

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт прикладной математики, физики и информатики



УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.

« 30 » 08 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

**Математическое и компьютерное моделирование,
программирование и системный анализ**

(направленность (профиль) подготовки)

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения» является освоение основных теорем базовых разделов теории дифференциальных уравнений (теорем существования и единственности, теории линейных систем, теория устойчивости).

Задачей дисциплины является освоение основных методов решения и качественных методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части учебного плана.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает принципы использования фундаментальных знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Умеет использовать базовые знания из области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности. ОПК-1.3. Владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знать базовые навыки, полученные в области математических и (или) естественных наук. Уметь использовать базовые знания из области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности. Владеть навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1. Знает математические основы, основные положения и концепции в области программирования. ОПК-2.2. Умеет осуществлять обоснованный выбор математических и компьютерных методов, а также необходимого программного обеспечения при решении задач профессиональной деятельности. ОПК-2.3. Владеет навыками применения математических и компьютерных методов и программного обеспечения при решении конкретных задач.	Знать: <ul style="list-style-type: none"> расширенные навыки в области математики; математические основы, основные положения и концепции в области программирования; архитектура языков программирования; основная терминология в области программного обеспечения. Уметь осуществлять обоснованный выбор математических и компьютерных методов, а также необходимого программного обеспечения при решении задач профессиональной деятельности. Владеть навыками применения данных методов и программного обеспечения при решении конкретных задач.	Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов.

Тематический план

форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической подготовки		
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Общие понятия. Примеры из физики.	3	1	2	2		2	3	
2	Простейшие методы отыскания решений.	3	2	2	2		2	3	
3	Нормальные системы ОДУ и сведение уравнения n-го порядка к нормальной системе. Существование и единственность решений для нормальных систем ОДУ.	3	3-4	4			2	6	
4	Продолжение решений. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и правой части.	3	5	2			1	3	
5	Линейные уравнения и системы линейных ОДУ. Фундаментальная матрица и ее свойства.	3	6	2			1	3	Рейтинг-контроль 1
6	Линейные неоднородные системы. Общее и частное решение. Принцип суперпозиции. Формула вариации постоянных.	3	7-8	4			2	6	
7	Линейные уравнения n-го порядка и их свойства. Фундаментальная система решений. Общее решение.	3	9	2			1	3	
8	Определитель Вронского системы решений линейного уравнения и его свойства. Формула Лиувилля-Остроградского.	3	10	2	2		2	3	
9	Линейные уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.	3	11	2	2		2	3	Рейтинг-контроль 2
10	Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Частное решение.	3	12	2	2		2	3	
11	Линейные системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и представление решений.	3	13	2	2		2	3	
12	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Формула вариации постоянных.	3	14	2	2		2	3	
13	Автономные системы. Устойчивость.	3	15	4	2		3	6	
14	Особые точки. Фазовый портрет двумерных линейных систем.	3	16	2	1		1,5	3	
15	Дифференцируемость решений по параметру.	3	17-18	2	1		1,5	3	Рейтинг-контроль 3
Всего за 3 семестр:				36	18			54	Зачет с оценкой
Итого по дисциплине				36	18			54	Зачет с оценкой

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Общие понятия. Решение ОДУ и его свойства. Геометрическое представление графиков решений. Начальные данные и задача Коши для ОДУ. Примеры из физики.

Тема 2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Метод понижения порядка.

Тема 3. Нормальные системы ОДУ и сведение уравнения n -го порядка к нормальной системе. Существование и единственность решения задачи Коши для нормальных систем ОДУ.

Тема 4. Продолжение решений. Условия подлинейного роста. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и правой части. Уравнения n -го порядка, разрешенные относительно старшей производной и их сведение к нормальной системе дифференциальных уравнений. Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка. Теоремы о продолжении и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Теорема о степени гладкости решения.

Тема 5. Линейные уравнения и системы линейных ДУ. Свойства решений линейных систем. Линейная независимость решений. Определитель Вронского системы решений линейного уравнения и его свойства. Формула Лиувилля-Остроградского.

Тема 6. Линейные неоднородные системы. Общее и частное решение. Принцип суперпозиции. Представление решения с помощью фундаментальной матрицы. Формула вариации постоянных.

Тема 7. Линейные уравнения n -го порядка и их свойства. Фундаментальная система решений. Общее решение.

Тема 8. Определитель Вронского системы решений линейного уравнения и его свойства. Формула Лиувилля-Остроградского.

Тема 9. Линейные уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и представление решений. Общее решение.

Тема 10. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Частное решение. Отыскание частного решения методом неопределенных коэффициентов. Метод вариации постоянных.

