проекции τ и касательного пространства к подмногообразию S в этой точке (рис. 6.7). Любой вектор (u, v, w) последнего пространства удовлетворяет уравнению

$$F'_x(P, \epsilon_0)u + F'_\epsilon(P, \epsilon_0)v - g'(Q)w = 0$$

или

$$F'_\epsilon(P, \epsilon_0)v = g'(Q)w - F'_x(P, \epsilon_0)u, \quad (6.4)$$

и для любого из двух первых подпространств его вторая компонента нулевая. По условию трансверсальности между F и g , в точках (P, ϵ_0) и Q касательная плоскость $T_{g(Q)}N$ есть сумма (двух) линейных подпространств $F_*(P, \epsilon_0)T_{(P, \epsilon_0)}(L \times E)$ и $g_*(A)T_Q M$. В силу уравнения (6.4) сумма подпространств $F_*(P, \epsilon_0)T_{(P, \epsilon_0)}(L \times E)$ и $g_*(Q)T_Q M$ дает аналогичный результат. Но это означает, что отображения $F(., \epsilon_0)$ и g трансверсальны в точках P и Q . Это завершает оказательство теоремы 6.8. \square

Доказательство теоремы 6.9. Для доказательства теоремы 6.9 необходимо показать, что любое непустое открытое подмножество V содержит точку пересечения не более чем счетного числа произвольных открытых всюду плотных множеств $\{U_i\}$. Для этого индуктивно построим последовательность отображений, сходящуюся в любой тонкой C^k -топологии

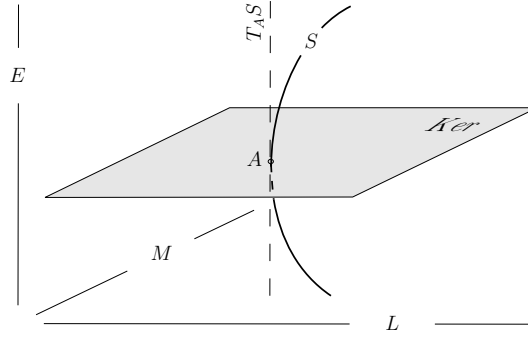


Рис. 6.7. Касательное пространство есть сумма двух подпространств

(и, таким образом, в тонкой C^r -топологии) к отображению, лежащему в V и во всех окрестностях U_i .

Подмножество U_1 открыто и плотно. Следовательно, пересечение $V \cap U_1$ открыто и не пусто. По определению тонкой C^r -топологии существует открытое подмножество W в пространстве r -струй такое, что открытое множество $B(W) = \{f | j^r f(L) \subset W\}$ принадлежит этому пересечению и не пусто. Рассмотрим отображение $f_1 \in B(W)$ и окрестность W_1 образа $j^r f_1(L)$ его r -струйного расширения такую, что $B(\bar{W}_1) \subset V \cap U_1$. Такая окрестность существует, поскольку малые возмущения отображения приводят к малым изменениям r -струй отображений.

Множество $B(W_1)$ открыто по определению топологии и не пусто, ибо $f_1 \in B(W_1)$, а множество U_2 открыто и всюду плотно. Следовательно, пересечение $B(W_1) \cap U_2$ открыто, не пусто и плотно в $B(W_1)$, поэтому существует отображение f_2 , принадлежащее этому пересечению и удовлетворяющее неравенству

$$\rho_l(j^l f_{s-1}(x), j^l f_s(x)) < \frac{1}{2^s} \quad \text{для любых } x \in L, 1 \leq l \leq s. \quad (6.5)$$

где $s = 2$ и ρ_l есть полная метрика на пространстве 1-струй, совместимая с топологией этого пространства. Аналогично, рассмотрим некоторую окрестность W_2 образа $j^r f_2(L)$ такую, что $B(\bar{W}_2)$ также принадлежит этому пересечению.

Предположим, что множества и отображения, удовлетворяющие неравенству (6.5), построены до некоторого индекса i (рис. 6.8). Построим их для индекса $i + 1$.

Как и выше подмножество $B(W_i)$ открыто по определению топологии и не пусто, ибо $f_i \in B(W_i)$. Подмножество U_{i+1} открыто и всюду плотно. Следовательно, пересечение $B(W_i) \cap U_{i+1}$ открыто, непусто и всюду плотно в $B(W_i)$. Тогда существует отображение f_{i+1} , лежащее

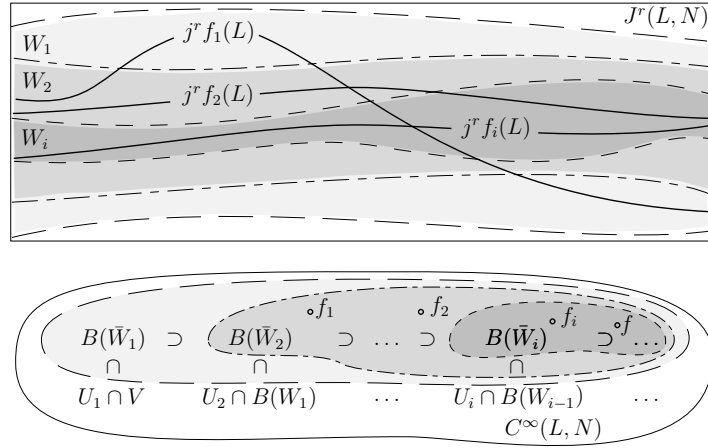


Рис. 6.8. Последовательности функций и замкнутых множеств.

в этом пересечении и удовлетворяющее неравенству (6.5) с $s = i + 1$. Следовательно, в силу открытости последнего пересечения, существует окрестность W_{i+1} образа $j^r f_{i+1}(L)$ такая, что подмножество $B(\bar{W}_{i+1})$ принадлежит этому пересечению.

Таким образом, по индукции получаем последовательности множеств и отображений, удовлетворяющих неравенству (6.5). Это неравенство влечет равномерную сходимость в L последовательности l -струйных расширений наших отображений. Следовательно, существует отображение f , являющееся пределом этой последовательности. Это отображение класса C^s , поскольку локально сходимость l -струйных расширений влечет равномерную сходимость отображений вместе со своими производными до порядка l включительно, $0 \leq l \leq s$.

Подмножество $B(\bar{W}_i)$ содержит все члены последовательности отображений с номером, большим i , и, следовательно, содержит предельное отображение. Но само это подмножество принадлежит подмножествам U_i и V по построению. Следовательно, предельное отображение принадлежит пересечению V и всех U_i .

Теорема 6.9 доказана. □

7. Методы локальной классификации особенностей

Здесь мы вводим некоторые локальные характеристики особенностей и иллюстрируем их важность.

7.1. Простые алгебраические понятия

Локальная алгебра особенности является одной из ее важнейших характеристик. Для определения этой алгебры введем необходимые понятия.

Полугруппой называется множество объектов с бинарной ассоциативной операцией “ $*$ ” на этих объектах. Часто операция в полугруппе обозначается “ \cdot ” либо “ $+$ ” и называется *умножением* либо *сложением*, соответственно.

Полугруппа называется *абелевой* или *коммутативной*, если для любых ее двух элементов a, b верно $a * b = b * a$. *Нейтральным элементом* полугруппы называется элемент, который оставляет ее элементы на месте в операциях с ними. Нейтральный элемент полугруппы обычно называется нулем для операции сложения по аналогии, например, с полугруппой неотрицательных целых чисел с обычным сложением, и единицей для операции умножения как, например, в полугруппе натуральных чисел по умножению.

Моноид - это полугруппа с нейтральным элементом e , а *группа* - это моноид, где каждый элемент a имеет обратный a^{-1} по отношению к имеющейся операции, то есть $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Нейтральный элемент называют обычно *нулем* для операции сложения и *единицей* для операции умножения.

Ассоциативное кольцо – это множество с двумя бинарными операциями такими, что

– по отношению к одной из них (которую мы будем называть сложением и обозначать “ $+$ ”) это множество является коммутативной группой, а

– по отношению к другой (которую мы будем называть умножением и обозначать “ \cdot ”) – полугруппой, и дополнительно

– имеет место левый и правый дистрибутивный закон

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

для любых элементов этого множества.

Кольцо называется *коммутативным*, если полугруппа по второй операции коммутативна, и *кольцом с единицей*, если эта полугруппа является моноидом.

Пример 13. *Множество функций класса C^k на гладком многообразии с обычной операцией умножения является коммутативной группой. В этой полугруппе есть единица - функция, тождественно равная единице. Таким образом, эта полугруппа является моноидом. Однако для*

функций, аннулирующихся в какой-либо точке, нет обратного элемента по умножению, и, следовательно, этот моноид не является группой.

Это же множество функций с обычной операцией сложения является коммутативной группой. В этом случае нейтральный элемент - нулевая функция ($= 0$).

С этими двумя операциями множество функций класса C^k на гладком многообразии есть ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, что нетрудно видеть.

Поле называется ассоциативное коммутативное кольцо, в котором ненулевые элементы образуют группу по второй операции. Например, множества рациональных, вещественных, комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения доставляют примеры полей.

Ассоциативная алгебра это ассоциативное кольцо, которое к тому же является векторным пространством над некоторым полем, и дополнительно выполнены следующие равенства

$$a(f \cdot g) = (af) \cdot g = f \cdot (ag) \quad (7.1)$$

для всех элементов a этого поля и всех элементов f, g кольца. Алгебра называется *коммутативной*, если коммутативно соответствующее кольцо.

Модуль - это обобщение понятия векторного пространства, когда вместо поля используется кольцо.

Пример 14. Множество функций класса C^k на гладком многообразии с обычными операциями сложения и умножения есть коммутативная ассоциативная алгебра над полем вещественных чисел. Действительно, множество таких функций является также линейным пространством над этим полем, и равенства (7.1) имеют место как числовые равенства в каждой точке.

Это множество также является модулем над кольцом функций класса C^l при $l \geq k$.

Пример 15. Множество линейных функций $\{a + bx\}$, где a и b вещественные числа с обычной операцией сложения

$$(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x$$

и умножением, определяемым как

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = (ad + bc)x + bd$$

является коммутативным ассоциативным кольцом. Но оно также есть и линейное пространство над полем вещественных чисел, а, значит, доставляет ассоциативную коммутативную алгебру над этим полем.

Подалгебра (подкольцо, подгруппа) - это подмножество в алгебре (кольце, группе, соответственно), само по себе являющееся алгеброй (кольцом, группой, соответственно) относительно имеющихся операций.

Введенные нами структуры алгебры, кольца, группы называются *алгебраическими*. Важным понятием для алгебраических структур является понятие идеала. Для алгебры (кольца) *левый идеал* есть подалгебра (подкольцо), замкнутая (замкнутое) относительно умножения слева на элементы всей алгебры (всего кольца). Аналогично определяется правый идеал. Идеал, являющийся и левым и правым, называется *двусторонним* или просто *идеалом*. Идеал называется *максимальным*, если он не содержится в большем идеале, еще отличном от всей рассматриваемой алгебраической структуры.

Пример 16. В обычной алгебре функций класса C^k на гладком многообразии функции, зануляющиеся в некоторой точке, образуют максимальный идеал. Для двух различных точек эти идеалы различны.

Ростки в заданной точке функций класса C^k на гладком многообразии образуют алгебру над полем вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения функций. Функции, зануляющиеся в этой точке, образуют максимальный идеал в этой алгебре.

При наличии идеала в алгебре или кольце можно ввести следующее отношение эквивалентности: два элемента эквивалентны, если один из них получается из другого сложением с элементом этого идеала. На множестве классов эквивалентности по этому отношению операции сложения и умножения индуцируются из алгебраической структуры. Точнее, для классов эквивалентности $\{a\}$, $\{b\}$ элементов a и b , соответственно, имеем

$$\{a\} + \{b\} = \{a + b\} \quad \text{и} \quad \{a\} \cdot \{b\} = \{a \cdot b\}.$$

Эти операции определены корректно, и множество классов эквивалентности с этими операциями само является алгеброй или кольцом и называется *фактор-алгеброй* и *фактор-кольцом* соответственно.

Пример 17. Фактор-алгебра алгебры ростков функций в точке по максимальному идеалу ростков функций, зануляющихся в этой точке, изоморфна алгебре вещественных чисел.

Замечание 15. Гомоморфизм алгебраических структур одной природы (алгебр, колец, групп, ...) – это отображение между ними, сохраняющее алгебраическую структуру. Например, гомоморфизм ϕ между двумя кольцами должен удовлетворять двум следующим условиям:

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b), \quad \phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b),$$

а между алгебрами – еще дополнительно условию

$$\phi(\lambda a) = \lambda \phi(a),$$

где a, b – элементы структуры, а λ – элемент соответствующего поля.

Изоморфизм – это обратимый гомоморфизм. Например, отображение $x \mapsto e^x$ есть изоморфизм группы вещественных чисел по сложению в группу положительных вещественных чисел по умножению, ибо $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Обратное отображение здесь – это логарифм $y \mapsto \ln y$.

7.2. Локальная алгебра отображения в точке

Пусть (f, P) – росток гладкого отображения в точке P гладкого многообразия M в гладкое многообразие N .

