

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по УМР

А.А.Панфилов

« 17 » \_\_\_\_\_ 04 \_\_\_\_\_ 2015 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Методы оптимизации**  
(наименование дисциплины)

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль/программа подготовки

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

| Семестр | Трудоемкость зач.<br>ед./ час. | Лекции,<br>час. | Практич.<br>занятия,<br>час. | Лаборат.<br>работы,<br>час. | СРС,<br>час. | Форма промежу-<br>точного кон-<br>троля<br>(экз./зачет) |
|---------|--------------------------------|-----------------|------------------------------|-----------------------------|--------------|---|
| 5       | 5/180                          | 36              | -                            | 18                          | 90           | Экзамен 36  |
| Итого   | 5/180                          | 36              | -                            | 18                          | 90           | Экзамен 36  |

Владимир 2015

Р

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины (модуля) «Методы оптимизации» являются ознакомление студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика», с методами, накопленными в этой теории. Последнее означает, что студенты по окончании курса должны владеть навыками по решению прикладных экстремальных задач.

Одной из характерных особенностей современной эпохи является все возрастающее внимание к проблемам управления. Как никогда прежде, ощущается потребность в плодотворном и эффективном использовании природных богатств, людских ресурсов, материальных и технических средств. На математическом языке такие задачи могут быть сформулированы как задачи отыскания экстремума некоторой функции или функционала. В результате работ многих математиков по их решению стало возможным говорить о теории экстремальных задач.

Задачи дисциплины:

- изучение основных приемов и методов решения оптимизационных задач;
- формирование навыков построения оптимизационных моделей, наиболее полно отвечающих требованиям поставленной задачи;
- изучение способов реализации методов оптимизации в виде программ для ЭВМ;
- приобретение навыков планирования экспериментов и обработки их результатов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Данная дисциплина относится к базовой части ОПОП. Изучение данной дисциплины проходит в 5-м семестре и базируется на знаниях, приобретённых студентами в рамках курсов математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений, численных методов и др.

Данный курс обеспечивает дальнейшее изучение дисциплин «Математическое моделирование», «Теория игр и исследование операций» и является базовым для изучения специальных дисциплин.

Знания, полученные в рамках изучения данной дисциплины, могут быть применены для написания выпускной квалификационной работы.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен овладеть следующими компетенциями:

- способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ОПК-1).
- способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат (ПК-2).

В результате освоения дисциплины студент должен демонстрировать освоение указанных компетенций по дескрипторам «знания, умения, владения», в соответствии с тематическими модулями дисциплины, применять полученные знания в последующем обучении и профессиональной деятельности:

- 1) Знать: современный математический аппарат; современные языки программирования и языки баз данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии.
- 2) Уметь: использовать в научной и познавательной деятельности, а также в социальной сфере профессиональные навыки работы с информационными и компьютерными технологиями; применять широкий спектр методов различных областей науки для разработки и реализации имитационных моделей; приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии; разрабатывать математические модели для требуемых в имитационных моделях расчётов; применять в профессиональной деятельности современные языки программирования и языки баз данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии.
- 3) Владеть: навыками работы с персональным компьютером как средством обработки и анализа информации; современными языками программирования для реализации имитационных моделей.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

| № п/п | Раздел (тема) дисциплины  | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) |                      |                     |                    |     |         | Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %) | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|-------|---|---------|-----------------|--|----------------------|---------------------|--------------------|-----|---------|---|---|
|       |   |         |                 | Лекции   | Практические занятия | Лабораторные работы | Контрольные работы | СРС | КП / КР |   |   |
| 1     | Введение в дисциплину. Постановка задачи оптимизации.   | 5       | 1               | 2  | -                    | -                   | -                  | 10  | -       | 1 (50%)   |   |
| 2     | Методы минимизации функций одной переменной.  | 5       | 2-7             | 12   | -                    | 8                   | -                  | 30  | -       | 10 (50%)  | Рейтинг-контроль 1  |
| 3     | Методы минимизации функций многих переменных. Элементы выпуклого анализа. Эвристические методы. | 5       | 8-18            | 22   | -                    | 10                  | -                  | 50  | -       | 12 (37%)  | Рейтинг-контроль 2,3  |
| Всего |   | 5       | 18              | 36   | -                    | 18                  | -                  | 90  |         | 23 (42%)  | Экзамен 36  |

#### СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

## ЛЕКЦИИ

**Лекция 1.** Введение. Постановка задачи оптимизации. Классификация задач математического программирования (2 часа).

**Лекция 2.** Методы минимизации функций одной переменной. Классический метод. Методы дихотомии, золотого сечения (4 часа).

**Лекция 3.** Методы минимизации функций одной переменной. Метод ломаных (4 часа).

**Лекция 4.** Методы минимизации функций одной переменной. Выпуклые функции. Метод касательных (4 часа).

**Лекция 5.** Методы минимизации функций многих переменных. Постановка задачи. Задача на безусловный экстремум. Классический метод (4 часа).

**Лекция 6.** Методы минимизации функций многих переменных. Метод множителей Лагранжа (4 часа).

**Лекция 7.** Задачи выпуклого программирования. Седловая точка. Теоремы Куна-Таккера (4 часа).

**Лекция 8.** Численные методы минимизации функций многих переменных. Метод случайного поиска. Градиентные методы. Метод Ньютона (4 часов).

**Лекция 9.** Численные методы минимизации функций многих переменных. Метод покоординатного спуска. Метод множителей Лагранжа. Метод штрафных функций (4 часа).

**Лекция 10.** Эвристические методы. Генетические алгоритмы. Муравьиный алгоритм (2 часа).

## ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ

**Лабораторная работа №1.** Методы минимизации функций одной переменной. Метод дихотомии, метод золотого сечения (4 часа).

**Лабораторная работа №3.** Методы минимизации функций одной переменной. Метод ломаных (2 часа).

**Лабораторная работа №3.** Методы минимизации функций одной переменной. Метод касательных (2 часа).

**Лабораторная работа №4.** Методы минимизации функций многих переменных. Градиентные методы (4 часа).

**Лабораторная работа №5.** Численные методы минимизации функций многих переменных. Метод покоординатного спуска (2 часа).

**Лабораторная работа №6.** Численные методы минимизации функций многих переменных. Метод штрафных функций (4 часа).

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Для достижения планируемых результатов освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии:

- информационно-развивающие технологии;
- развивающие проблемно-ориентированные технологии;
- лично-ориентированные технологии обучения.

| Методы           | Лекция | Лабораторные занятия | СРС |
|------------------|--------|----------------------|-----|
| Метод ИТ         | +      | +                    | +   |
| Работа в команде |        | +                    |     |

|                                    |   |   |   |
|------------------------------------|---|---|---|
| Case-study                         |   | + |   |
| Проблемное обучение                | + | + |   |
| Контекстное обучение               |   | + | + |
| Обучение на основе опыта           | + | + | + |
| Индивидуальное обучение            |   | + | + |
| Междисциплинарное обучение         | + | + | + |
| Опережающая самостоятельная работа |   |   | + |

В рамках изучения дисциплины возможно применение широко спектра образовательных технологий: лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекционные и лабораторные занятия); case-study; метод проектов; обучение в малых группах; мастер-классы; применение мультимедиа технологий (проведение лекционных занятий с применением компьютерных презентаций и демонстрационных роликов с помощью проектора или ЭВМ); технология развития критического мышления; информационно-коммуникационные технологии (применение информационных технологий для мониторинга текущей успеваемости студентов и контроля знаний).

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

### ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ

Текущим контролем успеваемости является действующая в университете система рейтинг-контроля.

