Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В. А. Скляренко   О. И. Трубина

# АФФИНИНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Практикум

Владимир 2009

УДК 514.14
ББК 22.151.31
С43

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного гуманитарного университета
*В. В. Жиков*

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
*Н. И. Дубровин*

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

**Скляренко, В. А.**
С43 **Аффинные** пространства : практикум / В. А. Скляренко, О. И. Трубина ; Владим. гос. ун-т. — Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. — 108 с. — ISBN 978-5-89368-928-0

Соответствует программе курса «Аналитическая геометрия» для математических специальностей университета. Содержатся необходимые теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

Может использоваться студентами физико-математических специальностей первого курса дневной формы обучения.

Табл. 1. Ил. 8. Библиогр.: 7 назв.

УДК 514.14
ББК 22.151.31

ISBN 978-5-89368-928-0

А вот и тропинка, она ведет прямо наверх...
Нет, *совсем не прямо...*
**Л. Кэррол «Алиса в Зазеркалье»**

# Предисловие

Практикум представляет собой сборник индивидуальных заданий по одному из разделов аналитической геометрии. Тематика предложенных задач касается основных понятий, связанных с $n$-мерными аффинными пространствами: аффинные системы координат, линейные геометрические образы, аффинные преобразования пространства, измерения в аффинных евклидовых пространствах.

Предложено тридцать однотипных вариантов по двадцать шесть задач в каждом. Типы заданий во многом определены сборником [7].

Все задания распределяются по трем разделам, каждый из которых имеет вводную часть. Эта часть практикума содержит примеры решений типовых задач и теоретический материал: определения основных понятий и формулировки используемых теорем. При этом предполагаются известными некоторые понятия линейной алгебры, в частности, понятие линейного пространства, а также методы решения и исследования систем линейных уравнений.

Доказательства приведенных утверждений и теорем к соответствующим разделам можно найти в классических учебниках: к первому разделу — в [1, гл. 3, 8, 14], [5, гл. 3], [6, лекции 5, 11]; ко второму разделу — в [5, гл. 8], [6, лекция 14]; к третьему — в [1, гл. 11], [6, лекция 27], а также в курсе лекций [4].

Включение теоретического материала в вводную часть позволяет проследить логический путь решения задачи.

Всестороннему изучению данной темы способствует решение задач, включенных в задачники [2], [7] и в учебное пособие [3], в котором приведены примеры решения некоторых типовых задач.

Пособие соответствует программе дисциплины «Аналитическая геометрия» для математических специальностей университета и предназначено прежде всего студентам этих специальностей.

Пособие может быть полезным и будущим инженерам для формирования и закрепления навыков работы с геометрическими объектами.

Считаем, что издание окажется полезным и в плане методического обеспечения курса аналитической геометрии.

# 1. Аффинные пространства

## 1.1. Определение $n$-мерного аффинного пространства. Аффинная система координат

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *точками*, $\mathbf{V}$ — $n$-мерное линейное пространство над полем действительных чисел и $\varphi\colon \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathbf{V}$ — отображение, которое каждой упорядоченной паре точек $M, N \in \mathscr{A}$ ставит в соответствие вектор $\vec{a} = \varphi(M, N) \in \mathbf{V}$. Условимся обозначать $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}$.

**Определение 1.1.** Множество $\mathscr{A}$ называется *$n$-мерным аффинным пространством*, если выполняются следующие условия:

1. Для любой точки $M \in \mathscr{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}$ найдется, причем только одна, точка $N \in \mathscr{A}$ такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.
2. Для любых трех точек $M, N, K \in \mathscr{A}$ справедливо равенство: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}$.

В этом случае $\mathbf{V}$ называют *линейным пространством, ассоциированным с аффинным пространством $\mathscr{A}$*.

В частности, прямая, плоскость и пространство, изучаемые в элементарной геометрии, являются аффинными пространствами размерности $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ соответственно.

*Аффинная система координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$* определяется в $\mathscr{A}$ выбором точки $O \in \mathscr{A}$ и базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в ассоциированном линейном пространстве $\mathbf{V}$. Точка $O$ называется *началом координат.*

*Аффинными координатами точки $M \in \mathscr{A}$* в заданной аффинной системе координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ называется упорядоченный набор $(x^1, \dots, x^n)$ действительных чисел — координат вектора $\overrightarrow{OM} \in \mathbf{V}$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Координаты точки $M$ записывают в виде $M(x^1, \dots, x^n)$.

Точку $E(1, \dots, 1)$ называют *единичной точкой* данной системы координат.

Так, аффинная система координат на прямой — $O\vec{e}$, где $\vec{e} \neq 0$; аффинная система координат на плоскости — $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, где векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не коллинеарны; аффинная система координат в трехмерном пространстве — $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — некомпланарные векторы.

## 1.2. Плоскости в аффинном пространстве

Пусть $\mathbf{L}$ линейное подпространство размерности $k < n$ в линейном пространстве $\mathbf{V}$, ассоциированном с $\mathscr{A}$, и $M_0$ — фиксированная точка в $\mathscr{A}$.

**Определение 1.2.** Совокупность точек $M \in \mathscr{A}$ таких, что вектор $\overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{L}$, называется *$k$-мерной плоскостью* $\mathscr{P}$, проходящей через точку $M_0$ *в направлении* подпространства $\mathbf{L}$.

Так, нуль-мерная плоскость есть *точка.* Одномерные плоскости называются *прямыми*, плоскости размерности $n-1$ — *гиперплоскостями.*

Условимся говорить, что векторы из *направляющего подпространства* $\mathbf{L}$ *компланарны* плоскости $\mathscr{P}$.

Заметим, что понятие плоскости удовлетворяет определению 1.1, где в качестве носителя взято $\mathscr{P}$, $\mathbf{L}$ — ассоциированное линейное пространство, а отображение $\mathscr{P}\times\mathscr{P} \to \mathbf{L}$ является сужением $\varphi$ на $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$. Поэтому плоскость $\mathscr{P} \subset \mathscr{A}$ называют *аффинным подпространством* $\mathscr{A}$.

Если направляющее подпространство $\mathbf{L}$ плоскости задано как линейная оболочка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots, \vec{c}$, то есть $\mathbf{L} = \langle \vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{c} \rangle$, то плоскость будем записывать в виде $\mathscr{P} = M_0 + \langle \vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{c} \rangle$.

Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ — линейно независимая система векторов в $\mathbf{L}$. Тогда совокупность всех точек $M \in \mathscr{P}$ описывается уравнением

$$\overrightarrow{M_0M} = t_1\,\vec{b}_1 + t_2\,\vec{b}_2 + \cdots + t_k\,\vec{b}_k, \tag{1.1}$$

где $t_1, \ldots, t_k$ принимают все значения из множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Пусть в $\mathscr{A}$ выбрана система координат с началом в точке $O$. Поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, уравнение (1.1) равносильно уравнению

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \ldots + t_k\vec{b}_k, \tag{1.2}$$

где $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ (рис. 1, $k = 2$). Равенство (1.2) называют *векторным параметрическим уравнением* $k$-мерной плоскости; числа $t_1, \ldots, t_k$ — *параметрами.*

Если в выбранной системе координат $M(x^1, \ldots, x^n)$, $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и $\vec{b}_i = (b_i^1, \ldots, b_i^n)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то равенство (1.2), записанное в координатной форме, представляет собой систему уравнений

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + b_1^1 t_1 + \ldots + b_k^1 t_k, \\ x^2 = x_0^2 + b_1^2 t_1 + \ldots + b_k^2 t_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x_0^n + b_1^n t_1 + \ldots + b_k^n t_k. \end{cases} \tag{1.3}$$

Таким образом, чтобы получить параметрические уравнения $k$-мерной плоскости $\mathscr{P}$ в заданной системе координат, нужно знать координаты какой-либо точки $M_0 \in \mathscr{P}$ и координаты $k$ линейно независимых векторов, компланарных этой плоскости. Достаточно, например, указать координаты $k+1$ точек $M_0$, $M_1, \ldots, M_k$ этой плоскости, выбранных так, чтобы векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{M_0M_k}$ были линейно независимы.

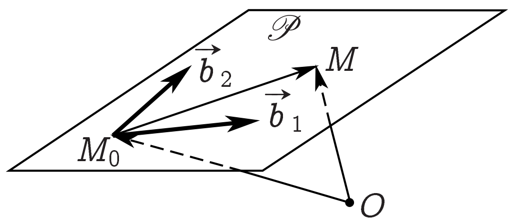


**Рис. 1**

**Пример 1.1.** Составить параметрические уравнения:

$a$) прямой $\ell$, проходящей через две данные точки $A(0, 1, 2, 3)$ и $B(-4, -5, -6, -7)$;

$b$) плоскости $\mathscr{P}$, проходящей через три данные точки $A$(1,0,1,2,0), $B(0, 2, 0, 1, 1)$, $C(2, -2, 1, 3, -1)$.

**Решение.** $a$) Поскольку вектор $\overrightarrow{AB} = (-4, -6, -8, -10) \neq 0$, то $\overrightarrow{AB}$, как и любой коллинеарный ему вектор $\vec{b} \neq 0$, может быть взят за направляющий вектор прямой. Пусть, например, $\vec{b} = (2, 3, 4, 5)$. В качестве точки $M_0$ выберем любую из точек $A$ или $B$. Так, взяв точку $A$, согласно (1.3) получим искомые параметрические уравнения прямой

$$\ell\colon \quad \begin{cases} x^1 = 2t, \\ x^2 = 1 + 3t, \\ x^3 = 2 + 4t, \\ x^4 = 3 + 5t, \end{cases}$$

где $t \in (-\infty, \infty)$.

$b$) Компланарные плоскости векторы $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1, -1, 1)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 0, 1, -1)$ линейно независимы, поэтому заданные точки однозначно определяют двумерную плоскость, проходящую через точку $A$ в направлении подпространства $\mathbf{L} = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle$:

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 - t_1 + t_2, \\ x^2 = 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 1 - t_1, \\ x^4 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^5 = t_1 - t_2, \end{cases}$$

где $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$. $\square$

**Ответ.** $a$) $\ell$: $x^1 = 2t$, $x^2 = 1 + 3t$, $x^3 = 2 + 4t$, $x^4 = 3 + 5t$; $b$) $\mathscr{P}$: $x^1 = 1 - t_1 + t_2$, $x^2 = 2t_1 - 2t_2$, $x^3 = 1 - t_1$, $x^4 = 2 - t_1 + t_2$, $x^5 = t_1 - t_2$.

Другой способ определить плоскость в $n$-мерном аффинном пространстве — задать её системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = c^j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.4}$$

При этом решения $\left(x^1, \ \ldots, x^n\right)$ системы (1.4) понимают как координаты точки аффинного пространства в фиксированной системе координат. Связь плоскостей с системами линейных уравнений устанавливает

**Теорема 1.1.** *Пусть* (1.4) *есть совместная система ранга $r$. Тогда множество ее решений есть плоскость $n$-мерного пространства, имеющая размерность $k = n - r$. Обратно, всякая $k$-мерная плоскость в $n$-мерном аффинном пространстве есть множество всех решений некоторой системы линейных уравнений ранга $r = n - k$ вида* (1.4).

**Замечание 1.1.** Если плоскость задана системой (1.4), то множество решений соответствующей однородной системы образует линейное пространство. Оно является направляющим подпространством этой плоскости. Базис в направляющем подпространстве образуют векторы фундаментальной системы решений однородной системы.

Согласно теореме 1.1 гиперплоскость может быть задана одним линейным уравнением вида

$$A_1x^1 + \ldots + A_nx^n + B = 0,$$

где $(A_1)^2 + \ldots (A_n)^2 \neq 0$, а прямая — системой из $(n-1)$-го уравнения:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{b^1} = \ldots = \frac{x^n - x_0^n}{b^n}, \quad (b^1)^2 + \ldots + (b^n)^2 \neq 0. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.5) называются *каноническими уравнениями* прямой. Они могут быть получены из параметрических уравнений (1.3), где $k = 1$, исключением параметра $t$ и определяют прямую, проходящую через точку $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в направлении вектора $\overrightarrow{b} = (b^1, \ldots, b^n)$.

Так, канонические уравнения прямой из примера 1.1, $a$) имеют вид

$$\frac{x^1}{2} = \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{x^3 - 2}{4} = \frac{x^4 - 3}{5}.$$

**Пример 1.2.** Найти уравнение гиперплоскости $\mathscr{P}$, проходящей через точки $A(1,0,1,0), B(3,1,2,3), C(4,0,0,1), D(2,2,3,1)$.

**Решение.** Векторы $\overrightarrow{AB} = (2,1,1,3)$, $\overrightarrow{AC} = (3,0,-1,1)$ и $\overrightarrow{AD} = (1,2,2,1)$ — линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

составленной из их координат, равен 3 (выделенный минор отличен от нуля). Следовательно, данные точки определяют плоскость размерности 3 в четырехмерном пространстве. Точка $M(x^1, \ldots, x^n)$ принадлежит плоскости $\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AM} = (x^1 - 1, x^2, x^3 - 1, x^4)$ принадлежит её направляющему подпространству $\mathbf{L} = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$, то есть

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1-1 & x^2 & x^3-1 & x^4 \end{pmatrix} = 3.$$

Последнее равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1-1 & x^2 & x^3-1 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим искомое уравнение гиперплоскости

$$-5\left(x^1-1\right)+13x^2-12\left(x^3-1\right)+3x^4=0,$$

или

$$5x^1-13x^2+12x^3-3x^4-17=0. \qquad \square$$

**Ответ.** $\mathscr{P}\colon 5x^1-13x^2+12x^3-3x^4-17=0.$

**Пример 1.3.** Найти систему линейно независимых уравнений, определяющую плоскость

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = t_1 - t_2, \\ x^2 = 2 + t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 3 - 2t_1 + t_2, \\ x^4 = -1 + 2t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

**Решение.** Плоскость $\mathscr{P}$ проходит через точку$M_0(0,2,3,-1)$. Ее направляющее подпространство образовано двумя линейно независимыми векторами $\overrightarrow{b}_1=(1,1,-2,2)$, $\overrightarrow{b}_2=(-1,2,1,-3)$. Поэтому плоскость является двумерной в четырехмерном пространстве и согласно теореме 1.1 задается системой двух линейно независимых уравнений. Точка $M(x^1,x^2,x^3,x^4)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{M_0M}$ линейно зависимы, то есть

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ x^1 & x^2-2 & x^3-3 & x^4+1 \end{pmatrix} = 2.$$

Выделенный минор отличен от нуля. Приравняем к нулю окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ x^1 & x^2-2 & x^3-3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ x^1 & x^2-2 & x^4+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим два линейно независимых уравнения, образующих искомую систему

$$\begin{cases} 5x^1 + x^2 + 3x^3 = 11, \\ 7x^1 - x^2 - 3x^4 = 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

**Ответ.** $\mathscr{P}\colon \begin{cases} 5x^1 + x^2 + 3x^3 = 11, \\ 7x^1 - x^2 - 3x^4 = 1. \end{cases}$

**Замечание 1.2.** Понятно, что, выбрав изначально другой отличный от нуля минор, получим в качестве ответа другую систему, но равносильную (1.6).

**Замечание 1.3.** Геометрический смысл перехода от параметрических уравнений (1.3) к системе (1.4) состоит в том, что на плоскости выбираются $k$ новых параметров — $x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$ из числа координат $x^1, \dots, x^n$ её точек, а параметры $t_1, \dots ,t_k$ исключаются из системы.

**Пример 1.4.** Определить размерность плоскости $\mathscr{P}$, заданной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 + 5x^3 + 4x^4 + 2x^5 = 1, \\ x^1 + x^2 - 2x^3 - 3x^4 + 5x^5 = 0, \\ 7x^1 - 8x^2 + 19x^3 + 18x^4 - 4x^5 = 3, \\ 5x^1 - 5x^2 + 12x^3 + 11x^4 - x^5 = 2. \end{cases}$$

Составить параметрические уравнения этой плоскости.

**Решение.** Чтобы ответить на первый вопрос задачи, достаточно найти ранг матрицы $B$ коэффициентов системы и ранг ее расширенной матрицы $\overline{B}$. Если $\operatorname{rang} B \neq \operatorname{rang} \overline{B}$, то система несовместна и никакой плоскости не определяет. Если же $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \overline{B} = r$, то согласно теореме 1.1 множество ее решений определяет плоскость размерности $k = 5 - r$ в пятимерном пространстве.

В данном случае $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \overline{B} = 2$, и, следовательно, $k = 3$. Выберем в качестве базисного минора угловой верхний левый минор $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда неизвестные $x^1, x^2$ — базисные, а $x^3, x^4, x^5$ — свободные. Найдем общее решение равносильной системы из двух независимых уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 = -5x^3 - 4x^4 - 2x^5 + 1, \\ \phantom{3}x^1 + x^2 = 2x^3 + 3x^4 - 5x^5. \end{cases}$$

Искомое решение имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 - \frac{12}{5}t_3, \\ x^2 = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}t_1 + \frac{13}{5}t_2 - \frac{13}{5}t_3, \\ x^3 = t_1, \\ x^4 = t_2, \\ x^5 = t_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

Равенства (1.7) есть параметрические уравнения плоскости $\mathscr{P}$. Заметим, что частное решение $\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0\right)$ задает набор координат точки $M_0\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0\right) \in \mathscr{P}$, а фундаментальная система решений $\left(-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, 1, 0, 0\right)$, $\left(\frac{2}{5}, \frac{13}{5}, 0, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{13}{5}, 0, 0, 1\right)$ соответствующей однородной системы образует базис в направляющем подпространстве плоскости $\mathscr{P}$. $\square$

**Ответ.** $\mathscr{P}$: $x^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 - \frac{12}{5}t_3$, $x^2 = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}t_1 + \frac{13}{5}t_2 - \frac{13}{5}t_3$, $x^3 = t_1$, $x^4 = t_2$, $x^5 = t_3$.

### 1.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть $\mathscr{P}_1 = M_1 + \left\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \right\rangle$ и $\mathscr{P}_2 = M_2 + \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m \right\rangle$ — две плоскости в аффинном пространстве. Полагаем, что каждое из направляющих пространств $\mathbf{L}_1 = \left\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \right\rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m \right\rangle$ задано линейно независимой системой векторов, и $k \leqslant m$.

Говорят, что плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ *пересекаются*, если они имеют хотя бы одну общую точку.

**Замечание 1.4.** Если $\mathscr{P}_1 \subsetneqq \mathscr{P}_2$ или $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2$, то плоскости $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ являются пересекающимися. При определении взаимного расположения плоскостей эти случаи следует выделить особо.

Критерий наличия общих точек двух плоскостей сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 1.2.** *Плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ пресекаются тогда и только тогда, когда*

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2.$$

Следует заметить, что пересечение плоскостей также является плоскостью. Справедлива теорема.

**Теорема 1.3.** *Если плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ пересекаются, то их пересечение есть плоскость с направляющим подпространством $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$.*

Говорят, что плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ *параллельны*, если они не пересекаются и $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$.

Плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ называют *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Про скрещивающиеся плоскости $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ говорят, что они *скрещиваются по подпространству* $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$.

Вопрос о взаимном расположении плоскостей $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ может быть решен на основании значений рангов двух систем векторов:

$$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots \vec{b}_m\} \quad \text{и} \quad \left\{\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\right\}.$$

Напомним, что *рангом системы векторов* называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы.

Пусть

$$\operatorname{rang}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots \vec{b}_m\} = r,$$
$$\operatorname{rang}\left\{\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\right\} = R.$$

Тогда сформулированное в теореме 1.2 условие $\overrightarrow{M_1M_2} \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, необходимое и достаточное для пересечения плоскостей, равносильно условию $R = r$. В этом случае размерность плоскости $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ равна $k + m - r$. В частности, при $r = k + m$ пересечением плоскостей является точка. Если $R = r$ и к тому же $r = m$, то есть $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$, то $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2$. Совпадению плоскостей отвечает случай $R = r = m = k$.

Если $R \neq r$, то есть $R = r + 1$, то плоскости либо скрещиваются, либо параллельны. При условии $R \neq r$ параллельность плоскостей имеет место тогда и только тогда, когда $r$ принимает свое минимальное значение: $r = m$.

Подытожим сказанное таблицей

| $R = r$ | | | $R = r + 1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $r > m$ | $r = m > k$ | $r = m = k$ | $r > m$ | $r = m \geqslant k$ |
| $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — пересекаются по плоскости размерности $m + k - r$ | $\mathscr{P}_1 \subsetneq \mathscr{P}_2$ | $\mathscr{P}_1 \equiv \mathscr{P}_2$ | $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ скрещиваются по подпространству $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ размерности $m + k - r$ | $\mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2$ |

**Пример 1.5.** Определить взаимное расположение прямой $\ell$ и плоскости $\mathscr{P}$. В случае пересечения найти их общую точку.

*a*) $\ell: \ x^1 = -5 - 5t, \ x^2 = -3 - 2t, \ x^3 = 4 + 2t, \ x^4 = -5 - 4t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 2x^1 - 11x^2 - 6x^3 + 1 = 0, \\ 2x^1 + 7x^2 - 6x^4 + 1 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell$: $\dfrac{x^1 + 1}{1} = \dfrac{x^2 - 3}{1} = \dfrac{x^3 - 3}{2} = \dfrac{x^4 - 3}{2},$

$$\mathscr{P}:\ \begin{cases} x^1 = -1 + 3t_1 - 4t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^3 = t_1, \\ x^4 = t_2. \end{cases}$$

**Решение.** *a*) Прямая проходит через точку $M_1(-5,-3,4,-5)$ в направлении вектора $\vec{a} = (-5,-2,2,-4)$.

Решая, например методом Гаусса, систему уравнений, задающих плоскость, получим

$$\begin{cases} x^1 = 7t_1 + 11t_2 - \dfrac{1}{2}, \\ x^2 = -2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 6t_1, \\ x^4 = 6t_2, \end{cases}$$

откуда следует, что плоскость двумерна, $m = 2$, проходит через точку $M_2$ с координатами $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ — частное решение неоднородной системы, а базис направляющего пространства образован векторами $\vec{b}_1 = (7,-2,6,0)$ и $\vec{b}_2 = (11,2,0,6)$ — фундаментальной системой решений соответствующей однородной системы уравнений.

Определим ранги систем векторов:

$$r = \operatorname{rang}\{\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2,$$

$$R = \operatorname{rang}\{\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -3 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2.$$

Так как $R = r = m > k = 1$, то $\ell \subset \mathscr{P}$.

*b*) Поскольку $\ell = M_1 + \langle \vec{a} \rangle$, где $M_1(-1,3,3,3)$, $\vec{a} = (1,1,2,2) \neq \neq 0$ , то есть $k = 1$. Плоскость $\mathscr{P} = M_2 + \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$, где $M_2(-1,2,0,0)$, $\vec{b}_1 = (3,-1,1,0)$, $\vec{b}_2 = (-4,1,0,1)$, причем $m = \operatorname{rang}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = 2$. Найдем $\overrightarrow{M_2M_1} = (0,1,3,3)$,

$$r = \operatorname{rang}\{\vec{a},\, \vec{b}_1,\, \vec{b}_2\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$R = \operatorname{rang}\{\overrightarrow{M_2M_1},\, \vec{a},\, \vec{b}_1,\, \vec{b}_2\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Поскольку $R = r > m$, плоскость и прямая пересекаются. Для нахождения общей точки представим уравнения прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x^1 = -1 + \tau, \\ x^2 = 3 + \tau, \\ x^3 = 3 + 2\tau, \\ x^4 = 3 + 2\tau. \end{cases} \tag{1.8}$$

Из уравнений плоскости $\mathscr{P}$ исключим параметры $t_1, t_2$:

$$\begin{cases} x^1 = -1 + 3x^3 - 4x^4, \\ x^2 = 2 - x^3 + x^4. \end{cases} \tag{1.9}$$

Подставляя равенства (1.8) в (1.9), получим систему

$$\begin{cases} -1 + \tau = -1 + 3(3 + 2\tau) - 4(3 + 2\tau), \\ \quad 3 + \tau = 2 - (3 + 2\tau) + (3 + 2\tau), \end{cases}$$

откуда $\tau = -1$, то есть $M(-2, 2, 1, 1)$ — общая точка прямой и плоскости. □

**Ответ.** $a$) прямая лежит в плоскости;
$b$) прямая и плоскость пересекаются в точке $M(-2, 2, 1, 1)$.

**Пример 1.6.** Определить взаимное расположение плоскостей:
$a$) $\mathscr{P}_1 = (0, 0, 0, 0) + \big\langle (1, 1, -1, -1), (0, 2, 3, 1) \big\rangle$,
$\mathscr{P}_2 = (1, 3, 2, 0) + \big\langle (0, 0, 1, 1), (3, -1, 1, 1) \big\rangle$;
$b$) $\mathscr{P}_1 = (1, 0, -1, 0, 0) + \big\langle (-1, 2, 1, 5, -1), (3, 1, -1, 0, 4) \big\rangle$,
$\mathscr{P}_2 = (0, 3, 1, 1, 7) + \big\langle (5, 4, -1, 5, 7), (0, 1, 0, 2, 1) \big\rangle$.

**Решение.** *a*) По условию задачи $A(0,0,0,0)$, $B(1,3,2,0)$, $\overrightarrow{AB} = (1,3,2,0)$, а направляющие подпространства плоскостей $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ образованы векторами $\vec{u} = (1,1,-1,-1)$, $\vec{v} = (0,2,3,1)$ и векторами $\vec{p} = (0,0,1,1)$, $\vec{q} = (3,-1,1,1)$ соответственно. При этом $k = \operatorname{rang}\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2$, $m = \operatorname{rang}\{\vec{p}, \vec{q}\} = 2$, то есть плоскости двумерны.

$$r = \operatorname{rang}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

$$R = \operatorname{rang}\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Так как $R = r$, то плоскости пересекаются по подпространству размерности $k + m - r = 0$, то есть по точке.

*b*) Заметим, что векторы $\vec{u} = (-1,2,1,5,-1)$, $\vec{v} = (3,1,-1,0,4)$ линейно независимы, так же, как и векторы $\vec{p} = (5,4,-1,5,7)$, $\vec{q} = (0,1,0,2,1)$. То есть $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — двумерные плоскости в пятимерном пространстве ($k = m = 2$). $A(1{,}0{,}-1{,}0{,}0) \in \mathscr{P}_1$, $B(0{,}3{,}1{,}1{,}7) \in \mathscr{P}_2$ и $\overrightarrow{AB} = (-1,3,2,1,7)$.

Определим ранги систем векторов:

$$r = \operatorname{rang}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$R = \operatorname{rang}\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Итак, $R \neq r$, $r > m$, следовательно плоскости скрещиваются. Размерность пересечения направляющих подпространств $\mathbf{L}_1 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$ равна $k + m - r = 1$, то есть плоскости скрещиваются по прямой. $\square$

**Ответ.** $a$) плоскости пересекаются по точке;
$b$) плоскости скрещиваются по прямой.

## 1.4. Аффинные замены координат

Пусть $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ и $O'\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$ — две системы координат в аффинном пространстве $\mathscr{A}$. Вторая система получена из первой переносом начала координат из точки $O(0, \dots, 0)$ в точку $O'(x_0^1, \dots, x_0^n)$ и выбором векторов $\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$ в качестве нового базиса в ассоциированном линейном пространстве $\mathbf{V}$.

Предположим, что

$$\begin{aligned}
\vec{e}'_1 &= c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2 + \dots + c_1^n\vec{e}_n,\\
\vec{e}'_2 &= c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2 + \dots + c_2^n\vec{e}_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\vec{e}'_n &= c_n^1\vec{e}_1 + c_n^2\vec{e}_2 + \dots + c_n^n\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Тогда для каждой точки $M \in \mathscr{A}$ ее координаты $(x'^1, \dots, x'^n)$ в системе координат $O'\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$ связаны с ее координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в системе $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ формулами

$$\begin{aligned}
x^1 &= c_1^1x'^1 + c_2^1x'^2 + \dots + c_n^1x'^n + x_0^1,\\
x^2 &= c_1^2x'^1 + c_2^2x'^2 + \dots + c_n^2x'^n + x_0^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x^n &= c_1^nx'^1 + c_2^nx'^2 + \dots + c_n^nx'^n + x_0^n.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Равенства (1.10) удобно записывать в матричном виде

$$X = CX' + X_0, \tag{1.11}$$

где $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец координат вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$, а

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n$.

Поскольку $C$ — невырожденная квадратная матрица, то

$$X' = C^{-1}(X - X_0), \tag{1.12}$$

как это следует из формулы (1.11).

Заметим, что координаты вектора $\vec{v} \in \mathbf{V}$ при изменении системы координат преобразуются по закону

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix},$$

где $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \ldots + v^n\vec{e}_n = v'^1\vec{e}'_1 + {}'v^2\vec{e}'_2 + \ldots + v'^n\vec{e}'_n$.

Систему координат $O\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ будем называть «старой» или «исходной», а систему $O'\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n$ — «новой» координатной системой. Координаты точки (вектора) относительно систем координат $O\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ и $O'\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n$ — соответственно «старыми» и «новыми» координатами этой точки (вектора).

**Пример 1.7.** Написать формулы перехода к новой системе координат на прямой, если за её начало принята точка $O'(5)$, а за базисный вектор — вектор $\overrightarrow{O'A}$, где $A(3)$. Координаты точек указаны в старой системе координат.

**Решение.** Пусть $O\vec{e}$ — исходная система координат. Тогда $\overrightarrow{OO'} = 5\vec{e}$, $\vec{e}' = \overrightarrow{O'A} = -2\vec{e}$ и согласно (1.10) $x = -2x' + 5$. □

**Ответ.** $x = -2x' + 5$.

**Пример 1.8.** Пусть точки $A, B, C, D$ — последовательные вершины параллелограмма, $E$ — точка пересечения его диагоналей. Найти формулы перехода от системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к системе $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, если $O$ — точка $E$, а базисные векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CE}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BA}$. За начало новой системы координат принята вершина $A$ параллелограмма, за базис — векторы $\vec{e}\,'_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}\,'_2 = \overrightarrow{DB}$.