Тема 11. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Представление общего решения.

Тема 12. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения методом неопределенных коэффициентов. Формула вариации постоянных решения задачи Коши. Краевые задачи для линейного уравнения второго порядка. Функция Грина.

Тема 13. Автономные системы. Фазовое пространство. Векторное поле. Траектории автономных систем и их свойства. Устойчивость по Ляпунову. Устойчивость нулевого решения линейных систем с постоянными коэффициентами. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема об устойчивости по первому приближению.

Тема 14. Особые точки. Фазовый портрет двумерных линейных систем. Особые точки линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Грубость особых точек автономных нелинейных систем второго порядка.

Тема 15. Дифференцируемость решений нормальной системы по параметру. Система уравнений в вариациях. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Метод изоклин. Уравнения с разделяющимися переменными.

Содержание практических занятий по дисциплине

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Примеры из физики. Решение задач.

Тема 2. Простейшие методы отыскания решений. Решение задач.

Тема 3. Определитель Вронского системы решений линейного уравнения и его свойства. Формула Лиувилля-Остроградского. Решение задач.

Тема 4. Линейные уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение задач.

Тема 5. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Частное решение. Решение задач.

Тема 6. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и представление решений. Решение задач.

Тема 7. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Формула вариации постоянных. Решение задач.

Тема 8. Автономные системы. Устойчивость. Решение задач.

Тема 9. Особые точки. Фазовый портрет двумерных линейных систем. Решение задач.

Тема 10. Дифференцируемость решений по параметру. Решение задач.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль №1

«Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка и уравнений, допускающих понижение порядка. Интегрирование линейных уравнений и систем высших порядков»

1. Решить уравнение $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$.
2. Решить задачу Коши $2(x + y^4)dy = ydx, y(0) = 1$.
3. Решить уравнение $y' = xy - xy^3$.
4. Найти частный интеграл уравнения $(2x + \frac{y}{x})dx + (\ln x - y^3)dy = 0$, удовлетворяющий условию $y(1) = 1$.
5. Найти общее решение, используя метод подбора: $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$.
6. Найти общее решение методом вариации: $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$.
7. Решить задачу Коши: $y' = -2y + z - e^{2x}, z' = -3y + 2z + 6e^{2x}, y(0) = z(0) = 1$.
8. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно более низкого порядка) с постоянными коэффициентами, для которого функция $y_1 = xe^x \cos 2x$ — частное решение.

Рейтинг-контроль №2

«Зависимость решений ОДУ от начальных данных и параметров. Основы математической теории устойчивости»

1. При $y(0) = 0, y'(0) = 1 + \mu$, найти $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$, если $y'' - 3y + \sin \mu y = \mu x$.
2. При $y(2) = y_0$ найти $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ при $y_0 = 0$, если $y' - y = 2y^2 + 4xy^3$.
3. При $x(0) = y(0) = 0$ найти $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$, если $\begin{cases} \dot{x} = 1 + 10\mu y \\ \dot{y} = 2tx^2 \end{cases}$
4. Решить краевую задачу $y'' = 4y + 2, y(0) = 1, y(x)$ ограничено при $x \rightarrow +\infty$.
5. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения задачи Коши $4xt + (2t + 1)x' = 0, x(0) = 1$.
6. По теореме об устойчивости по 1-му приближению исследовать устойчивость нулевого решения системы $\dot{x} = y \operatorname{tg} x - y, \dot{y} = -2 \ln(1 + x + y^2) - 3y$.
7. При каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение системы $\dot{x} = x - 2 \sin ay + x^3, \dot{y} = -2e^{bx} - 3y + 2$.
8. Пользуясь известными условиями гурвицевости полинома, исследовать асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения $y^5 + y^4 + 6y''' + 4y'' + 8y' + 3y = 0$.

9. Начертить на плоскости Oxy эскиз траекторий системы вблизи точки $(0,0)$ и с помощью функции Ляпунова либо Четаева исследовать устойчивость нулевого решения системы $\dot{x} = \sin x, \dot{y} = x + y^3$.

Рейтинг-контроль №3

«Элементы качественного анализа динамических систем. Уравнения с частными производными первого порядка».

1. Для заданного линейного векторного поля изобразить фазовый портрет вблизи особой точки $(0;0)$. Определить тип особой точки.
2. Определить тип особой точки заданного нелинейного векторного поля.
3. Методом характеристик построить общее решение линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
4. Методом характеристик построить интегральную поверхность линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, проходящую через данное начальное многообразие.