Обозначим через \mathbf{A}_x вещественную алгебру ростков функций некоторого класса (гладких, аналитических, ...) в точке P пространства-прообраза и через \mathbf{m}_y – максимальный идеал ростков функций того же класса в точке $f(P)$ пространства-образа, которые зануляются в этой точке.

Локальная алгебра отображения f в точке P – это фактор-алгебра

$$Q_f = \mathbf{A}_x / I_f$$

где $I_f = \mathbf{A}_x \cdot f^* \mathbf{m}_y$ – максимальный идеал, порожденный поднятием идеала \mathbf{m}_y в точку P с помощью отображения f .

Замечание 16. Идеал, порожденный какими-то элементами – это наименьший идеал, содержащий все эти элементы.

Определим *систему образующих* локальной алгебры Q_f как минимальный набор элементов из \mathbf{A}_x , чьи классы эквивалентности образуют базис в этой фактор-алгебре. Число элементов в этой системе (размерность этого линейного пространства) называется *локальной кратностью* отображения f в точке P . Отображение с конечной локальной кратностью в точке P называется *конечнократным в этой точке*.

Пример 18. Посчитаем кратность отображения $f : x \mapsto y = x^2$ между вещественными прямыми. Имеем

- \mathbf{A}_x - алгебра ростков гладких функций в нуле;
- \mathbf{m}_y - максимальный идеал функций от y , зануляющихся в нуле; в силу леммы Адамара, любая функция из этого идеала представляется вблизи нуля в виде $yh(y)$ с некоторой гладкой функцией h ; следовательно,
- множество $f^*\mathbf{m}_y$ состоит из всех функций вида $x^2h(x^2)$ вблизи нуля, а
- идеал $I_f = \mathbf{A}_x \cdot f^*\mathbf{m}_y$ состоит из ростков в нуле всех функций вида $x^2H(x)$, где H - произвольная гладкая функция; и, наконец,
- локальная алгебра Q_f изоморфна алгебре линейных функций $\{ax+b\}$ с операциями, введенными выше в примере 15.

Действительно, в силу следствия из леммы Адамара любая гладкая функция g вблизи нуля может быть представлена в виде $g(x) = a+bx+x^2G(x)$ с константами $a = g(0)$, $b = g'(0)$ и некоторой гладкой функцией G . Третье слагаемое лежит в идеале I_f , следовательно, в локальной алгебре отображения класс эквивалентности функции g совпадает с классом эквивалентности линейной функции $a+bx$, а индуцированные операции на этих классах есть в точности операции из примера 15. Действительно, для произвольных гладких функций g_1 и g_2 имеем

$$\begin{aligned} \{g_1 + g_2\} &= \{a_1 + b_1x + a_2 + b_2x + x^2(G_1(x) + G_2(x))\} \\ &= a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x = \{g_1\} + \{g_2\} \end{aligned}$$

и

$$\{g_1g_2\} = \{a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)x + x^2G(x)\} = \{g_1\}\{g_2\},$$

где

$$\begin{aligned} G(x) &= b_1b_2 + a_1G_2(x) + a_2G_1(x) + b_1xG_2(x) + \\ &+ b_2xG_1(x) + x^2G_1(x)G_2(x). \end{aligned}$$

Следовательно, локальная алгебра в нуле нашего отображения имеет размерность 2, и, следовательно, кратность в нуле этого отображения равна 2.

Замечание 17. Аналогичные рассуждения с отображением $f : x \mapsto x^{k+1}$ приводят к вещественной алгебре полиномов степени k с размерностью $k + 1$ соответствующего линейного пространства. Набор мономов $1, x, x^2, \dots, x^k$ может быть взят как система образующих этой алгебры. Сложение в ней - это обычное приведение подобных (=сложение коэффициентов при одинаковых степенях), а умножение - это также обычное умножение с дополнительным условием $x^{k+1} = 0$.

Замечание 18. При $t > n$ не существует отображения конечной кратности (докажите).

Пример 19. Вернемся к классификации Уитни ростков типичных отображений между двумерными многообразиями. Для типичного отображения его росток принимает одну из следующих трех форм

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right. , \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{array} \right. , \quad \text{или еще} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^3 + x_1x_2 \end{array} \right.$$

вблизи начал координат в пространствах образа и прообраза в подходящих гладких координатах. Локальные алгебры в нуле этих отображений (особенностей) изоморфны алгебрам полиномов степеней 0, 1 и 2, соответственно. Для доказательства этого рассмотрим в первом квадранте на плоскости целочисленную решетку. Если моном $x_1^l x_2^r$ лежит в множестве $f^* \mathbf{m}_y$, то идеал I_f также содержит и все мономы $x_1^{l'} x_2^{r'}$ с $l' \geq l$ и $r' \geq r$ (принадлежащие неотрицательному квадранту, сдвинутому в точку (l, r)).

Для первого отображения Уитни только точка $(0, 0)$ не принадлежит идеалу I_f (рис. 7.1, а), а для второго отображения - только точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ (рис. 7.1, б). Эти точки и доставляют нам системы образующих $\{1\}$ и $\{1, x_2\}$ для локальных алгебр этих двух особенностей.

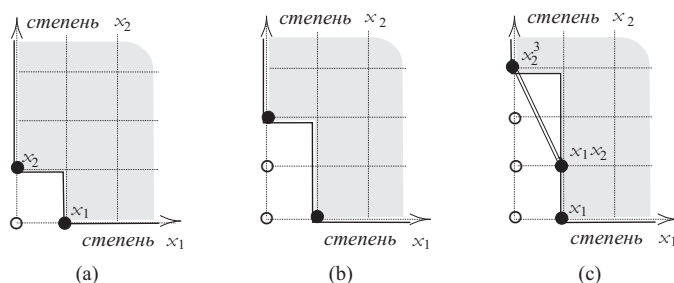


Рис. 7.1. Вычисление системы образующих локальной алгебры

Третья ситуация сложнее, ибо вторая компонента отображения есть сумма двух мономов. Эти два монома нужно отметить на нашей

сетке, но соединить отрезком, ибо только их сумма лежит в идеале, но не каждый из них по отдельности. Этот отрезок нельзя удалить, не имея для этого обоснования. В рассматриваемом случае второй член из этой суммы принадлежит идеалу, поскольку моном x_1 принадлежит идеалу как первая компонента отображения. Следовательно, оставшееся слагаемое второй компоненты также принадлежит идеалу. Итак, только точки $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, 2)$, доставляющие мономы $1, x_2, x_2^2$, лежат вне нашего идеала (рис. 7.1, с). Эти мономы дают нам систему образующих локальной алгебры третьего отображения (третьей особенностью) в нуле.

Итак, три особенности Уитни различаются по своим локальным алгебрам. Это говорит о важности локальной алгебры как характеристики особенности. Рассмотрим еще один пример локальных алгебр.

Пример 20. Пусть отображение f между вещественными плоскостями задается отображением:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_2 \\ y_2 = x_1^2 \pm x_2^2 \end{cases}$$

Первая компонента этого отображения - моном $x_1 x_2$ - лежит в идеале I_f , а вместе с ним и все мономы $x_1^r x_2^s$ с натуральными r и s . Умножая сумму $x_1^2 \pm x_2^2$ на x_1 (на x_2) получим, что и моном x_1^3 (x_2^3 , соответственно) лежит в идеале I_f . Итак, в идеале пока находятся мономы $1, x_1, x_2, x_1^2$ и x_2^2 , но сумма последних двух принадлежит идеалу, и следовательно, один из них нужно исключить из системы образующих локальной алгебры. Следовательно, локальная алгебра в нуле нашего отображения 4-мерна, а ее система образующих может быть выбрана в виде $\{1, x_1, x_2, x_1^2\}$ для обоих знаков. Однако, оказывается, что эти две локальные алгебры (для знаков "+" и "-") не изоморфны.

Действительно, любой изоморфизм алгебр должен переводить нулевой (ненулевой) элемент в нулевой (ненулевой, соответственно). Обозначим через $1, y_1, y_2, y_1^2$ систему образующих для локальной алгебры в нуле отображения со знаком "-" и предположим, что существует изоморфизм ϕ локальной алгебры в нуле для отображения со знаком "+" в локальную алгебру в нуле отображения со знаком "-". В частности, образы элементов x_1 и x_2 представляются как линейные комбинации,

$$\phi(x_1) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_1^2 \quad \text{и} \quad \phi(x_2) = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_1^2,$$

с вещественными коэффициентами a_i и b_i , $0 \leq i \leq 3$. Равенство $\phi(0) = 0$ приводит к равенствам $\phi(x_1^3) = (\phi(x_1))^3$ и $\phi(x_2^3) = (\phi(x_2))^3 = 0$, из которых сразу получаем $a_0 = b_0 = 0$. Следовательно

$$\phi(x_1^2) = \phi(x_1)^2 = (a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_1^2) = a_1^2y_1^2 + a_2^2y_2^2$$

ибо y_1y_2 и y_1^3 лежат в идеале I_f . Аналогично, имеем

$$\phi(x_2^2) = \phi(x_2)^2 = (b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_1^2)^2 = b_1^2y_1^2 + b_2^2y_2^2.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} 0 = \phi(x_1^2 + x_2^2) &= \phi(x_1)^2 + \phi(x_2)^2 = \\ &= (a_1^2 + b_1^2)y_1^2 + (a_2^2 + b_2^2)y_2^2 = (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)y_1^2 \end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу равенства $y_1^2 - y_2^2 = 0$ в нашей локальной алгебре для знака "-". Но правая часть последнего равенства нулевая, если и только если $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, ибо y_1^2 лежит в системе образующих локальной алгебры.

Следовательно $\phi(x_1^2) = (a_3y_1^2)^2 = 0$, и ядро нашего изоморфизма получается ненулевым. Это противоречит предположению о том, что это отображение изоморфизм. Следовательно, рассматриваемые локальные алгебры для знаков "+" и "-" не изоморфны.

8. Подготовительная теорема Вейерштрасса

Подготовительная теорема Вейерштрасса 1. Пусть $f : (R_x^m, O) \rightarrow (R_y^n, O)$ - росток отображения конечной кратности μ , и $\{e_1, e_2, \dots, e_\mu\}$ - некоторая система образующих локальной алгебры Q_f (в нуле). Тогда любая функция α от x может быть представлена вблизи нуля в виде

$$\alpha(x) = c_1(f(x))e_1(x) + c_2(f(x))e_2(x) + \dots + c_\mu(f(x))e_\mu(x) \quad (8.1)$$

с некоторыми функциями c_1, c_2, \dots, c_μ , где все функции и само отображение одного и того же класса, а именно: гладкие, либо аналитические, либо формальные ряды.

Следствие 8.1 (Теорема деления по Мазеру). Если дифференцируемая функция F переменных t и x с $\dim t = 1$ имеет в нуле частные производные по t нулевые до порядка k включительно, но $\frac{\partial^{k+1}F}{\partial t^{k+1}}(O) \neq 0$, то

любая гладкая функция G этих переменных может быть представлена вблизи нуля в виде

$$G(t, x) = F(t, x)q(t, x) + a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_k(x)t^k \quad (8.2)$$

где q и все $a_i, 0 \leq i \leq k$, - гладкие функции.

Следствие 8.2. Если дифференцируемая функция F переменных t и x с $\dim t = 1$ имеет в нуле частные производные по t нулевые до порядка k включительно, но $\frac{\partial^{k+1}F}{\partial t^{k+1}}(O) \neq 0$, то вблизи начала координат уравнение $F(t, x) = 0$ эквивалентно уравнению

$$t^{k+1} = a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_k(x)t^k \quad (8.3)$$

с некоторыми гладкими функциями $a_i, a_i(O) = 0, 0 \leq i \leq k$.

Следствие 8.3 (Теорема о неявной функции). Если уравнение $F(t, x) = 0$ с гладкой функцией F относительно переменной $t, \dim t = 1$, с параметром x имеет невырожденный корень t_0 при $x = x_0$, то вблизи точки (t_0, x_0) это уравнение имеет единственное решение $t = T(x), t_0 = T(x_0)$, с некоторой гладкой функцией T .

Доказательство следствий. Для доказательства первого следствия рассмотрим отображение

$$(t, x) \mapsto (F(t, x), x).$$

Система образующих локальной алгебры этого отображения в нуле может быть выбрана в виде $\{1, t, \dots, t^k\}$, что нетрудно видеть. В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса любая функция G может быть представлена в виде:

$$G(t, x) = c_0(F(t, x), x) + c_1(F(t, x), x)t + \cdots + c_k(F(t, x), x)t^k,$$

с некоторыми гладкими функциями c_i . В силу леммы Адамара любая из функций c_i может быть представлена вблизи нуля в виде

$$c_i(F(t, x), x) = a_i(x) + F(t, x)b_i(F(t, x), x)$$

с некоторыми гладкими функциями a_i и b_i . Подставляя последнее выражение в предыдущую формулу и вводя

$$q(x, t) = b_0(F(t, x), x) + b_1(F(t, x), x)t + \cdots + b_k(F(t, x), x)t^k$$

получим необходимое представление функции G .