**Решение.** Найдем координаты векторов $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ в старом базисе: $\vec{e}\,'_1 = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DE} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ (рис. 2). Тогда матрица $C$ перехода к новому базису имеет вид $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Координаты точки $A$ относительно исходной системы координат — это координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{EA} = \vec{e}_1$, то есть $A(1, 0)$. Согласно (1.10) формулы преобразования координат имеют вид

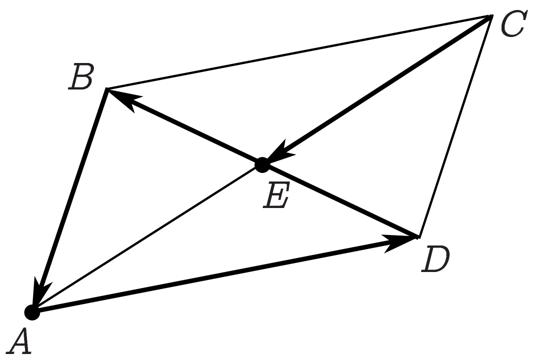


**Рис. 2**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} x &= -2x' + 2y' + 1, \\ y &= x' - 2y'. \end{aligned} \qquad \square$$

**Ответ.** Старые координаты точки выражаются через новые по формулам $x = -2x' + 2y' + 1$, $y = x' - 2y'$.

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат, а сами базисные векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — единичными векторами этих осей. Как правило, координатные прямые на плоскости обозначают $Ox$ и $Oy$, в трехмерном пространстве — $Ox$, $Oy$, $Oz$. Соответственно этому для системы координат на плоскости используют обозначение $Oxy$, в трехмерном пространстве — $Oxyz$.

**Пример 1.9.** На плоскости заданы две системы координат: старая $Oxy$ и новая $O'x'y'$, связанные соотношениями

$$\begin{aligned} x &= 3x' + 2y' - 4, \\ y &= 2x' + 2y' + 2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Найти:

i. Координаты точки $O'$ и единичных векторов $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе $Oxy$;

ii. Координаты точки $O$ и единичных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ осей $Ox$ и $Oy$ в системе $O'x'y'$;

iii. Координаты единичной точки $E'$ в системе $Oxy$;

iv. Координаты единичной точки $E$ в системе $O'x'y'$;

v. Уравнения координатных осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе $Oxy$;

vi. Уравнения координатных осей $Ox$ и $Oy$ в системе $O'x'y'$;

vii. Уравнение прямой $\ell_1\colon 2x - y + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'$;

viii. Уравнение прямой $\ell_2\colon x' - 5y' - 5 = 0$ в системе координат $Oxy$.

**Решение.**

i. Обратимся к формулам (1.10) — (1.11), связывающим координаты точки в двух системах координат: столбцы матрицы $C$ образованы координатами векторов нового базиса относительно исходной системы координат, $X_0$ — матрица-столбец координат вектора $\overrightarrow{OO'}$ — радиус-вектора точки $O'$, также в исходной системе координат. По условию задачи $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $X_0 = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Следовательно, векторы $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ имеют в системе $Oxy$ координаты: $\vec{e}\,'_1 = (3, 2)$, $\vec{e}\,'_2 = (2, 2)$, а точка $O'(-4, 2)$.

ii. Из равенств (1.13) найдем формулы, выражающие координаты $(x', y')$ через координаты $(x, y)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x + 4 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $C^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{smallmatrix}\right)$, то

$$
\begin{aligned}
x' &= x - y + 6, \\
y' &= -x + \frac{3}{2}y - 7.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Полученные равенства — формулы перехода от системы координат $O'x'y'$, которую можно рассматривать как старую, к новой системе $Oxy$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют заключить, что в системе $O'x'y'$ точка $O$ имеет координаты $(6, -7)$, а векторы $\vec{e}_1 = (1, -1)$, $\vec{e}_2 = (-1, 3/2)$.

iii. Точка $E'$ в системе координат $O'x'y'$ имеет координаты $(1, 1)$. Полагая в формулах (1.13) $x' = 1, y' = 1$, найдем координаты этой точки в исходной системе координат: $x = 1, y = 6$.

iv. В системе координат $Oxy$ единичная точка $E$ определяется условиями: $x = 1, y = 1$. Тогда из равенств (1.14) найдем: $x' = 6, y' = -13/2$.

v. Координатная ось $O'x'$ в системе $O'x'y'$ имеет уравнение $y' = 0$. Полагая во втором из равенств (1.14) $y' = 0$, получим искомое уравнение координатной оси $O'x'$ в системе координат $Oxy$: $2x - 3y + 14 = 0$.

Заметим, что это уравнение можно получить как уравнение прямой, проходящей через точку $O'(-4, 2)$ в направлении вектора $\vec{e}'_1 = (3, 2)$: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-2}{2}$.

Аналогично получим уравнение оси $O'y'$ в системе $Oxy$, полагая в первом из равенств (1.14) $x' = 0$: $x - y + 6 = 0$.

vi. Уравнения координатных осей $Ox$ и $Oy$ в системе $O'x'y'$ найдем из формул (1.13), полагая последовательно $y = 0$ и $x = 0$. Получим, что $Ox : x' + y' + 1 = 0$ и $Oy : 3x' + 2y' - 4 = 0$.

vii. Прямая $\ell_1$ в системе координат $Oxy$ определяется уравнением $2x - y + 1 = 0$. Воспользуемся формулами (1.13): подставим в уравнение прямой вместо $x, y$ их выражение через новые координаты: $2(3x' + 2y' - 4) - (2x' + 2y' + 2) + 1 = 0$, получим $\ell_1\colon 4x' + 2y' - 9 = 0$.

viii. Уравнение $\ell_2$ в системе координат $Oxy$ найдем, заменяя переменные $x', y'$ в уравнении этой прямой их выражением (1.14) через старые координаты: $(x - y + 6) - 5\left(-x + \frac{3}{2}y - 7\right) - 5 = 0$, то есть $\ell_2\colon 12x - 17y + 72 = 0$. □

**Ответ.** i. $O'(-4, 2)$, $\vec{e}'_1 = (3, 2)$, $\vec{e}'_2 = (2, 2)$; ii. $O(6, -7)$, $\vec{e}_1 = (1, -1)$, $\vec{e}_2 = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$; iii. $E'(1, 6)$; iv. $E\left(6, -\frac{13}{2}\right)$; v. $O'x'\colon 2x - 3y + 14 = 0$, $O'y'\colon x - y + 6 = 0$; vi. $Ox : x' + y' + 1 = 0$, $Oy : 3x' + 2y' - 4 = 0$; vii. $\ell_1\colon 4x' + 2y' - 9 = 0$; viii. $\ell_2\colon 12x - 17y + 72 = 0$.

**Пример 1.10.** Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые координатные оси $O'x'$ и $O'y'$ соответственно прямые $\ell_1\colon 3x + y - 20 = 0$ и $\ell_2\colon 2x + 5y - 35 = 0$, а за единичную точку новой системы координат — точку $E'(5, 3)$.

**Решение.** Положим

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_1,\\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_2.
\end{aligned}
$$

Координатная $O'x'$ ось в новой системе координат определяется условием $y' = 0$, то есть $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ — уравнение прямой $\ell_1$. Если уравнения $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ и $3x + y - 20 = 0$ определяют одну и ту же прямую, то $\frac{a_{21}}{3} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{a_2}{-20} = \lambda$. Следовательно, $a_{21} = 3\lambda$, $a_{22} = \lambda$, $a_2 = -20\lambda$. Тогда $y' = \lambda(3x + y - 20)$. Значение $\lambda$ найдем из условия, что $y' = 1$ при $x = 5$, $y = 3$: $\lambda = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $y' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10$.

Аналогично рассуждая, получим, что уравнение $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$ есть уравнение прямой $\ell_2$, то есть $a_{11} = 2\mu$, $a_{12} = 5\mu$, $a_1 = -35\mu$. Значит, $x' = \mu(2x + 5y - 35)$, причем $x' = 1$, если $x = 5$, $y = 3$, откуда заключаем: $\mu = -\frac{1}{10}$. Искомые формулы преобразования координат имеют вид

$$
\begin{aligned}
x' &= -\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2},\\
y' &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10.
\end{aligned}
$$

□

**Ответ.** $x' = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$, $y' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10$.

**Пример 1.11.** В пространстве имеются две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, связанные соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= -2x' + 4y' - z' - 3, \\ y &= x' - 2y' + z' + 2, \\ z &= -x' + y' - z' - 1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Найти:

i. Координаты начала системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;

ii. Канонические уравнения осей координат системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;

iii. Канонические уравнения осей координат системы $Oxyz$ в системе $O'x'y'z'$;

iv. Уравнения координатных плоскостей системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;

v. Уравнение плоскости $\mathscr{P}$: $4x + 3y - 5z - 2 = 0$ в системе $O'x'y'z'$;

vi. Канонические уравнения прямой $\ell$: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-9}{8}$ в системе $O'x'y'z'$.

**Решение.**

i. Начало $O'$ новой системы координат в системе $O'x'y'z'$ имеет координаты $x' = 0, y' = 0, z' = 0$. Тогда из формул (1.15) замены координат находим координаты точки $O'$ в системе $Oxyz$: $O'(-3, 2, -1)$.

ii. Столбцы матрицы

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в формулах замены координат образованы координатами векторов $\vec{e}'_1 = (-2, 1, -1)$, $\vec{e}'_2 = (4, -2, 1)$, $\vec{e}'_3 = (-1, 1, -1)$ в системе координат $Oxyz$. Поскольку координатные прямые $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ проходят через точку $O'(-3, 2, -1)$ в направлении векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ соответственно, то их канонические уравнения в старой системе координат имеют вид

$$O'x'\colon\ \frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1},$$
$$O'y'\colon\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1},$$
$$O'z'\colon\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}.$$

iii. Преобразование координат, обратное преобразованию (1.15), имеет вид

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\\z+1\end{pmatrix}.$$

Так как

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-3&-2\\0&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix},$$

то из последнего равенства получим

$$\begin{aligned}x'&=-x-3y-2z+1,\\ y'&=-y-z+1,\\ z'&=x+2y-1.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Следовательно, в системе координат $O'x'y'z'$ точка $O$ и направляющие векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координатных осей имеют координаты:

$$O(1,1,-1),\quad \vec{e}_1=(-1,0,1),\quad \vec{e}_2=(-3,-1,2),\quad \vec{e}_3=(-2,-1,0).$$

Отсюда заключаем:

$$Ox\colon\quad \frac{x'-1}{-1}=\frac{y'-1}{0}=\frac{z'+1}{1},$$
$$Oy\colon\quad \frac{x'-1}{-3}=\frac{y'-1}{-1}=\frac{z'+1}{2},$$
$$Oz\colon\quad \frac{x'-1}{-2}=\frac{y'-1}{-1}=\frac{z'+1}{0}.$$

iv. Координатные плоскости $O'x'y'$, $O'x'z'$, $O'y'z'$ в системе координат $O'x'y'z'$ имеют уравнения $z'=0$, $y'=0$, $x'=0$ соответственно. С учетом этих равенств из формул (1.16) получим

$$\begin{aligned} O'x'y'\colon &\quad x+2y-1=0,\\ O'x'z'\colon &\quad y+z-1=0,\\ O'y'z'\colon &\quad x+3y+2z-1=0. \end{aligned}$$

v. Уравнение плоскости $\mathscr{P}$ в системе $O'x'y'z'$ найдем, заменив в уравнении $4x+3y-5z-2=0$ старые координаты их выражениями (1.15) через новые координаты $x', y', z'$:

$$4(-2x'+4y'-z'-3)+3(x'-2y'+z'+2)-5(-x'+y'-z'-1)-2=0.$$

В результате преобразования последнего уравнения получим $5y'+4z'-3=0$.

vi. Прямая $\ell$ проходит через точку $M(5,8,9)$ в направлении вектора $\vec{a}=(1,1,8)$. Здесь координаты и вектора, и точки указаны в системе $Oxyz$. Найдем, используя (1.16), координаты точки $M$ в новой системе координат $O'x'y'z'$: $M(-46,-16,20)$. Координаты вектора $\vec{a}=(a^1,a^2,a^3)$ в системе $O'x'y'z'$ определим с помощью матрицы $C^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a^1\\ a^2\\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20\\ -9\\ 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой $\ell$ в системе координат $O'x'y'z'$ имеет вид

$$\frac{x'+46}{-20}=\frac{y'+16}{-9}=\frac{z'-20}{3}. \qquad \square$$

**Ответ.** i. $O'(-3,2,-1)$; ii. $O'x'\colon \dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, $O'y'\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $O'z'\colon \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$; iii. $Ox\colon \dfrac{x'-1}{-1}=\dfrac{y'-1}{0}=\dfrac{z'+1}{1}$, $Oy\colon \dfrac{x'-1}{-3}=\dfrac{y'-1}{-1}=\dfrac{z'+1}{2}$, $Oz\colon \dfrac{x'-1}{-2}=\dfrac{y'-1}{-1}=\dfrac{z'+1}{0}$; iv. $O'x'y'\colon\ x+2y-1=0$, $O'x'z'\colon y+z-1=0$, $O'y'z'\colon x+3y+2z-1=0$; v. $\mathscr{P}\colon 5y'+4z'-3=0$; vi. $\ell\colon \dfrac{x'+46}{-20}=\dfrac{y'+16}{-9}=\dfrac{z'-20}{3}$.

**Пример 1.12.** За начало новой системы координат $O'x'y'z'w'$ принята точка $O'(2, 1, -2, -2)$, а за единичные векторы ее осей $\vec{e}\,'_1 = (-4, -3, -7, 9)$, $\vec{e}\,'_2 = (-3, -2, -5, 7)$, $\vec{e}\,'_3 = (10, 8, 17, -23)$ и $\vec{e}\,'_4 = (-1, -1, -2, 1)$. Координаты заданы в старой системе координат. Найти выражение новых координат $x', y', z', w'$ через старые $x, y, z, w$.

**Решение.** Матрица $C$ перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ к новому базису $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}\,'_4$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 8 & -1 \\ -7 & -5 & 17 & -2 \\ 9 & 7 & -23 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица–столбец $X_0$ координат вектора $\overrightarrow{OO'}$: $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тогда зависимость новых координат от старых задается равенством (1.12), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+2 \\ w+2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 & 1 \\ -9 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

найдем, что

$$\begin{aligned} x' &= 10x + y - 5z + w - 29, \\ y' &= -9x + 2y + 3z - w + 20, \\ z' &= x + y - z - 5, \\ w' &= -4x + z - w + 8. \end{aligned}$$

## 1.5. Задачи

**Задача 1.1.** Составить параметрические уравнения:

$a$) прямой, проходящей через точки $A$ и $B$;

$b$) плоскости, проходящей через точки $A$, $B$ и $C$.

1. $a$) $A(9, 1, 7, -4)$, $B(1, 8, 2, 4)$;
   $b$) $A(0, 9, -9, -3, 3)$, $B(-1, 4, -6, -7, -9)$, $C(-6, -8, 1, 3, -7)$.
2. $a$) $A(2, 0, -8, 0)$, $B(-5, -3, -2, 6)$;
   $b$) $A(5, -10, 0, 0, -7)$, $B(-5, -8, 5, 4, 5)$, $C(-2, -9, -5, 10, 2)$.
3. $a$) $A(-10, -4, 0, 3)$, $B(-7, 1, 8, -1)$;
   $b$) $A(-5, 1, 10, 5, 4)$, $B(4, -3, 4, 2, -6)$, $C(4, 1, -9, 3, 4)$.
4. $a$) $A(0, -1, -4, -2)$, $B(6, -6, -8, 5)$;
   $b$) $A(-8, 0, -8, -3, 6)$, $B(1, -5, -6, 0, 2)$, $C(3, 2, -10, -7, 0)$.
5. $a$) $A(-10, -2, 5, -2)$, $B(8, -10, 7, -2)$;
   $b$) $A(-1, 3, -7, 0, -6)$, $B(-1, 3, 7, -3, 4)$, $C(0, -6, -7, -9, 5)$.
6. $a$) $A(-10, -3, 3, -5)$, $B(1, -5, -1, 1)$;
   $b$) $A(0, 6, 5, 6, 1)$, $B(4, -8, -3, 7, -4)$, $C(3, 9, 1, -5, -3)$.
7. $a$) $A(-1, 8, 9, -9)$, $B(-4, 5, 1, 6)$;
   $b$) $A(6, 6, -9, 9, 3)$, $B(5, 10, -8, 0, -6)$, $C(-6, 2, 0, 9, -8)$.
8. $a$) $A(-10, -8, -4, -8)$, $B(-4, -2, 9, 0)$;
   $b$) $A(7, -9, 6, -8, 8)$, $B(-10, 7, -8, 0, 6)$, $C(-3, -5, -10, 9, -8)$.
9. $a$) $A(6, 4, -1, -3)$, $B(-2, 7, 2, 7)$;
   $b$) $A(-2, 0, -2, 6, 1)$, $B(-3, 0, -3, -10, -1)$, $C(8, -3, -7, -7, 2)$.
10. $a$) $A(5, -3, -3, -10)$, $B(-9, -5, -5, -10)$;
    $b$) $A(0, 10, 7, -10, -4)$, $B(-1, 2, 10, -7, -7)$, $C(3, 3, 8, 6, 9)$.
11. $a$) $A(-4, 5, 0, -3)$, $B(3, 8, -9, -3)$;
    $b$) $A(-7, 7, 5, -2, 10)$, $B(8, 0, 1, 9, 1)$, $C(-1, -4, 4, -4, 9)$.
12. $a$) $A(-3, 3, 10, -3)$, $B(-7, -1, 6, -4)$;
    $b$) $A(-8, 0, 8, 2, 1)$, $B(1, -6, 1, -2, 2)$, $C(9, -2, 0, 5, 3)$.
13. $a$) $A(-5, 7, 6, 8)$, $B(4, 2, -8, -7)$;
    $b$) $A(-1, 5, 9, 1, -3)$, $B(10, -1, 2, -2, 0)$, $C(0, 8, -4, 10, 10)$.
14. $a$) $A(-7, -10, -8, 6)$, $B(-7, 0, -1, 1)$;
    $b$) $A(6, 3, 2, 3, -6)$, $B(-9, -4, -7, 2, -4)$, $C(-3, 1, 3, 5, 5)$.

15. *a*) $A(-6,-4,-9,-5)$, $B(5,-4,2,10)$;
*b*) $A(0,3,-1,4,-6)$, $B(-8,7,5,6,-8)$, $C(-1,3,-4,0,-9)$.

16. *a*) $A(-1,-6,9,-5)$, $B(10,9,-9,0)$;
*b*) $A(10,9,4,-2,5)$, $B(10,4,2,-8,2)$, $C(3,2,-6,-7,8)$.

17. *a*) $A(-6,6,5,-2)$, $B(-3,-7,-3,-7)$;
*b*) $A(-4,-7,-3,1,7)$, $B(7,8,3,-8,-6)$, $C(4,4,-1,7,2)$.

18. *a*) $A(-1,9,-8,1)$, $B(-5,-5,3,8)$;
*b*) $A(-9,6,9,2,-5)$, $B(4,-3,-5,5,2)$, $C(6,3,-1,-4,4)$.

19. *a*) $A(-1,7,0,-8)$, $B(4,9,6,-10)$;
*b*) $A(-8,-10,3,-6,-4)$, $B(6,-2,8,5,1)$, $C(-9,-6,-4,-8,3)$.

20. *a*) $A(8,4,8,0)$, $B(7,10,6,-2)$;
*b*) $A(3,-2,1,-1,-8)$, $B(2,1,-3,-5,5)$, $C(10,5,-9,0,8)$.

21. *a*) $A(-9,6,-9,-4)$, $B(5,7,-2,4)$;
*b*) $A(2,5,3,7,7)$, $B(-7,1,-7,0,2)$, $C(-1,-5,-3,10,5)$.

22. *a*) $A(10,-7,8,9)$, $B(-10,10,7,-4)$;
*b*) $A(-7,1,5,7,4)$, $B(8,8,-7,-6,5)$, $C(0,-2,6,-10,-9)$.

23. *a*) $A(-9,-7,0,-4)$, $B(8,10,4,9)$;
*b*) $A(7,8,0,-3,-1)$, $B(-1,2,-9,7,-6)$, $C(-10,-4,-3,8,0)$.

24. *a*) $A(-7,-6,-10,1)$, $B(2,3,7,3)$;
*b*) $A(-6,8,2,-3,2)$, $B(-10,-2,9,5,5)$, $C(10,9,4,0,6)$.

25. *a*) $A(-7,-8,-1,8)$, $B(-2,-9,5,10)$;
*b*) $A(0,-8,2,10,0)$, $B(6,8,3,-9,-2)$, $C(8,4,-1,-10,1)$.

26. *a*) $A(8,0,2,-5)$, $B(7,-2,-4,9)$;
*b*) $A(-2,3,1,0,-2)$, $B(0,-8,3,-3,-9)$, $C(-8,8,4,-9,7)$.

27. *a*) $A(6,6,4,10)$, $B(5,-7,-10,-1)$;
*b*) $A(-8,0,7,-1,9)$, $B(6,4,9,-9,6)$, $C(10,-2,2,8,-4)$.

28. *a*) $A(-9,3,3,6)$, $B(-6,-10,2,-4)$;
*b*) $A(0,-5,4,-10,-5)$, $B(6,-4,10,-1,-5)$, $C(6,2,-8,8,-4)$.

29. *a*) $A(-4,-1,-8,-3)$, $B(8,1,10,-6)$;
*b*) $A(7,-5,6,3,-5)$, $B(2,-8,-10,-6,9)$, $C(-4,-5,-4,3,4)$.

30. *a*) $A(-7,-5,-10,9)$, $B(6,2,3,1)$;
*b*) $A(-9,-1,6,-8,-7)$, $B(2,8,6,-1,4)$, $C(0,8,-6,-1,-3)$.

**Задача 1.2.** Найти уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $A$, $B$, $C$ и $D$.

1. $A(-1,2,3,-1)$, $B(3,2,2,0)$,
   $C(1,0,3,-1)$, $D(1,2,-3,3)$.
2. $A(-3,-1,-2,1)$, $B(-3,-1,2,-3)$,
   $C(-2,3,3,3)$, $D(1,-1,-2,-1)$.
3. $A(-3,-3,0,1)$, $B(0,-2,-1,0)$,
   $C(-1,-2,-1,1)$, $D(0,-3,1,-2)$.
4. $A(-2,-1,-2,3)$, $B(-1,3,-3,-1)$,
   $C(2,-1,-3,1)$, $D(-3,2,-2,-1)$.
5. $A(1,-1,-3,-3)$, $B(3,-2,2,2)$,
   $C(-3,1,-3,1)$, $D(3,-2,1,-1)$.
6. $A(-2,2,0,3)$, $B(3,-3,1,2)$,
   $C(-3,3,1,-2)$, $D(-2,2,-3,1)$.
7. $A(2,-1,-1,3)$, $B(3,-1,2,-2)$,
   $C(-1,-1,-1,0)$, $D(1,3,1,-2)$.
8. $A(-1,1,-2,-1)$, $B(-1,1,1,-1)$,
   $C(0,-1,1,-1)$, $D(3,1,1,-2)$.
9. $A(2,0,0,3)$, $B(2,-1,-1,-3)$,
   $C(1,0,1,3)$, $D(0,3,-1,1)$.
10. $A(-2,1,-3,3)$, $B(1,-1,1,1)$,
    $C(1,-2,1,2)$, $D(0,3,-3,2)$.
11. $A(-1,-3,2,-3)$, $B(-3,2,-2,0)$,
    $C(3,-3,-2,-3)$, $D(3,-2,-2,-2)$.
12. $A(1,3,2,2)$, $B(-1,0,0,2)$,
    $C(-3,-1,2,2)$, $D(-3,-1,2,1)$.
13. $A(3,1,-1,-2)$, $B(2,-2,2,3)$,
    $C(0,-3,1,2)$, $D(2,-3,-3,2)$.
14. $A(2,1,-2,-2)$, $B(1,2,-3,1)$,
    $C(2,2,-1,-3)$, $D(2,0,-1,-3)$.
15. $A(3,1,-3,-2)$, $B(-2,1,1,-1)$,
    $C(3,3,-1,-3)$, $D(-1,2,0,-3)$.

16. $A(2,-3,-2,-1)$, $B(-2,2,-3,1)$,
$C(1,-2,-3,-2)$, $D(0,0,2,3)$.

17. $A(-1,2,3,-1)$, $B(-1,0,-3,2)$,
$C(-3,1,-2,1)$, $D(-3,2,0,0)$.

18. $A(-1,0,1,-2)$, $B(3,0,0,-2)$,
$C(0,-1,3,2)$, $D(2,0,1,1)$.

19. $A(1,-2,2,1)$, $B(-1,2,1,0)$,
$C(3,-2,0,-2)$, $D(-3,-2,-3,-1)$.

20. $A(-1,-2,0,2)$, $B(0,-2,-3,2)$,
$C(0,-3,2,-3)$, $D(-1,-1,1,2)$.

21. $A(1,-1,1,-1)$, $B(1,3,-2,0)$,
$C(-2,2,2,1)$, $D(-3,-1,3,1)$.

22. $A(-2,-1,2,1)$, $B(2,0,2,3)$,
$C(3,1,-1,-3)$, $D(3,0,3,1)$.

23. $A(3,1,1,2)$, $B(1,1,-2,2)$,
$C(-1,-1,1,1)$, $D(0,0,2,0)$.

24. $A(0,-1,0,-1)$, $B(3,-3,0,-3)$,
$C(-3,-2,1,-1)$, $D(3,0,1,-2)$.

25. $A(1,-3,2,1)$, $B(2,-1,2,1)$,
$C(-1,-1,-1,3)$, $D(2,1,0,-3)$.

26. $A(-2,1,1,-3)$, $B(1,-1,-1,-3)$,
$C(-2,0,1,-2)$, $D(-2,3,-1,1)$.

27. $A(0,2,-1,1)$, $B(1,3,-3,1)$,
$C(0,3,2,-1)$, $D(0,-2,-1,0)$.

28. $A(3,-2,0,-3)$, $B(1,3,3,-2)$,
$C(-2,-3,2,3)$, $D(0,1,2,-1)$.

29. $A(-1,1,3,3)$, $B(3,3,-3,3)$,
$C(3,-1,3,-2)$, $D(0,2,-3,3)$.

30. $A(1,3,0,0)$, $B(-3,-1,0,2)$,
$C(1,-1,-2,3)$, $D(3,-2,-3,2)$.