Для выдачи конкретных заданий используются материалы сборника: Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению : учебное пособие / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. — 6-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 222 с. — ISBN 978-5-00101-799-8. — <https://e.lanbook.com/book/135528>

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет с оценкой)

Вопросы к зачету с оценкой

1. Основные понятия: дифференциальное уравнение n -го порядка, решение дифференциального уравнения. Интегральные кривые. Геометрический смысл уравнения $y' = f(x, y)$.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и свойства решений однородного уравнения.
3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах.
4. Нормальная система дифференциальных уравнений и ее решения. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений. Условие Липшица.
5. Сведение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений к интегральному уравнению. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.
6. Теорема о существовании и единственности решения для уравнения n -го порядка.
7. Система линейных дифференциальных уравнений. Свойства решений однородной системы дифференциальных уравнений. Линейная независимость решений.
8. Определитель Вронского системы решений. Фундаментальная система решений. Переход от однородной фундаментальной матрицы к другой. Формула Лиувилля-Остроградского.
10. Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений. Метод вариации постоянных.
11. Линейные уравнения n -го порядка. Частное решение.
12. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен и собственные значения. Решения, отвечающие собственным значениям (все случаи).
13. Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решения, отвечающие различным собственным значениям. Случай комплексных корней.
14. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней.
15. Особые точки и фазовый портрет линейных систем на плоскости.
16. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Устойчивость нулевого решения для линейных систем с постоянными коэффициентами.
17. Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.
18. Устойчивость по первому приближению.

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

Задания к типовому расчету

1. Решить задачу:

- a) $xy' = 2y(x + 1)$;
 b) $(x + y)y' - 2x + y = 0$;
 c) $y' + 2y = x + 1$;
 d) $(3x^2 + 3y \sin x + 1)dx + (2y - \cos x)dy = 0$.

2. Решить задачу Коши:

- a) $y' + 2y/x = 3$; $y(0) = 1$;
 b) $y' + xy = x^2 + 1$; $y(0) = -2$;
 c) $y' + 4y = 4x + 5$; $y(1) = 1$;
 d) $xy' + y = 4x$; $y(1) = 0$.

3. Решить задачу Коши:

- a) $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 2$;
 b) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(-1) = 1$; $y'(-1) = 0$;
 c) $y'' + 2y' - 8y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$;
 d) $2y'' + 3y' + y = 0$; $y(2) = 2$; $y'(2) = -2$.

4. Решить уравнения:

- a) $2y'' - y' - y = x$;
 b) $y''' + 2y' = \cos x$;
 c) $y'' - y' - 12y = 2x$;
 d) $y''' - y'' - 2y' = 1$;
 e) $2y'' + 2y' + y = x - 1$;
 f) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 3x$.

5. Решить систему уравнений:

5.1.
$$a) \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + t \\ \dot{y} = 2x + 4y \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = 3x - y - 2z \end{cases} \quad 5.2. \quad a) \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + t \\ \dot{y} = 2x + 4y \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = 3x - y - 2z \end{cases}$$

5.3.
$$a) \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 4x + y + 2t \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z \\ \dot{y} = x + 4y - 2z \\ \dot{z} = x + 5y - 3z \end{cases} \quad 5.4. \quad a) \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 4x + y + 2t \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z \\ \dot{y} = x + 4y - 2z \\ \dot{z} = x + 5y - 3z \end{cases}$$

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ
		Наличие в электронном каталоге ЭБС
Основная литература		
1. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. – 240 с. - ISBN 978-5-484-00786-8.	2007	https://alleng.org/d/math-stud/math-st879.htm
2. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А. Ф.. - М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2011 - 240 с. - ISBN 978-5-397-01632-2.	2011	http://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf
3. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Ибрагимов Н. Х. ; Пер. с англ. И. С. Емельяновой. - 2-е изд., доп. и испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 332 с. - ISBN 978-5-9221-1377-9.	2012	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113779.html
Дополнительная литература		
1. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных	2009	https://www.studentlibr

6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

6.3. Интернет-ресурсы


1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ


Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения: Microsoft Excel, Maple.

Рабочую программу составил:

доцент каф. ФАиП, к.ф.-м.н. Мастерков Ю.В. 

Рецензент (представитель работодателя):

заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В. 

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Заведующий кафедрой ФАиП, к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д. 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Протокол № _____ от _____ года


Председатель комиссии

Зав. кафедрой ФиПМ, д.ф.-м.н. Аракелян С.М. _____

ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа одобрена на 2022 / 2023 учебный года

Протокол заседания кафедры № 1 от 30.08.2022 года

Заведующий кафедрой _____ 

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____