Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по образовательной деятельности
________________ А.А.Панфилов
«_02_» _09_______________ 20_19_г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль/программа подготовки: «Математическое и компьютерное моделирование, программирование и системный анализ»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед,/ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
5	3/108	36	18		54	Зачет
Итого	3/108	36	18		54	Зачет

Владимир 2019

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Функциональный анализ» — ознакомление с теорией функций, методами работы в бесконечномерных функциональных пространствах и их приложениями в вычислительной математике. В терминах данной дисциплины ставятся многие задачи физики и технические проблемы, описываются процессы, происходящие в природе и экономике.

Задачи:

- изучить основные понятия теории метрических, нормированных и евклидовых пространств;
- изучить основные понятия теории линейных функционалов и операторов;
- изучить методы решения функциональных и линейных интегральных уравнений;
- изучить основные понятия теории меры и интегрирования;
- научиться применять методы функционального анализа для решения прикладных задач (в том числе теоретико-вероятностных, задач математической физики и оптимального управления).

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: алгебра и геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, комплексный анализ.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Частичное	**Знать** базовые навыки, полученные в области математических и (или) естественных наук; **Уметь** использовать базовые знания из области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности; **Владеть** навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Частичное	**Знать** – расширенные навыки в области математики; – математические основы, основные положения и концепции в области программирования; – архитектуру языков программирования; – основную терминологию в области программного обеспечения; **Уметь** осуществлять обоснованный выбор математических и компьютерных методов, а также необходимого программного обеспечения при решении задач профессиональной деятельности; **Владеть** навыками применения данных методов и программного обеспечения при решении конкретных задач.

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Метрические пространства	5	1-4	8	4		12	6 / 50%	
2	Линейные и нормированные пространства	5	5-7	4	2		6	3 / 50%	Рейтинг-контроль 1
3	Евклидовы и гильбертовы пространства	5	7-10	8	4		12	6 / 50%	
4	Линейные функционалы и линейные операторы	5	11-14	8	4		12	6 / 50%	Рейтинг-контроль 2
5	Мера. Интеграл Лебега	5	15-18	8	4		12	6 / 50%	Рейтинг-контроль 3
Всего за 5 семестр:				36	18		54	27 / 50%	Зачет
Итого по дисциплине				36	18		54	27 / 50%	Зачет

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Метрические пространства

Тема 1. Определение метрического пространства. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия

Определения метрического пространства и подпространства метрического пространства. Основные примеры. Определения непрерывного отображения метрических пространств, гомеоморфизма, изометрии. Примеры.

Тема 2. Открытые и замкнутые шары. Замыкание множества. Сходимость. Плотные подмножества

Определения открытого и замкнутого шара, ε-окрестности точки, точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки множества. Определение замыкания множества. Теорема о свойствах замыкания множества. Теорема о классификации точек прикосновения множества и ее следствие о классификации точек замыкания множества. Определение предела последовательности точек. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема о равенстве совокупности пределов всевозможных последовательностей точек множества и замыкания этого множества. Определения всюду плотного и нигде не плотного множества в пространстве, сепарабельного пространства. Примеры.

Тема 3. Открытые и замкнутые множества

Определения открытого и замкнутого множества. Примеры. Теорема о дополнении открытого множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых множеств, замкнутых множеств. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество.

Тема 4. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений

Определение фундаментальной последовательности. Теорема о фундаментальности сходящейся последовательности. Определение полного метрического пространства. Примеры. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Определение пополнения пространства. Теорема о существовании и единственности пополнения метрического пространства. Определение сжимающего отображения. Принцип сжимающих отображений. Применение принципа сжимающих отображений для решения алгебраических, иррациональных, трансцендентных и интегральных уравнений.

Раздел 2. Линейные и нормированные пространства

Тема 1. Линейные пространства. Линейные функционалы

Определения линейного пространства и его подпространства. Основные примеры. Определения линейно независимой системы векторов, размерности пространства, бесконечномерного пространства, базиса конечномерного пространства. Определения функционала, аддитивного, однородного и линейного функционала. Примеры. Определение ядра функционала.