**Задача 1.3.** Найти систему линейных уравнений, задающую плоскость $\mathscr{P}$.

1. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 + t_1, \\ x^2 = t_1 + t_2, \\ x^3 = -t_1 - 2\,t_2, \\ x^4 = -3 - 2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^5 = -2 - 2\,t_1 - t_2. \end{cases}$

2. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 2 + 3\,t_1 + 2\,t_2 + t_3, \\ x^2 = -2 - 2\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^3 = -2 - 2\,t_2 + t_3, \\ x^4 = 2 + 3\,t_1 + 2\,t_2 + 3\,t_3, \\ x^5 = 2\,t_1 - t_2. \end{cases}$

3. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 - 2\,t_1 + t_2, \\ x^2 = -3 + t_1 - t_2, \\ x^3 = 2, \\ x^4 = -1 + 3\,t_1 - t_2, \\ x^5 = 3 + 2\,t_1. \end{cases}$

4. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 3\,t_2 + 2\,t_3, \\ x^2 = 1 - t_1 - t_2 + 2\,t_3, \\ x^3 = 2 - 2\,t_1 - t_2, \\ x^4 = 2 + 3\,t_1 - t_2 - t_3, \\ x^5 = -2 + 2\,t_1 - t_2. \end{cases}$

5. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 - 3\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^2 = -2 - 2\,t_1, \\ x^3 = -3 + 2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^4 = 2 + 2\,t_1 + t_2, \\ x^5 = 1 + t_1 + 2\,t_2. \end{cases}$

6. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -3 - t_1 + 2\,t_2 + t_3, \\ x^2 = 2\,t_2 + t_3, \\ x^3 = -2\,t_1 + t_2 - 2\,t_3, \\ x^4 = 3 + 3\,t_1 - t_2 + t_3, \\ x^5 = -2\,t_1 + 2\,t_2 - 2\,t_3. \end{cases}$

7. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -1 + 2\,t_2, \\ x^2 = 2\,t_1, \\ x^3 = t_1 - 2\,t_2, \\ x^4 = -2 + 3\,t_1 - t_2, \\ x^5 = 3 - 3\,t_2. \end{cases}$

8. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 3 + 2\,t_1 + 3\,t_2 - 2\,t_3, \\ x^2 = -3 + t_1 + t_2 - t_3, \\ x^3 = -2 + t_2 - 2\,t_3, \\ x^4 = 1 - t_1 - t_2 - 2\,t_3, \\ x^5 = 3 - t_1 + t_2 - t_3. \end{cases}$

9. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2 - 3\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^2 = -2 + 2\,t_1 - 3\,t_2, \\ x^3 = 2 - 3\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^4 = -3 - t_1 - 3\,t_2, \\ x^5 = -1 - 2\,t_1. \end{cases}$

10. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 1 + 3\,t_1 - 3\,t_3, \\ x^2 = 2 - 2\,t_1 + 2\,t_2 + t_3, \\ x^3 = -3 + t_2 + 2\,t_3, \\ x^4 = 2 - 2\,t_1 + 2\,t_2 + 3\,t_3, \\ x^5 = 1 - 3\,t_1 + 2\,t_2. \end{cases}$

11. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -1 + 2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^2 = 1 - 3\,t_1 + 3\,t_2, \\ x^3 = 1 + t_2, \\ x^4 = 1 + 3\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^5 = -1 + t_1 - 3\,t_2. \end{cases}$

12. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -3\,t_1 + t_2 + 3\,t_3, \\ x^2 = 3 + t_1 - 3\,t_2 - t_3, \\ x^3 = -2\,t_1 + t_2 - t_3, \\ x^4 = -2 - t_2 - 3\,t_3, \\ x^5 = 2 + 3\,t_1 + t_3. \end{cases}$

13. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -2 + 2\,t_1 + t_2, \\ x^2 = 3 - 2\,t_2 - t_3, \\ x^3 = 2\,t_1 + 3\,t_2 - t_3, \\ x^4 = 3 + 2\,t_1 + 2\,t_2 - t_3, \\ x^5 = -2 - t_2 + t_3. \end{cases}$

14. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 3 - 2\,t_1 + t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + 3\,t_2, \\ x^3 = -1 + 2\,t_1, \\ x^4 = -1 + 3\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^5 = 2\,t_1 - t_2. \end{cases}$

15. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2\,t_2 + t_3, \\ x^2 = -2 + 3\,t_1 - 3\,t_3, \\ x^3 = 2 + 2\,t_1 - 3\,t_2 + 3\,t_3, \\ x^4 = -1 - 3\,t_1 + 3\,t_2, \\ x^5 = -3\,t_1 - 3\,t_2. \end{cases}$

16. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2 + 3\,t_1 + t_2, \\ x^2 = -t_1 + 3\,t_2, \\ x^3 = 2 - t_1 - 2\,t_2, \\ x^4 = 3 - 3\,t_1 - 3\,t_2, \\ x^5 = -3 + 3\,t_1 + 2\,t_2. \end{cases}$

17. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2\,t_1 + 2\,t_3, \\ x^2 = -t_1 + t_2 - 2\,t_3, \\ x^3 = 2 - t_1 + 2\,t_2 + t_3, \\ x^4 = 1 + t_1 + t_2 + 3\,t_3, \\ x^5 = -1 - t_1 + 3\,t_2. \end{cases}$

18. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -2 + 2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^2 = 1 + 2\,t_1, \\ x^3 = 3 - t_1, \\ x^4 = -2\,t_1 - t_2, \\ x^5 = -1 + 2\,t_1 - t_2. \end{cases}$

19. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 2 - 2\,t_1 + 2\,t_2 + 3\,t_3, \\ x^2 = 3 - 3\,t_1 - 3\,t_2, \\ x^3 = -2 - t_1 - t_2 + 2\,t_3, \\ x^4 = -2 + 2\,t_1 + t_2 - t_3, \\ x^5 = 1 + 3\,t_1 - 3\,t_2 + t_3. \end{cases}$

20. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -2 + 3\,t_1 + t_2, \\ x^2 = -3 - 2\,t_1 + t_2, \\ x^3 = 2 + 2\,t_1 + 3\,t_2, \\ x^4 = 1 + t_1 - t_2, \\ x^5 = 1 - t_1 + 2\,t_2. \end{cases}$

21. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 + 3\,t_2, \\ x^2 = -1 + t_1 + t_2, \\ x^3 = -3 + t_1 - 3\,t_2 + 2\,t_3, \\ x^4 = -2 + 2\,t_1 - 2\,t_2 - t_3, \\ x^5 = 1 + 3\,t_1 - 3\,t_2. \end{cases}$

22. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 2 - 3\,t_1 + t_2 + 2\,t_3, \\ x^2 = 2 + 2\,t_1 - t_2 - 2\,t_3, \\ x^3 = 3 - 2\,t_1 + 3\,t_2 - 3\,t_3, \\ x^4 = t_1 + 2\,t_2 - 2\,t_3, \\ x^5 = -2 - t_1 + t_2 + t_3. \end{cases}$

23. $\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 + t_2, \\ x^2 = -2 - t_1 - t_2, \\ x^3 = 2 - 2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^4 = 2 - t_1, \\ x^5 = t_1 + 3\,t_2. \end{cases}$

24. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = t_1 + 3\,t_2 + t_3, \\ x^2 = -1 - 3\,t_2 + 3\,t_3, \\ x^3 = 1 + 2\,t_1 + 3\,t_2 - 2\,t_3, \\ x^4 = -1 - t_1 + 2\,t_2 - 3\,t_3, \\ x^5 = -1 + 3\,t_1 + t_2. \end{cases}$

25. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -1 - 3\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^2 = -2\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^3 = -3 + 3\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^4 = 1 + 3\,t_1 + 2\,t_2, \\ x^5 = -1 - 3\,t_1. \end{cases}$

26. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -1 - 3\,t_1 - 3\,t_3, \\ x^2 = -2 - t_1 - t_2 - t_3, \\ x^3 = -3 - t_2 + t_3, \\ x^4 = -1 - 2\,t_2 + t_3, \\ x^5 = 3 - 3\,t_1 - t_2 + 3\,t_3. \end{cases}$

27. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = t_1 - 2\,t_2, \\ x^2 = 3 + 2\,t_1 + t_2, \\ x^3 = 1 + t_2, \\ x^4 = -1 + 2\,t_1, \\ x^5 = -1 - 2\,t_1 + 2\,t_2. \end{cases}$

28. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2 + 3\,t_1 - 2\,t_2 - 2\,t_3, \\ x^2 = -1 + 2\,t_1 - t_2 + 2\,t_3, \\ x^3 = -t_2 + 2\,t_3, \\ x^4 = -3 - 3\,t_1 - 3\,t_2 - t_3, \\ x^5 = -3 + 2\,t_2 + t_3. \end{cases}$

29. $\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = -2 - 3\,t_1 - 2\,t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^3 = -3 + 2\,t_1 - t_2, \\ x^4 = 2 + 2\,t_2, \\ x^5 = 1 - t_1 - t_2. \end{cases}$

30. $$\mathscr{P}: \begin{cases} x^1 = -1 - t_1 + t_2 - t_3, \\ x^2 = 3 - 2\,t_1 - 2\,t_2 - t_3, \\ x^3 = -2\,t_1 - 2\,t_3, \\ x^4 = 2 - t_1 - 3\,t_2 - 3\,t_3, \\ x^5 = 1 + 2\,t_1 - t_2 + t_3. \end{cases}$$

**Задача 1.4.** Определить размерность плоскости, заданной системой линейных уравнений. Составить параметрические уравнения этой плоскости.

1. $$\begin{cases} -9\,x^1 - 2\,x^2 - 5\,x^3 - 7\,x^4 + 3\,x^5 = -5, \\ 4\,x^2 - 10\,x^3 + 15\,x^4 - 6\,x^5 = -10, \\ -4\,x^1 + 8\,x^2 + 9\,x^3 - 8\,x^4 - 12\,x^5 = 9, \\ -7\,x^1 + 2\,x^2 + 9\,x^3 - 17\,x^4 - 3\,x^5 = 9. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -x^1 - 6\,x^2 - 3\,x^3 - 10\,x^4 + 4\,x^5 = -4, \\ -8\,x^1 - 9\,x^2 + 15\,x^3 + 14\,x^4 - 8\,x^5 = 4, \\ -5\,x^1 - 4\,x^2 - 2\,x^3 - 11\,x^4 + 8\,x^5 = -3, \\ 20\,x^1 + 15\,x^2 - 4\,x^3 - x^4 + 4\,x^5 = -1. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} -10\,x^1 + 3\,x^2 - 3\,x^3 + 8\,x^4 - 4\,x^5 = -12, \\ -11\,x^1 + 4\,x^2 - 3\,x^3 + 15\,x^4 + 5\,x^5 = 0, \\ 5\,x^1 - 13\,x^2 + 8\,x^3 - 3\,x^4 + 19\,x^5 = 12, \\ x^2 - x^3 - 4\,x^4 - 8\,x^5 = -9. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} -6\,x^1 + 6\,x^3 - 15\,x^4 - 9\,x^5 = 15, \\ -2\,x^1 - 8\,x^2 + 10\,x^3 - 3\,x^4 - x^5 = 7, \\ -6\,x^1 + 6\,x^3 - 15\,x^4 - 9\,x^5 = 15, \\ -3\,x^1 - 2\,x^2 + 5\,x^3 - 7\,x^4 - 4\,x^5 = 8. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4\,x^1 - 4\,x^2 + 4\,x^3 - 7\,x^4 - x^5 = -3, \\ 2\,x^1 - 12\,x^2 + 8\,x^3 - 14\,x^4 = -7, \\ -x^1 + 9\,x^2 - 10\,x^3 + 13\,x^4 = 5, \\ -5\,x^1 + x^2 + 10\,x^3 - 4\,x^4 + x^5 = 2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 10\,x^1 + 22\,x^2 + 16\,x^3 + 4\,x^4 - x^5 = -4, \\ -3\,x^1 - x^2 + 2\,x^3 - 15\,x^4 + 11\,x^5 = -9, \\ 8\,x^1 + 16\,x^3 + 4\,x^4 - 6\,x^5 = -4, \\ x^1 + 3\,x^2 - 6\,x^3 - 11\,x^4 + 7\,x^5 = -13. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 8\,x^1 - 6\,x^2 - 4\,x^3 - 4\,x^5 = -3, \\ -5\,x^1 + 3\,x^2 + 14\,x^3 - 10\,x^4 + 3\,x^5 = 1, \\ -19\,x^1 - 21\,x^2 + 2\,x^3 + 7\,x^4 = -1, \\ 20\,x^1 + 18\,x^2 - 4\,x^3 - 8\,x^4 = -1. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 21\,x^1 + 2\,x^2 - 6\,x^3 + 9\,x^4 = -12, \\ -27\,x^1 - x^2 + 5\,x^3 - 9\,x^4 + 2\,x^5 = 11, \\ -9\,x^1 + 8\,x^2 - 3\,x^3 - 4\,x^4 - 4\,x^5 = -1, \\ -6\,x^1 - x^2 - 4\,x^3 + 5\,x^4 + 10\,x^5 = -6. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} -2\,x^1 + 6\,x^2 + 2\,x^3 - 3\,x^4 + 9\,x^5 = 1, \\ -9\,x^1 - 10\,x^2 - 6\,x^3 - x^4 - 8\,x^5 = -1, \\ -3\,x^1 + 12\,x^3 + 18\,x^4 - 9\,x^5 = 6, \\ -4\,x^1 - 4\,x^2 + 7\,x^3 + 14\,x^4 - 11\,x^5 = 4. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} -12\,x^1 - 2\,x^2 + 7\,x^3 - 5\,x^4 - 16\,x^5 = 6, \\ -11\,x^1 + 4\,x^2 + 13\,x^3 - 2\,x^4 - 5\,x^5 = 3, \\ 11\,x^1 - x^2 - 14\,x^3 + 11\,x^4 + 19\,x^5 = -10, \\ -6\,x^1 - 6\,x^2 - x^3 + 3\,x^4 - 8\,x^5 = -1. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} 15\,x^1 + 6\,x^2 - x^3 - 5\,x^4 + 5\,x^5 = -3, \\ 15\,x^1 + 4\,x^2 + x^3 = -2, \\ 3\,x^1 + 4\,x^2 - 3\,x^3 - 8\,x^4 + 8\,x^5 = -2, \\ -2\,x^2 + 2\,x^3 + 5\,x^4 - 5\,x^5 = 1. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} -6\,x^1 - 18\,x^2 + 6\,x^3 + 12\,x^4 + 9\,x^5 = 11, \\ 15\,x^1 + 8\,x^2 + 4\,x^3 - 2\,x^4 - 17\,x^5 = -6, \\ 5\,x^1 - 8\,x^2 + 12\,x^3 + 10\,x^4 - 3\,x^5 = 6, \\ 9\,x^1 + 5\,x^2 + 13\,x^3 + 4\,x^4 - 8\,x^5 = 0. \end{cases}$$

13. $\begin{cases} -15\,x^1 + 15\,x^2 - 10\,x^3 + 9\,x^4 - 7\,x^5 = -6, \\ 5\,x^1 + 10\,x^2 - 4\,x^3 + 13\,x^4 - 12\,x^5 = 6, \\ -9\,x^1 + 7\,x^2 - 4\,x^3 + 23\,x^4 - x^5 = 0, \\ -4\,x^1 + 9\,x^2 - 5\,x^3 + 2\,x^4 + 4\,x^5 = 12. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -x^1 - 5\,x^2 + 15\,x^3 + 3\,x^4 - 9\,x^5 = 16, \\ -3\,x^1 + 2\,x^2 + 11\,x^3 + 12\,x^4 - 16\,x^5 = 6, \\ -3\,x^1 - 6\,x^2 + 10\,x^3 - 6\,x^5 = 14, \\ -8\,x^1 - 7\,x^3 + 4\,x^4 - 8\,x^5 = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4\,x^1 + 12\,x^2 + 5\,x^3 + 4\,x^4 + 12\,x^5 = 6, \\ -4\,x^1 + 12\,x^2 - x^3 - 4\,x^4 + 12\,x^5 = -6, \\ 6\,x^1 - 3\,x^2 + 4\,x^3 + 6\,x^4 - 3\,x^5 = 9, \\ 8\,x^1 + 6\,x^3 + 8\,x^4 = 12. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6\,x^2 - 2\,x^3 - 8\,x^4 - 4\,x^5 = 6, \\ 3\,x^1 + 4\,x^2 - x^3 - 6\,x^4 - 4\,x^5 = 5, \\ 15\,x^1 - 4\,x^2 + 3\,x^3 + 2\,x^4 - 4\,x^5 = 1, \\ 9\,x^1 - 3\,x^2 + 2\,x^3 + 2\,x^4 - 2\,x^5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -13\,x^1 - 5\,x^2 + 2\,x^3 + x^4 + 16\,x^5 = 7, \\ -9\,x^1 + 8\,x^2 - 19\,x^3 - 11\,x^4 + 6\,x^5 = -8, \\ -4\,x^1 - 12\,x^2 + 5\,x^3 + 11\,x^4 + 6\,x^5 = 7, \\ -5\,x^1 + 17\,x^2 + 11\,x^3 + 2\,x^4 + 7\,x^5 = -3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -7\,x^1 + 9\,x^2 + 5\,x^3 + 2\,x^4 - 19\,x^5 = 6, \\ x^1 - 4\,x^2 - 7\,x^3 + 22\,x^4 - 5\,x^5 = -5, \\ -7\,x^1 - 17\,x^2 - 15\,x^3 + 18\,x^4 + 9\,x^5 = -12, \\ 6\,x^1 + 11\,x^2 + 11\,x^3 - 20\,x^4 = 8. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -7\,x^1 + 3\,x^2 - 5\,x^3 - 4\,x^4 + 7\,x^5 = -1, \\ -4\,x^1 - 9\,x^2 - 5\,x^3 + 2\,x^4 + 4\,x^5 = 3, \\ 13\,x^1 + 3\,x^2 + 11\,x^3 + 4\,x^4 - 13\,x^5 = -1, \\ -10\,x^1 - 8\,x^3 - 4\,x^4 + 10\,x^5 = 0. \end{cases}$

20. $$\begin{cases} 11\,x^1 + 8\,x^2 + 15\,x^3 + 8\,x^4 - 8\,x^5 = -4, \\ -\,x^1 + 8\,x^2 + 3\,x^3 - 8\,x^4 + 8\,x^5 = -4, \\ 13\,x^1 + 9\,x^2 + 18\,x^3 + 7\,x^4 - 8\,x^5 = -7, \\ 4\,x^1 - 7\,x^2 + 3\,x^3 - 3\,x^4 - 2\,x^5 = -9. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} x^1 + 9\,x^2 - 12\,x^3 + 2\,x^4 + 4\,x^5 = -6, \\ 6\,x^1 - 6\,x^2 + 4\,x^3 + 13\,x^4 + x^5 = -11, \\ 2\,x^1 - 6\,x^2 + 8\,x^3 + 3\,x^4 - 5\,x^5 = -1, \\ 4\,x^1 + 3\,x^2 - 9\,x^3 + 11\,x^4 + 10\,x^5 = -12. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 6\,x^1 - 14\,x^2 - 9\,x^3 + 2\,x^4 + 6\,x^5 = 6, \\ 12\,x^1 + x^2 - 7\,x^3 - 9\,x^4 + 4\,x^5 = 0, \\ 17\,x^1 - 12\,x^2 - 17\,x^3 + 4\,x^4 + 11\,x^5 = 7, \\ 9\,x^1 + 2\,x^2 - 4\,x^3 - 6\,x^4 + 3\,x^5 = -5. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} -\,11\,x^1 + 2\,x^2 + 12\,x^3 - 7\,x^4 - 13\,x^5 = 7, \\ 5\,x^1 + 3\,x^2 + 5\,x^3 - 12\,x^4 - 7\,x^5 = 8, \\ -\,5\,x^2 - 13\,x^3 + 19\,x^4 + 16\,x^5 = -14, \\ -\,8\,x^1 + 6\,x^4 + 2\,x^5 = -3. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} -\,8\,x^1 - 7\,x^2 - 16\,x^4 - 5\,x^5 = -6, \\ -\,10\,x^1 - 12\,x^2 - 2\,x^3 - 18\,x^4 + 3\,x^5 = 6, \\ 4\,x^1 + 6\,x^2 + 8\,x^3 - 3\,x^5 = 12, \\ -\,7\,x^1 - 5\,x^2 + 3\,x^3 - 17\,x^4 - 7\,x^5 = -3. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 7\,x^1 + 6\,x^2 - 3\,x^3 - 6\,x^4 + x^5 = 1, \\ 5\,x^1 - 2\,x^2 - 5\,x^3 + 2\,x^4 + 3\,x^5 = 3, \\ 2\,x^1 + 8\,x^2 + 2\,x^3 - 8\,x^4 - 2\,x^5 = -2, \\ 7\,x^1 - 5\,x^2 - 8\,x^3 + 5\,x^4 + 5\,x^5 = 5. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} -\,12\,x^1 + 3\,x^2 + 3\,x^3 + 3\,x^4 = 0, \\ 3\,x^1 - 2\,x^2 - 12\,x^3 + 13\,x^4 + 15\,x^5 = -10, \\ 8\,x^1 - 3\,x^2 - 11\,x^3 + 9\,x^4 + 12\,x^5 = -8, \\ -\,4\,x^1 + 2\,x^2 + 10\,x^3 - 10\,x^4 - 12\,x^5 = 8. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 7\,x^2+3\,x^3-3\,x^4+4\,x^5=-1,\\ -4\,x^1-9\,x^2-9\,x^3+5\,x^4-4\,x^5=7,\\ 3\,x^1-2\,x^2+3\,x^3-2\,x^5=-4,\\ -3\,x^1-12\,x^2-9\,x^3+6\,x^4-6\,x^5=6. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} -9\,x^1-2\,x^2+7\,x^3-2\,x^4-4\,x^5=-3,\\ 12\,x^1-6\,x^2-12\,x^3+2\,x^4+7\,x^5=8,\\ -11\,x^1+8\,x^2+11\,x^3+4\,x^4-6\,x^5=-9,\\ 3\,x^1-8\,x^2-5\,x^3+3\,x^5=5. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} -4\,x^1-2\,x^2+2\,x^4-6\,x^5=4,\\ 5\,x^1-2\,x^2-6\,x^3-4\,x^4+3\,x^5=1,\\ -4\,x^1+x^2+4\,x^3+3\,x^4-3\,x^5=0,\\ -5\,x^1-x^2+2\,x^3+3\,x^4-6\,x^5=3. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} -x^1+x^2+x^3-3\,x^4-6\,x^5=-9,\\ -3\,x^1-2\,x^2+3\,x^3-9\,x^4-3\,x^5=3,\\ 2\,x^1+3\,x^2-2\,x^3+6\,x^4-3\,x^5=-12,\\ 5\,x^1+3\,x^2-5\,x^3+15\,x^4+6\,x^5=-3. \end{cases}$$

**Задача 1.5.** Определить взаимное расположение прямой $\ell$ и плоскости $\mathscr{P}$. В случае их пересечения найти общую точку.

1. $a)$ $\ell:\ x^1=-2-t,\ x^2=-2+4t,\ x^3=-1+2t,\ x^4=4-2t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} 2x^1+6x^2-11x^3+5=0,\\ -2x^1-6x^2-11x^4+28=0; \end{cases}$$

$b)$ $\ell:\ \dfrac{x^1+3}{-2}=\dfrac{x^2+1}{-2}=\dfrac{x^3+5}{-3}=\dfrac{x^4-4}{2};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=-3+2t_2,\\ x^2=-3+t_1+3t_2,\\ x^3=-1+2t_1-3t_2,\\ x^4=2+t_1-t_2. \end{cases}$$

2. $a)$ $\ell:\ x^1=-7,\ x^2=3+t,\ x^3=1+2t,\ x^4=4-4t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 3x^1 + 6x^2 - 3x^3 + 6 = 0, \\ -11x^1 - 12x^2 - 3x^4 - 29 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1+1}{2} = \dfrac{x^2-3}{1} = \dfrac{x^3+3}{-3} = \dfrac{x^4}{3};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -3 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 4 + t_1 - 3t_2, \\ x^3 = 1 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -5 + 2t_2. \end{cases}$$

3. a) $\ell: \ x^1 = 3 - t, \ x^2 = -10, \ x^3 = -4 + t, \ x^4 = -6 - 2t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 2x^3 - 3 = 0, \\ -4x^1 + 5x^2 + 2x^4 + 11 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1+2}{3} = \dfrac{x^2-1}{0} = \dfrac{x^3+3}{3} = \dfrac{x^4-2}{-1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 6 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x^3 = -3t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -4 - 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

4. a) $\ell: \ x^1 = 3t, \ x^2 = 1 + 2t, \ x^3 = 1 + 4t, \ x^4 = 3 + 3t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -2x^1 + 5x^2 - x^3 - 3 = 0, \\ x^1 - x^4 + 3 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1-3}{1} = \dfrac{x^2+3}{-2} = \dfrac{x^3-2}{1} = \dfrac{x^4-3}{1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 + t_1, \\ x^2 = 1 + 2t_2, \\ x^3 = -3 + t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -1 + t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

5. a) $\ell: \ x^1 = -6 - t, \ x^2 = -5 + t, \ x^3 = 1 - 5t, \ x^4 = 10;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 2x^1 + 12x^2 + 2x^3 - 10 = 0, \\ 2x^4 + 6 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1-3}{3} = \dfrac{x^2+6}{-3} = \dfrac{x^3+2}{-2} = \dfrac{x^4-1}{1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -2 - 2t_1, \\ x^2 = -7 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 2 - 2t_2, \\ x^4 = 1 + 2t_1 + t_2. \end{cases}$$

6. *a*) $\ell: \ x^1 = -3 + 2t, \ x^2 = -1 + 2t, \ x^3 = -2, \ x^4 = 3t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ -x^1 - 2x^2 + 2x^4 - 5 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \dfrac{x^1 - 4}{-3} = \dfrac{x^2 - 3}{-1} = \dfrac{x^3 + 6}{3} = \dfrac{x^4}{0};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -3 - t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 7 + 3t_1 - 2t_2, \\ x^3 = -1 + 3t_1 + t_2, \\ x^4 = 2t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

7. *a*) $\ell: \ x^1 = 4 + 3t, \ x^2 = -7 - 4t, \ x^3 = 0, \ x^4 = 2 + 2t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 4x^1 + 3x^2 + x^3 + 5 = 0, \\ -6x^1 - 4x^2 + x^4 - 6 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \dfrac{x^1 + 3}{1} = \dfrac{x^2 + 1}{1} = \dfrac{x^3 + 5}{3} = \dfrac{x^4 - 2}{0};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -6 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 1 + 2t_1 + 3t_2, \\ x^3 = -7 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

8. *a*) $\ell: \ x^1 = -5 - 3t, \ x^2 = 2 - 4t, \ x^3 = 5 + 3t, \ x^4 = 0;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -9x^1 - 9x^3 = 0, \\ -9x^4 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \dfrac{x^1 - 2}{0} = \dfrac{x^2 + 3}{1} = \dfrac{x^3 - 3}{-1} = \dfrac{x^4 + 2}{3};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 - t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 2 + t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 3 - 2t_1 + 3t_2, \\ x^4 = -t_1. \end{cases}$$

9. $a)\ \ell:\ x^1 = 1 - t,\ x^2 = -3 + 2t,\ x^3 = 5 + t,\ x^4 = 3 + 4t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -6x^1 - 4x^2 + 2x^3 - 16 = 0, \\ -4x^1 - 6x^2 + 2x^4 - 20 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \dfrac{x^1 - 2}{0} = \dfrac{x^2}{-1} = \dfrac{x^3}{1} = \dfrac{x^4 - 2}{0};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 5 + t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 1 - t_1 - t_2, \\ x^3 = -4 - 3t_1, \\ x^4 = 4 + 3t_1 + t_2. \end{cases}$$

10. $a)\ \ell:\ x^1 = 1 - t,\ x^2 = 1 - 3t,\ x^3 = 1 - 2t,\ x^4 = 5 - 6t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -2x^1 - 4x^2 + 7x^3 - 1 = 0, \\ 3x^1 - 15x^2 + 7x^4 - 23 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \dfrac{x^1}{-2} = \dfrac{x^2 + 5}{-2} = \dfrac{x^3 - 2}{-1} = \dfrac{x^4 + 2}{0};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 + t_1, \\ x^2 = -4 + 2t_1 + t_2, \\ x^3 = 3 + 2t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -1 - 3t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

11. $a)\ \ell:\ x^1 = -5 + 5t,\ x^2 = 5 + 3t,\ x^3 = -6 + 2t,\ x^4 = 1 - 2t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 5x^1 - 11x^2 + 4x^3 - 22 = 0, \\ -5x^1 + 11x^2 + 4x^4 + 22 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \dfrac{x^1 + 4}{3} = \dfrac{x^2 - 1}{0} = \dfrac{x^3 + 2}{0} = \dfrac{x^4 - 3}{-1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -3 + 2t_1, \\ x^2 = 2 - 2t_1 - t_2, \\ x^3 = -3 - t_2, \\ x^4 = 2 + 3t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

12. $a)\ \ell:\ x^1 = 4 - t,\ x^2 = 2 - 2t,\ x^3 = -2 + 3t,\ x^4 = t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 4x^1 - 8x^2 - 4x^3 - 8 = 0, \\ 6x^1 - 5x^2 - 4x^4 - 14 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1+6}{3}=\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{x^3-1}{-2}=\dfrac{x^4-1}{-3};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 - t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 6 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -2 - 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -1 - 2t_1 - t_2. \end{cases}$$

13. a) $\ell: \ x^1=-1-2t, \ x^2=-1-4t, \ x^3=-2+t, \ x^4=-4+2t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -3x^1 - x^2 - 10x^3 - 24 = 0, \\ 6x^1 - 8x^2 - 10x^4 - 42 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1-2}{3}=\dfrac{x^2-2}{0}=\dfrac{x^3}{-2}=\dfrac{x^4-3}{2};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 + 3t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 1 - t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 1 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -1 - 2t_2. \end{cases}$$

14. a) $\ell: \ x^1=5+t, \ x^2=-10+3t, \ x^3=t, \ x^4=-t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -2x^1 + 2x^3 - 12 = 0, \\ 5x^1 - x^2 + 2x^4 + 18 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1+3}{3}=\dfrac{x^2-1}{1}=\dfrac{x^3-5}{-3}=\dfrac{x^4+2}{1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 3t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = -3 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -3 + 2t_1. \end{cases}$$

15. a) $\ell: \ x^1=1-t, \ x^2=-1+2t, \ x^3=1+t, \ x^4=-1-t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -2x^1 - 3x^2 + 4x^3 - 5 = 0, \\ -6x^1 - x^2 + 4x^4 + 9 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell: \ \dfrac{x^1-3}{-2}=\dfrac{x^2-1}{-1}=\dfrac{x^3-2}{-1}=\dfrac{x^4-1}{2};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = -2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 1 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^4 = 6 + 3t_2. \end{cases}$$

16. $a)$ $\ell: \ x^1 = -8 - t, \ x^2 = -1 - t, \ x^3 = 3 - 2t, \ x^4 = -5 - 5t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 3x^1 + 3x^2 - 3x^3 - 12 = 0, \\ 8x^1 + 7x^2 - 3x^4 - 11 = 0; \end{cases}$$

$b)$ $\ell: \ \dfrac{x^1 - 4}{-1} = \dfrac{x^2}{1} = \dfrac{x^3 - 1}{-1} = \dfrac{x^4}{-1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 4 - 2t_1 - t_2, \\ x^2 = 5 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -6 + 3t_1 - 3t_2, \\ x^4 = 3 - 3t_1 + t_2. \end{cases}$$

17. $a)$ $\ell: \ x^1 = 2t, \ x^2 = -3 - t, \ x^3 = -5t, \ x^4 = 2 + t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -12x^1 + x^2 - 5x^3 + 3 = 0, \\ 3x^1 + x^2 - 5x^4 + 13 = 0; \end{cases}$$

$b)$ $\ell: \ \dfrac{x^1 + 3}{0} = \dfrac{x^2 - 4}{2} = \dfrac{x^3 - 2}{-1} = \dfrac{x^4 + 2}{1};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -7 - t_1 - 3t_2, \\ x^2 = -2 - 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 2 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -7 - 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

18. $a)$ $\ell: \ x^1 = 6, \ x^2 = 5 + 2t, \ x^3 = 6 - 2t, \ x^4 = 1;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -6x^1 + 4x^2 + 4x^3 + 22 = 0, \\ -4x^1 + 4x^4 + 8 = 0; \end{cases}$$

$b)$ $\ell: \ \dfrac{x^1 - 5}{2} = \dfrac{x^2 + 2}{-1} = \dfrac{x^3 - 1}{3} = \dfrac{x^4 - 1}{-2};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 3t_1, \\ x^2 = 1 - 2t_1, \\ x^3 = 1 + 3t_2, \\ x^4 = -1 + 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

19. $a)\ \ell:\ x^1 = 2 + t,\ x^2 = -2 - 6t,\ x^3 = -2 - t,\ x^4 = 4;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} -15x^1 - 3x^2 + 3x^3 + 30 = 0, \\ 12x^1 + 2x^2 + 3x^4 - 32 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2 + 4}{-3} = \frac{x^3 + 2}{-1} = \frac{x^4 - 4}{3};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 2 + t_1 - t_2, \\ x^2 = -2 + t_1, \\ x^3 = -2 + t_1, \\ x^4 = 2 - t_1. \end{cases}$$