Второе следствие непосредственно вытекает из первого. Действительно, в силу первого следствия для функции $G(t, x) = t^{k+1}$ имеем разложение

$$t^{k+1} = F(t, x)q(t, x) + a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_k(x)t^k$$

с некоторыми гладкими функциями q и $a_i, 0 \leq i \leq k$. В нуле все производные левой части последнего равенства по t до порядка k включительно нулевые, а производная порядка $k+1$ отлична от нуля. Следовательно, это справедливо и для правой части равенства. Но это также имеет место и для самой функции F . Отсюда сразу получаем, что $q(O) \neq 0$. Учитывая непрерывность функции q получаем, что и вблизи нуля эта функция не обращается в ноль, а уравнение $F = 0$ эквивалентно уравнению $t^{k+1} = a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_k(x)t^k$.

Таким образом, второе следствие также справедливо.

Третье следствие получается из второго при $k = 0$. □

Доказательство подготовительной теоремы. Рассмотрим только случай формальных рядов. Доказательство в этом случае можно провести с помощью метода математической индукции [1].

По определению локальной алгебры и ее системы образующих для любого формального ряда α имеет место разложение

$$\alpha(x) = c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x) + \cdots + c_\mu e_\mu(x) + \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) f_r(x),$$

где $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, а c_r и α_r - константы и формальные ряды, соответственно. Последняя сумма имеет первую степень относительно компонент отображения f . Это разложение также может быть выписано для каждого из коэффициентов α_r :

$$\alpha_r(x) = c_{1,r} e_1(x) + c_{2,r} e_2(x) + \cdots + c_{\mu,r} e_\mu(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_{r,j}(x) f_j(x).$$

Подставляя эти разложения в предыдущее равенство, получаем новое выражение для α :

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\mu} [c_k + \sum_{r=1}^n c_{k,r} f_r(x)] e_k(x) + \sum_{r,j=1}^n \alpha_{r,j}(x) f_r(x) f_j(x),$$

где последняя сумма в правой части последнего равенства уже имеет второй порядок по компонентам отображения f , предыдущие есть желательная для нас сумма с полиномиальными коэффициентами от этих компонент.

Делая индуктивное предположение, что такое выражение можно получить до некоторой степени s относительно компонент отображения f , и повторяя только что проделанную процедуру, получим, что такое разложение имеет место и для степени $s + 1$. По методу математической индукции получаем утверждение теоремы в случае формальных рядов. \square

Продемонстрируем возможность применения подготовительной теоремы и следствий из нее на доказательстве следующего утверждения.

Следствие 8.4. *Если в трехмерном арифметическом пространстве $R_{x,y,z}^3$ гладкая гиперповерхность имеет касание первого порядка с вертикальной прямой в точке P , то вблизи этой точки гиперповерхность может быть записана в виде $x = z^2$ в подходящей гладкой системе локальных координат с началом в этой точке, расслоенной над плоскостью Oxy .*

Порядок касания здесь определяется так. В трехмерном евклидовом пространстве $R_{x,y,z}^3$ рассмотрим два гладких подмногообразия размерностей 1 и 2 с общей точкой P . Назовем *порядком касания* между ними в общей точке на единицу меньший порядок нуля в этой точке функции расстояния на одномерном многообразии до двумерного.

Пример 21. *Ось Ox и параболический цилиндр $y = x^2$ имеют первый порядок касания, эта же ось и цилиндр $z = y^2$ имеют бесконечный порядок касания в каждой из точек этой оси.*

Доказательство. Выберем точку P за начало координат. Локально любая гладкая гиперповерхность есть нулевой невырожденный уровень гладкой функции. Обозначим такую функцию через F в нашем случае. Имеем $dF(O) \neq 0$ в силу невырожденности нулевого уровня и $F_z(O) = 0 \neq F_{zz}(O)$ в силу касания первого порядка этого уровня с вертикалью. В силу следствия 8.2 уравнение $F = 0$ эквивалентно вблизи нуля уравнению

$$z^2 = a(x, y)z + b(x, y)$$

с некоторыми гладкими функциями a и b с нулевыми значениями в нуле. Вводя новую переменную $\tilde{z} = z - a(x, y)/2$ (что сохраняет расслоение вдоль оси Oz), перепишем последнее уравнение в виде

$$\tilde{z}^2 = b(x, y) - a^2(x, y)/4.$$

Левый часть этого уравнения имеет нулевой дифференциал в нуле, и, следовательно, в силу невырожденности нулевого уровня F дифференциал правой части этого уравнения в нуле отличен от нуля. Следовательно, эта правая часть может быть выбрана как новая координата x вблизи нуля, а координата y может быть взята как дополнительная произвольным образом.

Следствие доказано. □

Замечание 19. Аналогичная доказанному следствию ситуация, но с касанием второго порядка, приводит к уравнению $z^3 = a(x, y)z + x$ с некоторой гладкой функцией a . При $a_y(O) \neq 0$ это уравнение вблизи начала координат (=изучаемой точки) принимает вид $z^3 = \tilde{y}z + x$ при новой координате $\tilde{y} = a(x, y)$. Используя струйную теорему трансверсальности Тома, можно показать, что $a_y(O) \neq 0$ для типичной функции F . Три случая касания с вертикалью порядков 0, 1 и 2 в типичном случае соответствуют в точности трем особенностям Уитни ограничения проекции $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ на гиперплоскость.

8.1. Теорема Тужрона и ее следствия

Критическая точка гладкой функции f называется *конечнократной*, если в этой точке локальная алгебра градиентного отображения $(\cdot) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot)$ имеет конечную размерность. Эта размерность μ называется *кратностью* этой критической точки.

Теорема Тужрона 1. *Гладкая функция f вблизи своей критической точки кратности μ гладко право эквивалентна своему полиному Тейлора в этой точке степени $\mu + 1$.*

Замечание 20. Струя дифференцируемого отображения в точке называется *достаточной*, если любое другое дифференцируемое отображение с такой струей имеет относительно рассматриваемой группы эквивалентности такую же особенность. Например, теорема Тужрона говорит, что $(\mu + 1)$ -струя гладкой функции в критической точке кратности μ достаточна относительно гладкой правой эквивалентности.

Градиентный идеал дифференцируемой функции в точке - это идеал градиентного отображения этой функции в данной точке. Доказательство теоремы Тужрона основано на следующем более сильном утверждении.

Теорема 8.5. *Если вблизи начала координат гладкая функция Φ и ее первые производные лежат в произведении максимального идеала на идеал градиентный гладкой функции f , то ростки в нуле функций f и $f + \Phi$ гладко право эквивалентны. Более того, если функция Φ гладко зависит от параметра, то эквивалентность может быть выбрана гладко зависящей от параметра. Иными словами, функция Φ может быть устранена гладкой в области определения заменой координат, гладко зависящей от параметра.*

Эти теоремы влекут:

Следствие 8.6 (Лемма Морса). *Гладкая функция f на гладком многообразии вблизи ее невырожденной критической точки P принимает вид*

$$f(P) + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2, \quad (8.4)$$

где $m = \dim M$, вблизи нуля в подходящих гладких локальных координатах x_1, \dots, x_m с началом в этой точке. Более того, число знаков "+" и "-" в форме функции (8.4) не зависит от выбора системы координат и является инвариантом критической точки.

Следствие 8.7 (Лемма Морса с параметром). *Если гладкая функция на гладком многообразии зависит гладко от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^k$ и при $\lambda = 0$ имеет невырожденную критическую точку P , то эта функция имеет вид*

$$\phi(\lambda) + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2, \quad (8.5)$$

где $m = \dim M$, и ϕ - некоторая гладкая функция, вблизи нуля при достаточно малых λ в подходящей гладкой системе координат $x_1(\lambda), \dots, x_m(\lambda)$, гладко зависящей от параметра, $(x_1(0), \dots, x_m(0)) = P$. Более того, число знаков "+" и "-" в форме функции (8.5) не зависит от выбора системы координат и является инвариантом критической точки.

Из этого следствия непосредственно вытекает

Следствие 8.8 (Лемма Морса для вырожденной критической точки). *Гладкая функция f на гладком многообразии M вблизи ее критической точки P коранга r (ранга $m - r$) принимает вид*

$$\phi(x_1, \dots, x_r) + x_{r+1}^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2, \quad (8.6)$$

где $m = \dim M$ и ϕ - некоторая гладкая функция, $d\phi(P) = 0$, $d^2\phi(P) = 0$, вблизи нуля в подходящей гладкой системе координат x_1, \dots, x_m с началом в этой точке. Более того, число знаков "+" и "-" в форме функции (8.6) не зависит от выбора системы координат и является инвариантом критической точки.

Сначала мы докажем следствия, затем теорему Тужрона и потом уже теорему 8.5.

Доказательство леммы Морса. Кратность невырожденной критической точки гладкой функции равна 1, ибо вблизи такой точки градиентное отображение является диффеоморфизмом. Следовательно, в силу теоремы Тужрона, вблизи такой точки функция гладко право эквивалентна своему полиному Тейлора в этой точке степени 2. Далее, все первые производные функции в критической точке нулевые.

Таким образом, этот полином есть сумма значения $f(P)$ с некоторой квадратичной формой. Эта форма невырождена в силу невырожденности критической точки. Но любая невырожденная квадратичная форма приводится к алгебраической сумме квадратов линейной заменой координат. После этого перенумерацией координат эта форма приводится к виду, указанному в следствии. Число знаков "+" и "-" является инвариантом квадратичной формы и не зависит от выбора координат. Лемма Морса доказана. \square

Доказательство леммы Морса с параметром. В силу теоремы о неявной функции уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = 0$$

имеет единственное и гладкое решение $x = P(\lambda)$, $P(0) = P$, при достаточно малых λ , ибо матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P, 0)$ невырождена в силу невырожденности критической точки.

После гладкой замены координат $\tilde{x} = x - P(\lambda)$ - переноса начала координат O в точку $P(\lambda)$ - получаем $f_x(O, \lambda) \equiv 0$ для достаточно малых значений λ . Отсюда и леммы Адамара получаем, что при достаточно малых значениях λ наша функция вблизи начала координат может быть записана в виде

$$f(x, \lambda) = f(O, \lambda) + x^T Q(\lambda)x + \sum_{\alpha, |\alpha|=3} x^\alpha a_\alpha(x, \lambda),$$

где Q - симметричная невырожденная матрица, a_α - некоторые гладкие функции. Линейной заменой координат, гладко зависящей от параметра λ , квадратичную форму $x^T Q(\lambda)x$ приведем к алгебраической сумме квадратов (для достаточно малых λ):

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2,$$

ибо $Q(0)$ невырождена. Число знаков "+" и "-" является инвариантом квадратичной формы и не зависит от выбора координат.

Теперь, в силу теоремы 8.5, слагаемое $\sum_{\alpha, |\alpha|=3} x^\alpha a_\alpha(x, \lambda)$ можно опустить как гладко зависящее от параметра и принадлежащее вместе со своими первыми производными произведению максимального идеала с градиентным идеалом нашей функции в изучаемой точке.

Лемма Морса с параметром доказана. □

Доказательство леммы Морса для вырожденной критической точки.

Занумеруем локальные координаты так, что в матрице вторых производных в изучаемой точке подматрица вторых производных по координатам (x_{r+1}, \dots, x_m) невырождена. Взяв теперь первые r координат как r -мерный параметр λ и применив лемму Морса с параметром, получаем нужное нам утверждение. Следствие доказано. □

8.2. Доказательство теорем

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 8.9. *Если начало координат является критической точкой гладкой функции кратности μ , то росток в нуле любого монома степени μ принадлежит градиентному идеалу этой функции в нуле. В частности, любой моном степени $\mu + 2$ и его производные принадлежат прямому произведению максимального идеала и градиентного идеала этой функции в нуле.*

Доказательство теоремы Тужрона. Теорема Тужрона вытекает из этой леммы и теоремы 8.5. Действительно, в силу леммы Адамара любая функция Φ из $(\mu + 2)$ -й степени максимального идеала может быть представлена в виде

$$\sum_{\alpha, |\alpha|=\mu+2} x^\alpha h_\alpha(x)$$

вблизи начала координат с некоторыми гладкими функциями h_α . Следовательно, в силу леммы 8.9 вблизи нуля эта функция принадлежит вместе со своими производными произведению максимального идеала с градиентным идеалом функции f в нуле. В силу теоремы 8.5 эта функция не влияет на особенность функции f в нуле относительно гладкой правой эквивалентности.

Теорема Тужрона доказана по модулю леммы 8.9 и теоремы 8.5. \square

Доказательство леммы 8.9. Любой моном $x^\alpha, |\alpha| = \mu$, есть произведение μ координатных функций $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\mu}$ с $i_r \in \{1, 2, \dots, m\}$. В локальной алгебре Q_f функции

$$1, \quad x_{i_1}, \quad x_{i_1}x_{i_2}, \quad \dots, \quad x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{\mu-1}}x_{i_\mu}$$

линейно зависимы, ибо размерность этой алгебры μ , а функций $\mu + 1$. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация

$$c_1 + c_2x_{i_1} + c_3x_{i_1}x_{i_2} + \dots + c_\mu x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{\mu-1}}x_{i_\mu},$$

принадлежащая градиентному идеалу I_f . Пусть c_j - первый ненулевой коэффициент в этой комбинации, тогда

$$x_{i_1} \dots x_{i_j} [c_j + c_{j+1}x_{i_{j+1}} + \dots + c_\mu x_{i_{j+1}}x_{i_{j+2}} \dots x_{i_{\mu-1}}x_{i_\mu}] \in I_f.$$

Но функция внутри квадратных скобок не имеет нулевых значений вблизи нуля, и, следовательно, имеет обратный в нашей локальной алгебре по отношению операции умножения. Домножая на этот обратный, получаем

$$x_{i_1} \dots x_{i_j} \in I_f, \quad \text{и потому} \quad x_{i_1} \dots x_{i_\mu} \in I_f,$$

ибо идеал замкнут относительно умножения на элементы алгебры.