Тема 2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха. Линейные нормированные пространства

Определения выпуклого множества и выпуклого тела. Примеры. Теорема о выпуклости пересечения выпуклых множеств. Определения выпуклой оболочки множества и симплекса. Теорема о симплексе. Определения выпуклого, положительно-однородного и однородно-выпуклого функционала. Примеры. Свойства однородно-выпуклых функционалов. Определение продолжения линейного функционала. Теорема Хана — Банаха. Определение функционала, разделяющего множества. Теорема о существовании линейного функционала, разделяющего два выпуклых множества. Определения нормы, линейного нормированного пространства, банахова пространства. Примеры. Определения подпространства нормированного пространства и линейного многообразия. Определение полной системы элементов.

Раздел 3. Евклидовы и гильбертовы пространства

Тема 1. Евклидовы пространства

Определения скалярного произведения и евклидова пространства. Основные примеры. Характеристическое свойство евклидова пространства. Неравенство Коши — Буняковского. Определения угла между векторами, ортогональности векторов, ортогональной и ортонормированной систем векторов. Теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов. Определения ортогонального и ортонормированного базиса. Примеры.

Тема 2. Ортогональный базис в сепарабельном евклидовом пространстве. Ортогонализация Грама — Шмидта

Теорема о счетности ортогональной системы в сепарабельном пространстве. Ортогонализация Грама — Шмидта. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.

Тема 3. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Теорема Рисса — Фишера

Определения ряда Фурье и коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Определение замкнутой ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Теорема о совпадении полноты и замкнутости ортонормированной системы в сепарабельном пространстве. Теорема Рисса — Фишера. Критерий полноты ортонормированной системы в полном сепарабельном пространстве.

Тема 4. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение. Прямая сумма

Определение гильбертова пространства. Определение изоморфизма двух евклидовых пространств. Теорема об изоморфизме. Определение ортогонального дополнения подпространства гильбертова пространства. Теорема о существовании и единственности представления элемента гильбертова пространства в виде суммы элемента подпространства и элемента его ортогонального дополнения. Следствия. Определение прямой суммы.

Раздел 4. Линейные функционалы и линейные операторы

Тема 1. Непрерывные линейные функционалы на нормированных пространствах. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве. Сопряженное пространство

Определение непрерывного функционала. Критерии непрерывности линейных функционалов. Определение и свойства нормы непрерывного линейного функционала. Примеры. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве и ее следствия. Определения суммы линейных функционалов, произведения линейного функционала на число и сопряженного пространства. Примеры. Теорема о полноте сопряженного пространства. Теорема о виде непрерывного линейного функционала в вещественном гильбертовом пространстве. Определение второго сопряженного пространства и рефлексивного пространства.

Тема 2. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Пространство линейных операторов

Определения линейного оператора, ядра и образа линейного оператора. Примеры. Определения непрерывности и ограниченности линейного оператора. Теорема о равносильности непрерывности и ограниченности линейного оператора, заданного на нормированном пространстве. Определения нормы оператора, суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число и пространства непрерывных линейных операторов.

Тема 3. Обратный оператор. Сопряженные операторы. Самосопряженные операторы

Определения произведения линейных операторов, обратного оператора. Теорема о линейности оператора, обратного линейному. Теорема Банаха об обратном операторе. Лемма о тройке. Определение сопряженного оператора. Свойства сопряженных операторов. Теорема о равенстве норм оператора и сопряженного к нему оператора. Лемма об аннуляторе ядра оператора. Определения самосопряженного оператора и инвариантного подпространства. Теорема о виде оператора, обратного разности тождественного и линейного с нормой, меньшей 1.

Тема 4. Спектр оператора. Резольвента

Определение резольвенты оператора. Определения регулярного числа, спектра, точечного спектра, непрерывного спектра. Замкнутость спектра. Примеры. Спектральный радиус оператора. Теорема о спектре самосопряженного оператора.