20. $a)\ \ell:\ x^1 = -8 + 4t,\ x^2 = -5t,\ x^3 = 6 - 2t,\ x^4 = -3 + 2t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} 11x^1 + 6x^2 + 7x^3 + 40 = 0, \\ 9x^1 + 10x^2 + 7x^4 + 41 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \frac{x^1 + 1}{-3} = \frac{x^2 - 1}{-2} = \frac{x^3 + 2}{1} = \frac{x^4}{0};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 5 - t_1 + 2t_2, \\ x^2 = 1 + 2t_1, \\ x^3 = -3, \\ x^4 = 0. \end{cases}$$

21. $a)\ \ell:\ x^1 = -3 + 3t,\ x^2 = -3 - t,\ x^3 = -3 + 2t,\ x^4 = -7;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} 6x^1 - 9x^3 - 9 = 0, \\ 2x^1 + 6x^2 - 9x^4 - 39 = 0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \frac{x^1 - 5}{-2} = \frac{x^2}{-3} = \frac{x^3 + 1}{-1} = \frac{x^4 - 3}{-3};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1 = 1 + 3t_1 - t_2, \\ x^2 = 1 - 3t_1 - t_2, \\ x^3 = -3t_1 + t_2, \\ x^4 = 1 - 2t_1 + t_2. \end{cases}$$

22. $a)\ \ell:\ x^1 = 2 + 3t,\ x^2 = 3 + 3t,\ x^3 = 1 + 2t,\ x^4 = -1 - t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} -2x^2 + 3x^3 + 3 = 0, \\ 6x^1 - 5x^2 + 3x^4 + 6 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell:\ \dfrac{x^1-1}{-1}=\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{x^3-1}{3}=\dfrac{x^4-6}{3};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=8-3t_1-3t_2,\\ x^2=-4+2t_1-t_2,\\ x^3=-5+2t_1+t_2,\\ x^4=6-t_1-2t_2. \end{cases}$$

23. a) $\ell:\ x^1=-4+t,\ x^2=5+4t,\ x^3=-3t,\ x^4=-3+5t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} -6x^1+3x^2+2x^3-23=0,\\ -2x^1-2x^2+2x^4-4=0; \end{cases}$$

b) $\ell:\ \dfrac{x^1-5}{-3}=\dfrac{x^2+1}{0}=\dfrac{x^3}{-2}=\dfrac{x^4+3}{3};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=-1-2t_1-t_2,\\ x^2=-5-3t_1-t_2,\\ x^3=-1+t_1,\\ x^4=1+t_1. \end{cases}$$

24. a) $\ell:\ x^1=-4+5t,\ x^2=1+2t,\ x^3=-4+t,\ x^4=4-3t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} -3x^2+6x^3+27=0,\\ 6x^1-6x^2+6x^4+6=0; \end{cases}$$

b) $\ell:\ \dfrac{x^1-2}{1}=\dfrac{x^2-1}{1}=\dfrac{x^3-1}{0}=\dfrac{x^4-2}{-3};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=3-3t_1-3t_2,\\ x^2=3+t_2,\\ x^3=2-t_1,\\ x^4=-t_1. \end{cases}$$

25. a) $\ell:\ x^1=-3+4t,\ x^2=8,\ x^3=-1-t,\ x^4=-1+t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} 3x^1+7x^2+12x^3-35=0,\\ -3x^1-3x^2+12x^4+27=0; \end{cases}$$

b) $\ell:\ \dfrac{x^1-1}{1}=\dfrac{x^2-1}{1}=\dfrac{x^3}{-1}=\dfrac{x^4+5}{-3};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 + t_1, \\ x^2 = 2 - 3t_1 - t_2, \\ x^3 = 1 - t_1 - t_2, \\ x^4 = 3 - 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

26. *a*) $\ell: \ x^1 = -7 + 2t, \ x^2 = -4 - t, \ x^3 = -2 + t, \ x^4 = 1 + t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 + 7x^2 + 5x^3 - 17 = 0, \\ -4x^1 - 3x^2 + 5x^4 + 13 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \frac{x^1+1}{-3} = \frac{x^2+2}{1} = \frac{x^3+4}{-2} = \frac{x^4+2}{-2};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 1 - 2t_1 + 3t_2, \\ x^2 = -6 + t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -1 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = 3t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

27. *a*) $\ell: \ x^1 = 2 + 3t, \ x^2 = -9, \ x^3 = 1 + 3t, \ x^4 = -5 + 2t;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} 9x^1 + 3x^2 - 9x^3 + 18 = 0, \\ 6x^1 + 9x^2 - 9x^4 + 24 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \frac{x^1+3}{-3} = \frac{x^2+2}{1} = \frac{x^3-5}{3} = \frac{x^4-1}{-2};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = -1 + t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 2 + 2t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 3 + t_1, \\ x^4 = 3 + t_1 - t_2. \end{cases}$$

28. *a*) $\ell: \ x^1 = 3t, \ x^2 = 3 + t, \ x^3 = -1 - 5t, \ x^4 = 4;$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} -8x^1 + 9x^2 - 3x^3 - 8 = 0, \\ 3x^1 - 9x^2 - 3x^4 + 24 = 0; \end{cases}$$

*b*) $\ell: \ \frac{x^1-3}{-2} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3+2}{1} = \frac{x^4+2}{0};$

$$\mathscr{P}: \quad \begin{cases} x^1 = 7 - 3t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 6 - t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -2t_1 - t_2, \\ x^4 = -6 + 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

29. $a)\ \ell:\ x^1=-6-6t,\ x^2=2+4t,\ x^3=-2-4t,\ x^4=-2-t;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} -6x^2-6x^3=0,\\ -x^1-3x^2-6x^4-12=0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \dfrac{x^1+2}{3}=\dfrac{x^2+2}{1}=\dfrac{x^3}{-3}=\dfrac{x^4+3}{2};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=2+t_1,\\ x^2=-2+2t_1-3t_2,\\ x^3=1+t_1+3t_2,\\ x^4=-1+t_1-t_2. \end{cases}$$

30. $a)\ \ell:\ x^1=8-3t,\ x^2=3+3t,\ x^3=-8+3t,\ x^4=-6;$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} 9x^1+9x^3+9=0,\\ -6x^1-6x^2+9x^4-18=0; \end{cases}$$

$b)\ \ell:\ \dfrac{x^1-3}{0}=\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{x^3-4}{-2}=\dfrac{x^4-4}{-1};$

$$\mathscr{P}:\quad \begin{cases} x^1=1-2t_1,\\ x^2=2-2t_1-t_2,\\ x^3=-3-2t_1+3t_2,\\ x^4=4+t_1. \end{cases}$$

**Задача 1.6.** Определить взаимное расположение плоскостей $\mathscr{P}_1=A+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ и $\mathscr{P}_2=B+\langle\vec{p},\vec{q}\rangle$.

1. $A(0,2,2,0,-2),\ \vec{u}=(-1,3,4,5,-4),\ \vec{v}=(-2,5,-5,5,-1);$
   $B(0,-1,1,-2,0),\ \vec{p}=(5,-4,-3,-4,-3),\ \vec{q}=(5,-3,1,5,-2).$
2. $A(2,2,-1,2),\ \vec{u}=(1,-1,-4,8),\ \vec{v}=(5,3,4,-8);$
   $B(-1,-1,1,1),\ \vec{p}=(19,-16,-9,12),\ \vec{q}=(-5,20,7,-8).$
3. $A(-1,2,0,-2),\ \vec{u}=(3,0,-3,-3),\ \vec{v}=(-1,4,-5,-1);$
   $B(-1,-2,-1,1),\ \vec{p}=(10,-10,4,2),\ \vec{q}=(18,-14,0,10).$
4. $A(-2,0,-2,1,0),\ \vec{u}=(-5,-1,-2,-4,-5),\ \vec{v}=(5,1,1,-3,2);$
   $B(-2,0,1,-2,0),\ \vec{p}=(-1,-4,1,4,5),\ \vec{q}=(1,1,1,-2,1).$
5. $A(-2,2,-1,-2,0),\ \vec{u}=(2,2,4,3,-4),\ \vec{v}=(-6,-6,10,2,-10);$
   $B(-2,0,2,1,0),\ \vec{p}=(5,9,10,7,8),\ \vec{q}=(7,3,-10,-1,-8).$

6. $A(3,-5,4,2,-3)$, $\vec{u}=(1,-2,2,0,0)$, $\vec{v}=(-1,3,-2,0,1)$;
$B(1,0,0,2,-2)$, $\vec{p}=(3,2,-1,-5,8)$, $\vec{q}=(3,2,-1,-5,8)$.

7. $A(1,0,0,1)$, $\vec{u}=(3,-1,-1,2)$, $\vec{v}=(5,-2,-2,2)$;
$B(9,-33,-28,-25)$, $\vec{p}=(5,-20,-17,-16)$, $\vec{q}=(5,-14,-12,-10)$.

8. $A(0,-2,0,2,-1)$, $\vec{u}=(-2,-6,0,-8,-8)$, $\vec{v}=(-1,4,0,10,10)$;
$B(0,-2,-1,-2,2)$, $\vec{p}=(-6,0,5,-9,-9)$, $\vec{q}=(22,-8,-15,3,3)$.

9. $A(1,0,-1,-1)$, $\vec{u}=(-5,4,-5,1)$, $\vec{v}=(-4,-1,-4,-2)$;
$B(-2,0,-2,2)$, $\vec{p}=(1,4,1,3)$, $\vec{q}=(0,3,0,2)$.

10. $A(3,7,-5,0,9)$, $\vec{u}=(1,3,-5,-1,4)$, $\vec{v}=(-1,-2,1,-1,-3)$;
$B(4,10,-2,7,9)$, $\vec{p}=(-1,-3,1,-4,-4)$, $\vec{q}=(2,5,-2,3,3)$.

11. $A(2,2,1,0,1)$, $\vec{u}=(-4,0,-5,1,-2)$, $\vec{v}=(-5,0,-1,-4,1)$;
$B(-2,2,-1,1,1)$, $\vec{p}=(4,-8,-7,-10,-3)$, $\vec{q}=(18,-24,-15,-30,-7)$.

12. $A(-1,-7,5,5)$, $\vec{u}=(-2,2,2,-8)$, $\vec{v}=(5,4,-5,2)$;
$B(-6,-19,-10,19)$, $\vec{p}=(16,26,14,-20)$, $\vec{q}=(8,8,2,0)$.

13. $A(4,7,-12,3,7)$, $\vec{u}=(4,1,-5,-1,3)$, $\vec{v}=(-1,-4,5,-4,-5)$;
$B(2,8,-2,1,-5)$, $\vec{p}=(1,-2,-1,3,-1)$, $\vec{q}=(-4,-4,1,-4,5)$.

14. $A(2,-2,-2,-2)$, $\vec{u}=(0,0,-10,-7)$, $\vec{v}=(0,0,-4,-3)$;
$B(-1,1,-2,-2)$, $\vec{p}=(-4,12,-20,-5)$, $\vec{q}=(-6,18,-29,-8)$.

15. $A(-1,-2,-2,0,-1)$, $\vec{u}=(-7,6,7,-2,1)$, $\vec{v}=(3,6,-3,3,6)$;
$B(-1,1,0,1,0)$, $\vec{p}=(-4,-4,4,-3,-5)$, $\vec{q}=(3,-2,-3,1,0)$.

16. $A(-1,-3,0,0)$, $\vec{u}=(1,-5,6,5)$, $\vec{v}=(5,-1,-2,1)$;
$B(3,-5,0,2)$, $\vec{p}=(-6,6,-4,-6)$, $\vec{q}=(-1,-1,2,1)$.

17. $A(-1,-4,0,2)$, $\vec{u}=(0,-4,4,2)$, $\vec{v}=(0,-2,4,0)$;
$B(-10,-8,-2,-3)$, $\vec{p}=(-27,-16,-10,-9)$, $\vec{q}=(-18,-10,-8,-6)$.

18. $A(2,1,1,3)$, $\vec{u}=(0,9,-3,-9)$, $\vec{v}=(2,-5,5,7)$;
$B(-2,-1,-5,1)$, $\vec{p}=(1,8,-1,-7)$, $\vec{q}=(0,-9,3,9)$.

19. $A(0,-1,0,-2,-2)$, $\vec{u}=(-1,-2,0,-2,-3)$, $\vec{v}=(-9,-6,0,6,-3)$;
$B(2,1,0,-2,0)$, $\vec{p}=(0,-1,0,-2,-2)$, $\vec{q}=(-3,0,0,6,3)$.

20. $A(1,1,1,-2)$, $\vec{u}=(2,2,0,-2)$, $\vec{v}=(1,8,0,-8)$;
$B(1,-1,-1,0)$, $\vec{p}=(1,-2,0,2)$, $\vec{q}=(-1,0,0,0)$.

21. $A(-3,0,2,-2,-4)$, $\vec{u}=(8,2,0,8,4)$, $\vec{v}=(-6,0,0,-6,-4)$;
$B(-1,-4,2,0,0)$, $\vec{p}=(-7,2,0,-7,-6)$, $\vec{q}=(0,6,0,0,-4)$.

22. $A(8,-2,1,2)$, $\vec{u}=(3,2,3,-1)$, $\vec{v}=(5,-3,-1,1)$;
$B(-7,-7,0,-1)$, $\vec{p}=(2,3,-3,-1)$, $\vec{q}=(5,3,2,4)$.

23. $A(-6,-1,7,6)$, $\vec{u}=(-4,1,3,4)$, $\vec{v}=(-4,-3,3,4)$;
$B(7,-8,-7,3)$, $\vec{p}=(1,-5,-3,4)$, $\vec{q}=(-4,4,5,-1)$.

24. $A(10,8,-9,-7,-5)$, $\vec{u}=(5,2,-2,-1,-5)$, $\vec{v}=(-5,-5,5,4,-1)$;
$B(0,0,4,1,5)$, $\vec{p}=(3,-2,-5,2,-2)$, $\vec{q}=(-3,3,-1,-5,-4)$.

25. $A(2,0,-4,-9)$, $\vec{u}=(-2,-3,-5,-4)$, $\vec{v}=(-5,-5,-2,4)$;
$B(-8,-8,0,-1)$, $\vec{p}=(3,3,-5,5)$, $\vec{q}=(-4,-3,-4,5)$.

26. $A(0,1,2,2,-1)$, $\vec{u}=(0,2,2,-4,3)$, $\vec{v}=(8,-10,6,-4,1)$;
$B(-1,-1,-2,1,2)$, $\vec{p}=(-1,-2,-4,7,-5)$, $\vec{q}=(-4,2,-6,8,-5)$.

27. $A(6,-2,0,-5,2)$, $\vec{u}=(-2,-7,3,2,-4)$, $\vec{v}=(-2,-4,2,2,-3)$;
$B(2,2,0,-1,0)$, $\vec{p}=(12,-3,-3,-12,9)$, $\vec{q}=(8,1,-3,-8,7)$.

28. $A(0,-2,-2,-1)$, $\vec{u}=(-8,0,4,2)$, $\vec{v}=(6,1,-2,-1)$;
$B(-2,2,-2,2)$, $\vec{p}=(10,1,-4,-2)$, $\vec{q}=(8,-2,-6,-3)$.

29. $A(-2,1,4,0,-1)$, $\vec{u}=(-4,6,-5,-5,0)$, $\vec{v}=(-8,6,-1,-7,0)$;
$B(12,-15,-4,16,5)$, $\vec{p}=(-25,30,7,-29,-9)$, $\vec{q}=(-15,14,3,-15,-3)$.

30. $A(-1,-2,-1,-1,1)$, $\vec{u}=(4,0,-4,0,-2)$, $\vec{v}=(6,-1,-6,0,-3)$;
$B(0,2,-1,-1,-1)$, $\vec{p}=(4,0,-4,0,-2)$, $\vec{q}=(4,-4,-4,0,-2)$.

**Задача 1.7.** Написать формулы перехода к новой системе координат на прямой, если за ее начало принята точка $O'$, а за базисный вектор — вектор $\overrightarrow{O'A}$. Координаты точек указаны в старой системе координат.

1. $O'(-4)$, $A(-2)$.
2. $O'(-9)$, $A(-7)$.
3. $O'(7)$, $A(6)$.
4. $O'(-1)$, $A(-4)$.
5. $O'(9)$, $A(12)$.
6. $O'(10)$, $A(12)$.
7. $O'(5)$, $A(8)$.
8. $O'(-8)$, $A(-9)$.
9. $O'(-10)$, $A(-8)$.
10. $O'(10)$, $A(8)$.
11. $O'(-8)$, $A(-10)$.
12. $O'(5)$, $A(6)$.
13. $O'(-1)$, $A(-3)$.
14. $O'(-6)$, $A(-3)$.
15. $O'(-7)$, $A(-9)$.
16. $O'(6)$, $A(5)$.
17. $O'(10)$, $A(13)$.
18. $O'(-3)$, $A(-6)$.
19. $O'(1)$, $A(3)$.
20. $O'(-7)$, $A(-10)$.
21. $O'(2)$, $A(0)$.
22. $O'(8)$, $A(7)$.
23. $O'(-6)$, $A(-7)$.
24. $O'(7)$, $A(10)$.

25. $O'(5),\ A(7).$ 27. $O'(6),\ A(4).$ 29. $O'(-8),\ A(-5).$
26. $O'(6),\ A(8).$ 28. $O'(1),\ A(4).$ 30. $O'(7),\ A(9).$

**Задача 1.8.** Пусть точки $A, B, C, D$ — последовательные вершины параллелограмма, $E$ — точка пересечения его диагоналей. Найти формулы перехода от старой системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к новой $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.

1. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{EB};\quad O' = C,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AB}.$
2. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{EA};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AD}.$
3. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BE};\quad O' = C,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{DA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CD}.$
4. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DB}.$
5. $O = D,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{EB}.$
6. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CB};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{EB}.$
7. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{EB};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DA}.$
8. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{EA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DB}.$
9. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{EA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AD},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BE}.$
10. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{EC},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DB}.$
11. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{EB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DA}.$
12. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{ED};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AD}.$
13. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CB};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BD},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{EC}.$
14. $O = A,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DC}.$
15. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{DA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BA};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{DB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CE}.$
16. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD};\quad O' = C,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DE}.$
17. $O = D,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{CA};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BC},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BD}.$
18. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BE}.$
19. $O = D,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AD},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DC};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BD},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{EC}.$
20. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DC};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{DE},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CB}.$
21. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DE};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{DA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{EA}.$
22. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{ED},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BA}.$

23. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{EA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AB};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BD},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DA}.$
24. $O = D,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{EC},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DB}.$
25. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{EB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{EA};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CD},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BC}.$
26. $O = A,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{DE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AC},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DC}.$
27. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BC},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DB};\quad O' = D,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AE}.$
28. $O = C,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CD},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DE};\quad O' = A,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AE}.$
29. $O = B,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DE};\quad O' = E,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BC},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{AB}.$
30. $O = E,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{BE},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{DC};\quad O' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{CA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CB}.$

**Задача 1.9.** На плоскости заданы две системы координат: старая $Oxy$ и новая $O'x'y'$, связанные указанными соотношениями, и две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, заданные своими уравнениями в старой и новой системах координат соответственно. Найти:

i. Координаты точки $O'$ и единичных векторов $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе $Oxy$;

ii. Координаты точки $O$ и единичных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ осей $Ox$ и $Oy$ в системе $O'x'y'$;

iii. Координаты единичной точки $E'$ в системе $Oxy$;

iv. Координаты единичной точки $E$ в системе $O'x'y'$;

v. Уравнения координатных осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе $Oxy$;

vi. Уравнения координатных осей $Ox$ и $Oy$ в системе $O'x'y'$;

vii. Уравнения прямой $\ell_1$ в системе $O'x'y'$;

viii. Уравнения прямой $\ell_2$ в системе $Oxy$.

1. $x = 5x' + 4y' + 5,\ y = 2x' - 5y' - 2;$
   $\ell_1\colon x - 2y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 2y' - 3 = 0.$

2. $x = 5x' - 2y' + 2,\ y = 4x' + 4y' - 1;$
   $\ell_1\colon x - 2y + 1 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 5y' - 1 = 0.$

3. $x = 4x' - 3y' - 3,\ y = 4x' - 2y' - 3;$
   $\ell_1\colon 2x + y + 1 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 4y' - 3 = 0.$

4. $x = 4x' - 4y' + 1,\ y = 3x' - 2y' + 1;$
$\ell_1\colon x + y + 1 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 3y' + 3 = 0.$
5. $x = 5x' + 5y' + 2,\ y = 3x' - 2y' - 3;$
$\ell_1\colon 4x - 5y + 4 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 5y' - 3 = 0.$
6. $x = 3x' + 4y' + 4,\ y = 5x' - 3y' - 4;$
$\ell_1\colon 4x + 4y + 3 = 0;\quad \ell_2\colon x' + 5y' - 1 = 0.$
7. $x = 3x' + 2y' + 5,\ y = 2x' + 4y' - 2;$
$\ell_1\colon x + y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' + 3y' - 2 = 0.$
8. $x = 2x' - 4y' - 4,\ y = 5x' - 4y' - 4;$
$\ell_1\colon 3x + 4y - 1 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' + 2y' + 3 = 0.$
9. $x = 3x' + 3y' + 3,\ y = 2x' - 5y' + 3;$
$\ell_1\colon x + 5y - 3 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' + 5y' - 4 = 0.$
10. $x = 3x' - 3y' - 2,\ y = 3x' + 3y' + 5;$
$\ell_1\colon 4x + 3y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' - 4y' - 5 = 0.$
11. $x = x' - 2y' + 4,\ y = 3x' + 4y' - 5;$
$\ell_1\colon x - 2y - 1 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 4y' + 2 = 0.$
12. $x = 2x' - 5y' + 4,\ y = 4x' - 3y' + 2;$
$\ell_1\colon 5x + 5y - 1 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' - 2y' + 1 = 0.$
13. $x = 3x' + y' - 2,\ y = x' - 2y' + 3);$
$\ell_1\colon x + y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 4x' - y' + 1 = 0.$
14. $x = 5x' + y' + 5,\ y = 5x' + 4y' - 2;$
$\ell_1\colon 3x - 5y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - y' - 4 = 0.$
15. $x = 4x' - 4y' + 5,\ y = 2x' + y' + 5;$
$\ell_1\colon 5x + 2y + 2 = 0;\quad \ell_2\colon 4x' - 5y' + 1 = 0.$
16. $x = 5x' - 4y' - 5,\ y = 3x' - y' - 4;$
$\ell_1\colon 5x - y + 3 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' - 2y' - 1 = 0.$
17. $x = 3x' + 4y' - 5,\ y = x' - 4y' - 4;$
$\ell_1\colon x - y + 3 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - 4y' + 2 = 0.$
18. $x = 5x' - 2y' + 4,\ y = x' + 4y' + 1;$
$\ell_1\colon 4x + 5y - 3 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' + 3y' - 1 = 0.$
19. $x = 3x' + 2y' + 3,\ y = 2x' - 2y' + 3;$
$\ell_1\colon x - y + 4 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' - y' + 3 = 0.$

20. $x = 5x' + 2y' - 4,\ y = 5x' - 5y' + 3;$
$\ell_1\colon 5x - 3y - 2 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' - y' - 5 = 0.$

21. $x = x' + y' + 2,\ y = 4x' + 3y' - 4;$
$\ell_1\colon 4x + 5y - 5 = 0;\quad \ell_2\colon 5x' + y' + 5 = 0.$

22. $x = 4x' + y' + 4,\ y = 2x' - 3y' - 4;$
$\ell_1\colon 5x - 5y + 4 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' + y' + 4 = 0.$

23. $x = 2x' - 5y' + 5,\ y = 5x' - 4y' - 2;$
$\ell_1\colon 4x - 5y + 4 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' - 5y' + 3 = 0.$

24. $x = x' + 3y' + 3,\ y = 4x' - 5y' - 1;$
$\ell_1\colon 3x + y - 5 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' + y' - 2 = 0.$

25. $x = x' - 4y' + 2,\ y = 4x' - 4y' + 4;$
$\ell_1\colon 3x - 2y - 2 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' - 3y' - 3 = 0.$

26. $x = 3x' - 4y' - 5,\ y = 2x' + 5y' - 4;$
$\ell_1\colon 5x + 3y - 5 = 0;\quad \ell_2\colon 4x' - y' + 3 = 0.$

27. $x = 2x' + 3y' - 4,\ y = 5x' + y' - 4;$
$\ell_1\colon 5x - 3y + 3 = 0;\quad \ell_2\colon 4x' - 2y' - 1 = 0.$

28. $x = 3x' + 2y' - 3,\ y = 3x' + 5y' + 3;$
$\ell_1\colon 2x + y - 4 = 0;\quad \ell_2\colon 3x' + 3y' + 5 = 0.$

29. $x = 2x' + 5y' + 3,\ y = 2x' - 5y' + 1;$
$\ell_1\colon 3x - y - 5 = 0;\quad \ell_2\colon 2x' - 3y' + 1 = 0.$

30. $x = 2x' - 2y' - 5,\ y = 4x' + 5y' - 5;$
$\ell_1\colon 2x + 3y + 3 = 0;\quad \ell_2\colon 4x' - y' + 4 = 0.$

**Задача 1.10.** Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые координатные оси $Ox'$ и $Oy'$ соответственно прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, а за за единичную точку новой системы координат — точку $E'$.

1. $\ell_1\colon x - 4\,y - 17 = 0,\ \ell_2\colon 3\,x + 2\,y - 9 = 0;\quad E'(-4, 5).$
2. $\ell_1\colon 2\,x + 3\,y + 16 = 0,\ \ell_2\colon 3\,x - 5\,y - 14 = 0;\quad E'(-3, 1).$
3. $\ell_1\colon x - y + 5 = 0,\ \ell_2\colon 2\,x - 5\,y + 16 = 0;\quad E'(1, 1).$
4. $\ell_1\colon x - 4\,y + 3 = 0,\ \ell_2\colon 4\,x + y - 5 = 0;\quad E'(4, 5).$
5. $\ell_1\colon x - 2\,y + 7 = 0,\ \ell_2\colon 2\,x - y + 5 = 0;\quad E'(3, -4).$

6. $\ell_1\colon 4x-3y-26=0$, $\ell_2\colon x+3y+1=0$; $E'(4,-5)$.
7. $\ell_1\colon 4x-y-17=0$, $\ell_2\colon 5x-2y-19=0$; $E'(4,5)$.
8. $\ell_1\colon x-y=0$, $\ell_2\colon 5x+y+18=0$; $E'(-5,-2)$.
9. $\ell_1\colon x+3y-2=0$, $\ell_2\colon 5x-2y+24=0$; $E'(2,-4)$.
10. $\ell_1\colon x+y+9=0$, $\ell_2\colon 4x-3y+1=0$; $E'(2,-1)$.
11. $\ell_1\colon 2x-y+11=0$, $\ell_2\colon x-3y+13=0$; $E'(2,4)$.
12. $\ell_1\colon 2x+y+8=0$, $\ell_2\colon 4x-y+22=0$; $E'(-2,-5)$.
13. $\ell_1\colon 5x-2y+10=0$, $\ell_2\colon 2x-3y-7=0$; $E'(-4,-1)$.
14. $\ell_1\colon 2x-5y+14=0$, $\ell_2\colon 2x-y-2=0$; $E'(-4,5)$.
15. $\ell_1\colon x+y-3=0$, $\ell_2\colon 3x+5y-17=0$; $E'(5,1)$.
16. $\ell_1\colon 2x-5y+31=0$, $\ell_2\colon 4x+5y-13=0$; $E'(5,4)$.
17. $\ell_1\colon x+3y+9=0$, $\ell_2\colon x+5y+17=0$; $E'(-1,3)$.
18. $\ell_1\colon 2x+5y-15=0$, $\ell_2\colon x+3y-10=0$; $E'(-2,2)$.
19. $\ell_1\colon x-y+1=0$, $\ell_2\colon x+2y-14=0$; $E'(3,-2)$.
20. $\ell_1\colon 3x+4y-15=0$, $\ell_2\colon 3x+2y-9=0$; $E'(-1,-4)$.
21. $\ell_1\colon 5x+y+8=0$, $\ell_2\colon x-y-2=0$; $E'(3,-5)$.
22. $\ell_1\colon 5x-4y+32=0$, $\ell_2\colon 3x+y+9=0$; $E'(-2,-4)$.
23. $\ell_1\colon x+2y-7=0$, $\ell_2\colon x-y-1=0$; $E'(-1,5)$.
24. $\ell_1\colon 2x+3y-11=0$, $\ell_2\colon 2x+5y-17=0$; $E'(2,-5)$.
25. $\ell_1\colon 3x-5y-8=0$, $\ell_2\colon x+4y+3=0$; $E'(-1,-2)$.
26. $\ell_1\colon x-y+3=0$, $\ell_2\colon 3x+y-11=0$; $E'(-4,-4)$.
27. $\ell_1\colon 2x+3y+14=0$, $\ell_2\colon 3x-4y-13=0$; $E'(-4,-3)$.
28. $\ell_1\colon x+3y-17=0$, $\ell_2\colon x+2y-12=0$; $E'(-1,5)$.
29. $\ell_1\colon 3x-5y-11=0$, $\ell_2\colon x-4y-13=0$; $E'(5,-4)$.
30. $\ell_1\colon x-y-3=0$, $\ell_2\colon 3x-y+1=0$; $E'(-3,-5)$.

**Задача 1.11.** В пространстве заданы две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, связанные заданными соотношениями. Найти:

i. Координаты начала системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
ii. Канонические уравнения осей координат системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
iii. Канонические уравнения осей координат системы $Oxyz$ в системе $O'x'y'z'$;
iv. Уравнения координатных плоскостей системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
v. Уравнение плоскости $\mathscr{P}$ в системе $O'x'y'z'$;
vi. Канонические уравнения прямой $\ell$ в системе $O'x'y'z'$.

