

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор  
по образовательной деятельности



А.А.Панфилов

« 02 » 09 2019 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль/программа подготовки: «Математическое и компьютерное моделирование, программирование и системный анализ»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
4	3/108	36	18		54	Зачет
Итого	3/108	36	18		54	Зачет

Владимир 2019

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Комплексный анализ» — ознакомление с теорией функций комплексного переменного и ее приложениями к задачам математики, физики и техники.

Задачи:

- изучить основные положения теории функций комплексного переменного;
- научиться применять методы комплексного анализа для решения прикладных задач.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к обязательной части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: алгебра и геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
<b>ОПК-1.</b> Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Частичное	<b>Знать</b> базовые навыки, полученные в области математических и (или) естественных наук; <b>Уметь</b> использовать базовые знания из области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности; <b>Владеть</b> навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
<b>ОПК-2.</b> Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Частичное	<b>Знать</b> — расширенные навыки в области математики; — математические основы, основные положения и концепции в области программирования; — архитектуру языков программирования; — основную терминологию в области программного обеспечения; <b>Уметь</b> осуществлять обоснованный выбор математических и компьютерных методов, а также необходимого программного обеспечения при решении задач профессиональной деятельности; <b>Владеть</b> навыками применения данных методов и программного обеспечения при решении конкретных задач.

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Комплексные числа и комплексная плоскость	4	1-2	4	2		4	3 / 50%	
2	Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность и производная	4	3-4	4	2		4	3 / 50%	
3	Интеграл функции комплексного переменного	4	5-8	8	4		18	6 / 50%	Рейтинг-контроль 1
4	Функциональные последовательности и ряды. Семейства функций, зависящих от параметра	4	9-10	4	2		4	3 / 50%	
4	Ряды Тейлора. Нули	4	11-12	4	2		4	3 / 50%	Рейтинг-контроль 2
5	Ряды Лорана. Вычеты	4	13-16	8	4		18	6 / 50%	
6	Гармонические функции. Конформные отображения	4	17-18	4	2		2	3 / 50%	Рейтинг-контроль 3
Всего за 4 семестр:				36	18		54	27 / 50%	Зачет
Итого по дисциплине				36	18		54	27 / 50%	Зачет

#### Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Комплексные числа и комплексная плоскость

Тема 1. Комплексные числа. Множества на комплексной плоскости

Комплексные числа. Вещественная и мнимая части. Арифметические операции. Операция сопряжения. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Формы записи комплексного числа. Свойства модуля, операции сопряжения и  $e^{i\varphi}$ . Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. Окружность, открытый и замкнутый круг, кольцо на комплексной плоскости. Окрестность и проколота окрестность точки. Предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Ограниченные множества. Связные множества. Область, замкнутая область. Граница области. Односвязные и многосвязные области. Непрерывные и кусочно-гладкие кривые. Начало и конец кривой. Замкнутые кривые. Жордановы кривые. Формулировка теоремы Жордана. Внутренность и внешность жорданова контура. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка.

Тема 2. Числовые последовательности и ряды

Числовые последовательности и ряды, их сходимость. Связь с вещественными последовательностями и рядами. Свойства сходящихся последовательностей и рядов. Необходимый признак сходимости. Формула Эйлера.

Раздел 2. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность и производная

Тема 1. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность

Функция комплексного переменного. Область определения и область значений. Однозначность, многозначность, однолиственность. Геометрический смысл функции комплексного переменного. Вещественная и мнимая части функции. Сложная функция. Обратная функция. Предел функции комплексного переменного. Связь с пределами вещественной и мнимой части. Свойства предела функции. Непрерывность функции комплексного переменного в точке и на множестве.

Связь с непрерывностью вещественной и мнимой части. Локальные свойства непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах.

Тема 2. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана

Производная и дифференцируемость функции в точке. Аналитичность функции в области. Условия Коши — Римана. Следствие. Правила дифференцирования. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Основные элементарные функции.

Раздел 3. Интеграл функции комплексного переменного

Тема 1. Интеграл функции комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного. Формула вычисления интеграла. Свойства интеграла.

Тема 2. Теорема Коши

Теорема Коши и ее обобщения. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования. Первообразная функции комплексного переменного. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона — Лейбница.

Тема 3. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля

Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля.