Лемма доказана. \square

Итак, для завершения доказательств наших утверждений необходимо доказать теорему 8.5.

Доказательство теоремы 8.5. Сначала рассмотрим случай без параметра.

Рассмотрим путь $f + t\Phi$ в пространстве функций, который соединяет исходную функцию и ее возмущение, когда t меняется от нуля до единицы.

Идея доказательства состоит в поиске не диффеоморфизма, который переводит ростки в нуле функций f и $f + \Phi$ один в другой, а семейство диффеоморфизмов g_t таких, что

- g_t сохраняет начало координат для всех $t \in [0, 1]$,
- семейство g_t есть деформация тождественного диффеоморфизма, то есть $g_0(x) \equiv x$,
- g_t удовлетворяет тождеству

$$(f + t\Phi)(g_t(x)) \equiv f(x)$$

в некоторой окрестности нуля при любом $t \in [0, 1]$.

Дифференцируя последнее тождество по t , получим *гомологическое уравнение* :

$$\Phi(g_t(x)) + L_{v_t(g_t(x))}(f + t\Phi) \equiv 0 \quad (8.7)$$

где L_v - оператор дифференцирования вдоль поля v , и

$$v_t(g_t(x)) = \left(\frac{d}{d\tau} g_\tau(x) \right) \Big|_{\tau=t}$$

есть скорость деформации тождественного отображения.

Уравнение (8.7) должно быть выполнено тождественно по $t \in [0, 1]$ и $g_t(x)$ достаточно близких к нулю, значит по $t \in [0, 1]$ и x достаточно малых. Таким образом, достаточно решить вблизи нуля уравнение

$$L_{v_t}(f + t\Phi)(x) \equiv -\Phi(x).$$

В локальных координатах x_1, x_2, \dots, x_m это уравнение принимает вид (аргумент x опущен)

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial(f + t\Phi)}{\partial x_i} v_{t,i} = -\Phi, \quad (8.8)$$

где $v_t = (v_{t,1}, v_{t,2}, \dots, v_{t,m})$.

По предположению, функция Φ и ее производные вблизи нуля представляются в виде

$$-\Phi = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} h_{i,j}$$

с некоторым гладкими функциями $h_j, h_{i,j}$ с нулевыми значениями в нуле. Подставляя последние выражения в уравнение (8.8) получаем

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} + t \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} h_{i,j} \right] v_{t,i} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i,$$

или

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \left[v_{t,i} + t \sum_{j=1}^m h_{j,i} v_{t,j} \right] = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i,$$

где гладкое решение системы m уравнений

$$v_{t,i} + t \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} h_{i,j} v_{t,j} = h_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

доставляет нам, очевидно, решение гомологического уравнения. Последняя система является линейной относительно неизвестных $v_{t,i}$, а ее матрица единичная при $x = 0$, ибо все $h_{i,j}$ зануляются в нуле. Следовательно, существует единственное гладкое решение этой системы при достаточно малых x и $t \in [0, 1]$. Это решение зануляется в нуле, поскольку в нуле имеет нулевое значение свободный член.

Интегрирование полученного векторного поля доставляет нужное нам семейство диффеоморфизмов $g_t(x)$ и влечет справедливость теоремы 8.5 в непараметрическом случае.

В доказательстве параметрической версии теоремы 8.5 рассуждения аналогичны, только функции $h_j, h_{i,j}$ зависят дополнительно от параметра (но зануляются при $x = 0$), а при интегрировании получаемого решения необходимо ещё использовать теорему о гладкой зависимости решений от параметра, когда векторное поле зависит гладко от параметра. \square

8.3. Простые особенности функций (потенциалов)

Как отмечено выше, типичная гладкая функция имеет лишь невырожденные критические точки и вблизи каждой из них приводится к сумме своего значения в этой точке и невырожденной квадратичной формы подходящим выбором локальных гладких координат с началом в этой точке. Однако, функции из гладкого семейства могут иметь вырожденные критические точки при отдельных значениях параметра. Например, типичный потенциал $U(x, \lambda) = x^3 + \lambda x$ имеет вырожденную критическую точку в нуле при $\lambda = 0$. Здесь мы классифицируем простые критические точки потенциалов.

Определение 17. При заданном отношении эквивалентности функция (или отображение) имеет простую особенность в некоторой то-

чке, если при достаточно малых возмущениях ростка функции в этой точке мы получаем представителей лишь конечного числа классов эквивалентности (= орбит) таких ростков.

При классификации особенностей потенциалов в их критических точках мы ограничимся пространством ростков в нуле гладких потенциалов, имеющих в нуле критическую точку с нулевым критическим значением, и будем рассматривать на этом пространстве действие группы гладких замен координат, оставляющих начало координат (= ноль) на месте.

Пример 22. Гладкая функция на вещественной прямой $x \mapsto x^2$ имеет простую особенность в нуле. Действительно, любая другая функция с критической точкой в нуле с нулевым критическим значением и близкой 2-струей приводится к такому же виду в силу леммы Морса. Таким образом, здесь есть всего одна орбита, чьих представителей мы получаем при малом возмущении исходного ростка.

Определение 18. Ростки двух гладких функций (возможно, разного числа переменных) в нуле (= начале координат) называются стабильно \mathbb{R} -эквивалентными, если они становятся \mathbb{R} -эквивалентными после сложения с невырожденными квадратичными формами других переменных (для каждой функции своя форма).

Пример 23. Ростки в нуле функций x^3 , $x^3 + y^2$, $x^3 + y^2 - z^2$ (разного числа переменных!) являются стабильно \mathbb{R} -эквивалентными.

Теорема 8.10. Росток гладкой функции в ее простой критической точке с нулевым критическим значением стабильно \mathbb{R} -эквивалентен ростку в нуле одной из следующих функций:

$$A_k : \pm x^{k+1}, k \geq 1; \quad D_k : x^2 y \pm y^{k-1}, k \geq 4;$$

$$E_6 : x^3 \pm y^4; \quad E_7 : x^3 + xy^3; \quad E_8 : x^3 + y^5;$$

здесь k – натуральное число.

Замечание 21. Для четных k знак \pm в формуле A_k можно заменить на “+”, что нетрудно видеть, а при нечетных k это невозможно, ибо в этом случае знаки $+$ и $-$ доставляют минимум и максимум изучаемой функции в нуле, соответственно.

Из теоремы 8.10 с помощью простых вычислений получаем

Следствие 8.11. Простая критическая точка гладкой функции является конечнократной, точнее, кратности k для каждого из типов A_k, D_k, E_k этой особой точки (для всех возможных значений k).

Рис. 8.1 иллюстрирует вычисление кратностей особенностей типа E_k .

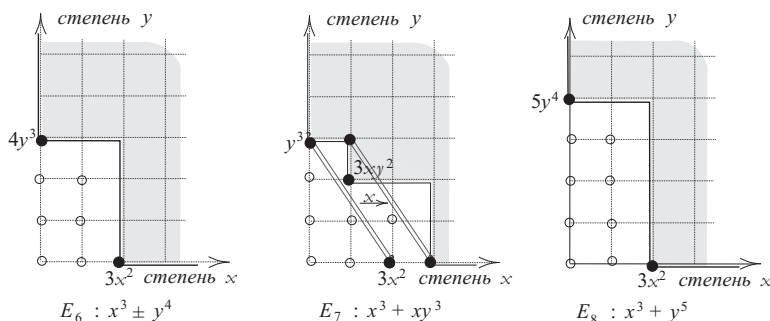


Рис. 8.1. Вычисление кратностей особенностей типа E_k .

Доказательство теоремы 8.10. В силу леммы Морса гладкая функция вблизи своей вырожденной критической точки коранга r с нулевым критическим значением принимает форму (8.6)

$$\phi(x_1, \dots, x_r) + x_{r+1}^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2$$

с гладкой функцией ϕ , имеющей нулевую 2-струю в нуле, в подходящих гладких координатах с началом в этой точке. Следовательно, росток исходной функции в нуле стабильно R -эквивалентен росту в нуле функции ϕ . Функция ϕ называется *генотипом* изучаемой критической точки.

Далее нам понадобятся следующие два утверждения:

Лемма 8.12. Критическая точка с генотипом от трех и более переменных не является простой.

Лемма 8.13. Критическая точка с генотипом от двух переменных и нулевой 3-струей в изучаемой точке не является простой.

Сначала мы воспользуемся этими утверждениями, а затем докажем их.

В силу лемм 8.12, 8.13 необходимо рассмотреть ростки в нуле генотипов либо (А) одной переменной ($= x$), либо (В) двух переменных ($= x, y$) с ненулевой 3-струей в начале координат.

В первом случае генотип есть гладкая функция одной переменной. Ее ряд Тейлора в нуле ненулевой, ибо любая окрестность функции с

нулевым рядом Тейлора в нуле пересекается с бесконечным числом орбит ростков в нуле функций x^μ для натуральных $\mu \geq 2$.

Следовательно, в этом случае генотип принимает форму $\pm x^{k+1}$, что мы видели выше, после подходящего выбора гладких локальных координат с началом в этой точке, если его первая ненулевая производная в нуле имеет порядок $k+1$. Таким образом, случай (А) доставляет серию особенностей A_k .

Замечание 22. Особенность A_1 соответствует невырожденной критической точке.

В случае (В) 3-струя генотипа в изучаемой точке доставляет однородный полином третьей степени.

Лемма 8.14. *Однородный полином третьей степени от двух переменных приводится к одному из следующих трех видов:*

$$\text{либо (I) } x^2y \pm y^3, \quad \text{либо (II) } x^2y, \quad \text{либо еще (III) } x^3$$

линейной заменой координат.

Доказательство. Действительно, однородный полином третьей степени от двух переменных обращается в нуль либо на трех, либо на двух, либо на одной прямой, проходящей через ноль, что становится очевидным после подстановки $x = zy$ или $y = zx$. Эти прямые линейной заменой координат приводятся одновременно к линиям

$$y = 0 \text{ и } x^2 = y^2 \text{ в первом случае,}$$

$$x = 0 \text{ и } y = 0 \text{ во втором, и}$$

$$x = 0 \text{ в третьем.}$$

Применяя лемму Адамара к каждому из этих трех случаев, получаем, что теперь многочлен может быть записан, соответственно, в виде $y(x^2 - y^2)p$, $xyq(x, y)$ и $xQ(x, y)$, при некоторых ненулевых константе p , линейной функции q и квадратичной форме Q .

В первом случае подходящим растяжением координат (каким?) сразу получаем форму $y(x^2 - y^2)$ вида (I).

Во втором случае многочлен обращается в нуль лишь на двух прямых, а потому прямая $q(x, y) = 0$ обязана совпадать либо с $x = 0$, либо с $y = 0$. Следовательно, растяжением и, возможно, перестановкой координат можем привести многочлен к виду (II).

В третьем случае форма Q либо положительно (отрицательно) определена, либо обращается в нуль также на линии $x = 0$. В первом подслучае, выделяя в Q полный квадрат по переменной y , приведем наш

многочлен к виду $x(ax^2 + b(cx + y)^2)$ с некоторыми константами a, b, c ($ab > 0$). Очевидно, что линейная замена координат (какая?) приводит многочлен к виду $y(x^2 + y^2)$ из (I).

Во втором подслучае имеем $Q(x, y) = ax^2$, $a \neq 0$. Следовательно, после растяжения координаты x получаем форму (III) нашего многочлена. \square

Таким образом, нужно рассматривать 3-струю одного из генотипов вида (I)-(III). Мы сделаем это последовательно.

Вид I. Любая функция с 3-струей в начале координат O как у $x^2y - y^3$ обращается в ноль вблизи начала координат на трех гладких кривых, проходящих через точку O и трансверсально пересекающихся в ней. Действительно, подставляя в нашу функцию $y = zx$, деля ее на x^3 и применяя к результату теорему о неявной функции вблизи точек $x = 0$ и $z \in \{0, \pm 1\}$, получаем нужные кривые. Очевидно, что после подходящего выбора новых гладких координат вблизи точки O с началом в ней эти кривые приводятся к форме $y = 0$, $x = y$ и $x = -y$.

Применяя лемму Адамара, в новых координатах нашу функцию запишем в виде $(x^2y - y^3)h(x, y)$ с некоторой гладкой функцией h , $h(O) \neq 0$. Теперь локальная гладкая замена координат

$$\tilde{x} = xh(x, y)^{1/3}, \quad \tilde{y} = yh(x, y)^{1/3}$$

вблизи точки O приводит нашу функцию к нормальной форме D_4 со знаком минус.

Любая функция с 3 струей в начале координат O как у $x^2y + y^3$ обращается в ноль вблизи начала координат на одной гладкой кривой, проходящих через точку O . Как и выше, это легко получить подстановкой в нашу функцию $y = zx$, последующим сокращением ее на x^3 и применением к результату теоремы о неявной функции вблизи точек $x = 0$ и $z = 0$.