1. $\begin{cases} x = 5\,x' - y' - 3\,z' + 1, \\ y = x' - y' - 2\,z' + 1, \\ z = 3\,x' - 2\,y' - 4\,z' - 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 2\,x + y - 2\,z + 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+10}{4} = \dfrac{y+10}{-10} = \dfrac{-6+z}{4}.$

2. $\begin{cases} x = -2\,x' - 6\,y' - 9\,z' - 3, \\ y = 2\,x' + 5\,y' + 8\,z' + 2, \\ z = -3\,x' - 9\,y' - 14\,z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x - 2\,y - z - 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+9}{0} = \dfrac{y-5}{-8} = \dfrac{z-10}{2}.$

3. $\begin{cases} x = -x' - y' - 2\,z' - 2, \\ y = -x' - 2\,y' - 2\,z', \\ z = x' + y' + 3\,z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x - 4\,y - z + 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-2}{-9} = \dfrac{y-3}{7} = \dfrac{z-8}{6}.$

4. $\begin{cases} x = 2\,x' - 3\,y' + z' + 2, \\ y = -5\,x' + 8\,y' - 2\,z' - 1, \\ z = x' - 2\,y' + z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x - 3\,y - 2\,z - 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+10}{-8} = \dfrac{y+10}{9} = \dfrac{z+3}{-6}.$

5. $\begin{cases} x = -4\,x' + 2\,y' - z', \\ y = 5\,x' - 5\,y' + 6\,z', \\ z = -x' + 2\,y' - 3\,z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 4\,x - 2\,y - 4\,z + 5 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-9}{5} = \dfrac{y+7}{8} = \dfrac{z-10}{6}.$

6. $\begin{cases} x = 5\,x' - 6\,y' + 14\,z' + 3, \\ y = -4\,x' + 5\,y' - 12\,z', \\ z = -3\,x' + 3\,y' - 7\,z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x - 4\,y + 5\,z - 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-7}{8}.$

7. $\begin{cases} x = -3\,x' + 7\,y' + 2\,z' - 1, \\ y = -3\,x' + 9\,y' + z' - 1, \\ z = x' - 2\,y' - z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x + 4\,y - 4\,z - 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+2}{-5} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z+6}{2}.$

8. $\begin{cases} x = 5\,x' + 10\,y' + 4\,z' + 2, \\ y = -3\,x' - 5\,y' - 2\,z' + 3, \\ z = x' + 3\,y' + z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x - 2\,y - 4\,z + 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-10}{4} = \dfrac{z+3}{1}.$

9. $\begin{cases} x = 4\,x' + 8\,y' - 11\,z' + 2, \\ y = -2\,x' - 3\,y' + 4\,z' + 2, \\ z = -x' - 2\,y' + 3\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + y + 5\,z - 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y+7}{-8} = \dfrac{z+9}{0}.$

10. $\begin{cases} x = 5\,x' - y' - 6\,z' + 1, \\ y = 3\,x' - y' - 3\,z' - 2, \\ z = -4\,x' + y' + 5\,z' + 2, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x + 2\,y - 5\,z + 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-7}{5}.$

11. $\begin{cases} x = -2\,x' - y' - 4\,z' - 1, \\ y = x' + y' + 2\,z' - 1, \\ z = -3\,x' - y' - 7\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 2\,x - 5\,y - 3\,z + 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{y-8}{4} = \dfrac{z+6}{3}.$

12. $\begin{cases} x = 2\,x' + y' - 3\,z' + 3, \\ y = x' + y' - z', \\ z = 3\,x' + 2\,y' - 3\,z' - 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + 4\,y - 3\,z - 5 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y-4}{-8} = \dfrac{z+3}{-7}.$

13. $\begin{cases} x = 2\,x' + y' - z' - 3, \\ y = x' + y' + z' + 1, \\ z = 3\,x' + 2\,y' + z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 2\,x - 2\,y - z - 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-1}{-10} = \dfrac{z+7}{2}.$

14. $\begin{cases} x = -5\,x' - 2\,y' + z' + 2, \\ y = -3\,x' - y' + z' + 1, \\ z = -6\,x' - 2\,y' + z' - 2, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x + 4\,y + 4\,z - 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-10}{-10} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+5}{-7}.$

15. $\begin{cases} x = -12\,x' - 9\,y' + 8\,z' + 3, \\ y = x' + y' - 2\,z' - 2, \\ z = 4\,x' + 3\,y' - 3\,z' - 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x + 2\,y + z + 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x}{-10} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z+6}{-2}.$

16. $\begin{cases} x = 5\,x' - 2\,y' + 6\,z' + 2, \\ y = 3\,x' - y' + 4\,z' + 2, \\ z = 8\,x' - 3\,y' + 9\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 4\,x - 2\,y + 4\,z + 5 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+8}{-6} = \dfrac{z+1}{4}.$

17. $\begin{cases} x = -2\,x' + 3\,y' - z' - 1, \\ y = -x' - y' + z' + 1, \\ z = -x' + 6\,y' - 3\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x + 2\,y + 4\,z - 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+7}{8} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z-10}{-4}.$

18. $\begin{cases} x = x' - y' + z', \\ y = -2\,x' + y' + z' + 3, \\ z = 2\,x' - y' - 2\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + 5\,y - z + 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+6}{-10}.$

19. $\begin{cases} x = x' + 11\,y' + 3\,z', \\ y = -x' - 12\,y' - 3\,z' + 3, \\ z = -x' - 18\,y' - 4\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + y - z - 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-7}{9} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z+2}{10}.$

20. $\begin{cases} x = -x' - 2\,y' - 2\,z' + 3, \\ y = 3\,x' + 5\,y' + 3\,z' + 1, \\ z = 4\,x' + 6\,y' + 3\,z' - 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 2\,x + 4\,y - 2\,z - 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-8}{0} = \dfrac{y-4}{-9} = \dfrac{z-8}{2}.$

21. $\begin{cases} x = 3\,x' - y' + 3\,z' - 3, \\ y = -5\,x' + 2\,y' - 6\,z' + 1, \\ z = -x' + y' - 2\,z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x + 2\,y - 3\,z - 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z+1}{-7}.$

22. $\begin{cases} x = 4\,x' + 5\,y' - 4\,z' - 2, \\ y = 16\,x' + 20\,y' - 17\,z' - 3, \\ z = 23\,x' + 29\,y' - 25\,z' - 1, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x - 5\,y - 5\,z - 5 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y-5}{-8} = \dfrac{z+1}{1}.$

23. $\begin{cases} x = -2\,x' + y' - 2\,z' + 1, \\ y = -2\,x' + 2\,y' - 3\,z', \\ z = 5\,x' - 4\,y' + 6\,z' - 2, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ x + y - z - 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-6}{-7} = \dfrac{y-10}{7} = \dfrac{z-8}{2}.$

24. $\begin{cases} x = -x' - 3\,y' - 6\,z' - 1, \\ y = 3\,x' + 7\,y' + 15\,z' - 3, \\ z = 3\,x' + 6\,y' + 13\,z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x - y + 4\,z + 2 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+6}{-9} = \dfrac{y-7}{7} = \dfrac{z-7}{2}.$

25. $\begin{cases} x = -x' - y' + z' - 2, \\ y = x' + 2\,y' - z' + 1, \\ z = x' + y' - 2\,z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x + 5\,y + 3\,z - 1 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x}{7} = \dfrac{y+3}{-5} = \dfrac{z-7}{-4}.$

26. $\begin{cases} x = -12\,x' - 6\,y' - 5\,z' - 3, \\ y = 10\,x' + 5\,y' + 4\,z', \\ z = -9\,x' - 5\,y' - 6\,z', \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + 2\,y - z + 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-9}{1} = \dfrac{y+5}{6} = \dfrac{z-1}{2}.$

27. $\begin{cases} x = 5\,x' - 3\,y' - 5\,z', \\ y = 13\,x' - 10\,y' - 15\,z' - 3, \\ z = -5\,x' + 4\,y' + 6\,z' - 2, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 3\,x - 3\,y + z - 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-3}{5}.$

28. $\begin{cases} x = -4\,x' + 2\,y' + z' + 1, \\ y = -5\,x' + 2\,y' + 2\,z' - 2, \\ z = 6\,x' - 3\,y' - 2\,z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 5\,x + 2\,y + z - 5 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+7}{5} = \dfrac{y+3}{9} = \dfrac{z-9}{8}.$

29. $\begin{cases} x = 14\,x' - 5\,y' - 3\,z' - 2, \\ y = -8\,x' + 3\,y' + 2\,z' + 1, \\ z = -7\,x' + 2\,y' + z' - 2, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 2\,x - 3\,y + 4\,z + 3 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+6}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-10}{-2}.$

30. $\begin{cases} x = -5\,x' - 3\,y' - 4\,z' + 3, \\ y = 23\,x' + 10\,y' + 23\,z' - 2, \\ z = 6\,x' + y' + 8\,z' + 3, \end{cases}$
$\mathscr{P}:\ 4\,x - 4\,y + 4\,z + 4 = 0,$
$\ell:\ \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-7}{-5} = \dfrac{z-8}{7}.$

**Задача 1.12.** За начало новой системы координат $O'x'y'z'w'$ принята точка $O'$, а за единичные векторы ее осей — $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ и $\vec{e}_4{}'$. Координаты заданы в старой системе координат. Найти выражение новых координат $x', y', z', w'$ через старые $x, y, z, w$.

1. $O'(2,-1,3,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (-7,-9,2,-8)$, $\vec{e}\,'_2 = (-7,-14,-1,-10)$,

$\vec{e}\,'_3 = (2,7,2,4)$, $\vec{e}\,'_4 = (2,5,1,3)$.

2. $O'(-3,-2,1,3)$, $\vec{e}\,'_1 = (4,-4,-3,-9)$, $\vec{e}\,'_2 = (-4,3,2,8)$, $\vec{e}\,'_3 = (-2,3,2,5)$, $\vec{e}\,'_4 = (-3,4,2,7)$.
3. $O'(3,0,2,0)$, $\vec{e}\,'_1 = (3,-1,1,-3)$, $\vec{e}\,'_2 = (-6,1,-6,11)$, $\vec{e}\,'_3 = (-8,3,-7,15)$, $\vec{e}\,'_4 = (3,-1,3,-6)$.
4. $O'(0,-3,-3,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (-8,-1,9,4)$, $\vec{e}\,'_2 = (-7,2,7,4)$, $\vec{e}\,'_3 = (-16,-1,18,8)$, $\vec{e}\,'_4 = (-9,3,9,5)$.
5. $O'(3,-3,0,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-5,-3,2,8)$, $\vec{e}\,'_2 = (1,1,-2,-5)$, $\vec{e}\,'_3 = (-1,-1,1,3)$, $\vec{e}\,'_4 = (12,7,-5,-20)$.
6. $O'(-1,2,-2,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (-3,2,-2,-5)$, $\vec{e}\,'_2 = (-3,-5,-3,-2)$, $\vec{e}\,'_3 = (-3,-1,-3,-5)$, $\vec{e}\,'_4 = (2,1,2,3)$.
7. $O'(2,-2,0,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-5,3,4,-2)$, $\vec{e}\,'_2 = (-2,1,2,-1)$, $\vec{e}\,'_3 = (2,-2,-2,1)$, $\vec{e}\,'_4 = (5,-3,-5,3)$.
8. $O'(0,0,-1,-1)$, $\vec{e}\,'_1 = (-2,-4,5,19)$, $\vec{e}\,'_2 = (2,4,-4,-15)$, $\vec{e}\,'_3 = (-1,-6,4,17)$, $\vec{e}\,'_4 = (-1,-1,3,11)$.
9. $O'(-2,-2,2,0)$, $\vec{e}\,'_1 = (14,-14,-23,4)$, $\vec{e}\,'_2 = (-39,37,60,-13)$, $\vec{e}\,'_3 = (25,-24,-39,8)$, $\vec{e}\,'_4 = (15,-14,-23,5)$.
10. $O'(1,2,0,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (3,-1,4,2)$, $\vec{e}\,'_2 = (-1,1,1,-1)$, $\vec{e}\,'_3 = (5,-3,3,4)$, $\vec{e}\,'_4 = (-3,2,-1,-3)$.
11. $O'(1,-2,-3,-1)$, $\vec{e}\,'_1 = (-4,-7,-1,-5)$, $\vec{e}\,'_2 = (-4,-7,-1,-4)$, $\vec{e}\,'_3 = (-11,-19,-2,-12)$, $\vec{e}\,'_4 = (14,24,1,17)$.
12. $O'(1,-3,-3,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (3,-5,9,-3)$, $\vec{e}\,'_2 = (-1,2,-3,1)$, $\vec{e}\,'_3 = (4,-8,13,-7)$, $\vec{e}\,'_4 = (3,-7,10,-7)$.
13. $O'(-1,3,-3,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (-2,3,3,-1)$, $\vec{e}\,'_2 = (-6,5,6,-4)$, $\vec{e}\,'_3 = (5,-4,-4,3)$, $\vec{e}\,'_4 = (3,-2,-2,2)$.
14. $O'(1,2,2,-2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-10,-5,-5,8)$, $\vec{e}\,'_2 = (-46,-21,-18,30)$, $\vec{e}\,'_3 = (-32,-15,-13,21)$, $\vec{e}\,'_4 = (19,9,8,-13)$.
15. $O'(-3,-2,0,-1)$, $\vec{e}\,'_1 = (5,-3,-2,12)$, $\vec{e}\,'_2 = (-1,1,1,-3)$, $\vec{e}\,'_3 = (2,-1,-1,4)$, $\vec{e}\,'_4 = (-1,-1,1,2)$.
16. $O'(-3,-1,2,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (5,8,6,-4)$, $\vec{e}\,'_2 = (2,5,3,-2)$, $\vec{e}\,'_3 = (-6,-11,-8,5)$, $\vec{e}\,'_4 = (3,6,4,-3)$.

17. $O'(-2,2,0,1)$, $\vec{e}\,'_1 = (-12,-8,-3,-19)$, $\vec{e}\,'_2 = (-3,-2,-1,-5)$, $\vec{e}\,'_3 = (1,1,1,2)$, $\vec{e}\,'_4 = (-14,-9,-4,-22)$.

18. $O'(-2,0,-3,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (3,-1,3,3)$, $\vec{e}\,'_2 = (-8,3,-4,-7)$, $\vec{e}\,'_3 = (-11,4,-5,-9)$, $\vec{e}\,'_4 = (21,-8,10,18)$.

19. $O'(2,3,0,3)$, $\vec{e}\,'_1 = (3,-17,-12,-11)$, $\vec{e}\,'_2 = (1,-3,-2,-2)$, $\vec{e}\,'_3 = (12,-46,-31,-28)$, $\vec{e}\,'_4 = (-8,31,21,19)$.

20. $O'(-3,1,-2,1)$, $\vec{e}\,'_1 = (-17,38,19,-25)$, $\vec{e}\,'_2 = (-6,14,7,-9)$, $\vec{e}\,'_3 = (-3,7,4,-5)$, $\vec{e}\,'_4 = (-6,13,7,-9)$.

21. $O'(2,0,-1,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-1,2,-2,-2)$, $\vec{e}\,'_2 = (1,-2,4,3)$, $\vec{e}\,'_3 = (2,-3,3,2)$, $\vec{e}\,'_4 = (-2,1,2,3)$.

22. $O'(-2,2,0,-2)$, $\vec{e}\,'_1 = (5,11,7,8)$, $\vec{e}\,'_2 = (-5,-9,-6,-7)$, $\vec{e}\,'_3 = (3,9,5,7)$, $\vec{e}\,'_4 = (2,3,2,3)$.

23. $O'(-1,2,2,-2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-8,10,6,15)$, $\vec{e}\,'_2 = (-7,9,6,13)$, $\vec{e}\,'_3 = (-5,6,4,9)$, $\vec{e}\,'_4 = (2,-5,-3,-6)$.

24. $O'(-3,-2,-3,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-6,-2,4,3)$, $\vec{e}\,'_2 = (2,1,-1,-1)$, $\vec{e}\,'_3 = (-6,-1,4,1)$, $\vec{e}\,'_4 = (-7,-1,5,2)$.

25. $O'(1,1,1,-3)$, $\vec{e}\,'_1 = (14,-15,7,-8)$, $\vec{e}\,'_2 = (7,-5,1,-3)$, $\vec{e}\,'_3 = (-6,6,-2,3)$, $\vec{e}\,'_4 = (-8,10,-5,5)$.

26. $O'(-1,1,0,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-13,2,-8,15)$, $\vec{e}\,'_2 = (-4,-1,-2,5)$, $\vec{e}\,'_3 = (7,-4,5,-7)$, $\vec{e}\,'_4 = (8,-2,5,-9)$.

27. $O'(3,-3,-3,0)$, $\vec{e}\,'_1 = (12,3,5,-3)$, $\vec{e}\,'_2 = (9,2,9,-1)$, $\vec{e}\,'_3 = (-11,-3,-12,1)$, $\vec{e}\,'_4 = (7,2,2,-2)$.

28. $O'(-3,1,1,-2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-4,9,-6,16)$, $\vec{e}\,'_2 = (1,-3,2,-5)$, $\vec{e}\,'_3 = (1,-3,3,-6)$, $\vec{e}\,'_4 = (2,-4,2,-7)$.

29. $O'(-2,3,-3,2)$, $\vec{e}\,'_1 = (-5,17,-4,9)$, $\vec{e}\,'_2 = (2,-7,1,-4)$, $\vec{e}\,'_3 = (-6,22,-3,13)$, $\vec{e}\,'_4 = (-4,14,-4,7)$.

30. $O'(3,0,2,-2)$, $\vec{e}\,'_1 = (2,-6,-4,3)$, $\vec{e}\,'_2 = (1,-8,-6,4)$, $\vec{e}\,'_3 = (-3,17,12,-8)$, $\vec{e}\,'_4 = (-1,5,3,-2)$.

# 2. Евклидовы пространства

## 2.1. Скалярное произведение. Матрица Грама. Ортогонализация

**Определение 2.1.** Говорят, что в линейном пространстве $\mathbf{E}$ задано *скалярное произведение*, если для любой пары векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$ определено число $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$ так, что при всех $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены условия:

1. $(\vec{a}, \vec{a}) \geqslant 0$, причем $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$;
2. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
3. $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}) + \beta(\vec{b}, \vec{c})$.

**Определение 2.2.** Линейное пространство $\mathbf{E}$, в котором задано скалярное произведение, называют *евклидовым линейным пространством.*

С помощью скалярного произведения в линейном евклидовом пространстве вводятся *норма* вектора и *угол* между векторами по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \tag{2.1}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{2.2}$$

**Определение 2.3.** *Матрицей Грама* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ $n$-мерного евклидова пространства $\mathbf{E}$, $k \leqslant n$, называется матрица

$$G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_1, \vec{a}_k) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_2, \vec{a}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{a}_k, \vec{a}_1) & (\vec{a}_k, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_k, \vec{a}_k) \end{pmatrix}.$$

Матрицу Грама векторов базиса $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ пространства $\mathbf{E}$ называют матрицей *метрических коэффициентов*, поскольку она позволяет находить скалярные произведения векторов, если известны их координаты в этом базисе:

$$\vec{a} = \sum_{s=1}^{n} a^s \vec{f}_s, \quad \vec{b} = \sum_{s=1}^{n} b^s \vec{f}_s \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} (\vec{f}_i, \vec{f}_j) a^i b^j. \qquad (2.3)$$

Заметим, что определитель матрицы Грама неотрицателен, причем равенство $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = 0$ равносильно линейной зависимости системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$ называется *ортонормированным*, если $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 1$ при $i = j$. Матрица Грама ортонормированного набора векторов единична.

Если базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ пространства $\mathbf{E}$ ортонормирован, то формулы (2.3) вычисления скалярных произведений упрощаются:

$$\vec{a} = \sum_{s=1}^{n} a^s \vec{f}_s, \quad \vec{b} = \sum_{s=1}^{n} b^s \vec{f}_s \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{s=1}^{n} a^s b^s. \qquad (2.4)$$

**Пример 2.1.** Найти матрицу Грама системы векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:
*a*) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (-1, 1)$;
*b*) $\vec{a} = (0, 2, 1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 0, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 3, 0, 0)$.

**Решение.** *a*) По формулам (2.4) находим

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 13,\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = -5,\ (\vec{b}, \vec{b}) = 2;\ G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

*b*) Аналогично предыдущему,

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 6,\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = 1,\ (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 7,\ (\vec{b}, \vec{b}) = 6,$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{b}) = 1,\ (\vec{c}, \vec{c}) = 14;\ G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 14 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Ответ.** *a*) $\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 14 \end{pmatrix}$.

На основании нижеследующей теоремы можно утверждать, что в линейном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ *— линейно независимая система векторов в евклидовом пространстве* $\mathbf{E}$. *Тогда в* $\mathbf{E}$ *существует система векторов* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$, *удовлетворяющая условиям:*

1. *Система* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ *ортогональна и нормирована;*
2. *Для каждого значения* $i = 1, \ldots, k$ *линейные оболочки векторов* $\langle \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_i \rangle$ *и* $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i \rangle$ *совпадают.*

Заметим, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ при этом определены с точностью до знака.

Векторы $\vec{e}_i$ строятся последовательно:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{g}_1|}\vec{g}_1; \tag{2.5}$$

если векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}$ уже построены, то

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|}, \quad \text{где} \quad \vec{h}_i = \vec{g}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{g}_i, \vec{e}_j)\vec{e}_j. \tag{2.6}$$

Процедура, описанная формулами (2.5) — (2.6), называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта.*

**Пример 2.2.** Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, найти ортонормированный базис подпространства $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, где векторы заданы своими координатами в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (3, -2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -3, 3)$, $\vec{w} = (2, 3, -1, -2)$.

**Решение.** Находим последовательно

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right),$$

$$\vec{h}_2 = \vec{v} - (\vec{v}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right),$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{|\vec{h}_2|}\vec{h}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{3}{\sqrt{85}}, -\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}}\right),$$

$$\vec{h}_3 = \vec{w} - (\vec{w}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{w}, \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \left(\frac{37}{17}, \frac{148}{51}, -\frac{58}{51}, -\frac{95}{51}\right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{|\vec{h}_3|}\vec{h}_3 = \left(\frac{37\sqrt{46614}}{15538}, \frac{74\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{29\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{95\sqrt{46614}}{46614}\right). \qquad \square$$

**Ответ.** $\vec{e}_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{3}{\sqrt{85}}, -\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}}\right)$, $\vec{e}_3 = \left(\frac{37\sqrt{46614}}{15538}, \frac{74\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{29\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{95\sqrt{46614}}{46614}\right)$.

Далее, если не сказано обратное, будем считать, что базис линейного евклидова пространства $\mathbf{E}$ ортонормирован.

## 2.2. Евклидовы аффинные пространства. Метрические характеристики геометрических объектов

**Определение 2.4.** Аффинное пространство $\mathscr{A}$ называется *евклидовым аффинным*, или *евклидовым точечным*, пространством, если ассоциированное с ним линейное пространство $\mathbf{E}$ евклидово.

Систему координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ в евклидовом аффинном пространстве называют *прямоугольной*, если базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в ассоциированном линейном пространстве ортонормирован.

Скалярное произведение позволяет ввести в аффинном пространстве понятия расстояния, угла, площади и объема, свойства которых аналогичны их свойствам, известным из элементарной геометрии.

*Расстояние* $|MN|$ между точками $M, N \in \mathscr{A}$ и *косинус угла* $\angle ACB$, $A, B, C \in \mathscr{A}$ определяются формулами:

$$|MN| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN})}, \tag{2.7}$$

$$\cos\angle ACB = \frac{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}. \tag{2.8}$$

**Пример 2.3.** Найти длину стороны $AB$ и $\cos\angle ACB$ треугольника $\triangle ABC$, $A(2,-1), B(5,3), C(1,-3)$, если известна матрица метрических коэффициентов базиса $G = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Находим $\overrightarrow{AB} = (3,4)$, $\overrightarrow{CA} = (1,2)$, $\overrightarrow{CB} = (4,6)$. Так как система координат в пространстве не является прямоугольной, то для вычисления скалярных произведений векторов используем (2.3). Расстояния и углы находим по формулам (2.7) и (2.8):

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{5\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 4^2} = \sqrt{101};$$

аналогично

$$|CA| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{17}, \quad |CB| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 5\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot 6 = 58;$$
$$\cos\angle ACB = \frac{58}{\sqrt{17}\cdot 10\sqrt{2}} = \frac{29\sqrt{34}}{170}. \qquad \square$$

**Ответ.** $|AB| = \sqrt{101}$; $\cos\angle ACB = \dfrac{29\sqrt{34}}{170}$.

Напомним, что $k$-мерным *параллелепипедом*, $k \leqslant n$, с вершиной в точке $A_0 \in \mathscr{A}$, построенным на линейно независимых векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$, называют множество

$$\Pi = \left\{M \in \mathscr{A} \colon \overrightarrow{A_0M} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_k\vec{a}_k,\ (t_1, \ldots, t_k) \in [0, 1]^k\right\}.$$

*Вершинами* параллелепипеда $\Pi$ называют точки $A_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$ такие, что $\overrightarrow{A_0A_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}} = \varepsilon_1\vec{a}_1 + \ldots + \varepsilon_k\vec{a}_k$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1; $A_0 = A_{0\ldots0}$. Параллелепипед $\Pi$ является выпуклой оболочкой своих вершин.

*Симплексом* размерности $k \leqslant n$ с вершиной в точке $A_0 \in \mathscr{A}$, построенным на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$, где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — линейно независимы, называют множество

$$\Sigma = \left\{M \colon \overrightarrow{A_0M} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_k\vec{a}_k,\ (t_1, \ldots, t_k) \in [0, 1]^k, t_1 + \cdots + t_k \leqslant 1\right\}.$$

*Вершинами* симплекса $\Sigma$ называют точки $A_i$ такие, что $\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{a}_i$, $i = 1, \ldots, k$, и саму точку $A_0$. Симплекс также является выпуклой оболочкой своих вершин.

При $k = 2$ параллелепипед естественно называть *параллелограммом*, а симплекс — *треугольником*.

*Объемы* (в двумерном случае *площади*) $k$-мерных параллелепипеда и симплекса вычисляются по формулам:

$$|\Pi| = \sqrt{\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)}, \tag{2.9}$$
$$|\Sigma| = \frac{1}{k!}\sqrt{\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)}. \tag{2.10}$$

**Пример 2.4.** Найти площадь треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(-1,3,0,-6,2)$, $B(3,5,1,-4,5)$, $C(1,4,1,1,3)$ и координаты основания высоты, опущенной из точки $B$ на сторону $AC$.

**Решение.** Находим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их матрицу Грама:

$$\overrightarrow{AB}=(4,2,1,2,3),\quad \overrightarrow{AC}=(2,1,1,7,1);\qquad G(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{pmatrix}34 & 28\\ 28 & 56\end{pmatrix}.$$

Площадь треугольника можно вычислить по формуле (2.10):

$$|\triangle ABC|=\tfrac{1}{2}\sqrt{\det G(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}=2\sqrt{70}.$$

Пусть точка $H$ — основание высоты. Тогда $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}$. Но $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Из уравнения $(\overrightarrow{AC},\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$ находим $\lambda=\dfrac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC})}=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, и, следовательно, $H\left(0,\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$. □

**Ответ.** $|\triangle ABC|=2\sqrt{70}$; $H\left(0,\frac{7}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Пусть плоскости $\mathscr{P}_1=M_1+\left\langle\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\right\rangle$ и $\mathscr{P}_2=M_2+\left\langle\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m\right\rangle$ скрещиваются или параллельны. Обозначим через $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_r$ какой-либо базис пространства $\left\langle\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\ldots\ \vec{b}_m\right\rangle$. Расстояние между $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ можно найти как высоту параллелепипеда размерности $R=r+1$ с вершиной в точке $M_1$, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_r$, основание которого — параллелепипед размерности $r$ с вершиной в точке $M_1$, построенный на векторах $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_r$:

$$d=\sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_r)}{\det G(\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_r)}}.\tag{2.11}$$

Если система координат в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ прямоугольная, то расстояние от точки $M_0(x_0^1,\ldots,x_0^n)$ до гиперплоскости $\mathscr{P}\colon A_1x^1+\ldots+A_nx^n+B=0$ проще найти по формуле

$$d=\frac{|A_1x_0^1+\ldots+A_nx_0^n+B|}{\sqrt{A_1^2+\ldots+A_n^2}}.\tag{2.12}$$

**Пример 2.5.** Найти расстояние от точки $M(-14,-6,-2,2)$:

$a$) до гиперплоскости $\mathscr{P}_1\colon\ x^1-6\,x^2-2\,x^3-5\,x^4+17=0$;

$b$) до плоскости $\mathscr{P}_2{=}A+\left\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\right\rangle$, где $A(-1{,}2{,}2{,}3)$, $\vec{v}_1{=}(-12{,}1{,}0{,}1)$, $\vec{v}_2=(0,0,-1,1)$.

**Решение.** $a$) Воспользуемся формулой (2.12):

$$d_1=\frac{|-14+36+4-10+17|}{\sqrt{1^2+(-6)^2+(-2)^2+(-5)^2}}=\frac{\sqrt{66}}{2}.$$

$b$) Заметим, что векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\overrightarrow{AM}=(-13,-8,-4,-1)$ линейно независимы. В соответствии с формулой (2.11) расстояние от точки $M$ до плоскости $\mathscr{P}_2$ может быть найдено так:

$$G(\overrightarrow{AM},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}250&147&3\\147&146&1\\3&1&2\end{pmatrix},\qquad G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}146&1\\1&2\end{pmatrix},$$

$$\det G(\overrightarrow{AM},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=29100,\qquad \det G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=291,$$

$$d_2=\sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{AM},\vec{v}_1,\vec{v}_2)}{\det G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}}=10.$$ □

**Ответ.** $a$) $\frac{\sqrt{66}}{2}$; $b$) 10.

**Пример 2.6.** Найти расстояние между прямой $\ell$, проходящей через точки $A(4,-1,-10,-5)$ и $B(22,-9,-2,-13)$, и плоскостью, проходящей через точку $M(0,-2,2,-1)$ параллельно подпространству $\mathbf{L}=\left\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\right\rangle$, где $\vec{v}_1=(1,-4,-4,-4)$, $\vec{v}_2=(1,-4,4,4)$.