Раздел 5. Мера. Интеграл Лебега

Тема 1. Мера плоского множества

Определение и свойства меры прямоугольника. Определение элементарного множества. Теорема об объединении, пересечении, разности и симметрической разности элементарных множеств. Мера элементарного множества и ее свойства. Определение внешней меры произвольного множества. Определение измеримого множества. Определение и свойства меры Лебега. Измеримость открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств.

Тема 2. Измеримые функции

Определение измеримой функции. Теоремы об измеримости суммы, разности, произведения, частного, суперпозиции и предела последовательности измеримых функций. Определение эквивалентности двух функций. Теорема об измеримости функции, эквивалентной измеримой функции. Определение сходимости почти всюду. Теорема об измеримости функции, к которой почти всюду сходится последовательность измеримых функций. Теорема Егорова. Определение сходимости по мере. Сравнение сходимости по мере и сходимости почти всюду. Теорема Лузина.

Тема 3. Интеграл Лебега

Определение простой функции. Критерий измеримости функции, принимающей не более чем счетное число различных значений. Определения суммируемости простой функции и ее интеграла Лебега, свойства. Теорема об измеримой функции как пределе равномерно сходящейся последовательности простых функций. Распространение понятия суммируемости и интеграла Лебега на произвольные измеримые функции. Свойства интеграла Лебега.

Тема 4. Основные теоремы об интеграле Лебега. Интеграл Лебега на множестве бесконечной меры. Сравнение интегралов Лебега и Римана

Теоремы об интеграле Лебега на счетном дизъюнктном объединении множеств. Неравенство Чебышёва. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Теорема Лебега. Теорема Б. Леви. Теорема Фату. Распространение интеграла Лебега на множества бесконечной меры. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Содержание практических занятий по дисциплине

Раздел 1. Метрические пространства

Тема 1. Определение метрического пространства. Сходимость. Плотные подмножества. Открытые и замкнутые множества

Решение задач.

Тема 2. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений

Решение задач.

Раздел 2. Линейные и нормированные пространства

Тема 1. Линейные пространства. Линейные функционалы. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Линейные нормированные пространства

Решение задач.

Раздел 3. Евклидовы и гильбертовы пространства

Тема 1. Евклидовы пространства. Ортогональный базис в сепарабельном евклидовом пространстве. Ортогонализация Грама — Шмидта

Решение задач.

Тема 2. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Теорема Рисса — Фишера. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение. Прямая сумма

Решение задач.

Раздел 4. Линейные функционалы и линейные операторы

Тема 1. Непрерывные линейные функционалы на нормированных пространствах. Сопряженное пространство. Линейные операторы. Пространство линейных операторов

Решение задач.

Тема 2. Обратный оператор. Сопряженные операторы. Самосопряженные операторы. Спектр оператора. Резольвента

Решение задач.

Раздел 5. Мера. Интеграл Лебега

Тема 1. Мера плоского множества. Измеримые функции

Решение задач.

Тема 2. Интеграл Лебега

Решение задач.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Функциональный анализ» используются разнообразные образовательные технологии: как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивные лекции (по всем темам).

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль 1

1. Проверить аксиомы метрики для заданной формулы.
2. Проверить, является ли в заданном пространстве заданная последовательность сходящейся.
3. Проверить, является ли заданное пространство полным.
4. Приближенно решить заданное функциональное уравнение.
5. Приближенно решить заданное уравнение Фредгольма второго рода или уравнение Вольтерра.

Рейтинг-контроль 2

1. Проверить, является ли заданное множество выпуклым множеством, выпуклым телом.
2. Проверить, можно ли задать скалярное произведение предлагаемой формулой.
3. Ортогонализировать заданную систему в заданном пространстве.
4. Найти норму заданного линейного функционала или линейного оператора.
5. Найти спектр заданного линейного оператора.

Рейтинг-контроль 3

1. Доказать, что заданное множество измеримо. Найти его меру.
2. Доказать, что заданная функция измерима.
3. Доказать сходимость заданной последовательности к заданной функции почти всюду или по мере.
4. Найти заданный интеграл Лебега.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет)

Контрольные вопросы к зачету

1. Проверить аксиомы метрики для заданной формулы.
2. Проверить, является ли в заданном пространстве заданная последовательность сходящейся.