Выбирая эту кривую за ось Ox вблизи начала координат и применяя лемму Адамара, в новых координатах нашу функцию запишем в виде $yQ(x, y)$ с некоторой гладкой функцией Q , имеющей в нуле невырожденный минимум. По лемме Морса с параметром ($= x$) функция Q принимает вид $\phi(y) + x^2$ с некоторой гладкой функцией ϕ , $\phi(0) = 0 = \phi'(0) \neq \phi''(0)$, после подходящего выбора гладкой локальной координаты x , $x(O) = 0$.

Сама функция ϕ в силу следствия из леммы Адамара может быть записана вблизи начала координат в виде $\phi(y) = y^2h(y)$ с некоторой

гладкой функцией h , значение которой в нуле положительно, ибо точка O – невырожденный минимум функции Q .

Наконец, вблизи начала координат функция $y(y^2h(y) + x^2)$ принимает нормальную форму $y(x^2 + y^2)$ особенности D_4 со знаком “+” после подходящих гладких растяжений координат x и y (каких?).

Вид II. Любая функция f с 3-струей в начале координат O как у x^2y обращается в ноль вблизи начала координат на проходящей через него одной гладкой кривой вида $y = ax^2 + o(x^2)$ с некоторой константой a , что легко получить подстановкой в нашу функцию $y = zx$, последующим сокращением ее на x^3 и применением к результату теоремы о неявной функции вблизи точек $x = 0$ и $z = 0$.

Выбирая вблизи начала координат новую локальную координату $\tilde{y} = y - ax^2 - o(x^2)$, что сохраняет начальную 3-струю, и затем применяя лемму Адамара, запишем нашу функцию в виде (в обозначении новой координаты y мы опускаем “тильду”):

$$f(x, y) = y(x^2 + F(x, y))$$

с некоторой гладкой функцией F ; $j^2F(O) = 0$ в силу формы рассматриваемой 3-струи. В силу леммы Морса с параметром ($= y$), функция $x^2 + F$ принимает вид $x^2 + \phi(y)$ с некоторой гладкой функцией ϕ , $j^2\phi(0) = 0$, после подходящего выбора новой локальной гладкой координаты x , $x = X(x, y)$.

Лемма 8.15. *Если гладкая функция $f = y(x^2 + \phi(y))$ имеет простую критическую точку в начале координат, то струя $j^\infty\phi(0)$ ненулевая.*

Доказательство. В самом деле, если струя $j^\infty\phi(0)$ нулевая, то функция $x^2y + \epsilon y^k$ при натуральном k и достаточно малом $\epsilon \neq 0$ имеет вблизи начала координат струи, близкие к соответствующим струям изучаемой функции f , но для различных k имеет различные особенности в начале координат, очевидно, их кратности различны. Следовательно, при нулевой струе $j^\infty\phi(0)$ критическая точка функции f в нуле не может быть простой. Получаем противоречие, которое и доказывает лемму. \square

Учитывая, что $j^2\phi(0) = 0$, и снова применяя лемму Адамара запишем функцию f вблизи начала координат в виде

$$f(x, y) = x^2y + y^{k-1}\Phi(y)$$

с некоторым натуральным $k \geq 5$ и гладкой Φ ; $\Phi(0) \neq 0$, если $j^{k-2}\phi(0) = 0$ и $j^{k-1}\phi(0) \neq 0$.

Следовательно, наша функция принимает вблизи начала координат вид

$$x^2y \pm y^{k-1}$$

после подходящего гладкого растяжения координат x и y (какого?).

Таким образом, в случае (II) получаем особенность D_k с натуральным $k \geq 5$.

Вид III. $j^3f(O) = j^3x^3(O)$. Все рассуждения локальные вблизи начала координат, а все выбираемые координаты – гладкие с общим началом.

Лемма 8.16. Любая гладкая функция f переменных (x, y) с $j^3f(O) = j^3x^3(O)$ может быть записана вблизи начала координат в виде

$$f(x, y) = y^4A(y) + xy^3B(x, y) + x^3$$

с некоторыми гладкими функциями A и B в подходящих локальных гладких координатах с тем же началом.

Доказательство. Применяя лемму Адамара, мы запишем функцию f в виде

$$f(x, y) = y^4a(y) + xy^3b(y) + x^2y^2c(y) + x^3d(x, y)$$

с некоторыми гладкими функциями a, b, c, d ; $d(0) \neq 0$ в силу $j^3f(O) = j^3x^3(O)$. Теперь растяжение $\tilde{x} = x\sqrt[3]{d(x, y)}$ приводит к форме

$$y^4a(y) + xy^3b(x, y) + x^2y^2c(x, y) + x^3$$

нашей функции с некоторыми новыми гладкими функциями a, b, c (“тильду” в обозначениях новых координат снова опускаем).

Выделяя полный куб $(x + y^2c(x, y)/3)^3$ и выбирая его как куб новой переменной x , приходим к форме $y^4a_1(x, y) + xy^3b_1(x, y) + x^3$ нашей функции с некоторыми гладкими функциями a_1, b_1 .

Применяя снова лемму Адамара, функцию a_1 запишем в виде $a_1(x, y) = A(y) + xb_2(x, y)$ с некоторыми гладкими функциями A и b_2 , что приводит к форме

$$f(x, y) = y^4A(y) + xy^3B(x, y) + x^3 \tag{8.9}$$

с $B = b_1 + yb_2$. □

Лемма 8.17. Критическая точка функции (8.9) в начале координат не является простой, если $B(0, 0) = 0$ и $j^1A(0) = 0$.

Доказательство. Допустим противное, что критическая точка простая, но $B(0, 0) = 0$ и $j^1A(0) = 0$. Как и выше, используя лемму Адамара, запишем функцию f вблизи начала координат в виде

$$f(x, y) = y^6a(y) + xy^4b(y) + x^2y^3c(y) + x^3d(x, y)$$

с некоторыми гладкими функциями a, b, c, d ; $d(O) \neq 0$ в силу $j^3f(O) = j^3x^3(O)$. Действуя как и выше, приходим к форме

$$y^6C(y) + xy^4E(x, y) + x^3$$

нашей функции с некоторыми гладкими функциями C, E .

Любая гладкая замена координат, сохраняющая эту форму, должна иметь вид $x = \tilde{x} + X$ и $y = \alpha\tilde{y} + Y$ с некоторой ненулевой вещественной константой α и гладкими функциями X и Y с порядком нуля в начале координат не ниже 3 и 2, соответственно, что нетрудно видеть. Таким образом, у нас есть один параметр α для “уничтожения” двух произвольных малых изменений значений $C(0)$ и $E(0, 0)$. Следовательно, изучаемая особенность не является простой. Получаем противоречие, что и доказывает лемму. \square

Замечание 23. Если полином $\lambda^3 + \lambda B(0, 0) + A(0)$ имеет три различных вещественных корня, то нулевой уровень функции $y^6A(y) + xy^4B(x, y) + x^3$ вблизи нуля есть объединение трех кривых, касающихся друг друга в нуле с первым порядком касания. Это легко увидеть после подстановки в функцию $x = zy^2$, сокращения на y^6 и применения теоремы о неявной функции вблизи точек с $y = 0$ и найденными корнями в качестве значений z .

Ростки в нуле двух из этих кривых принимают вид ростков в нуле кривых $x = 0$ и $x = y^2$ в подходящих гладких координатах с тем же началом. В силу того, что третья кривая имеет в начале координат касание порядка 1 с каждой из первых двух, она имеет вид $x = y^2H(y)$ с некоторой гладкой функцией H , $0 \neq H(0) \neq 1$. Любой диффеоморфизм, сохраняющий первые две кривые (и, в частности, начало координат), обязательно имеет вид $x = \tilde{x}h^2(\tilde{x}, \tilde{y}), y = \tilde{y}h(\tilde{x}, \tilde{y})$ (проверьте это!), а потому не изменяет и значения $H(0)$. Это также объясняет, почему справедлива лемма.

Когда нет трех различных вещественных корней, можно проделать те же действия, но в комплексной области и с конечными струями функции.

Таким образом, при $B(0, 0) = 0$ и $j^1A(0) = 0$ многочлен Тейлора функции (8.9) в начале координат до членов порядка 5 включительно

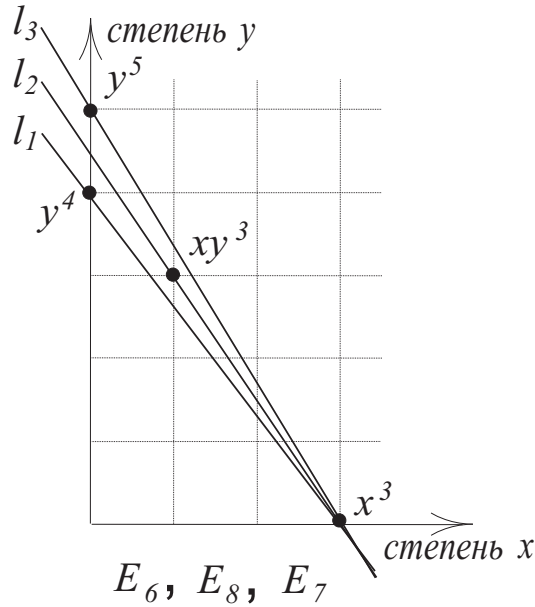


Рис. 8.2. Мономы особенностей E_6 , E_7 и E_8 .

имеет хотя бы один из трех мономов y^4 , xy^3 , y^5 с ненулевым коэффициентом. Степени этих трех мономов лежат на трех различных прямых l_1 , l_2 и l_3 , проходящих через точку $(3, 0)$ (рис. 8.2).

Следующее утверждение завершает доказательство теоремы 8.10:

Лемма 8.18. *Гладкая функция вида $x^3 + y^4A(y) + xy^3B(x, y)$ имеет в начале координат критическую точку (особенность) типа E_6 , E_7 или E_8 , если ее ряд Тейлора в нуле содержит моном соответственно y^4 , xy^3 или y^5 с ненулевым коэффициентом, а его остальные мономы с ненулевыми коэффициентами дают точки выше прямой l_1 , l_2 или l_3 .*

Доказательство. При $A(0) \neq 0$ подходящее растяжение координаты y приводит нашу функцию к виду $x^3 \pm y^4 + xy^3B(x, y)$ с некоторой гладкой функцией B . Выделяя по переменной y полную четвертую степень $\pm(y \pm xB(x, y)/4)^4$ и выбирая $y \pm xB(x, y)/4$ как новую ординату, мы приходим к форме

$$x^3a(x, y) + x^2y^2b(x, y) \pm y^4$$

с некоторыми гладкими функциями a, b , $a(0, 0) = 1$ (“тильда” в обозначениях новых координат опущена).

Аналогично, выделяя по x куб $xa^{1/3} + y^2ba^{-2/3}/3$ и выбирая его как куб новой координаты x , приходим к форме $x^3 \pm y^4c(x, y)$ нашей функции с некоторой дифференцируемой функцией c , $c(0, 0) = 1$. Наконец, очевидное растяжение ординаты дает нам нормальную форму особенности E_6 .

При $A(0) = 0 \neq B(0, 0)$ растяжение ординаты и лемма Адамара приводят нашу функцию к виду

$$x^3 + xy^3 + y^5 a(x, y)$$

с некоторой гладкой функцией a . Функция $y^5 a(x, y)$ и ее первые производные лежат в градиентном идеале функции $x^3 + xy^3$. Следовательно, в силу теоремы 8.5, слагаемое $y^5 a(x, y)$ не влияет на особенность нашей функции в начале координат. Таким образом, при $A(0) = 0 \neq B(0, 0)$ получаем особенность E_7 .

Наконец, при $A(0) = B(0, 0) = 0 \neq A'(0)$ наша функция после подходящего растяжения ординаты принимает вид

$$x^3 + y^5 + axy^4 + bx^2y^3 + cx^2y^2 + \dots$$

с некоторыми константами a, b, c (здесь и далее в доказательстве теоремы многоточие обозначает слагаемые, лежащие вместе со своими производными в произведении максимального идеала и градиентного идеала функции в нормальной форме E_8). Таким образом, достаточно сделать нулевыми константы a, b, c .

Замена абсциссы $x \mapsto x + cy^2/3$ делает нулем константу c и приводит нашу функцию к форме

$$x^3 + y^5 + (a - c^3/3)xy^4 + bx^2y^3 + \dots,$$

а последующая замена ординаты $y \mapsto y + (a - c^3/3)x/5$ доставляет форму

$$x^3 + y^5 + Bx^2y^3 + \dots$$

с некоторой константой B . Наконец, новая замена абсциссы $x \mapsto x + By^3/3$ устраняет и последний коэффициент B и приводит к форме

$$x^3 + y^5 + \dots$$

Многоточие не влияет на тип особенности в силу 8.5, следовательно, теорема 8.10 доказана по модулю лемм 8.12 и 8.13. \square

Для завершения доказательства теоремы покажем справедливость лемм.

Доказательство лемм 8.12 и 8.13. Однородные полиномы трех переменных ($= x, y, z$) третьей степени ($= 3$ -струи в нуле функции трех переменных с нулевой 2-струей) образуют 10-мерное арифметическое пространство S , точки которого есть линейные комбинации мономов $x^3, x^2y, x^2z, y^3, y^2x, y^2z, z^3, z^2x, z^2y, xyz$.