**Решение.** Вектор $\overrightarrow{AB}=(18,-8,8,-8)$, поэтому в качестве направляющего вектора $\ell$ можно взять вектор $\vec{u}=(9,-4,4,-4)$. Вектор $\overrightarrow{MA}=(4,1,-12,-4)$. Используя формулу (2.11), последовательно находим

$$G(\overrightarrow{MA},\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}177&0&64&-64\\0&129&25&25\\64&25&49&-15\\-64&25&-15&49\end{pmatrix},$$

$$G(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 129 & 25 & 25 \\ 25 & 49 & -15 \\ 25 & -15 & 49 \end{pmatrix};$$

$$d = \sqrt{\frac{\det(G(\overrightarrow{MA}, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2))}{\det(G(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2))}} = 7. \qquad \square$$

**Ответ.** 7.

**Пример 2.7.** В четырехмерном пространстве заданы точки $O(12, 11, 9, 6)$, $A(2, 0, 6, 0)$, $B(6, -2, 4, 4)$, $C(1, 3, 9, -1)$ и $D(9, -1, 13, -1)$. Найти:

i. Объем трехмерного симплекса $ABCD$;

ii. Угол наклона ребра $AD$ симплекса $ABCD$ к плоскости основания $ABC$;

iii. Объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$;

iv. Объем четырехмерного симплекса $OABCD$.

**Решение.**

i. Находим векторы
$\overrightarrow{AB} = (4, -2, -2, 4)$,
$\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 3, -1)$,
$\overrightarrow{AD} = (7, -1, 7, -1)$.
Объем симплекса $ABCD$ (рис. 3) равен $V =$

$$= \frac{1}{3!}\sqrt{\det(G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}))} = \frac{80}{3}.$$

ii. Площадь основания симплекса $ABCD$ — треугольника $\triangle ABC$ — находим как $S = \frac{1}{2!}\sqrt{\det(G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))} = 10$. Если $DH$ — высота симплекса $ABCD$,

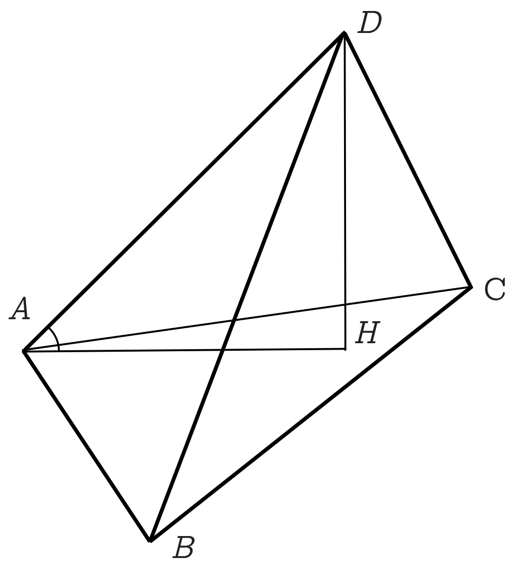


**Рис. 3**

опущенная на основание $ABC$, то $|DH| = \dfrac{3V}{S} = 8$, а синус угла $\angle DAH$ можно найти как отношение

$$\frac{|DH|}{|AD|} = \frac{8}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{5}.$$

iii. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, находим по формуле (2.9):

$$\sqrt{\det G(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})} = 960.$$

iv. Четырехмерный объем симплекса $OABCD$ в $4! = 24$ раза меньше объема соответствующего параллелепипеда: $\dfrac{960}{24} = 40$. □

**Ответ.** i. $\dfrac{80}{3}$; ii. $\arcsin \dfrac{4}{5}$; iii. 960; iv. 40.

## 2.3. Задачи

**Задача 2.1.** Найти матрицу Грама системы векторов
*a*) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$,
*b*) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^5$,
заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

1. *a*) $\vec{a} = (-2, -1)$, $\vec{b} = (1, 0)$;
   *b*) $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, -1, -1, 0)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1, 0, -2)$.
2. *a*) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1)$;
   *b*) $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, -2, -1, 1, 2)$.
3. *a*) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (2, -1)$;
   *b*) $\vec{a} = (2, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0, -2, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, -1, 2, -2)$.
4. *a*) $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{b} = (0, -3)$;
   *b*) $\vec{a} = (2, 1, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, -1, 1, 0)$.
5. *a*) $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{b} = (1, 0)$;
   *b*) $\vec{a} = (1, 2, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1, 0, -2)$, $\vec{c} = (1, 1, 1, 1, -2)$.
6. *a*) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (2, -2)$;
   *b*) $\vec{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, -1, 1, 1)$.

7. $a)$ $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (2, 2)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1, 1, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, -1, 1, -2)$.

8. $a)$ $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 1)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 2, 2, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 2, 1, 2)$, $\vec{c} = (-1, -2, 1, 1, 0)$.

9. $a)$ $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 2, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-2, -2, 2, -2, 0)$, $\vec{c} = (2, -2, -2, 0, -1)$.

10. $a)$ $\vec{a} = (-3, -3)$, $\vec{b} = (3, 1)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 1, 1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 0, 0, -1)$, $\vec{c} = (-2, 1, 2, 2, 1)$.

11. $a)$ $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (0, 3)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 1, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, -2, -1, 2, 0)$.

12. $a)$ $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -1)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1,-1,-1,-1,-1)$, $\vec{c} = (2,-1,-2,0,-2)$.

13. $a)$ $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 1, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, -1, -1, 0)$, $\vec{c} = (2, 2, 0, -2, 1)$.

14. $a)$ $\vec{a} = (0, 2)$, $\vec{b} = (1, -3)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2, 2, 2)$, $\vec{c} = (1, 1, 1, 2, 2)$.

15. $a)$ $\vec{a} = (0, -1)$, $\vec{b} = (-3, 2)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 1, -2, 0, 0)$.

16. $a)$ $\vec{a} = (0, -2)$, $\vec{b} = (3, -2)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 2, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 1, 1)$, $\vec{c} = (-2, -2, 0, 1, -2)$.

17. $a)$ $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2)$;
$b)$ $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, -2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-2, 0, 1, 0, 2)$.

18. $a)$ $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (3, 0)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1, -1, -2)$, $\vec{c} = (-2, -2, 0, 0, 0)$.

19. $a)$ $\vec{a} = (3, 3)$, $\vec{b} = (-2, 0)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, -2, -2, 1, 2)$, $\vec{c} = (0, 2, 0, -1, -2)$.

20. $a)$ $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (3, 0)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 1, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, 1, -2, -1)$, $\vec{c} = (2, -2, -1, -1, 2)$.

21. $a)$ $\vec{a} = (-2, -2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$;
$b)$ $\vec{a} = (1, 2, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, 2, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -1, -2, 0)$.

22. $a)$ $\vec{a} = (0,3)$, $\vec{b} = (-2,-2)$;
$b)$ $\vec{a} = (2,1,2,1,2)$, $\vec{b} = (0,2,-1,2,0)$, $\vec{c} = (-1,2,1,2,0)$.
23. $a)$ $\vec{a} = (-1,3)$, $\vec{b} = (-2,3)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,1,2,1,1)$, $\vec{b} = (-2,-2,0,-2,-1)$, $\vec{c} = (2,-2,-1,0,1)$.
24. $a)$ $\vec{a} = (-1,3)$, $\vec{b} = (1,1)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,2,1,2,1)$, $\vec{b} = (-2,0,-1,1,1)$, $\vec{c} = (2,-2,-1,2,-2)$.
25. $a)$ $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b} = (3,0)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,2,1,2,2)$, $\vec{b} = (1,1,-1,0,1)$, $\vec{c} = (1,-2,0,-1,0)$.
26. $a)$ $\vec{a} = (-1,0)$, $\vec{b} = (2,1)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,1,2,1,2)$, $\vec{b} = (-2,-2,0,0,-2)$, $\vec{c} = (2,-2,-2,1,1)$.
27. $a)$ $\vec{a} = (2,2)$, $\vec{b} = (0,2)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,1,1,1,1)$, $\vec{b} = (-2,1,-2,-2,-2)$, $\vec{c} = (-1,-2,-2,0,-2)$.
28. $a)$ $\vec{a} = (0,3)$, $\vec{b} = (-1,1)$;
$b)$ $\vec{a} = (2,1,2,1,1)$, $\vec{b} = (2,-1,-1,0,-1)$, $\vec{c} = (1,-2,-1,1,-2)$.
29. $a)$ $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (-1,2)$;
$b)$ $\vec{a} = (2,2,1,1,2)$, $\vec{b} = (-2,-2,-2,-2,-1)$, $\vec{c} = (2,2,-2,-1,-1)$.
30. $a)$ $\vec{a} = (-2,0)$, $\vec{b} = (-1,-1)$;
$b)$ $\vec{a} = (1,1,1,2,1)$, $\vec{b} = (1,2,-2,0,2)$, $\vec{c} = (1,0,-2,-1,-1)$.

**Задача 2.2.** Применяя процесс ортогонализации, найти ортонормированный базис подпространства $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

1. $\vec{u} = (2,2,-2,0)$, $\vec{v} = (-2,2,0,-1)$, $\vec{w} = (1,-2,0,1)$.
2. $\vec{u} = (-2,2,0,0)$, $\vec{v} = (2,1,0,-2)$, $\vec{w} = (0,-1,-1,-1)$.
3. $\vec{u} = (-3,0,-1,1)$, $\vec{v} = (-1,-3,1,-3)$, $\vec{w} = (0,0,-3,1)$.
4. $\vec{u} = (0,1,-3,3)$, $\vec{v} = (-1,1,3,1)$, $\vec{w} = (3,-3,-1,1)$.
5. $\vec{u} = (0,-3,3,0)$, $\vec{v} = (-1,1,0,-1)$, $\vec{w} = (0,-2,3,3)$.
6. $\vec{u} = (-2,-1,0,-1)$, $\vec{v} = (-2,-1,1,-3)$, $\vec{w} = (3,-3,-1,-3)$.
7. $\vec{u} = (-3,0,-1,-3)$, $\vec{v} = (-2,-1,1,0)$, $\vec{w} = (-2,3,3,1)$.
8. $\vec{u} = (-2,-2,-1,1)$, $\vec{v} = (-1,-2,-2,-2)$, $\vec{w} = (2,0,-2,-2)$.
9. $\vec{u} = (3,0,-1,-3)$, $\vec{v} = (1,3,1,-2)$, $\vec{w} = (-3,-1,1,0)$.

10. $\vec{u} = (-3, 2, -3, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2, -3, -1)$, $\vec{w} = (3, 0, -3, 3)$.
11. $\vec{u} = (-3, 0, -3, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 0, -2)$, $\vec{w} = (-1, -3, -3, -2)$.
12. $\vec{u} = (2, 3, -1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, 2, 3)$, $\vec{w} = (1, 2, 3, 2)$.
13. $\vec{u} = (2, 0, 1, 3)$, $\vec{v} = (0, 3, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, -1, -3, 3)$.
14. $\vec{u} = (-3, 2, 0, -3)$, $\vec{v} = (-2, -1, 0, 0)$, $\vec{w} = (2, -2, 1, 1)$.
15. $\vec{u} = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-2, -1, -3, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, -3, 1)$.
16. $\vec{u} = (0, -3, -3, 1)$, $\vec{v} = (3, 2, -1, -3)$, $\vec{w} = (-1, 0, -2, -1)$.
17. $\vec{u} = (2, 3, 1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 3, -1, 1)$, $\vec{w} = (-2, 3, -2, 1)$.
18. $\vec{u} = (-1, 2, 2, -3)$, $\vec{v} = (-3, 3, -2, -1)$, $\vec{w} = (-1, 2, 0, 3)$.
19. $\vec{u} = (-2, -3, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, -2, -1)$, $\vec{w} = (-3, 1, -1, -2)$.
20. $\vec{u} = (-1, -3, -2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, -1, -1)$, $\vec{w} = (0, -2, -2, 3)$.
21. $\vec{u} = (-3, -1, -3, -1)$, $\vec{v} = (-1, -3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, -2, 0)$.
22. $\vec{u} = (-1, 2, -2, -2)$, $\vec{v} = (-3, -2, -1, 1)$, $\vec{w} = (-1, 3, -1, 2)$.
23. $\vec{u} = (3, -3, -3, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, 2, 0)$, $\vec{w} = (-1, 0, -2, -1)$.
24. $\vec{u} = (-3, 2, -1, -2)$, $\vec{v} = (-1, -2, -1, -2)$, $\vec{w} = (-1, -2, 3, -3)$.
25. $\vec{u} = (-3, 1, 3, -1)$, $\vec{v} = (3, 0, -2, 2)$, $\vec{w} = (0, -3, -1, -2)$.
26. $\vec{u} = (-2, 3, 0, 3)$, $\vec{v} = (0, 2, -2, 1)$, $\vec{w} = (-3, 3, -3, 3)$.
27. $\vec{u} = (-3, -1, 3, 2)$, $\vec{v} = (1, -3, -2, -3)$, $\vec{w} = (1, -3, 2, 1)$.
28. $\vec{u} = (-3, -2, -2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 2, 3)$, $\vec{w} = (3, -1, 0, -3)$.
29. $\vec{u} = (1, 3, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2, 2)$, $\vec{w} = (-3, -2, -3, -1)$.
30. $\vec{u} = (-1, -1, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, -2, -1, 3)$.

**Задача 2.3.** Найти длину стороны $AB$ и $\cos\angle ACB$ треугольника $\triangle ABC$, если известна матрица метрических коэффициентов базиса $G$.

1. $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-1, -14)$, $B(5, 5)$, $C(8, -4)$.
2. $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A(7, 3)$, $B(10, 1)$, $C(6, 9)$.

3. $G=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-11,-10),\ B(-13,-3),\ C(-8,-6)$.

4. $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A(-7,-1),\ B(-17,-6),\ C(-9,1)$.

5. $G=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(7,-15),\ B(9,-6),\ C(-1,-8)$.

6. $G=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-9,-1),\ B(-2,-9),\ C(-3,-5)$.

7. $G=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(5,-13),\ B(3,-3),\ C(-4,-5)$.

8. $G=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(5,-9),\ B(-4,-9),\ C(3,-8)$.

9. $G=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A(2,6),\ B(-5,10),\ C(-2,8)$.

10. $G=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-9,6),\ B(0,14),\ C(-8,7)$.

11. $G=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-18,7),\ B(1,3),\ C(-8,6)$.

12. $G=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-1,-10),\ B(6,-10),\ C(3,-2)$.

13. $G=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A(7,-9),\ B(10,-10),\ C(2,-5)$.

14. $G=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(1,6),\ B(11,-8),\ C(3,-4)$.

15. $G=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(5,-15),\ B(4,-4),\ C(8,-5)$.

16. $G=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A(-10,3),\ B(-12,-4),\ C(-4,6)$.

17. $G=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $A(6,-10),\ B(-6,-9),\ C(-4,-4)$.

18. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(9,17)$, $B(10,16)$, $C(6,9)$.

19. $G = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(1,15)$, $B(0,8)$, $C(-5,10)$.

20. $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A(-4,-10)$, $B(-1,-14)$, $C(-8,-6)$.

21. $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-5,1)$, $B(-6,-4)$, $C(-9,6)$.

22. $G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A(5,18)$, $B(-4,2)$, $C(3,9)$.

23. $G = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-3,1)$, $B(-2,9)$, $C(5,10)$.

24. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(3,2)$, $B(-14,3)$, $C(-6,-5)$.

25. $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A(-2,9)$, $B(10,11)$, $C(6,6)$.

26. $G = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A(1,7)$, $B(-8,-3)$, $C(-6,3)$.

27. $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A(-1,-16)$, $B(-2,-8)$, $C(-8,-6)$.

28. $G = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $A(9,8)$, $B(7,3)$, $C(3,6)$.

29. $G = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(4,-11)$, $B(2,3)$, $C(7,-1)$.

30. $G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A(6,-3)$, $B(10,-11)$, $C(5,-4)$.

**Задача 2.4.** Найти площадь треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A$, $B$, $C$ и координаты точки $H$ — основания высоты, опущенной из точки $B$ на сторону $AC$.

1. $A(0, 1, -5, -2, 4)$, $B(4, 2, -1, 1, 5)$, $C(5, 4, -4, 2, 7)$.
2. $A(-1, -2, -7, -9, 6)$, $B(1, 1, -5, -7, 7)$, $C(4, 3, -5, -4, 8)$.
3. $A(-7, 1, -7, 0, 2)$, $B(-5, 5, -2, 3, 6)$, $C(-3, 4, -3, 2, 5)$.
4. $A(-2, 8, -7, 9, 6)$, $B(2, 11, -2, 10, 11)$, $C(-1, 13, -3, 12, 11)$.
5. $A(2, -2, -2, -4, 8)$, $B(7, 3, 2, -1, 12)$, $C(3, 3, 0, 0, 12)$.
6. $A(5, 7, 4, 8, 8)$, $B(6, 11, 9, 11, 11)$, $C(6, 8, 5, 10, 10)$.
7. $A(-7, 0, -4, 8, 10)$, $B(-6, 4, 1, 10, 13)$, $C(-5, 2, 0, 11, 12)$.
8. $A(-1, 2, -9, 7, -6)$, $B(0, 6, -6, 10, -1)$, $C(4, 3, -7, 11, -5)$.
9. $A(-10, 4, -1, 9, -10)$, $B(-9, 5, 0, 12, -9)$, $C(-7, 8, 0, 10, -6)$.
10. $A(-10, 1, -1, -9, 3)$, $B(-5, 3, 2, -6, 7)$, $C(-5, 5, 2, -4, 4)$.
11. $A(1, -4, -9, 3, -5)$, $B(4, -2, -5, 7, 0)$, $C(2, 0, -4, 5, 0)$.
12. $A(8, 2, -3, 2, -10)$, $B(9, 6, 2, 7, -6)$, $C(11, 3, 1, 3, -7)$.
13. $A(-1, 8, -2, -9, 5)$, $B(4, 11, 0, -6, 10)$, $C(4, 11, -1, -6, 7)$.
14. $A(-2, 8, 4, -1, -10)$, $B(-1, 12, 9, 3, -8)$, $C(1, 12, 7, 1, -7)$.
15. $A(-6, -7, 6, 10, -1)$, $B(-3, -5, 9, 11, 2)$, $C(-3, -6, 11, 11, 1)$.
16. $A(-8, 2, 1, -8, -10)$, $B(-5, 4, 3, -5, -7)$, $C(-6, 7, 3, -5, -9)$.
17. $A(-4, 9, -2, 3, 1)$, $B(-1, 10, 1, 6, 3)$, $C(-2, 12, 1, 5, 3)$.
18. $A(6, 6, 4, 10, 5)$, $B(10, 7, 6, 13, 8)$, $C(8, 8, 8, 11, 9)$.
19. $A(-9, 6, 10, -2, 2)$, $B(-6, 7, 11, 0, 3)$, $C(-4, 7, 15, 0, 7)$.
20. $A(0, -5, 4, -10, -5)$, $B(1, 0, 6, -8, -4)$, $C(5, -2, 7, -7, -3)$.
21. $A(-8, -3, 8, 1, 10)$, $B(-3, -1, 10, 3, 11)$, $C(-4, 2, 11, 2, 13)$.
22. $A(-6, 9, -4, -5, -4)$, $B(-5, 11, -2, -3, 0)$, $C(-2, 10, 0, -4, 1)$.
23. $A(3, 1, -9, -1, 6)$, $B(6, 4, -5, 4, 9)$, $C(4, 6, -7, 0, 9)$.
24. $A(8, -6, -1, -3, 4)$, $B(12, -5, 1, 2, 7)$, $C(10, -4, 2, -2, 6)$.
25. $A(3, 8, -6, 1, 10)$, $B(8, 12, -3, 6, 12)$, $C(4, 11, -4, 6, 11)$.
26. $A(8, -2, -6, -1, 4)$, $B(11, -1, -3, 4, 6)$, $C(12, 2, -4, 0, 5)$.
27. $A(-2, 4, 2, -8, -9)$, $B(0, 9, 5, -7, -7)$, $C(-1, 6, 6, -3, -4)$.
28. $A(-8, -6, 0, -8, -6)$, $B(-4, -5, 5, -4, -2)$, $C(-5, -4, 4, -5, -2)$.

29. $A(-4,-7,9,1,-3)$, $B(-3,-4,14,6,1)$, $C(1,-3,10,6,-1)$.

30. $A(-4,-8,-10,8,2)$, $B(0,-5,-5,10,5)$, $C(-1,-3,-5,11,6)$.

**Задача 2.5.** Найти расстояние от точки $M$:

$a$) до гиперплоскости $\mathscr{P}_1$;

$b$) до плоскости $\mathscr{P}_2$, проходящей через точку $A$ в направлении подпространства $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

1. $M(-7,-4,-3,-7)$, $\mathscr{P}_1:\ 5\,x^1 - 11\,x^2 - 5\,x^3 + 5\,x^4 - 17 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,2,-3,0)$, $\vec{v}_1 = (-2,0,5,5)$, $\vec{v}_2 = (-6,-5,0,5)$.

2. $M(13,-1,-5,-1)$, $\mathscr{P}_1:\ 9\,x^1 + 4\,x^2 - 8\,x^3 - 8\,x^4 - 146 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-3,0,1,-3)$, $\vec{v}_1 = (3,4,0,4)$, $\vec{v}_2 = (-9,4,-4,0)$.

3. $M(-3,-1,-2,-3)$, $\mathscr{P}_1:\ 8\,x^1 + 8\,x^2 + 4\,x^3 + 5\,x^4 + 29 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-2,-2,2,0)$, $\vec{v}_1 = (-6,0,1,1)$, $\vec{v}_2 = (-6,-1,1,0)$.

4. $M(10,-5,1,12)$, $\mathscr{P}_1:\ 5\,x^1 - 5\,x^2 - 11\,x^3 + 5\,x^4 - 96 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-3,-3,2,3)$, $\vec{v}_1 = (0,7,0,7)$, $\vec{v}_2 = (-6,7,-7,0)$.

5. $M(3,0,-11,12)$, $\mathscr{P}_1:\ 6\,x^1 + 9\,x^2 + 4\,x^3 + 6\,x^4 - 33 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-2,0,0,2)$, $\vec{v}_1 = (16,5,5,0)$, $\vec{v}_2 = (16,0,5,-5)$.

6. $M(-2,10,-13,-20)$, $\mathscr{P}_1:\ x^1 + 7\,x^2 + 5\,x^3 - 5\,x^4 - 83 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-3,-2,-1,-1)$, $\vec{v}_1 = (4,0,9,9)$, $\vec{v}_2 = (4,-9,0,9)$.

7. $M(-4,8,5,-14)$, $\mathscr{P}_1:\ 8\,x^1 + 10\,x^2 - 10\,x^3 - 5\,x^4 - 51 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(1,3,-3,1)$, $\vec{v}_1 = (18,5,5,0)$, $\vec{v}_2 = (18,0,5,-5)$.

8. $M(8,18,7,9)$, $\mathscr{P}_1:\ 6\,x^1 - 8\,x^2 + 10\,x^3 + 5\,x^4 + 11 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(1,2,-3,2)$, $\vec{v}_1 = (-12,11,0,11)$, $\vec{v}_2 = (-8,0,-11,11)$.

9. $M(36,4,3,-1)$, $\mathscr{P}_1:\ 7\,x^1 - 2\,x^2 + 8\,x^3 + 2\,x^4 - 255 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,3,1,1)$, $\vec{v}_1 = (-15,4,4,0)$, $\vec{v}_2 = (-15,4,0,-4)$.

10. $M(0,-6,12,9)$, $\mathscr{P}_1:\ 4\,x^1 + 2\,x^2 - 5\,x^3 - 2\,x^4 + 76 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(3,3,2,3)$, $\vec{v}_1 = (-4,0,4,4)$, $\vec{v}_2 = (-3,-4,0,4)$.

11. $M(26,5,-7,5)$, $\mathscr{P}_1:\ 7\,x^1 + x^2 - 5\,x^3 + 5\,x^4 - 237 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,1,-2,3)$, $\vec{v}_1 = (-3,0,6,6)$, $\vec{v}_2 = (15,-6,6,0)$.

12. $M(21,-4,-6,-10)$, $\mathscr{P}_1:\ 4\,x^1 + 10\,x^2 - 2\,x^3 + 7\,x^4 - 12 = 0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-2,0,1,-3)$, $\vec{v}_1 = (14,3,0,3)$, $\vec{v}_2 = (-6,3,-3,0)$.

13. $M(-14,7,-6,-9)$, $\mathscr{P}_1:\ 11\,x^1-x^2+11\,x^3+9\,x^4+272=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-1,-3,-3,-3)$, $\vec{v}_1=(-2,2,0,2)$, $\vec{v}_2=(-9,0,-2,2)$.

14. $M(-2,5,-6,12)$, $\mathscr{P}_1:\ 7\,x^1-8\,x^2+2\,x^3+2\,x^4+20=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-3,3,0,3)$, $\vec{v}_1=(8,4,4,0)$, $\vec{v}_2=(11,0,4,-4)$.

15. $M(0,-13,-3,-8)$, $\mathscr{P}_1:\ 4\,x^1-8\,x^2-8\,x^3+9\,x^4-26=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(3,-1,3,-3)$, $\vec{v}_1=(-4,0,7,7)$, $\vec{v}_2=(0,-7,0,7)$.

16. $M(-15,-10,-1,13)$, $\mathscr{P}_1:\ x^1-9\,x^2-3\,x^3+3\,x^4-107=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-2,2,2,-3)$, $\vec{v}_1=(9,8,8,0)$, $\vec{v}_2=(-4,8,0,-8)$.

17. $M(5,-16,-8,9)$, $\mathscr{P}_1:\ x^1-x^2-7\,x^3-7\,x^4-4=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-2,3,-2,-3)$, $\vec{v}_1=(-4,7,7,0)$, $\vec{v}_2=(-10,7,0,-7)$.

18. $M(10,11,-7,3)$, $\mathscr{P}_1:\ 3\,x^1-3\,x^2+x^3+9\,x^4-7=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(1,3,-2,3)$, $\vec{v}_1=(0,1,1,0)$, $\vec{v}_2=(8,0,1,-1)$.

19. $M(31,3,1,1)$, $\mathscr{P}_1:\ 10\,x^1+5\,x^2-10\,x^3+8\,x^4-306=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(0,3,2,-1)$, $\vec{v}_1=(12,11,11,0)$, $\vec{v}_2=(-8,0,11,-11)$.

20. $M(-12,-1,4,14)$, $\mathscr{P}_1:\ 7\,x^1-2\,x^2+10\,x^3+4\,x^4-1=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-1,3,-3,-1)$, $\vec{v}_1=(-8,11,11,0)$, $\vec{v}_2=(-8,11,0,-11)$.

21. $M(16,1,6,-3)$, $\mathscr{P}_1:\ 3\,x^1+x^2+9\,x^3+3\,x^4-84=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-3,3,-2,-2)$, $\vec{v}_1=(6,1,0,1)$, $\vec{v}_2=(12,0,-1,1)$.

22. $M(10,-20,-20,8)$, $\mathscr{P}_1:\ 3\,x^1-x^2-3\,x^3+9\,x^4-162=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,-2,0,3)$, $\vec{v}_1=(-3,10,0,10)$, $\vec{v}_2=(15,0,-10,10)$.

23. $M(11,7,3,-10)$, $\mathscr{P}_1:\ 9\,x^1-3\,x^2-x^3+3\,x^4-35=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(0,0,-3,0)$, $\vec{v}_1=(12,0,8,8)$, $\vec{v}_2=(9,-8,0,8)$.

24. $M(-5,-6,13,5)$, $\mathscr{P}_1:\ 8\,x^1+4\,x^2+9\,x^3-8\,x^4+17=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,3,-1,-1)$, $\vec{v}_1=(-4,9,9,0)$, $\vec{v}_2=(-6,9,0,-9)$.

25. $M(-20,10,-5,-10)$, $\mathscr{P}_1:\ 4\,x^1+6\,x^2-6\,x^3+9\,x^4+67=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(1,2,-3,-1)$, $\vec{v}_1=(8,0,1,1)$, $\vec{v}_2=(14,-1,0,1)$.

26. $M(11,13,-6,18)$, $\mathscr{P}_1:\ 8\,x^1-3\,x^2+2\,x^3+2\,x^4-64=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(-1,-1,-1,2)$, $\vec{v}_1=(3,6,6,0)$, $\vec{v}_2=(-15,0,6,-6)$.

27. $M(6,10,13,5)$, $\mathscr{P}_1:\ 11\,x^1-9\,x^2-x^3-11\,x^4+74=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(2,-2,-3,0)$, $\vec{v}_1=(13,0,8,8)$, $\vec{v}_2=(1,-8,0,8)$.

28. $M(18,-6,8,9)$, $\mathscr{P}_1:\ 4\,x^1+6\,x^2-9\,x^3+6\,x^4-5=0$;
$\mathscr{P}_2:\ A(1,2,1,1)$, $\vec{v}_1=(9,0,2,2)$, $\vec{v}_2=(10,-2,0,2)$.

29. $M(4,11,3,-9)$, $\mathscr{P}_1 :\ 4\,x^1 - x^2 + 10\,x^3 - 2\,x^4 - 42 = 0$;
$\mathscr{P}_2 :\ A(1,-3,2,1)$, $\vec{v}_1 = (0,4,0,4)$, $\vec{v}_2 = (-7,0,-4,4)$.

30. $M(21,1,3,-2)$, $\mathscr{P}_1 :\ 6\,x^1 - 5\,x^2 + 4\,x^3 + 2\,x^4 - 120 = 0$;
$\mathscr{P}_2 :\ A(3,3,3,-3)$, $\vec{v}_1 = (-7,0,2,2)$, $\vec{v}_2 = (-9,-2,0,2)$.

**Задача 2.6.** Найти расстояние между прямой $\ell$, проходящей через точки $A$ и $B$, и плоскостью $\mathscr{P}$, проходящей через точку $M$ параллельно подпространству $\mathbf{L} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

1. $A(-15,-2,-2,13)$, $B(-22,-4,0,11)$;
$M(-1,0,-2,-3)$, $\vec{v}_1 = (-3,-2,-2,-2)$, $\vec{v}_2 = (-13,2,2,-2)$.

2. $A(11,-13,4,-5)$, $B(17,-9,0,-9)$;
$M(-1,-3,0,-1)$, $\vec{v}_1 = (7,2,2,2)$, $\vec{v}_2 = (1,-2,-2,2)$.

3. $A(-16,-1,1,-2)$, $B(-6,7,-7,6)$;
$M(-2,-3,-1,1)$, $\vec{v}_1 = (9,4,4,4)$, $\vec{v}_2 = (1,-4,-4,4)$.