Тема 4. Производные высших порядков. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры

Производные высших порядков. Интегральные формулы для производных. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.

Раздел 4. Функциональные последовательности и ряды. Семейства функций, зависящих от параметра

Тема 1. Равномерная сходимость

Равномерная сходимость последовательности функций и функционального ряда в области и на кривой. Семейства функций, зависящих от параметра. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность предела и суммы, почленное интегрирование при равномерной сходимости. Аналитичность суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Почленное дифференцирование равномерно сходящегося функционального ряда.

Тема 2. Степенные ряды

Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши — Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда.

Раздел 5. Ряды Тейлора. Нули

Тема 1. Ряды Тейлора

Ряды Тейлора. Теорема Тейлора. Теорема о степенном ряде как ряде Тейлора своей суммы.

Тема 2. Нули. Теорема единственности

Ноль функции, его порядок. Вид тейлоровского разложения функции в окрестности нуля. Теорема о существовании окрестности нуля аналитической функции, в которой функция не имеет других нулей. Теорема единственности. Следствие.

Раздел 6. Ряды Лорана. Вычеты

Тема 1. Ряды Лорана

Ряды Лорана. Главная и правильная части ряда Лорана. Теорема Лорана. Теорема о ряде по целым степеням как ряде Лорана своей суммы.

Тема 2. Изолированные особые точки функции

Изолированные особые точки функции, их классификация. Связь нулей и полюсов. Порядок полюса. Связь типа особой точки с видом лорановского разложения в ее проколотовой окрестности. Теорема Сохоцкого.

Тема 3. Вычеты. Теорема о вычетах

Вычеты. Формулы вычисления вычета в полюсе. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вещественных интегралов от тригонометрических дробей на отрезке длины  $2\pi$ . Вычисление вещественных несобственных интегралов первого рода от рациональных функций. Лемма Жордана.

Тема 4. Принцип аргумента. Теорема Руше

Логарифмическая производная и логарифмический вычет. Теорема о логарифмических вычетах в нулях и полюсах функции. Полное изменение аргумента при обходе контура. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Раздел 6. Гармонические функции. Конформные отображения

Тема 1. Гармонические функции

Гармонические функции двух вещественных переменных. Связь гармонических функций двух вещественных переменных с аналитическими функциями комплексного переменного. Нахождение мнимой части аналитической функции по заданной вещественной части.

Тема 2. Конформные отображения

Теорема о сохранении области. Конформные отображения и их свойства. Необходимое и достаточное условие конформности отображения. Формулировка теоремы Римана. Гармонические функции при конформном отображении.

### Содержание практических занятий по дисциплине

Раздел 1. Комплексные числа и комплексная плоскость. Числовые последовательности и ряды

Тема 1. Комплексные числа и комплексная плоскость. Числовые последовательности и ряды

Решение задач.

Раздел 2. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность и производная

Тема 1. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность и производная

Решение задач.

Раздел 3. Интеграл функции комплексного переменного

Тема 1. Определение, свойства и вычисление интеграла функции комплексного переменного

Решение задач.

Тема 2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Производные высших порядков

Решение задач.

Раздел 4. Функциональные последовательности и ряды. Семейства функций, зависящих от параметра

Тема 1. Функциональные ряды. Степенные ряды

Решение задач.

Раздел 4. Ряды Тейлора. Нули

Тема 1. Ряды Тейлора. Нули

Решение задач

Раздел 5. Ряды Лорана. Вычеты

Тема 1. Ряды Лорана

Решение задач.

Тема 2. Вычеты. Теорема о вычетах

Решение задач.

Раздел 6. Гармонические функции. Конформные отображения

Тема 1. Гармонические функции. Конформные отображения

Решение задач.

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Комплексный анализ» используются разнообразные образовательные технологии: как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивные лекции (по всем темам).

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

### Текущий контроль успеваемости

#### Рейтинг-контроль 1

1. Найти значения заданных выражений с комплексными числами.
2. Изобразить заданное множество на комплексной плоскости.
3. Найти точки, в которых заданная функция комплексного переменного дифференцируема.
4. Найти значения параметров, при которых заданные вещественные функции являются вещественной и мнимой частями аналитической функции комплексного переменного.
5. Вычислить заданный интеграл функции комплексного переменного.