Для гладкого диффеоморфизма, оставляющего начало координат на месте, только его 1-струя действует на этих линейных комбинациях. Но такие 1-струи образуют 9-мерное пространство невырожденных матриц размера 3×3 , которое является группой с операцией произведения матриц. Следовательно, объединение любого конечного числа орбит действия этой группы на пространстве S нигде не плотно в S . Следовательно, любая особенность функции от трех переменных в точке с нулевой 2-струей этой функции не может быть простой, что доказывает лемму 8.12.

Аналогично, однородные полиномы четвертой степени от двух переменных образуют 5-мерное арифметическое пространство как линейные комбинации мономов $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$, и снова на этих линейных комбинациях действует только 1-струя гладкого диффеоморфизма, оставляющего начало координат на месте. Но такие 1-струи образуют 4-мерное пространство невырожденных матриц размера 2×2 , являющееся группой с операцией произведения матриц. Отсюда, как и выше, получаем, что любая особенность функции от двух переменных в точке с нулевой 3-струей этой функции не может быть простой. Лемма 8.13 доказана. \square

8.4. Версальные деформации особенностей

Теория версальных деформаций особенностей – это локальная теория, поэтому, не нарушая общности, будем рассматривать ростки в нуле отображений арифметического пространства в арифметическое пространство. Два таких ростка (f, O) и (f_1, O) соединяются в пространстве ростков путем $(f + t_1(f_1 - f), O)$ при изменении параметра t_1 от 0 до 1, а $k + 1$ таких ростков $(f, O), (f_1, O), \dots, (f_{k-1}, O), (f_k, O)$ аналогично соединяются путем с k параметрами:

$$(f + t_1(f_1 - f) + t_2(f_2 - f) + \dots + t_k(f_k - f), O), \quad (8.10)$$

когда k -мерный параметр (t_1, t_2, \dots, t_k) изменяется в кубе $0 \leq t_i \leq 1, 1 \leq i \leq k$.

Естественный вопрос: существует ли *конечнопараметрическая деформация* вида (8.10), которая при малых значениях параметров соединяет росток (f, O) с орбитами ростков в нуле всех достаточно близких к f отображений относительно действия выбранной группы эквивалентности. Здесь в качестве группы эквивалентности мы будем рассматривать гр-

уппу R -эквивалентности – группу ростков в изучаемой точке диффеоморфизмов пространства-прообраза, оставляющих эту точку на месте.

Определение 19. Деформация ростка гладкого отображения $f : (R_x^m, 0) \rightarrow R^n$ с базой R_λ^k – это росток гладкого отображения

$$F : ((R_x^m \times R_\lambda^k, (0, 0)) \rightarrow R^n$$

такой, что $(F(\cdot, 0), (0, 0)) = (f(\cdot), 0)$.

Определение 20. Деформация \tilde{F} называется эквивалентной деформации F с той же базой, если $(\tilde{F}(x, \lambda), (0, 0)) = (F(g(x, \lambda), \lambda), (0, 0))$ для некоторой гладкой деформации g тождественного диффеоморфизма, то есть $g(x, 0) \equiv x$.

Определение 21. Гладкая деформация \tilde{F} с базой R_θ^l называется индуцированной из деформации F с базой R_λ^k , если $(\tilde{F}(x, \theta), (0, 0)) = (F(x, \lambda(\theta)), (0, 0))$ для некоторого гладкого отображения $\theta \mapsto \lambda(\theta)$, $\lambda(0) = 0$, между базами деформаций.

Определение 22. Гладкая деформация F называется версальной, если любая другая деформация \tilde{F} эквивалентна некоторой деформации, индуцированной из F .

Версальность деформации F в наших обозначениях означает существование представления вида

$$(\tilde{F}(x, \theta), (0, 0)) = (F(g(x, \lambda(\theta)), \lambda(\theta)), (0, 0)).$$

Пример 24. В силу леммы Морса с параметром любая гладкая деформация ростка в нуле потенциала $f(x) = x^2$ с базой R_λ^k принимает вблизи нуля вид $\phi(\lambda) + x^2$, где ϕ – некоторая гладкая функция, после подходящего выбора локальной координаты x , гладко зависящей от параметра λ . Следовательно, наш потенциал имеет версальную деформацию $F(x, \lambda) = x^2 + \lambda$ с одним параметром $\lambda \in R$.

Определение 23. Скорость деформации v отображения f под действием однопараметрической гладкой деформации g^t тождественного диффеоморфизма (т.е. $g^t(x)|_{t=0} \equiv x$) определяется как $\left. \frac{df(g^t(x))}{dt} \right|_{t=0}$.

В координатах получаем

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(g^t(x))}{\partial x_i} \frac{dg_i^t(x)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i(x),$$

где $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ доставляет скорость деформации тождественного диффеоморфизма, то есть $g^t(x) \equiv x + th(x) + \dots$, где многоточие означает члены по крайней мере второй степени по t . Скорости деформации образуют касательное пространство к орбите функции f .

Пример 25. Нетрудно видеть, что для функции это касательное пространство совпадает с идеалом ее градиентного идеала, ибо скорости деформации тождественного диффеоморфизма могут быть произвольными гладкими функциями.

Определение 24. Гладкая деформация F ростка в изучаемой точке (= в нуле) гладкого отображения f называется инфинитезимально версальной, если вблизи этой точки линейное пространство, задаваемое скоростями

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(x, 0),$$

и касательное пространство к орбите этого отображения доставляют все возможные деформации этого отображения.

Последнее означает, что любая гладкая скорость V деформации f вблизи изучаемой точки представляется в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^k c_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(x, 0)$$

с некоторыми гладкими функциями h_i и константами c_j .

Теорема 8.19. Любая гладкая версальная деформация инфинитезимально версальна.

Следствие 8.20. Гладкая версальная деформация ростка функции в ее критической точке конечной кратности μ может быть взята в виде

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j e_j(x)$$

где функции e_1, e_2, \dots, e_{μ} образуют базис локальной алгебры $Q_{\nabla f}$.

Следствие 8.21. Размерность базы гладкой версальной деформации ростка функции в ее критической точке конечной кратности μ не может быть меньше размерности локальной алгебры градиентного отображения функции в этой точке.

Следствие 8.22. *Гладкая версальная деформация ростка функции в нормальной форме из теоремы 8.10 в нуле может быть взята в виде:*

$$\begin{aligned} A_k &: \pm x^{k+1} + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_{k-1} x + \lambda_k, \quad k \geq 1; \\ D_k &: x^2 y \pm y^{k-1} + \lambda_1 x + \lambda_2 y^{k-2} + \dots + \lambda_{k-1} y + \lambda_k, \quad k \geq 4; \\ E_6 &: x^3 \pm y^4 + x(\lambda_3 + \lambda_2 y + \lambda_1 y^2) + \lambda_6 + \lambda_5 y + \lambda_4 y^2; \\ E_7 &: x^3 + x y^3 + \lambda_1 y^2 + y(\lambda_4 x + \lambda_3 x + \lambda_2 x^2) + \lambda_7 + \lambda_6 x + \lambda_5 x^2; \\ E_8 &: x^3 + y^5 + x(\lambda_4 + \lambda_3 y + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y^3) + \lambda_8 + \lambda_7 y + \lambda_6 y^2 + \lambda_5 y^3. \end{aligned}$$

Эти следствия непосредственно вытекают из теоремы 8.19. Доказательство самой теоремы имеется в [1], где также показано, что все версальные деформации с базами одинаковой размерности одинаковы с точностью до локального диффеоморфизма баз.

Определение 25. *Версальная деформация с базой минимально возможной размерности называется миниверсальной.*

Из теоремы 8.19, теоремы Тужрона и леммы 8.9 вытекает

Следствие 8.23. *Гладкая версальная деформация ростка функции в ее критической точке P конечной кратности μ может быть взята в виде*

$$F(x, \lambda) = T(x, P) + \sum_{\alpha, |\alpha| \leq \mu-1} \lambda_\alpha (x - P)^\alpha$$

где $T(x, P)$ – полином Тейлора степени $\mu + 1$ функции в точке P .

Определение 26. *Бифуркационная диаграмма нулей гладкой версальной деформации $F(x, \lambda)$ функции f есть росток в отмеченной точке (=нуле) в базе деформации множества параметров, для которых нулевой уровень функции $F(., \lambda)$ является критическим.*

Пример 26. *Для версальной деформации $x^2 + \lambda_1$ особенности A_1 бифуркационная диаграмма нулей состоит из одной точки $\lambda_1 = 0$ (рис. 8.3, A_1).*

Для версальной деформации $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ особенности A_2 бифуркационной диаграммой нулей является параметрическая кривая $\lambda_1 = -3x^2$, $\lambda_2 = 2x^3$ (рис. 8.3, A_2).

Для версальной деформации $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ особенности A_3 бифуркационная диаграмма нулей изображена на рис. 8.3, A_3 . Эта поверхность называется ласточкиным хвостом.

Отметим, что для генотипа от одной переменной бифуркационная

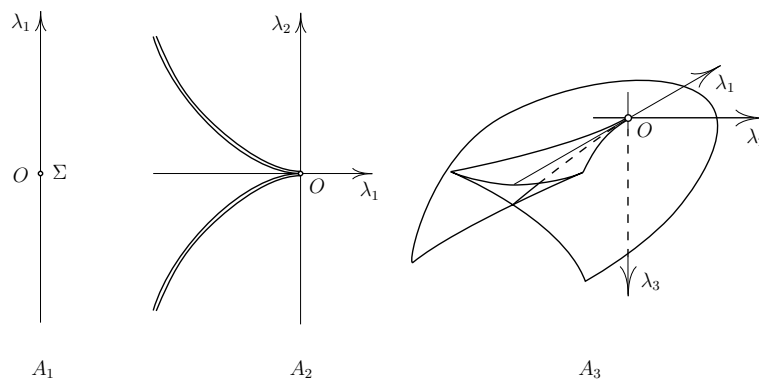


Рис. 8.3. Бифуркационные диаграммы нулей для особенностей A_1 , A_2 и A_3 .

диаграмма нулей есть в точности объединение всех значений параметра деформации, для которых функция $F(., \lambda)$ имеет хотя бы один кратный корень. На рис. 8.4 указано число различных вещественных корней, а на рис. 8.5 проиллюстрированы и графики потенциала $U(x, \lambda) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ для различных значений параметра деформации вблизи бифуркационной диаграммы.

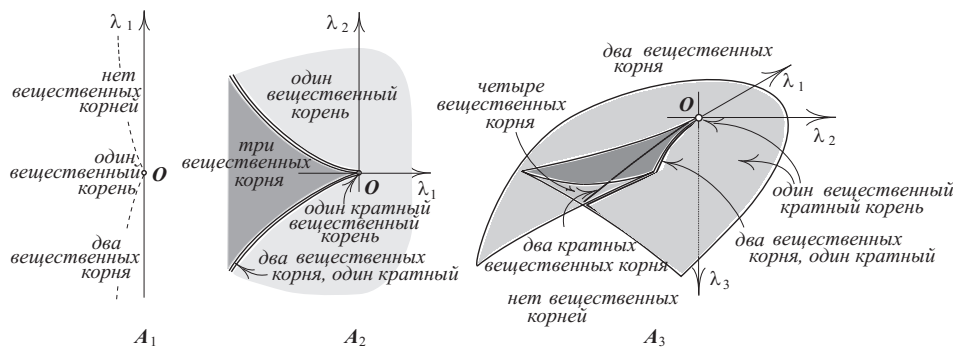


Рис. 8.4. Число различных вещественных корней для особенностей A_1 , A_2 и A_3 .

□

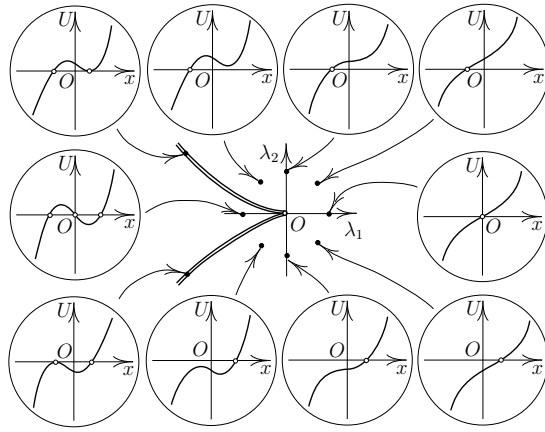


Рис. 8.5. Графики потенциала $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$.

9. Устойчивость отображений

Здесь мы изучаем устойчивость отображений в целом.

9.1. Определение и примеры

Рассмотрим гладкое отображение $f \in C^\infty(M, N)$. Напомним, что диффеоморфизмы этих многообразий действуют на отображение f следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow h & & \downarrow k \\
 M & \xrightarrow{kfh^{-1}} & N
 \end{array} \tag{9.1}$$

Таким образом $f \mapsto kfh^{-1}$, и мы получаем следующую орбиту f под действием групп диффеоморфизмов этих многообразий:

$$\{ kfh^{-1} \mid h \in \text{Diff } M, \quad k \in \text{Diff } N \}.$$

Определение 27. *Отображение f называется RL -устойчивым (или просто устойчивым), если эта орбита содержит некоторую окрестность этого отображения (в рассматриваемой топологии).*

Пример 27. *Постоянное отображение многообразий ненулевой размерности не является устойчиво в любой C^k -топологии, в частности, линейное отображение $f : x \mapsto y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, между вещественными прямыми при $a = 0$.*

Действительно, образ постоянного отображения состоит из одной точки. Понятно, что LR -эквивалентность сохраняет это свойство. Очевидно, что в любой C^k -топологии любая окрестность постоянного

отображения многообразий ненулевой размерности содержит отображение с образом, содержащим более одной точки. Следовательно, постоянное отображение не является RL -устойчивым.