4. $A(3,-7,1,-6)$, $B(5,-3,-3,-10)$;
$M(-3,-3,3,-1)$, $\vec{v}_1 = (-7,-2,-2,-2)$, $\vec{v}_2 = (11,2,-2,2)$.

5. $A(-5,-8,24,-9)$, $B(-3,-24,8,7)$;
$M(-3,2,3,-3)$, $\vec{v}_1 = (11,8,8,8)$, $\vec{v}_2 = (-21,-8,8,-8)$.

6. $A(-12,29,17,16)$, $B(-9,34,12,11)$;
$M(2,1,-1,0)$, $\vec{v}_1 = (-21,5,5,5)$, $\vec{v}_2 = (3,-5,5,-5)$.

7. $A(-10,-6,-4,-3)$, $B(-14,-5,-3,-4)$;
$M(-1,-2,-2,1)$, $\vec{v}_1 = (-12,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (4,-1,1,-1)$.

8. $A(-8,8,6,-4)$, $B(-19,14,0,2)$;
$M(2,-2,2,1)$, $\vec{v}_1 = (3,-6,-6,-6)$, $\vec{v}_2 = (1,-6,6,6)$.

9. $A(-7,7,-5,4)$, $B(8,11,-9,8)$;
$M(1,-3,2,-2)$, $\vec{v}_1 = (-1,-4,-4,-4)$, $\vec{v}_2 = (5,4,4,-4)$.

10. $A(10,2,-5,5)$, $B(9,1,-4,6)$;
$M(-3,3,-2,2)$, $\vec{v}_1 = (3,-1,-1,-1)$, $\vec{v}_2 = (-9,1,-1,1)$.

11. $A(6,3,9,-19)$, $B(-8,11,1,-27)$;
$M(2,3,0,-3)$, $\vec{v}_1 = (-9,4,4,4)$, $\vec{v}_2 = (-9,-4,4,-4)$.

12. $A(13,9,15,-33)$, $B(20,19,5,-23)$;
$M(3,-3,-1,-3)$, $\vec{v}_1 = (-9,10,10,10)$, $\vec{v}_2 = (19,-10,-10,10)$.

13. $A(59, 7, -3, 1)$, $B(62, -4, 8, 12)$;
$M(-3{,}3{,}-1{,}1)$, $\vec{v}_1 = (-21{,}-11{,}-11{,}-11)$, $\vec{v}_2 = (19, 11{,}-11{,}11)$.

14. $A(32, 12, 1, -3)$, $B(39, 9, 4, 0)$;
$M(2, 0, 3, -3)$, $\vec{v}_1 = (11, -3, -3, -3)$, $\vec{v}_2 = (-13, 3, -3, 3)$.

15. $A(12, 22, -1, -25)$, $B(10, 12, 9, -35)$;
$M(2, 2, -1, -3)$, $\vec{v}_1 = (-11, -5, -5, -5)$, $\vec{v}_2 = (-11, 5, 5, -5)$.

16. $A(-3, 3, 10, -5)$, $B(5, 13, 0, -15)$;
$M(-2, -1, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (4, 5, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (0, -5, 5, -5)$.

17. $A(-9, -2, -18, -13)$, $B(-39, 0, -20, -15)$;
$M = (1, -2, -2, 1)$, $\vec{v}_1 = (-13, -1, -1, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1, -1)$.

18. $A(16, 1, -14, -9)$, $B(26, -13, 0, 5)$;
$M(0, 3, 0, 3)$, $\vec{v}_1 = (-7, -7, -7, -7)$, $\vec{v}_2 = (9, 7, 7, -7)$.

19. $A(-22, -10, -5, 1)$, $B(-22, -5, -10, 6)$;
$M(-1, -2, -1, -3)$, $\vec{v}_1 = (12, 5, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (-4, -5, -5, 5)$.

20. $A(-11, -6, -6, -7)$, $B(-29, 2, 2, -15)$;
$M(-1, 3, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (-1, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-7, -4, 4, -4)$.

21. $A(-6, 7, -21, 35)$, $B(-56, 23, -37, 51)$;
$M(-2, -3, -1, -1)$, $\vec{v}_1 = (-5, 8, 8, 8)$, $\vec{v}_2 = (-15, -8, -8, 8)$.

22. $A(5, 9, -9, 36)$, $B(12, 2, -2, 43)$;
$M(-1, -3, 1, 0)$, $\vec{v}_1 = (5, 7, 7, 7)$, $\vec{v}_2 = (-15, -7, 7, -7)$.

23. $A(21, -4, -4, 4)$, $B(17, -7, -1, 7)$;
$M(-2, 0, -2, 2)$, $\vec{v}_1 = (8, -3, -3, -3)$, $\vec{v}_2 = (-12, 3, -3, 3)$.

24. $A(24, 4, -1, 7)$, $B(7, 0, 3, 11)$;
$M(0, 1, -3, -3)$, $\vec{v}_1 = (-23, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, -4, 4, -4)$.

25. $A(4, -9, 9, 1)$, $B(24, -8, 8, 2)$;
$M(-1, -1, -1, 3)$, $\vec{v}_1 = (4, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, -1, 1)$.

26. $A(-1, 7, -8, 15)$, $B(-39, 15, -16, 23)$;
$M(3, 3, 3, 3)$, $\vec{v}_1 = (-3, -4, -4, -4)$, $\vec{v}_2 = (11, 4, 4, -4)$.

27. $A(1, -6, 0, -7)$, $B(4, -5, -1, -8)$;
$M(0, -3, 3, -2)$, $\vec{v}_1 = (-9, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (7, -1, 1, -1)$.

28. $A(-23, -9, -15, 19)$, $B(-13, -15, -9, 25)$;
$M(1, 1, -3, 1)$, $\vec{v}_1 = (-5, 3, 3, 3)$, $\vec{v}_2 = (-13, -3, 3, -3)$.

29. $A(-21, 2, 1, -5)$, $B(-30, -5, 8, -12)$;
$M(0, 1, 2, 2)$, $\vec{v}_1 = (-7, -7, -7, -7)$, $\vec{v}_2 = (-7, 7, 7, -7)$.

30. $A(2, -8, -3, 9)$, $B(0, 0, -11, 17)$;
$M(2, -2, 2, -1)$, $\vec{v}_1 = (9, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-13, -4, -4, 4)$.

**Задача 2.7.** В четырехмерном пространстве заданы точки $O$, $A$, $B$, $C$ и $D$. Найти:

i. Объем трехмерного симплекса $ABCD$;

ii. Угол наклона ребра $AD$ симплекса $ABCD$ к плоскости основания $ABC$;

iii. Объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$;

iv. Объем четырехмерного симплекса $OABCD$.

1. $O(6, 11, 8, 12)$, $A(2, -2, -4, -4)$, $B(4, -2, -4, -2)$,
$C(3, 3, 1, -3)$, $D(9, -3, 3, -5)$.

2. $O(10, 6, 8, 7)$, $A(-2, 2, 2, 6)$, $B(4, 2, 2, 12)$,
$C(0, 6, 6, 8)$, $D(5, 3, 9, 7)$.

3. $O(7, 12, 11, 9)$, $A(-4, 4, 4, 4)$, $B(0, 2, 2, 8)$,
$C(-5, 7, 7, 3)$, $D(3, 5, 11, 5)$.

4. $O(9, 7, 12, 6)$, $A(0, -2, 6, 0)$, $B(3, -3, 5, 3)$,
$C(-1, 1, 9, -1)$, $D(7, -3, 13, -1)$.

5. $O(12, 12, 11, 11)$, $A(-5, 3, -1, -1)$, $B(-3, 3, -1, 1)$,
$C(-6, 6, 2, -2)$, $D(2, 4, 6, 0)$.

6. $O(9, 8, 12, 6)$, $A(-2, -4, -2, 0)$, $B(3, -5, -3, 5)$,
$C(-4, 0, 2, -2)$, $D(5, -5, 5, -1)$.

7. $O(9, 6, 11, 12)$, $A(-2, -4, 0, 2)$, $B(1, -5, -1, 5)$,
$C(-2, -2, 2, 2)$, $D(5, -3, 7, 3)$.

8. $O(12, 7, 9, 11)$, $A(-3, 3, -3, -5)$, $B(1, 5, -1, -1)$,
$C(-5, 7, 1, -7)$, $D(4, 2, 4, -6)$.

9. $O(8, 10, 8, 11)$, $A(-3, 3, -1, 1)$, $B(2, 2, -2, 6)$,
$C(-5, 7, 3, -1)$, $D(4, 2, 6, 0)$.

10. $O(11,12,11,8)$, $A(3,-3,1,3)$, $B(7,-3,1,7)$,
$C(4,0,4,4)$, $D(10,-2,8,4)$.

11. $O(8,12,8,10)$, $A(-1,3,-1,-5)$, $B(3,5,1,-1)$,
$C(1,7,3,-3)$, $D(6,4,6,-4)$.

12. $O(6,8,10,11)$, $A(2,2,-6,2)$, $B(4,2,-6,4)$,
$C(0,6,-2,0)$, $D(9,1,1,1)$.

13. $O(6,8,9,9)$, $A(-4,-2,2,0)$, $B(1,-1,3,5)$,
$C(-6,2,6,-2)$, $D(3,-1,9,1)$.

14. $O(8,11,10,12)$, $A(1,-1,1,-5)$, $B(6,0,2,0)$,
$C(2,4,6,-4)$, $D(8,0,8,-4)$.

15. $O(12,9,9,11)$, $A(0,0,2,2)$, $B(5,-1,1,7)$,
$C(-1,5,7,1)$, $D(7,-1,9,1)$.

16. $O(7,12,6,12)$, $A(-5,-1,1,-3)$, $B(-3,-1,1,-1)$,
$C(-6,4,6,-4)$, $D(2,0,8,-2)$.

17. $O(9,8,9,11)$, $A(-1,-7,1,-1)$, $B(3,-7,1,3)$,
$C(0,-2,6,0)$, $D(6,-6,8,0)$.

18. $O(7,12,11,10)$, $A(0,4,2,2)$, $B(3,3,1,5)$,
$C(-1,7,5,1)$, $D(7,3,9,1)$.

19. $O(6,8,11,9)$, $A(0,-2,0,2)$, $B(3,-1,1,5)$,
$C(-1,3,5,1)$, $D(7,-3,7,1)$.

20. $O(8,8,7,10)$, $A(-2,-2,-4,0)$, $B(1,-1,-3,3)$,
$C(-2,0,-2,0)$, $D(5,-3,3,-1)$.

21. $O(9,11,10,10)$, $A(3,3,-1,-1)$, $B(8,2,-2,4)$,
$C(2,8,4,-2)$, $D(10,2,6,-2)$.

22. $O(8,8,7,8)$, $A(1,3,-3,3)$, $B(4,4,-2,6)$,
$C(2,6,0,4)$, $D(8,2,4,2)$.

23. $O(6,10,8,6)$, $A(3,3,1,-3)$, $B(8,4,2,2)$,
$C(5,7,5,-1)$, $D(10,2,8,-4)$.

24. $O(7,8,12,11)$, $A(5,3,-3,3)$, $B(9,3,-3,7)$,
$C(3,7,1,1)$, $D(12,2,4,2)$.

25. $O(11,7,7,9)$, $A(4,0,-2,2)$, $B(8,2,0,6)$,
$C(4,4,2,2)$, $D(11,1,5,3)$.

26. $O(8, 9, 7, 8)$, $A(0, 0, 8, 0)$, $B(4, -2, 6, 4)$,
    $C(-2, 4, 12, -2)$, $D(7, 1, 15, 1)$.
27. $O(9, 8, 12, 10)$, $A(5, -3, -1, -1)$, $B(7, -3, -1, 1)$,
    $C(3, 1, 3, -3)$, $D(12, -4, 6, -2)$.
28. $O(9, 6, 10, 7)$, $A(-2, 0, 0, -2)$, $B(4, 0, 0, 4)$,
    $C(-2, 6, 6, -2)$, $D(5, -1, 7, -3)$.
29. $O(6, 9, 10, 8)$, $A(-1, -1, 1, -3)$, $B(3, 1, 3, 1)$,
    $C(-1, 1, 3, -3)$, $D(6, 0, 8, -2)$.
30. $O(8, 10, 12, 6)$, $A(-1, -1, 1, -3)$, $B(2, -2, 0, 0)$,
    $C(0, 4, 6, -2)$, $D(6, -2, 8, -4)$.

# 3. Аффинные преобразования

## 3.1. Определение и основные свойства аффинных преобразований

Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ фиксирована система координат $Ox^1 \ldots x^n$. Отображение $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, заданное формулами:

$$\begin{array}{l} x'^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \ldots + a^1_n x^n + b^1, \\ x'^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \ldots + a^2_n x^n + b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'^n = a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \ldots + a^n_n x^n + b^n, \end{array} \tag{3.1}$$

где $A = \left(a^i_j\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ — невырожденная матрица ($\det A \neq 0$), называется *аффинным преобразованием* пространства $\mathscr{A}$. Отображение (3.1) каждой точке $M(x^1, \ldots, x^n)$ пространства $\mathscr{A}$ ставит в соответствие точку $M'(x'^1, \ldots, x'^n)$, также принадлежащую $\mathscr{A}$. При этом образом начала координат, точки $O(0, \ldots, 0)$, является точка $O'(b^1, \ldots, b^n)$.

**Замечание 3.1.** В любой другой аффинной системе координат формулы, определяющие отображение $F$, имеют аналогичный вид.

Аффинное преобразование точечного пространства $\mathscr{A}$ порождает линейное преобразование векторов в ассоциированном линейном пространстве $\mathbf{V}$, а именно: каждому вектору $\vec{v} = (v^1, \ldots, v^n)$ ставится в соответствие вектор $\vec{v}' = (v'^1, \ldots, v'^n)$, координаты которого определяются матрицей $A$ преобразования (3.1):

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Пусть при преобразовании (3.2) векторы базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ переходят соответственно в векторы $\vec{e}\,'_1, \dots, \vec{e}\,'_n$. Поскольку вектор базиса $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$, то по формулам (3.2) найдем $\vec{e}\,'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$, $i = 1, \dots, n$, то есть столбцы матрицы $A$ аффинного преобразования образованы координатами образов базисных векторов.

Так как $\det A \neq 0$, то векторы $\vec{e}\,'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ — линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Таким образом, матрица $A$ — матрица перехода к базису $\vec{e}\,'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$. Если $\det A > 0$, то есть базисы *одноименны*, то аффинное преобразование *сохраняет ориентацию пространства*; такое преобразование называют *собственным*. Если $\det A < 0$, то аффинное преобразование называют *несобственным*.

Сформулируем некоторые свойства аффинных преобразований.

1. Аффинное преобразование взаимно однозначно. Преобразование, обратное к аффинному, также является аффинным.

2. Композиция аффинных преобразований — аффинное преобразование.

3. При аффинном преобразовании сохраняется линейная зависимость (линейная независимость) векторов. В частности, образы коллинеарных векторов коллинеарны, при этом отношение коллинеарности сохраняется.

4. Образом любой $k$-мерной плоскости при аффинном преобразовании является плоскость той же размерности $k$. В частности, образом прямой является прямая.

   Плоскость размерности $k \geqslant 1$, образом которой является сама эта плоскость, называют *инвариантной* для данного аффинного преобразования.

5. Если в $n$-мерном аффинном пространстве введена евклидова структура, то геометрический смысл имеет и $|\det A|$, а именно:

при аффинном преобразовании объем $V$ параллелепипеда, построенного на произвольных векторах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, связан с объемом $V'$ параллелепипеда, построенного на их образах, равенством $V' = |\det A| \cdot V$. Число $|\det A|$ называют *коэффициентом искажения объема* (*площади*).

**Пример 3.1.** Найти инвариантные прямые аффинного преобразования

$$x' = 4x + 10y + 1,$$
$$y' = -3x - 7y + 1$$

и определить коэффициент $\varkappa$ искажения площади.

**Решение.** Пусть $\ell\colon Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ — инвариантная прямая. Точка $M(x, y) \in \ell$ тогда и только тогда, когда ее образ $M'(x', y') \in \ell$, то есть $A(4x + 10y + 1) + B(-3x - 7y + 1) + C = 0$.

Следовательно, последнее уравнение также является уравнением прямой $\ell$. Приведем его к виду

$$(4A - 3B)x + (10A - 7B)y + A + B + C = 0.$$

Два уравнения задают одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны: $\dfrac{4A - 3B}{A} = \dfrac{10A - 7B}{B} = \dfrac{A + B + C}{C} = \lambda$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (4 - \lambda)A - 3B = 0, \\ 10A - (7 + \lambda)B = 0, \\ A + B + (1 - \lambda)C = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Первые два уравнения системы относительно неизвестных $A$ и $B$ имеют ненулевое решение лишь при условии

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 10 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $\lambda = -1$ или $\lambda = -2$. При $\lambda = -1$ получим, решая систему (3.3), $A = \frac{3}{5}B$, $C = -\frac{4}{5}B$, где $B$ — свободное неизвестное. Полагая $B = 5$, найдем уравнение инвариантной прямой $\ell_1\colon 3x + 5y - 4 = 0$.

Аналогично для $\lambda = -2$ получим множество решений вида $B = 2A$, $C = -A$ , где $A$ — любое действительное число. Пусть $A = 1$, тогда $\ell_2\colon x + 2y - 1 = 0$ — еще одна инвариантная прямая данного аффинного преобразования.

Коэффициент искажения площади равен определителю матрицы преобразования

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = 2. \qquad \square$$

**Ответ.** $\ell_1\colon 3x + 5y - 4 = 0$; $\ell_2\colon x + 2y - 1 = 0$; $\varkappa = 2$.

## 3.2. Примеры аффинных преобразований. Движения

Ограничимся случаем евклидовых аффинных пространств малой размерности: прямой, плоскости и трехмерного пространства.

**Гомотетией** с центром в точке $C$ и коэффициентом $k > 0$ называется преобразование, которое каждой точке $M \in \mathscr{A}$ ставит в соответствие точку $M' \in \mathscr{A}$ такую, что $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. В системе координат с началом в точке $C$ гомотетия трехмерного пространства определяется формулами

$$\begin{aligned} x' &= kx, \\ y' &= ky, \\ z' &= kz. \end{aligned}$$

**Пример 3.2.** Найти образ точки $M(5, -8, 7)$ при гомотетии с центром в точке $C(-9, 2, -5)$ и коэффициентом $k = \frac{4}{3}$.

**Решение.** Пусть $O$ — начало координат. Найдем координаты точки $M'(x', y', z')$ как координаты ее радиус-вектора (рис. 4):

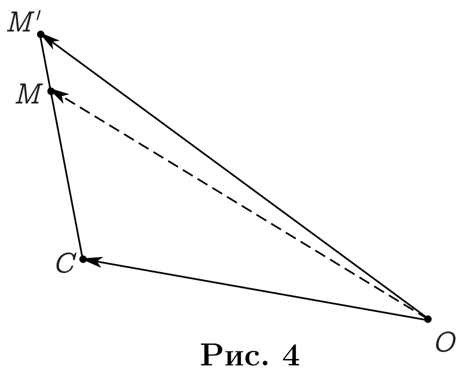

**Рис. 4**

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{OC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CM}.$$

Так как координаты векторов $\overrightarrow{OC} = (-9, 2, -5)$, $\overrightarrow{CM} = (14, -10, 12)$, то $\overrightarrow{OM'} = \left(\frac{29}{3}, -\frac{34}{3}, 11\right)$. $\square$

**Ответ.** $M'\left(\frac{29}{3}, -\frac{34}{3}, 11\right)$.

**Сжатие** с коэффициентом $k > 0$ евклидова трехмерного пространства $\mathbf{E}$ к плоскости $\mathscr{P}$ — это преобразование, которое каждую точку $M \in \mathbf{E}$ отображает в такую его точку $M'$, что если $C$ — ортогональная проекция $M$ на плоскость $\mathscr{P}$, то $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. Точки самой этой плоскости, очевидно, остаются неподвижными. При $k > 1$ это преобразование называют также растяжением. В системе координат с осями $Ox$ и $Oy$, расположенными в этой плоскости, и осью $Oz$, ей перпендикулярной, формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= kz. \end{aligned}$$

**Пример 3.3.** Найти аффинное преобразование пространства, являющееся сжатием к плоскости $\mathscr{P}\colon x - 3y - z - 3 = 0$ с коэффициентом $k = \frac{1}{4}$. Система координат прямоугольная.

**Решение.** Пусть $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — произвольная фиксированная точка пространства. Найдем координаты ее образа $M'(x', y', z')$ при заданном аффинном преобразовании (рис. 5). Для этого определим сначала координаты точки $C$ — ортогональной проекции точки $M$ на плоскость $\mathscr{P}$. Точка $C$ есть точка пересечения плоскости с перпендикулярной ей прямой $\ell$, проходящей через $M$. Так как

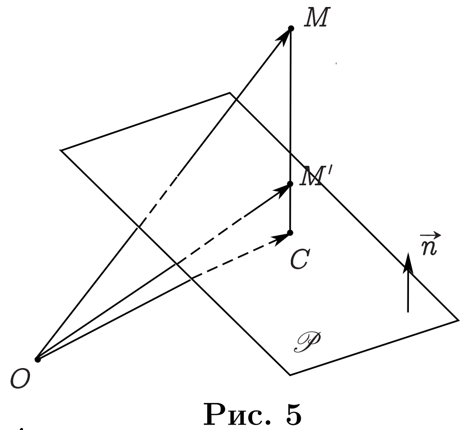


**Рис. 5**

$$\ell: \quad \begin{cases} x = \bar{x} + t, \\ y = \bar{y} - 3t, \\ z = \bar{z} - t, \\ t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

то точке $C$ отвечает значение параметра $t = t_0$, удовлетворяющее уравнению $(\bar{x} + t) - 3(\bar{y} - 3t) - (\bar{z} - t) - 3 = 0$. Отсюда находим $t_0 = \frac{1}{11}(-\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z} + 3)$, и, следовательно, $C(\bar{x} + t_0, \bar{y} - 3t_0, \bar{z} - t_0)$.

Тогда $\overrightarrow{MC} = (t_0, -3t_0, -t_0)$, $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$, а $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \left(\bar{x} + \frac{3}{4}t_0, \bar{y} - \frac{9}{4}t_0, \bar{z} - \frac{3}{4}t_0\right)$.

Подставляя в последнее равенство значение $t_0$, найдем координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM'}$:

$$x' = \frac{1}{44}(41\bar{x} + 9\bar{y} + 3\bar{z} + 9),$$
$$y' = \frac{1}{44}(9\bar{x} + 17\bar{y} - 9\bar{z} - 27),$$
$$z' = \frac{1}{44}(3\bar{x} - 9\bar{y} + 41\bar{z} - 9).$$

Поскольку здесь $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — произвольная точка пространства, то полученные равенства и есть искомые формулы аффинного преобразования в заданной системе координат. □

**Ответ.** $x' = \frac{1}{44}(41x + 9y + 3z + 9)$, $y' = \frac{1}{44}(9x + 17y - 9z - 27)$, $z' = \frac{1}{44}(3x - 9y + 41z - 9)$.

**Движение** — аффинное преобразование евклидова аффинного пространства, сохраняющее расстояние между точками, то есть такое преобразование, что для любых точек $M_1$, $M_2$ и их образов $M_1'$, $M_2'$ выполняется равенство $|M_1M_2| = |M_1'M_2'|$.

Порожденное движением линейное отображение ассоциированного линейного пространства оставляет неизменными длины векторов. В случае одномерного векторного пространства таким свойством обладают лишь отображения вида $\vec{v}' = \vec{v}$ или $\vec{v}' = -\vec{v}$.

**Теорема 3.1.** *Аффинное преобразование прямой $x' = ax + b$ является движением тогда и только тогда, когда $|a| = 1$.*

**Пример 3.4.** Найти движение прямой, переводящее точку $M(3)$ в точку $M'(4)$, если это движение является: $a$) собственным, $b$) несобственным.

**Решение.** $a$) Согласно теореме 3.1 любое собственное движение прямой задается формулой $x' = x + b$. Так как $x = 3, x' = 4$, то $b = 1$.

$b$) Согласно теореме 3.1 любое несобственное движение прямой задается формулой $x' = -x + b$. Так как $x = 3, x' = 4$, то $b = 7$. □

**Ответ.** $a)$ $x' = x + 1$, $b)$ $x' = -x + 7$.

Аналогично движениям прямой движения евклидовых пространств размерности $n \geqslant 2$ выделяются из класса всех аффинных преобразований специальным видом матрицы $A$, а именно справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Аффинное преобразование* (3.1) *тогда и только тогда является движением, когда в прямоугольной системе координат его матрица* $A$ *ортогональна.*

Рассмотрим некоторые примеры движений плоскости.

**Параллельный перенос (сдвиг)** точек плоскости на постоянный вектор $\overrightarrow{b} = (b^1, b^2)$:

$$x' = x + b^1,$$
$$y' = y + b^2.$$

**Вращение (поворот)** плоскости на угол $\alpha$ вокруг неподвижной точки (центра вращения). В прямоугольной системе координат с началом в центре вращения формулы этого преобразования имеют вид

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

**Симметрия (отражение)** плоскости в прямой — преобразование, которое каждой точке $M$ плоскости ставит в соответствие точку $M'$ такую, что $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$, где $C$ — ортогональная проекция точки $M$ на эту прямую, называемую *осью симметрии*. Если система координат выбрана так, что ось $Ox$ совпадает с осью симметрии, а ось $Oy$ ей перпендикулярна, то это преобразование задается формулами

$$x' = x,$$
$$y' = -y.$$

**Пример 3.5.** Найти аффинное преобразование, являющееся симметрией плоскости в прямой $\ell$: $4x - 2y + 5 = 0$. Система координат прямоугольная.

**Решение.** Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости. Найдем точку $M'(x',y')$, симметричную точке $M$ относительно прямой $\ell$. Для этого составим систему уравнений относительно неизвестных $x'$ и $y'$. Так как вектор $\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y)$ коллинеарен вектору $\vec{n} = (2,-1)$ нормали к прямой, то

$$\frac{x'-x}{2} = \frac{y'-y}{-1}. \tag{3.4}$$

Кроме того, середина отрезка $MM'$, точка $C\left(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}\right)$, принадлежит оси симметрии, то есть

$$4\cdot\frac{x'+x}{2} - 2\cdot\frac{y'+y}{2} + 5 = 0. \tag{3.5}$$

Преобразовав уравнения (3.4) и (3.5), запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x' + 2y' = x + 2y, \\ 2x' - y' = -2x + y - 5. \end{cases}$$

Решение системы и есть искомые формулы симметрии. □

**Ответ.** $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1.$

**Замечание 3.2.** Другой способ решения задачи 3.5 основан на переходе к новой аффинной системе координат $O'uv$, «канонической» для данной задачи. В качестве векторов нового базиса возьмем, например, $\vec{e}_1 = (1,2)$ — вектор, коллинеарный оси симметрии, и $\vec{e}_2 = (2,-1)$ — вектор, ей перпендикулярный. Начало координат перенесем в любую точку оси симметрии, например, положим $O'\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Формулы, выражающие старые координаты через новые, имеют вид (1.10):

$$\begin{aligned} x &= u + 2v, \\ y &= 2u - v + \frac{5}{2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - 1, \\ v &= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В выбранной системе координат преобразование симметрии записывается, как указывалось выше,

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= -v, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $(u', v')$ — координаты образа точки $(x, y)$ в новой системе координат. Из равенств (3.6)—(3.7) следует, что

$$\begin{aligned} x' &= u' + 2v' = u - 2v = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2, \\ y' &= 2u' - v' + \frac{5}{2} = 2u + v + \frac{5}{2} = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1. \end{aligned} \qquad \square$$

Преобразование симметрии меняет ориентацию плоскости, то есть является примером несобственного движения. Параллельный перенос и вращение сохраняют ориентацию плоскости, то есть являются собственными аффинными преобразованиями (собственными движениями).

Перечисленными примерами исчерпываются все движения евклидовой плоскости, более точно, справедлива теорема.

**Теорема 3.3.** *1. Всякое собственное движение плоскости есть или параллельный перенос на некоторый вектор, или поворот на угол $\alpha$ вокруг некоторой неподвижной точки.*

*2. Всякое несобственное движение плоскости есть композиция отражения плоскости в некоторой прямой и сдвига на вектор, коллинеарный этой прямой (скользящая симметрия).*

В частном случае вектор сдвига скользящей симметрии может быть равен нулю.

**Пример 3.6.** Определить, является ли движение плоскости собственным или несобственным. В случае собственного движения найти неподвижную точку $O'$ и угол поворота $\alpha$; в случае несобственного движения найти ось симметрии и вектор сдвига вдоль оси симметрии. Система координат прямоугольная.

$$a) \qquad \begin{aligned} x' &= -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5}, \\ y' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{28}{5}; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$b) \qquad \begin{aligned} x' &= -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y - \frac{30}{29}, \\ y' &= \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{70}{29}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

**Решение.** *a*) Так как определитель матрицы преобразования отрицателен, то движение несобственное и согласно теореме является скользящей симметрией. Ось симметрии $\ell$ — инвариантная прямая этого преобразования. Пусть ее уравнение имеет вид $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Рассуждая, как и при решении задачи 3.1, заключаем, что уравнение

$$A\left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5}\right) + B\left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{28}{5}\right) + C = 0$$

или, что то же самое,

$$(-4A - 3B)x + (-3A + 4B)y + 16A - 28B + 5C = 0$$

также определяет прямую $\ell$. Тогда

$$\frac{-4A - 3B}{A} = \frac{-3A + 4B}{B} = \frac{16A - 28B + 5C}{C} = \lambda.$$

Последние равенства представляют собой систему уравнений относительно неизвестных $A, B, C, \lambda$:

$$\begin{cases} (-4 - \lambda)A - 3B = 0, \\ -3A + (4 - \lambda)B = 0, \\ 16A - 28B + (5 - \lambda)C = 0. \end{cases}$$

Первые два уравнения системы имеют решение $A, B, \lambda$ такое, что $A^2 + B^2 \neq 0$, лишь при условии

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть, если $\lambda = \pm 5$.