3. Проверить, является ли заданное пространство полным.
4. Приближенно решить заданное функциональное уравнение.
5. Приближенно решить заданное уравнение Фредгольма второго рода или уравнение Вольтерра.
6. Проверить, является ли заданное множество выпуклым множеством, выпуклым телом.
7. Проверить, можно ли задать скалярное произведение предлагаемой формулой.
8. Ортогонализировать заданную систему в заданном пространстве.
9. Найти норму заданного линейного функционала или линейного оператора.
10. Найти спектр заданного линейного оператора.
11. Доказать, что заданное множество измеримо. Найти его меру.
12. Доказать, что заданная функция измерима.
13. Доказать сходимость заданной последовательности к заданной функции почти всюду или по мере.
14. Найти заданный интеграл Лебега.

Самостоятельная работа студентов
Темы самостоятельных работ

1. Проверить аксиомы метрики для заданной формулы.
2. Проверить, является ли в заданном пространстве заданная последовательность сходящейся.
3. Проверить, является ли заданное пространство полным.
4. Приближенно решить заданное функциональное уравнение.
5. Приближенно решить заданное уравнение Фредгольма второго рода или уравнение Вольтерра.
6. Проверить, является ли заданное множество выпуклым множеством, выпуклым телом.
7. Проверить, можно ли задать скалярное произведение предлагаемой формулой.
8. Ортогонализировать заданную систему в заданном пространстве.
9. Найти норму заданного линейного функционала или линейного оператора.
10. Найти спектр заданного линейного оператора.
11. Доказать, что заданное множество измеримо. Найти его меру.
12. Доказать, что заданная функция измерима.
13. Доказать сходимость заданной последовательности к заданной функции почти всюду или по мере.
14. Найти заданный интеграл Лебега.

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания можно найти по ссылке: http://analysis.petrsu.ru/attachments/article/27/fa2012.pdf.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / Крепкогорский В. Л. - Казань : Издательство КНИТУ- 116 с. - ISBN 978-5-7882-1650-8.	2014		http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216508.html
2. Лекции по выпуклому и многозначному анализу [Электронный ресурс] / Арутюнов А. В - М.: ФИЗМАТЛИТ, 184 с. – ISBN 978-5-9221-1558-2.	2014		http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115582.html
Дополнительная литература			
1. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] / Колмогоров А. Н., Фомин С. В. - 7-е изд. - М. : ФИЗМАТЛИТ, - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7.	2009		http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102667.html
2. Функциональный анализ: методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс] / Власова Е. А., Красновский Е. Е., Марчевский И. К.; под ред. Зарубина В. С. - М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, - 77 [3] с.	2009		http://www.studentlibrary.ru/book/bauman_0005.html

7.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

7.3. Интернет-ресурсы

1. http://window.edu.ru/
2. http://www.exponenta.ru/
3. http://allmath.com/

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

1. Microsoft Excel,
2. Maple.

Рабочую программу составил доцент Додонов А. Е. ____________________
(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А. В. ____________________
(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ВМ
Протокол № 1а от 26.08.2019 года
Заведующий кафедрой Бурков В. Д. ____________________
(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Протокол № 1 от 02.09.2019 года
Председатель комиссии: заведующий кафедрой Аракелян С. М. ____________________
(подпись)

ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа одобрена на ____________ учебный год

Протокол заседания кафедры № _______ от __________ года

Заведующий кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ____________ учебный год

Протокол заседания кафедры № _______ от __________ года

Заведующий кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ____________ учебный год

Протокол заседания кафедры № _______ от __________ года

Заведующий кафедрой____

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
в рабочую программу дисциплины
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
образовательной программы направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», направленность: «Математическое и компьютерное моделирование, программирование и системный анализ» (бакалавриат)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата протокола заседания кафедры)
1			
2			

Зав. кафедрой ______________ / ______________
(Подпись) (ФИО)