#### Рейтинг-контроль 2

1. Вычислить заданный интеграл с помощью интегральной формулы Коши.
2. Найти область сходимости заданного степенного ряда. Исследовать сходимость на ее границе.
3. Разложить заданную функцию в ряд Тейлора в окрестности заданной точки.

#### Рейтинг-контроль 3

1. Разложить заданную функцию в ряд Лорана в заданном кольце.
2. Найти все конечные особые точки заданной функции и вычеты в них.
3. Вычислить интеграл функции комплексного переменного с помощью теоремы о вычетах.
4. Вычислить заданный вещественный интеграл.
5. Выяснить, сколько корней заданного многочлена лежит в заданной области.

### Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет)

#### Контрольные вопросы к зачету

1. Комплексные числа. Множества на комплексной плоскости
2. Числовые последовательности и ряды
3. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность
4. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана
5. Определение и свойства интеграла функции комплексного переменного
6. Теорема Коши
7. Первообразная функции комплексного переменного. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона — Лейбница.
8. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля
9. Производные высших порядков. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры
10. Равномерная сходимость
11. Степенные ряды
12. Ряды Тейлора
13. Нули. Теорема единственности
14. Ряды Лорана
15. Изолированные особые точки функции
16. Вычеты. Теорема о вычетах
17. Применение теоремы о вычетах для вычисления вещественных интегралов
18. Принцип аргумента. Теорема Руше
19. Гармонические функции
20. Конформные отображения

## Самостоятельная работа студентов

### Темы самостоятельных работ

1. Найти значения заданных выражений с комплексными числами.
2. Изобразить заданное множество на комплексной плоскости.
3. Найти точки, в которых заданная функция комплексного переменного дифференцируема.
4. Найти значения параметров, при которых заданные вещественные функции являются вещественной и мнимой частями аналитической функции комплексного переменного.
5. Вычислить заданный интеграл функции комплексного переменного.
6. Вычислить заданный интеграл с помощью интегральной формулы Коши.
7. Найти область сходимости заданного степенного ряда. Исследовать сходимость на ее границе.
8. Разложить заданную функцию в ряд Тейлора в окрестности заданной точки.
9. Разложить заданную функцию в ряд Лорана в заданном кольце.
10. Найти все конечные особые точки заданной функции и вычеты в них.
11. Вычислить интеграл функции комплексного переменного с помощью теоремы о вычетах.
12. Вычислить заданный вещественный интеграл.
13. Выяснить, сколько корней заданного многочлена лежит в заданной области.

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания можно найти по ссылке: <http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/6570/1/00707.pdf>.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: учебник / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров - М.: Лаборатория знаний, 2016. - 303 с. - ISBN 978-5-93208-209-6.	2016		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785932082096.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785932082096.html</a>
2. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] / М. И. Шабунин, Е. С. Половинкин, М. И. Карлов. - 4-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ, 2015. - 365 с. - ISBN 978-5-9963-2658-7	2015		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996326587.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996326587.html</a>
Дополнительная литература			
1. Функции комплексного переменного [Электронный ресурс] / А. А. Туганбаев А.А. - М.: ФЛИНТА, 2017. - 48 с. - ISBN 978-5-9765-1406-5.	2017		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976514065.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976514065.html</a>
2. Теория и практика конформных отображений [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / А. Н. Канатников, Е. Е. Красновский, В. Д. Морозова, К. Ю. Федоровский. - М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. - 84 с. - ISBN 978-5-7038-3791-7.	2013		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785703837917.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785703837917.html</a>

## **7.2. Периодические издания**

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

## **7.3. Интернет-ресурсы**

1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>

## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

1. Microsoft Excel
2. Maple



Рабочую программу составил доцент Додонов А. Е.



(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):  
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А. В.



(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП  
Протокол № 1а от 26.08.2019 года  
Заведующий кафедрой Бурков В. Д.



(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии  
направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Протокол № 1 от 02.09.2019 года

Председатель комиссии: заведующий кафедрой Аракелян С. М.



(подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 2020-2021 учебный год

Протокол заседания кафедры № 1 от 31.08.2020 года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

*С. М. Фрактен*

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

### КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

образовательной программы направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,  
направленность: «Математическое и компьютерное моделирование, программирование и  
системный анализ» (бакалавриат)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата протокола заседания кафедры)
1			
2			

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(Подпись) (ФИО)