При $\lambda = 5$, решая систему, получим, что $A = B = 0$, $C$ — любое действительное число. При $\lambda = -5$ найдем $A = 3B$, $C = -2B$, где

$B$ — свободное неизвестное. Полагая $B = 1$, найдем уравнение оси симметрии $\ell$: $3x + y - 2 = 0$.

Чтобы найти вектор сдвига вдоль оси $\ell$, достаточно заметить, что все точки оси симметрии в результате движения смещаются на один и тот же вектор $\vec{a}$. То есть $\vec{a} = \overrightarrow{MM'}$, где $M$ — любая точка на $\ell$, а $M'$ — ее образ. Взяв, например, $M(0, 2) \in \ell$, по формулам (3.9) найдем координаты точки $M'$: $x' = 2, y' = -4$. Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{MM'} = (2, -6)$.

$b$) Так как определитель матрицы преобразования положителен, то движение собственное и согласно теореме представляет собой поворот вокруг некоторой точки (очевидно, что преобразование не является параллельным переносом, так как в этом случае матрица преобразования была бы единичная). Неподвижную точку $O'(x, y)$, то есть такую, что $x' = x$, $y' = y$, найдем как решение системы уравнений

$$\begin{cases} x = -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y - \frac{30}{29}, \\ y = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{70}{29}. \end{cases}$$

Получим $x = -1, y = 1$. Перенесем начало координат в точку $O'(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} x &= u - 1, \\ y &= v + 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Такая замена координат не меняет матрицы аффинного преобразования (3.10), но изменяет столбец свободных членов, обращая его в нулевой, так как начало новой системы координат — неподвижная точка этого преобразования. В системе координат $O'uv$ данное преобразование запишется в виде

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{21}{29}u - \frac{20}{29}v, \\ v' &= \frac{20}{29}u - \frac{21}{29}v. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Впрочем, те же формулы можно получить из (3.10), заменяя старые координаты $(x, y)$ их выражениями (3.11) через новые координаты $(u, v)$:

$$u' - 1 = -\frac{21}{29}(u-1) - \frac{20}{29}(v+1) - \frac{30}{29},$$
$$v' + 1 = \frac{20}{29}(u-1) - \frac{21}{29}(v+1) + \frac{70}{29}.$$

Поскольку система координат $O'uv$ прямоугольная, поворот плоскости на угол $\alpha$ вокруг начала координат определяется формулами

$$\begin{aligned} u' &= u\cos\alpha - v\sin\alpha, \\ v' &= u\sin\alpha + v\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Из (3.12) — (3.13) заключаем, что $\cos\alpha = -\frac{21}{29}, \sin\alpha = \frac{20}{21}$, то есть $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{20}{21}$. □

**Ответ.** *a*) $\ell$: $3x + y - 2 = 0$, $\vec{a} = (2, -6)$; *b*) $O'(-1, 1)$, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{20}{21}$.

Аффинное преобразование евклидова аффинного пространства называется *преобразованием подобия*, если существует действительное число $k > 0$ такое, что для любых двух точек $M_1, M_2$ и их образов $M_1', M_2'$ выполняется равенство $|M_1'M_2'| = k|M_1M_2|$. Число $k$ называется *коэффициентом подобия*. Гомотетия с коэффициентом $k$ является также и преобразованием подобия с тем же коэффициентом.

**Теорема 3.4.** *Всякое преобразование подобия с коэффициентом $k$ есть композиция движения, собственного или несобственного, и гомотетии с тем же коэффициентом и произвольным центром.*

**Пример 3.7.** Доказать, что отображение

$$F: \quad \begin{aligned} x' &= -12x + 5y - 1, \\ y' &= 5x + 12y + 1 \end{aligned}$$

является преобразованием подобия. Разложить его в композицию $F = \psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta$, где

$\eta$ — тождественное, если преобразование собственное, и симметрия относительно оси $Ox$, если преобразование несобственное,

$\theta$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v} = (a, b)$,
$\Phi$ — поворот вокруг начала координат на угол $\varphi$,
$\psi$ — гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $k$.
Система координат прямоугольная.

**Решение.** Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две произвольные точки плоскости. Расстояние между их образами $M_1'$ и $M_2'$ при отображении $F$ найдем как длину вектора

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1) \\ 5(x_2 - x_1) + 12(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|M_1'M_2'|^2 = \big(-12(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1)\big)^2 + \big(5(x_2 - x_1) + \\ + 12(y_2 - y_1)\big)^2 = 169\big((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\big) = 169|M_1M_2|^2.$$

Отсюда заключаем, что данное преобразование есть подобие с коэффициентом $k = 13$. Кроме того,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} < 0,$$

то есть преобразование несобственное.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Найдем ее образ при композиции указанных преобразований:

$$\eta\colon \begin{array}{l} x_1 = x, \\ y_1 = -y, \end{array} \qquad \theta\colon \begin{array}{l} x_2 = x_1 + a, \\ y_2 = y_1 + b, \end{array}$$

$$\Phi\colon \begin{array}{l} x_3 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi, \\ y_3 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi, \end{array} \qquad \psi\colon \begin{array}{l} x' = 13x_3, \\ y' = 13y_3. \end{array}$$

Тогда

$$\psi\circ\Phi\circ\theta\circ\eta\colon \quad \begin{array}{l} x' = 13(x + a)\cos\varphi - 13(-y + b)\sin\varphi, \\ y' = 13(x + a)\sin\varphi + 13(-y + b)\cos\varphi \end{array}$$

или, что то же самое,

$$F\colon \quad \begin{aligned} x' &= 13x\cos\varphi + 13y\sin\varphi + (13a\cos\varphi - 13b\sin\varphi),\\ y' &= 13x\sin\varphi - 13y\cos\varphi + (13a\sin\varphi + 13b\cos\varphi). \end{aligned}$$

Сравнивая формулы преобразования $F$ с данными в условии задачи, получаем:

$$13\cos\varphi = -12, \quad 13\sin\varphi = 5, \quad \text{то есть} \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} \tag{3.14}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} 13a\cos\varphi - 13b\sin\varphi = -1,\\ 13a\sin\varphi + 13b\cos\varphi = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Равенства (3.15) представляют собой систему линейных уравнений относительно координат вектора параллельного переноса. С учетом (3.14) ее можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -12 & -5\\ 5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем

$$\begin{pmatrix} a\\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -5\\ 5 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{169}\\ -\dfrac{7}{169} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Ответ:** $F = \psi\circ\Phi\circ\theta\circ\eta$, где

$$\eta\colon \quad \begin{aligned} x' &= x,\\ y' &= -y, \end{aligned} \qquad \theta\colon \quad \begin{aligned} x' &= x + \frac{17}{169},\\ y' &= y - \frac{7}{169}, \end{aligned}$$

$$\Phi\colon \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \qquad \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}, \qquad \psi\colon \quad \begin{aligned} x' &= 13x,\\ y' &= 13y. \end{aligned}$$

## 3.3. Задачи

**Задача 3.1.** Найти инвариантные прямые аффинного преобразования. Определить коэффициент искажения площади.

1. $x' = 28\,x - 75\,y - 2,\ \ y' = 10\,x - 27\,y + 3.$
2. $x' = -21\,x + 60\,y + 2,\ \ y' = -8\,x + 23\,y + 3.$
3. $x' = 22\,x + 40\,y - 2,\ \ y' = -12\,x - 22\,y + 2.$
4. $x' = 22\,x - 60\,y,\ \ y' = 8\,x - 22\,y - 1.$
5. $x' = 17\,x + 10\,y + 2,\ \ y' = -30\,x - 18\,y + 3.$
6. $x' = -15\,x - 8\,y - 2,\ \ y' = 24\,x + 13\,y + 3.$
7. $x' = 8\,x + 5\,y + 3,\ \ y' = -6\,x - 3\,y - 2.$
8. $x' = -17\,x - 10\,y - 2,\ \ y' = 30\,x + 18\,y + 3.$
9. $x' = 15\,x + 6\,y + 3,\ \ y' = -36\,x - 15\,y - 1.$
10. $x' = x + 2\,y - 1,\ \ y' = -6\,x - 6\,y - 3.$
11. $x' = 8\,x + 5\,y,\ \ y' = -6\,x - 3\,y.$
12. $x' = -21\,x - 20\,y - 2,\ \ y' = 24\,x + 23\,y - 3.$
13. $x' = -8\,x + 15\,y + 3,\ \ y' = -2\,x + 3\,y + 3.$
14. $x' = 4\,x + 10\,y + 1,\ \ y' = -3\,x - 7\,y.$
15. $x' = 17\,x + 30\,y - 1,\ \ y' = -9\,x - 16\,y - 1.$
16. $x' = -21\,x + 60\,y + 1,\ \ y' = -8\,x + 23\,y - 1.$
17. $x' = -6\,x - 2\,y - 3,\ \ y' = 6\,x + y + 1.$
18. $x' = 18\,x + 10\,y,\ \ y' = -30\,x - 17\,y.$
19. $x' = 23\,x - 60\,y - 2,\ \ y' = 8\,x - 21\,y + 3.$
20. $x' = 17\,x + 30\,y - 2,\ \ y' = -9\,x - 16\,y + 3.$
21. $x' = -14\,x - 8\,y - 3,\ \ y' = 24\,x + 14\,y + 3.$
22. $x' = -17\,x - 10\,y - 3,\ \ y' = 30\,x + 18\,y + 1.$
23. $x' = 17\,x - 45\,y - 1,\ \ y' = 6\,x - 16\,y - 3.$
24. $x' = 33\,x - 90\,y - 1,\ \ y' = 12\,x - 33\,y.$
25. $x' = 3\,x + 10\,y + 3,\ \ y' = -3\,x - 8\,y - 2.$

26. $x' = -3\,x - 10\,y + 1,\ y' = 3\,x + 8\,y - 1.$
27. $x' = -10\,x - 6\,y + 1,\ y' = 18\,x + 11\,y + 3.$
28. $x' = 12\,x + 5\,y + 1,\ y' = -30\,x - 13\,y.$
29. $x' = -33\,x - 60\,y + 3,\ y' = 18\,x + 33\,y + 3.$
30. $x' = 15\,x + 8\,y + 2,\ y' = -13\,y - 24\,x - 3.$

**Задача 3.2.** Найти образ точки $M$ при гомотетии с центром в точке $C$ и коэффициентом $k$.

1. $M(-8,2,-8),\ C(8,-4,-2),\ k = 2/3.$
2. $M(1,-10,6),\ C(8,-7,-1),\ k = 1/2.$
3. $M(7,3,10),\ C(8,5,-10),\ k = 7/6.$
4. $M(-5,0,-4),\ C(-6,-9,-3),\ k = 5/3.$
5. $M(-1,-4,6),\ C(-5,-9,1),\ k = 1/2.$
6. $M(-10,8,-10),\ C(9,7,5),\ k = 7/6.$
7. $M(7,3,6),\ C(-8,8,-1),\ k = 5/3.$
8. $M(7,-1,-9),\ C(-7,5,-10),\ k = 1/2.$
9. $M(10,-7,9),\ C(-4,-8,8),\ k = 2/3.$
10. $M(-5,-3,-7),\ C(5,7,10),\ k = 5/6.$
11. $M(3,-3,8),\ C(-5,8,-4),\ k = 2/3.$
12. $M(-3,6,0),\ C(9,-5,0),\ k = 5/6.$
13. $M(6,-10,7),\ C(-1,-10,3),\ k = 1/3.$
14. $M(0,-8,-8),\ C(-5,0,-3),\ k = 2/3.$
15. $M(2,4,-10),\ C(8,7,-2),\ k = 5/3.$
16. $M(-4,10,8),\ C(4,0,5),\ k = 1/3.$
17. $M(9,-3,5),\ C(3,-1,-4),\ k = 1/6.$
18. $M(-2,3,3),\ C(-5,-5,-2),\ k = 4/3.$
19. $M(5,-5,5),\ C(-9,-1,2),\ k = 1/2.$
20. $M(-2,-10,-8),\ C(-10,3,9),\ k = 1/3.$

21. $M(-1,0,-4),\ C(-8,-9,-2),\ k=1/6.$
22. $M(-1,1,6),\ C(-10,-8,0),\ k=2/3.$
23. $M(2,3,8),\ C(6,6,6),\ k=1/3.$
24. $M(-3,-6,-5),\ C(7,6,-7),\ k=3/2.$
25. $M(-7,2,0),\ C(8,-4,-2),\ k=2/3.$
26. $M(-3,9,-4),\ C(-7,-10,1),\ k=2/3.$
27. $M(4,2,1),\ C(-3,3,-3),\ k=4/3.$
28. $M(7,-5,-5),\ C(-3,6,0),\ k=1/6.$

**Задача 3.3.** Найти аффинное преобразование пространства, являющееся сжатием к плоскости $\mathscr{P}$ с коэффициентом $k$. Система координат прямоугольная.

1. $\mathscr{P}:\ 3x-4y-z+3=0,\ k=4.$
2. $\mathscr{P}:\ 5x+5y-2z-4=0,\ k=3.$
3. $\mathscr{P}:\ x-2y+4z+5=0,\ k=5.$
4. $\mathscr{P}:\ 4x-y-z+5=0,\ k=5.$
5. $\mathscr{P}:\ 3x-3y+2z-5=0,\ k=3.$
6. $\mathscr{P}:\ 2x+y-2z+3=0,\ k=2.$
7. $\mathscr{P}:\ 2x+5y+5z+2=0,\ k=3.$
8. $\mathscr{P}:\ 3x-4y-z-5=0,\ k=2.$
9. $\mathscr{P}:\ x-5y-z-5=0,\ k=5.$
10. $\mathscr{P}:\ 5x+y-4z+4=0,\ k=4.$
11. $\mathscr{P}:\ 3x+5y-2z+2=0,\ k=5.$
12. $\mathscr{P}:\ 4x-4y+2z-3=0,\ k=4.$
13. $\mathscr{P}:\ 3x+3y+2z-1=0,\ k=4.$
14. $\mathscr{P}:\ 5x-2y-z-3=0,\ k=2.$
15. $\mathscr{P}:\ 2x+3y+4z+3=0,\ k=2.$
16. $\mathscr{P}:\ x+5y+z-2=0,\ k=5.$
17. $\mathscr{P}:\ x+5y+2z+5=0,\ k=2.$

18. $\mathscr{P}:\ 2x-3y-4z-1=0,\ k=3.$
19. $\mathscr{P}:\ 3x+4y+5z+3=0,\ k=4.$
20. $\mathscr{P}:\ 3x+3y-2z-2=0,\ k=5.$
21. $\mathscr{P}:\ 4x-y+z+4=0,\ k=2.$
22. $\mathscr{P}:\ 3x-4y+5z+5=0,\ k=2.$
23. $\mathscr{P}:\ 4x-3y+5z-3=0,\ k=3.$
24. $\mathscr{P}:\ 2x-4y+z+5=0,\ k=4.$
25. $\mathscr{P}:\ 4x-4y-z+5=0,\ k=3.$
26. $\mathscr{P}:\ x+3y+3z-4=0,\ k=2.$
27. $\mathscr{P}:\ 4x-y+3z-2=0,\ k=2.$
28. $\mathscr{P}:\ x-5y+5z+2=0,\ k=5.$
29. $\mathscr{P}:\ 2x+4y+4z-5=0,\ k=2.$
30. $\mathscr{P}:\ 4x+5y+3z+4=0,\ k=3.$

**Задача 3.4.** Найти движение прямой, переводящее точку $M$ в точку $M'$, если это движение является: $a$) собственным, $b$) несобственным.

1. $M(2),\quad M'(-3).$
2. $M(-5),\quad M'(2).$
3. $M(-1),\quad M'(-3).$
4. $M(-5),\quad M'(3).$
5. $M(-2),\quad M'(-1).$
6. $M(-5),\quad M'(-1).$
7. $M(-5),\quad M'(-2).$
8. $M(5),\quad M'(3).$
9. $M(-5),\quad M'(1).$
10. $M(5),\quad M'(-3).$
11. $M(-3),\quad M'(1).$
12. $M(1),\quad M'(-3).$
13. $M(3),\quad M'(-2).$
14. $M(-4),\quad M'(1).$
15. $M(-3),\quad M'(-1).$
16. $M(-4),\quad M'(2).$
17. $M(4),\quad M'(3).$
18. $M(-2),\quad M'(-3).$
19. $M(-2),\quad M'(-4).$
20. $M(-2),\quad M'(4).$
21. $M(4),\quad M'(2).$
22. $M(2),\quad M'(-1).$
23. $M(-1),\quad M'(-4).$
24. $M(4),\quad M'(-1).$

25. $M(-1)$, $M'(4)$.
26. $M(1)$, $M'(3)$.
27. $M(-2)$, $M'(1)$.
28. $M(1)$, $M'(-2)$.
29. $M(4)$, $M'(-2)$.
30. $M(3)$, $M'(-1)$.

**Задача 3.5.** Найти аффинное преобразование, являющееся симметрией плоскости в прямой $\ell$. Система координат прямоугольная.

1. $\ell\colon x + 5y + 1 = 0$.
2. $\ell\colon 5x + 4y + 2 = 0$.
3. $\ell\colon x - 3y + 5 = 0$.
4. $\ell\colon 2x + 4y - 5 = 0$.
5. $\ell\colon x - 2y + 1 = 0$.
6. $\ell\colon 3x - 4y - 2 = 0$.
7. $\ell\colon x + 2y - 1 = 0$.
8. $\ell\colon 5x + 3y - 1 = 0$.
9. $\ell\colon 4x - 5y + 4 = 0$.
10. $\ell\colon 2x - y + 5 = 0$.
11. $\ell\colon x - 5y + 3 = 0$.
12. $\ell\colon x - 4y - 2 = 0$.
13. $\ell\colon 4x - 3y + 3 = 0$.
14. $\ell\colon 3x - y + 3 = 0$.
15. $\ell\colon x + 5y - 5 = 0$.
16. $\ell\colon 4x + 5y + 1 = 0$.
17. $\ell\colon 2x - 5y - 4 = 0$.
18. $\ell\colon 3x + 5y - 5 = 0$.
19. $\ell\colon 3x - 2y + 4 = 0$.
20. $\ell\colon 4x + y - 2 = 0$.
21. $\ell\colon 3x - 2y - 5 = 0$.
22. $\ell\colon 5x - 3y - 4 = 0$.
23. $\ell\colon 4x + 3y - 5 = 0$.
24. $\ell\colon 4x - 5y + 1 = 0$.
25. $\ell\colon 4x + y - 1 = 0$.
26. $\ell\colon x + 2y + 3 = 0$.
27. $\ell\colon 5x + 4y + 5 = 0$.
28. $\ell\colon 2x + 4y + 2 = 0$.
29. $\ell\colon 5x - y + 5 = 0$.
30. $\ell\colon x + 3y - 2 = 0$.

**Задача 3.6.** Определить, является движение плоскости $(x, y) \mapsto (x', y')$ собственным или несобственным. Если преобразование собственное, то найти неподвижную точку и угол поворота, если несобственное, то найти инвариантную прямую и вектор сдвига.

1. $a)$ $x' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{24}{17},\ y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{40}{17}$;
   $b)$ $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{16}{5},\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5}$.
2. $a)$ $x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{9}{25},\ y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{37}{25}$;
   $b)$ $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6,\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2$.

3. *a*) $x' = \frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y + \frac{94}{17},\ y' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{36}{17}$;
*b*) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5},\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{56}{5}$.

4. *a*) $x' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{83}{25},\ y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{94}{25}$;
*b*) $x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{66}{13},\ y' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{96}{13}$.

5. *a*) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{22}{5},\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \dfrac{6}{5}$;
*b*) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{35}{17},\ y' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y + \frac{55}{17}$.

6. *a*) $x' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{99}{25},\ y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{82}{25}$;
*b*) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{12}{5},\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{16}{5}$.

7. *a*) $x' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 4,\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 4$;
*b*) $x' = \frac{9}{41}x - \frac{40}{41}y + \frac{402}{41},\ y' = -\frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{338}{41}$.

8. *a*) $x' = \frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{3}{17},\ y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{39}{17}$;
*b*) $x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{58}{13},\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{74}{13}$.

9. *a*) $x' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{162}{25},\ y' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{66}{25}$;
*b*) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{117}{17},\ y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{161}{17}$.

10. *a*) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 4$;
*b*) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \dfrac{6}{5},\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{12}{5}$.

11. *a*) $x' = \frac{9}{41}x - \frac{40}{41}y - \frac{426}{41},\ y' = -\frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y + \frac{308}{41}$;
*b*) $x' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{8}{13},\ y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{14}{13}$.

12. *a*) $x' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{12}{13},\ y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{70}{13}$;
*b*) $x' = \frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{14}{17},\ y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{46}{17}$.

13. *a*) $x' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + 1,\ y' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 1$;
*b*) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3,\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 4$.

14. *a*) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$;
*b*) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{21}{5},\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 8/5$.

15. *a*) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{138}{25},\ y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{84}{25}$;
*b*) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{22}{5},\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{14}{5}$.

16. *a*) $x' = \frac{20}{29}x + \frac{21}{29}y + 3,\ y' = -\frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y - 3$;
*b*) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 6,\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2$.

17. a) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1,\ y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1;$
b) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5,\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5.$

18. a) $x' = \frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y + \frac{165}{29},\ y' = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{8}{29};$
b) $x' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{24}{13},\ y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{16}{13}.$

19. a) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{212}{25},\ y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y - \frac{134}{25};$
b) $x' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{16}{17},\ y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{38}{17}.$

20. a) $x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{3}{25},\ y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{29}{25};$
b) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{14}{5},\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{22}{5}.$

21. a) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{218}{25},\ y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{126}{25};$
b) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{32}{5},\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}.$

22. a) $x' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 8,\ y' = -\frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y;$
b) $x' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{57}{17},\ y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{58}{17}.$

23. a) $x' = -\frac{20}{29}x + \frac{21}{29}y - \frac{7}{29},\ y' = -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y + \frac{287}{29};$
b) $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{76}{13},\ y' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{62}{13}.$

24. a) $x' = \frac{9}{41}x + \frac{40}{41}y - \frac{173}{41},\ y' = \frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{204}{41};$
b) $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{27}{5},\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{21}{5}.$

25. a) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{30}{13},\ y' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{110}{13};$
b) $x' = -\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{117}{17},\ y' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{161}{17}.$

26. a) $x' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{168}{25},\ y' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - \frac{224}{25};$
b) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 6,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2.$

27. a) $x' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{7}{13},\ y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{69}{13};$
b) $x' = -\frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y + \frac{170}{29},\ y' = -\frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{300}{29}.$

28. a) $x' = \frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y - \frac{270}{29},\ y' = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y - \frac{166}{29};$
b) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{24}{5},\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{32}{5}.$

29. a) $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{48}{13},\ y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{6}{13};$
b) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{66}{17},\ y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{76}{17}.$

30. a) $x' = -\frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{231}{29},\ y' = \frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y + \frac{133}{29};$
b) $x' = \frac{9}{41}x + \frac{40}{41}y - \frac{442}{41},\ y' = \frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{288}{41}.$

**Задача 3.7.** Доказать, что данное отображение является преобразованием подобия. Разложить его в композицию $\psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta$, где

- $\eta$ — тождественное: $(x, y) \mapsto (x, y)$, если исходное собственное и симметрия относительно оси $Ox$: $(x, y) \mapsto (x, -y)$, если несобственное,
- $\theta$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v} = (a, b)$: $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$,
- $\Phi$ — поворот на угол $\varphi$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
- $\psi$ — гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $k$: $(x, y) \mapsto (kx, ky)$.

Система координат прямоугольная.

1. $x' = 7\,x + 24\,y,\ y' = -24\,x + 7\,y - 2.$
2. $x' = 5\,x - 12\,y,\ y' = 12\,x + 5\,y + 3.$
3. $x' = 20\,x - 21\,y - 1,\ y' = 21\,x + 20\,y - 3.$
4. $x' = 21\,x - 20\,y - 1,\ y' = 20\,x + 21\,y + 2.$
5. $x' = -20\,x - 21\,y - 3,\ y' = -21\,x + 20\,y - 1.$
6. $x' = 8\,x + 15\,y - 2,\ y' = 15\,x - 8\,y - 3.$
7. $x' = 12\,x + 5\,y - 2,\ y' = 5\,x - 12\,y - 2.$
8. $x' = -12\,x + 5\,y - 3,\ y' = -5\,x - 12\,y - 3.$
9. $x' = -3\,x - 4\,y - 3,\ y' = 4\,x - 3\,y - 2.$
10. $x' = 8\,x + 15\,y + 1,\ y' = -15\,x + 8\,y + 2.$
11. $x' = 4\,x + 3\,y + 1,\ y' = 3\,x - 4\,y - 1.$
12. $x' = 20\,x + 21\,y - 3,\ y' = -21\,x + 20\,y - 3.$
13. $x' = -24\,x - 7\,y - 1,\ y' = -7\,x + 24\,y + 3.$
14. $x' = 24\,x + 7\,y - 2,\ y' = 7\,x - 24\,y - 3.$
15. $x' = -8\,x - 15\,y - 1,\ y' = -15\,x + 8\,y - 3.$
16. $x' = 5\,x - 12\,y + 3,\ y' = -12\,x - 5\,y - 3.$
17. $x' = -5\,x + 12\,y,\ y' = 12\,x + 5\,y + 1.$

18. $x' = -7\,x - 24\,y + 2,\ \ y' = 24\,x - 7\,y + 3.$

19. $x' = 21\,x + 20\,y - 1,\ \ y' = 20\,x - 21\,y + 3.$

20. $x' = -15\,x - 8\,y - 2,\ \ y' = 8\,x - 15\,y + 1.$

21. $x' = 21\,x + 20\,y - 1,\ \ y' = -20\,x + 21\,y + 3.$

22. $x' = 24\,x + 7\,y - 2,\ \ y' = -7\,x + 24\,y.$

23. $x' = -15\,x + 8\,y + 1,\ \ y' = 8\,x + 15\,y + 2.$

24. $x' = -4\,x - 3\,y + 3,\ \ y' = 3\,x - 4\,y.$

25. $x' = -4\,x + 3\,y + 3,\ \ y' = 3\,x + 4\,y.$

26. $x' = 4\,x - 3\,y + 3,\ \ y' = 3\,x + 4\,y.$

27. $x' = 3\,x - 4\,y - 1,\ \ y' = 4\,x + 3\,y - 2.$

28. $x' = 7\,x + 24\,y + 3,\ \ y' = 24\,x - 7\,y - 3.$

29. $x' = 12\,x - 5\,y,\ \ y' = -5\,x - 12\,y + 1.$

30. $x' = -15\,x - 8\,y - 1,\ \ y' = -8\,x + 15\,y - 2.$

# Заключение, *которое читать необязательно*

Как представить многомерные геометрические объекты, например, простейший из них — евклидов четырехмерный куб? На помощь здесь приходит аналогия. Подобно тому, как квадрат является результатом параллельного переноса отрезка вдоль перпендикулярного ему направления на расстояние, равное длине этого отрезка (рис. 6), а куб — результатом параллельного переноса квадрата вдоль направления, перпендикулярного его плоскости (рис. 7), так и куб в четырехмерном евклидовом пространстве получается параллельным переносом трехмерного куба в направлении, перпендикулярном трехмерному пространству (рис. 8).

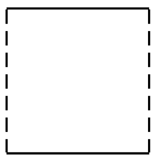

**Рис. 6**

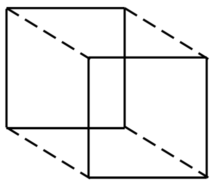

**Рис. 7**

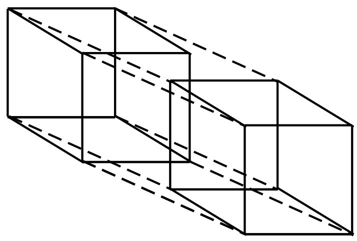

**Рис. 8**

Пытаясь расширить границы трехмерного мировосприятия, мы сталкивается с трудностями того же рода, что и обитатели фантастических двумерных миров Флатладии и Сферландии, пытающиеся постичь третье измерение. Речь о забавных героях замечательных книг: «Флатландия» Э. Эбботта и «Сферландия» Д. Бюргера, которые советуем прочесть всем интересующимся геометрией и просто любителям гимнастики ума.

Позвольте здесь поставить Точку, впрочем, также являющуюся пространством размерности ноль:

«Взгляните на несчастное создание, которое находится перед вами. Эта Точка — существо, подобное нам, но обреченное на вечное пребывание в пучине Нулевой Размерности. Для нее в ней самой заключен свой мир, своя Вселенная.... Она сама воплощает для себя Единичное и Общее, будучи в действительности Ничем. Извлеките же отсюда урок: ... стремиться к возвышенной цели лучше, чем слепо и бессильно погрязнуть в невежестве».

Э. Эбботт «Флатландия»

## Список рекомендуемой литературы


1. Александров, П.С. *Лекции по аналитической геометрии* / П.С. Александров. — М. : Наука, 1968. — 912 с.
2. Бахвалов, С.В. *Сборник задач по аналитической геометрии* / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — Изд. 3-е, стер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1964. — 440 с.
3. Бортаковский, А.С. *Аналитическая геометрия в примерах и задачах* : *учеб. пособие для техн. вузов и ун-тов* / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — М. : Высш. шк., 2005. — 496 с. — ISBN 5-06-004761-X.
4. Дубровин, Н.И. *Аффинные и евклидовы пространства* : *учеб. пособие* / Н.И. Дубровин ; Владим. гос. ун-т. — Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. — 47 с. — ISBN 5-89368-675-6.
5. Ефимов, Н.В. *Линейная алгебра и многомерная геометрия* / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. — М. : Наука, 1970. — 528 с.
6. Постников, М.М. *Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия* / М.М. Постников. — М. : Наука, 1979. — 336 с.
7. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре* / под ред. Ю.М. Смирнова. — М. : Лотос, 2005. — 376 с. — ISBN 5-94010-375-8.

# Оглавление




*Учебное издание*

СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич
ТРУБИНА Ольга Ильинична

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Практикум

Подписано в печать 16.02.09.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6.28. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.