При $a \neq 0$ линейное отображение $f : x \mapsto y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, между вещественными прямыми устойчиво в C^k -топологии при $k \geq 1$. Действительно, при $a \neq 0$ это отображение является диффеоморфизмом, а диффеоморфизмы многообразий образуют открытое множество в тонкой C^k -топологии при любом $k \geq 1$. Следовательно, при $a \neq 0$ рассматриваемое линейное отображение устойчиво.

В обозначениях диаграммы (9.1) отображение g , достаточно близкое к линейному отображению f с $a \neq 0$, связано с f тождественным диффеоморфизмом h и диффеоморфизмом $k : y \mapsto g(\frac{y-b}{a})$, то есть $g(x) \equiv (k \circ f \circ h^{-1})(x)$.

Пример 28. Отображение $f : x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c вещественные числа, между вещественными прямыми устойчиво в любой C^k -топологии при $k \geq 1$, если $a = 0$ $b \neq 0$, как мы только что видели.

При $a \neq 0$ это отображение не является диффеоморфизмом, однако в C^k -топологии оно устойчиво при любом $k \geq 2$ и не является таковым при $k = 1, 2$. Действительно, при $k \geq 2$ y достаточно близкого к f отображения g вторая производная близка к $2a$ и отделена от нуля, а, значит, первая производная обращается в ноль лишь в одной точке x_0 , и этот ноль невырожденный. Следовательно, функция g имеет единственную критическую точку, которая доставляет глобальный минимум этой функции.

Соответствующее минимальное значение y_0 близко к $c - b^2/(4a)$. Замена координат $\tilde{x} = x - x_0$ и $\tilde{y} = y - y_0$ переводит критическую точку и критическое значение в нули. Теперь, применяя следствие из леммы Адамара, запишем отображение g в виде

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 h(\tilde{x})$$

с некоторой гладкой функцией h ; $h(0) \neq 0$, ибо критическая точка невырожденная. Но у функции g лишь один минимум, поэтому такой вид эта функция имеет на всей вещественной прямой, и функция h , $h(\tilde{x}) = g(\tilde{x})/\tilde{x}^2$ при $\tilde{x} \neq 0$, не обращается в ноль. Наконец, в координатах $\bar{x} = \tilde{x}\sqrt{|h(\tilde{x})|}$, $\bar{y} = \tilde{y} \operatorname{sign} h(0)$ отображение имеет вид (мы опускаем “черту” в обозначениях)

$$y = x^2.$$

Следовательно, при $a \neq 0$ все отображения, достаточно близкие к f в C^k -топологии с $k \geq 2$, лежат в одной орбите, поэтому отображение f LR -устойчиво.

Мы оставляем читателю показать, что при $k = 1, 2$ такой устойчивости нет.

Пример 29. Отображение складки Уитни

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

между вещественными плоскостями LR -устойчиво в C^k -топологии с $k \geq 2$. В самом деле, в матрице Якоби первых производных любого достаточно близкого отображения $g = (g_1, g_2)$ первая строка близка к $(1 \ 0)$, и, следовательно, производная $\partial g_1 / \partial x_1$ отделена от нуля. Выбирая новую координату $\tilde{x}_1 = g_1(x)$, приведем первую компоненту отображения g к виду $y_1 = \tilde{x}_1$.

Вторая производная по x_2 отображения складки Уитни тождественно равна 2, поэтому для достаточно близкого отображения g вторая производная по x_2 отделена от нуля. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции уравнение

$$\partial g_2 / \partial x_2 = 0$$

имеет единственное решение

$$x_2 = h(\tilde{x}_1)$$

где h - некоторая гладкая функция. Применяя лемму Адамара, запишем вторую компоненту в виде

$$g_2(\tilde{x}_1, x_2) = (x_2 - h(\tilde{x}_1))^2 A(\tilde{x}_1, x_2) + g_2(\tilde{x}_1, h(\tilde{x}_1))$$

с некоторой гладкой функцией A , которая всюду положительна, ибо вторая производная $\partial^2 g_2 / \partial x_2^2$ положительна и отделена от нуля.

Теперь в координатах

$$\tilde{y}_2 = y_2 - g_2(y_1, h(y_1)), \quad \tilde{x}_2 = (x_2 - h(\tilde{x}_1)) \sqrt{A(\tilde{x}_1, x_2)}$$

отображение g принимает форму отображения типа складки Уитни. Таким образом, все отображения g , достаточно близкие к отображению типа складки Уитни в C^k -топологии при $k \geq 2$, лежат в одной орбите группы LR -эквивалентности, и следовательно, LR -устойчиво (и не является таковым при $k = 1, 2$).

Пример 30. *Отображение $x \mapsto x^\mu$, $\mu \geq 3$, не является LR -устойчивым в любой C^k -топологии. Действительно, вблизи нуля есть его сколь угодно малые возмущения вида $x \mapsto x^\mu + \epsilon x^k$ с $k = 1$ или $k = 2$, для которых число локальных экстремумов больше единицы в отличие от исходного отображения. Понятно, что это число - инвариант LR -эквивалентности.*

Понять, устойчиво ли более сложное отображения, чем рассмотренные выше, например, полиномиальное отображение достаточно высокой степени, - непростая задача. Например, решить ее с помощью примененного в последних примерах метода приведения к нормальной форме не представляется возможным. Однако есть более простой способ проверить устойчивость отображения, который мы сейчас и обсудим.

9.2. Инфинитезимальная устойчивость

Рассмотрим гладкое отображение f между гладкими многообразиями M и N и график Γ этого отображения в прямом произведении $M \times N$. Любая гладкая однопараметрическая деформация нашего отображения доставляет скорость деформации графика вдоль второго сомножителя - пространства-образа. Отметим, что пространство-прообраз можно рассматривать как область определения скорости деформации с ее значением в точке $x \in M$, принадлежащим касательной плоскости $T_{f(x)}N$ (рис. 9.1).

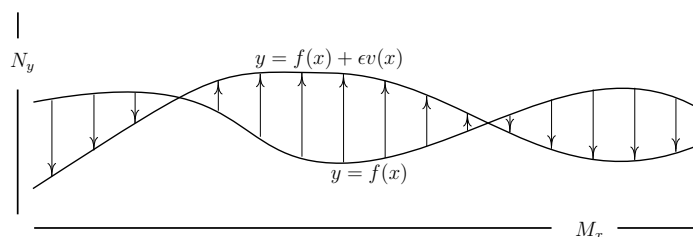


Рис. 9.1. Возможные деформации отображения.

Естественно ожидать, что отображение LR -устойчиво, если любая гладкая скорость деформации доставляется некоторыми деформациями тождественных диффеоморфизмов пространств образа и прообраза.

Пусть H_ϵ и K_ϵ - однопараметрические деформации этих тождественных диффеоморфизмов, тогда локально в координатах имеем

$$H_\epsilon(x) = x + \epsilon h(x) + \dots \quad \text{и} \quad K_\epsilon(y) = y + \epsilon k(y) + \dots,$$

где “...” обозначает слагаемое по меньшей мере следующего порядка по ϵ . Простые вычисления для деформации $f_\epsilon = K_\epsilon f H_\epsilon^{-1}$ приводят к равенству:

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= K_\epsilon f H_\epsilon^{-1}(x) \\ &= f(x - \epsilon h(x) + \dots) + \epsilon k(f(x)) + \dots \\ &= f(x) + \epsilon[k(f(x)) - f_*(x)h(x)] + \dots \end{aligned}$$

с тем же значением “...”. Понятно, что соответствующая скорость деформации начального отображения определяется выражением в квадратных скобках

$$v(x) = k(f(x)) - f_*(x)h(x), \quad (9.2)$$

и разрешимость этого уравнения, то есть существование подходящих k и h для любого поля v из левой части, - не зависит от выбора координат. Это уравнение называется *гомологическим*.

Определение 28. *Гладкое отображение (росток гладкого отображения) называется инфинитезимально RL -устойчивым если гомологическое уравнение (9.2) имеет гладкое решение h, k для любого гладкого поля деформации v .*

Теорема Мазера 1. *В тонкой гладкой топологии гладкое собственное отображение между многообразиями RL -устойчиво, если и только если оно инфинитезимально RL -устойчиво.*

Замечание 24. Есть и локальная версия этой теоремы для ростков отображений, которая справедлива в гладком, аналитическом и формальном случаях. Доказательство теоремы Мазера мы не приводим; для ростков его можно найти в [1] и для общего случая в [4].

Пример 31. *Рассмотрим последние примеры на основе теоремы Мазера.*

Для линейного отображения $x \mapsto y = ax + b$ с вещественными a и b гомологическое уравнение имеет вид

$$v(x) = k(ax + b) - ah(x).$$

При $a = 0$ правая часть этого уравнения - константа, поэтому это уравнение даже локально не имеет решений при любом непостоянном поле v , и, следовательно, изучаемое отображение неустойчиво.

Если $a \neq 0$, то отображение является собственным, а гомологическое уравнение имеет бесконечно много гладких решений, точнее, для любых гладких k и v берем $h(x) = -(v(x) - k(ax + b))/a$. Таким образом, при $a \neq 0$ линейное отображение LR -устойчиво в силу теоремы Мазера.

Квадратичное отображение $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ с вещественными a, b, c , $a \neq 0$, является собственным. Для него гомологическое уравнение имеет вид

$$v(x) = k(ax^2 + bx + c) - (2ax + b)h(x).$$

При $a \neq 0$ любое поле v может быть представлено в форме $v(x) = u(2ax + b)$, что очевидно. Следовательно, нужное решение гомологического уравнения доставляют функции $k, h : k \equiv u(0)$, $-(2ax + b)h(x) \equiv u(2ax + b) - u(0)$. Отметим, что в последнем уравнении существование гладкого решения h вытекает из леммы Адамара. Таким образом, при $a \neq 0$ квадратичное отображение LR -устойчиво в силу теоремы Мазера.

Отображение типа складка Уитни

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

является собственным, что нетрудно видеть. Для него гомологическое уравнение (9.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2) \\ h_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1(x_1, x_2^2) \\ k_2(x_1, x_2^2) \end{pmatrix}$$

При заданном гладком поле v решение этого уравнения доставляют, например, функции $h_1 \equiv -v_1$, $k_1 \equiv 0$, $k_2(x_1, x_2) \equiv v_2(x_1, 0)$ и h_2 , если h_2 взять как гладкое решение уравнения $v_2(x_1, x_2) - v_2(x_1, 0) = -2x_2 h_2(x_1, x_2)$. Как и выше, решение последнего уравнения существует в силу леммы Адамара. Следовательно, отображение типа складка Уитни LR -устойчиво в силу теоремы Мазера.

При натуральном $\mu > 2$ гладкое собственное отображение $f : x \mapsto y = x^\mu$ между вещественными прямыми приводит к гомологическому уравнению

$$v(x) = -\mu x^{\mu-1} h(x) + k(x^\mu).$$

Это уравнение не имеет решения, например, при $v(x) = x$, что легко проверить. Следовательно, в силу теоремы Мазера отображение f не является LR -устойчивым.

Определение 29. Свойство роста гладкого отображения в точке P называется k -определенным, если росток в этой точке любого другого гладкого отображения с такой же k -струей в точке P обладает этим свойством.

Пример 32. Из теоремы Тужрона следует, что класс LR -эквивалентности роста гладкой функции в ее критической точке кратности μ является $(\mu + 1)$ -определенным.

Теорема 9.1. LR -устойчивость роста гладкого отображения на n -мерное многообразие является $(n+1)$ -определенной, то есть, если имеется LR -устойчивый росток такого отображения, то росток в той же точке любого другого отображения с такой же $(n + 1)$ -струей LR -эквивалентен исходному росту.

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пример 33. Гладкая функция f на многообразии является его отображением на вещественную прямую, поэтому LR -устойчивость ее роста 2-определена. В частности, LR -устойчивый росток этой функции LR -эквивалентен росту в той же точке полинома Тейлора этой функции до членов порядка 2 включительно. Для критической точки функции получаем эквивалентность полиному $f(P) + Q(x)$, где Q - соответствующая квадратичная форма. Теперь из условия инфинитезимальной устойчивости роста сразу получаем, что производная Q' должна быть локальным диффеоморфизмом, то есть особая точка должна быть невырожденной.

Следующая теорема доставляет список типичных локальных особенностей отображений в многообразия малой размерности.

Теорема 9.2. Типичное гладкое отображение m -мерного многообразия в n -мерное при $1 \leq n \leq 3$ имеет только LR -устойчивые ростки. Вблизи каждой из своих особых точек это отображение принимает одну из следующих форм:

I) При $n = 1$:

$$y_1 = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_m^2$$

II) при $n=2$:

а) отображение складка Уитни:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 + Q_{3,r}(x) \end{cases}$$

б) отображение сборки Уитни:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^3 + x_1x_2 + Q_{3,r}(x) \end{cases}$$

III) при $n=3$:

а) отображение зонтик Уитни ($m = 2$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \\ y_3 = x_1x_2 \end{cases}$$

б) отображение складка Уитни ($m \geq 3$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = Q_{3,r}(x) \end{cases}$$

в) отображение сборки Уитни: ($m \geq 3$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^3 + x_1x_3 + Q_{4,r}(x) \end{cases}$$

г) отображение ласточкин хвост ($m \geq 3$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^4 + x_2x_3^2 + x_1x_3 + Q_{4,r}(x) \end{cases}$$

в подходящих гладких локальных координатах с началами в этой точке и ее образе. Всюду $Q_{i,r}(x) = x_i^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_m^2$.

10. Задачи к экзамену

- 1) На вещественной прямой со стандартной топологией введите два атласа класса C^∞ , не являющиеся C^1 -совместимыми.
Бывают ли атласы (на одном и том же пространстве), не являющиеся C^0 -совместимыми?
- 2) На вещественной плоскости $R_{x,y}^2$ с обычной топологией рассмотрим объединение двух непараллельных прямых. Покажите, что это объединение с индуцированной топологией не может быть многообразием.
- 3) На вещественной плоскости $R_{x,y}^2$ с обычной топологией рассмотрим множество $x^5 + y^5 = 1$ с индуцированной топологией. Введите атлас на этом множестве. Может ли этот атлас быть из одной карты?
- 4) Два твердых тела соединены шаровым шарниром. Сколько координат нужно для определения положения этого соединения в трехмерном арифметическом пространстве?
- 5) Постройте диффеоморфизм класса C^k открытого квадрата $|x| + |y| < 1$ на всю плоскость, $k \geq 0$.
- 6) Покажите, что у каждой точки гладкого k -мерного многообразия есть окрестность, гомеоморфная всему R^k . (Указание: используйте решение предыдущей задачи.)
- 7) Для дифференцируемого отображения между многообразиями некоторая точка не является критической. Может ли образ ненулевой скорости в этой точке при касательном отображении f_* быть нулевой скоростью?
- 8) Для отображения f между многообразиями его график есть множество точек вида $(x, f(x))$ в прямом произведении этих многообразий. Введите на этом графике дифференциальную структуру так,

чтобы график был диффеоморфен многообразию-прообразу.

- 9) На евклидовой плоскости $R_{x,y}^2$ постройте непрерывную функцию, нулевую в начале координат и вне круга $x^2 + y^2 \leq 1$ и отличную от нуля в проколотом круге $0 < x^2 + y^2 < 1$.
- 10) Покажите, что арифметические пространства разной размерности не диффеоморфны (М.Голубицкий, В.Гийемин).
- 11) Покажите, что образ многообразия при иммерсии может не быть подмногообразием.
- 12) Покажите, что образ открытого множества при субмерсии открыт.
- 13) Две функции на вещественной оси назовем *совместимыми*, если:
- а) одна из них равна другой, умноженной на некоторую непрерывную функцию;
 - б) одна из них равна другой, умноженной на некоторую непрерывную положительную функцию.
- Является ли какое-то из этих бинарных отношений отношением эквивалентности?
- 14) Два множества совпадают в проколотой окрестности некоторой точки. Совпадают ли их ростки в этой точке?
- 15) Две гладкие функции на вещественной плоскости имеют нулевые производные на оси абсцисс до порядков k_1 и k_2 , соответственно. Какой класс гладкости можно гарантировать функции, которая совпадает с одной из этих функций в верхней полуплоскости, а с другой в нижней?

- 16) На вещественной прямой рассмотрим две функции, имеющие в нуле нулевые значения, но разные производные. Покажите, что число классов эквивалентности ростка в начале координат этой пары
- бесконечно по отношению к R -эквивалентности;
 - равно 1 по отношению к R^+ -эквивалентности.
- (R^+ -эквивалентность допускает замену координат в пространстве-прообразе и прибавление гладкой функции.)
- 17) В предыдущей задаче каково число классов эквивалентности, если мы опустим условие о различии производных?
- 18) Докажите, что естественные проекции в пространстве струй из струй большего порядка на струи меньшего порядка являются проекциями.
- 19) Две аналитические функции в некоторой точке имеют контакт (касание) бесконечного порядка. Определяют ли они одинаковый росток в этой точке?
- 20) Найдите критические точки и критические значения отображения $R_{x,y}^2 \rightarrow R_{x,y}^2$, определяемого формулой $z \mapsto z^2 + \epsilon \bar{z}$, где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, и i, ϵ – мнимая единица и вещественный параметр, соответственно ([1]).
- 21) Может ли множество критических значений гладкой функции на прямой быть плотным на некотором непустом интервале?
- 22) *Коранг в точке* дифференцируемого отображения $f : M \rightarrow N$ многообразий определяется как разность между максимально возможным рангом и рангом отображения в этой точке:

$$\text{corank } f(.) = \min\{\dim M, \dim N\} - \text{rank } f(.).$$

Покажите, что множество отображений, имеющих коранг меньше некоторого натурального k в каждой точке, открыто (в простра-

нстве отображений в тонкой C^1 -топологии).

23) Какие из следующих пар отображений $f : S_\phi^1 \rightarrow R_{x,y}^2$ и $g : R_t \rightarrow R_{x,y}^2$ трансверсальны (здесь ϕ - угол на окружности)?

а) $x = \cos \phi, y = \sin \phi$ и $x = t, y = 0$;

б) $x = \cos \phi, y = \sin (2\phi)$ и $x = t, y = 0$;

в) $x = \cos \phi, y = \sin (2\phi)$ и $x = t^2, y = 0$.

г) $x = \cos \phi, y = \sin (2\phi)$ и $x = t^2, y = 1$.

24) Покажите, что множество отображений $f : S_\phi^1 \rightarrow R_{x,y}^2$, трансверсальных отображению $g : t \mapsto (0, \arctan t)$, не является открытым.

25) Покажите, что множество 1-струй отображений плоскости на плоскость максимального коранга k образуют подмногообразие в пространстве 1-струй.

Каковы размерность и коразмерность этого подмногообразия?

Какими уравнениями задается это подмногообразие в локальных координатах, доставляемых координатой на пространстве-прообразе и производными?

Если для $k \geq 2$ 1-струйное расширение отображения трансверсально этому подмногообразию, то какие критические точки такого коранга имеет это отображение?

26) Два отображения имеют контакт порядка 13 в некоторой точке. Одно из этих отображений трансверсально некоторому C^1 -подмногообразию в пространстве 10-струй. Является ли другое отображение трансверсальным этому подмногообразию?

27) Два отображения имеют контакт порядка 19 в некоторой точке. Одно из этих отображений трансверсально некоторому C^1 -подмногообразию в пространстве 19-струй. Является ли другое отображение трансверсальным этому подмногообразию?

- 28) Покажите, что множество отображений $f : S_\phi^1 \rightarrow R_{x,y}^2$, трансверсальных $g : t \mapsto (0, \frac{t}{1+t^2})$, открыто и плотно, хотя отображение g и не является собственным. Противоречит ли это теореме Бахтина-Лина?
- 29) Покажите, что типичное отображение n -мерных многообразий не имеет критических точек коранга $n > 1$.
- 30) Покажите, что типичная пара гладких функций на многообразии не имеет общих критических точек.
- 31) Покажите, что типичная пара гладких векторных полей на многообразии не имеет общих точек покоя.
- 32) Покажите, что типичное гладкое отображение n -мерного многообразия в $2n$ -мерное не имеет критических точек.
- 33) Покажите, что нулевой уровень типичного гладкого (или даже класса C^1) потенциала является невырожденным.
- 34) Дифференцируемое отображение $f : S_\phi^1 \rightarrow R_{x,y}^2$ трансверсально кривой $x^4 + y^4 = 4$. Обязательно ли быть конечным число прообразов этой кривой при данном отображении?
- 35) Дифференцируемое отображение $f : R_t^1 \rightarrow R_{x,y}^2$ трансверсально кривой $x^4 + y^4 = 4$. Обязательно ли быть конечным число прообразов этой кривой при данном отображении?
- 36) Покажите, что множество критических значений гладкой функции на отрезке (на прямой) имеет нулевую меру (лемма Сарда).
- 37) Могут ли критические значения гладкой функции на прямой заполнить некоторый непустой интервал?

- 38) Верно ли, что множество вещественных функций, зануляющихся на некотором множестве, со стандартными бинарными операциями образуют группу? кольцо? алгебру? идеал в алгебре всех дифференцируемых функций? В каждом из случаев с ответом “ДА” укажите соответствующую алгебраическую структуру, а в случаях с ответом “НЕТ” дайте объяснения.
- 39) Верно ли, что множество вещественных дифференцируемых функций, производные которых зануляются на некотором множестве, со стандартными бинарными операциями образуют группу? кольцо? алгебру? идеал в алгебре всех дифференцируемых функций? В каждом из случаев с ответом “ДА” укажите соответствующую алгебраическую структуру, а в случаях с ответом “НЕТ” дайте объяснения.
- 40) Отображение между m -мерными арифметическими пространствами имеет вид
- $$(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, \dots, x_m^{r_m})$$
- с некоторыми натуральными показателями r_1, r_2, \dots, r_m . Конечна ли размерность локальной алгебры этого отображения в начале координат?
- 41) Отображение вблизи точки является иммерсией. Является ли оно конечнократным отображением в этой точке?
- 42) Отображение вблизи точки является субмерсией. Является ли оно конечнократным отображением в этой точке?
- 43) Укажите какой-либо базис в локальной алгебре в нуле следующих отображений:
- а) $(x, y) \mapsto (x^5 + y^2, y)$;
 - б) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x^2y)$;
 - в) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x^2y^2)$;
 - г) $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z)$;
 - д) $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$.

44) Можно ли гладкую функцию f (переменных x, y или x, y, z) представить вблизи нуля в одной из следующих форм

а) $f(x, y) = (x^2 + y^2)p(x, y) + xA(y) + B(y),$

б) $f(x^2, y) = (x^2 + y^2)q(x^2, y) + C(y),$

в) $f(x, y) = (x^3 + y^2)q(x, y) + xA(y) + C(y),$

г) $f(x, y, z) = (x + y^{1001} + z^{2001})q(x, y, z) + A(y)B(z)$

с некоторыми гладкими функциями p, q, A, B, C ?

45) Является ли начало координат конечнократной критической точкой следующих функций?

а) $f(x, y) = x^{43} + y^{59}$

б) $f(x, y, z) = x^5 + yz^2 + z^8$

в) $f(x, y) = xy^2 + y^{99}$

г) $f(x, y, z) = x^5 + y^2z + z^8$

46) Является ли 5-струя в начале координат следующих функций достаточной по отношению к R -эквивалентности?

а) $f(x, y) = x^3 + y^3$

б) $f(x, y, z) = x^3 + xy^2$

в) $f(x, y) = x^2y^2$

г) $f(x, y, z) = x^4 + y^4$

47) Существует ли конечно параметрическая версальная деформация ростка в нуле следующих функций?

а) $f(x, y) = x^{1001} + y^{999}$

б) $f(x, y, z) = x^5 + yz^2 + z^8$

в) $f(x, y) = xy^2 + y^{1001}$

г) $f(x, y, z) = x^5 + y^2z + z^8$

Если ответ “НЕТ”, то объясните, если “ДА”, то укажите соответствующую деформацию.

- 48) Нулевые уровни двух функций на прямой не являются критическими и имеют касание третьего порядка в нуле. Являются ли их 3-струи (4-струи, 7-струи, ...) в начале координат достаточными для определения особенности объединения этих уровней в нуле по отношению к диффеоморфизмам плоскости?
- 49) На плоскости начало координат не является критической точкой ни одной из трех данных гладких функций, имеющих в нуле нулевые значения и одинаковые 1-струи, но попарно разные 2-струи. Являются ли 3-струи (13-струи) этих функций в начале координат достаточными для определения особенности роста объединения этих уровней в нуле?
- 50) В трехмерном арифметическом пространстве начало координат не является критической точкой ни одной из трех данных гладких функций, имеющих в нуле нулевые значения и попарно трансверсальные нулевые уровни. Являются ли 1-струи этих функций в начале координат достаточными для определения особенности роста объединения этих уровней в нуле?
- 51) В трехмерном арифметическом пространстве начало координат не является критической точкой ни одной из двух данных гладких функций, имеющих в нуле нулевые значения и одинаковые 1-струи. Могут ли 2-струи этих функций в начале координат быть достаточными для определения особенности роста в нуле объединения нулевых уровней этих функций?
- 52) В трехмерном арифметическом пространстве начало координат не является критической точкой ни одной из двух данных гладких функций, имеющих в нуле нулевые значения и одинаковые 1-струи. Могут ли 2-струи этих функций в начале координат не быть достаточными для определения особенности роста в нуле объединения нулевых уровней этих функций?

Список литературы

- [1] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. – М.: Наука, 1982.
- [2] Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Знание, 1982.
- [3] Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. – М.: ФАЗИС, 1996.
- [4] Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. – М.: Мир, 1977.
- [5] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
- [6] Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979.