#### Контрольные вопросы к рейтинг-контролю №1

1. Построить минимизирующую последовательность для функции  $J(u) = \arctg(u)$ .
2. Найти множество  $U^*$  всех точек минимума для функции  $J(u)$ :

$$J(u) = \begin{cases} |u^2 - 1|, & u \neq 1, \\ 1, & u = 1. \end{cases}$$

3. Пусть функция  $J(u) = ||u^2 - 1| - 1| - 1|$ . Найти все локальные минимумы данной функции и ответить на вопрос: на каких отрезках она является унимодальной.
4. Решить:  $J(u) = \sin^3(u) + \cos^3(u) \rightarrow \text{extr. } u \in [0; 2\pi]$ .

5. Решить:  $J(u) = \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{1}{u}}\right)^{-1}, & u \neq 0; \\ 0, & u = 0. \end{cases} \rightarrow \text{extr. } u \in R$ .

6. Привести пример функций, удовлетворяющих условию Липшица, но не являющихся унимодальной (не менее трех функций). Ответить на вопрос: удовлетворяет ли условиям Липшица функция унимодальная на отрезке. Утверждение доказать.

7. Рассмотреть первые шесть шагов метода ломаных для функции  $J(u) = ||u^2 - 1| - 1|$  на отрезке  $[-2; 2]$  при  $\forall u_0 \in [-2; 2]$ .
8. Найти область выпуклости функции  $J(u) = \sin(u) + \sin(2u)$ .
9. Решить:  $J(u) = (x + y + 1)^{-(x^2 - xy + y^2)} \rightarrow \text{extr}$ ,  $u = (x, y) \in E^2$ .
10. Решить:  $J(u) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z) \rightarrow \text{extr}$ ,  $u = (x, y, z) \in E^3$ .
11. Решить:  $J(u) = x \rightarrow \text{min}$ ,  $u \in U$ ,  $U = \left\{ u = (x, y) \in E^2 : y - x^{\frac{3}{2}} = 0, x \geq 0 \right\}$ .
12. Решить:  $J(u) = x \rightarrow \text{extr}$ ,  $u \in U$ ,  $U = \left\{ u = (x, y) \in E^2 : x^p + y^q = 0 \right\}$ , где  $p$  и  $q$  натуральные числа.
13. При каких  $a$ ,  $b$  и  $c$  функция  $J(u) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , будет выпукла, вогнута?  $u = (x, y) \in E^2$ .
14. Найти области выпуклости функций:  $J(u) = \sin(x + y + z)$ ,  $J(u) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u = (x, y, z) \in E^3$ .
15. Привести пример корректно сформулированной прикладной задачи оптимизации, с наличием не менее двух ограничений. Указать к какому классу и типу относится сформулированная задача.
16. Найти множество  $U^*$  – всех точек минимума функции  $J(u) = \sin \left[ \pi \exp(-u^2) \right]$ , на универсальном множестве  $U = R^1$ . Построить минимизирующие последовательности для  $J(u)$ , которая сходится к множеству  $U^*$  и не сходится.
17. Найти множество  $U^*$  – всех точек минимума функции  $J(u) = 1 - \cos \left[ \pi \exp(-u^2 - \ln \frac{1}{2}) \right]$ , на универсальном множестве  $U = R^1$ . Построить минимизирующие последовательности для  $J(u)$ , которая сходится к множеству  $U^*$  и не сходится.
18. Вывести формулу для вычисления положения точек золотого сечения отрезка  $[a, b]$ .
19. Выяснить на каких отрезках функция  $J(u)$  является унимодальной:  
 $J(u) = au^2 + bu + c, J(u) = \sqrt{|u|}, J(u) = e^u, J(u) = \cos(u), J(u) = \text{sh}(u)$ .
20. Выяснить на каких отрезках функция  $J(u)$  является унимодальной:  
 $J(u) = au^2 + bu + c, J(u) = \sqrt{|u|}, J(u) = e^{-u}, J(u) = \sin(u), J(u) = \text{ch}(u)$ .
21. Оценить постоянную Липшица  $L$  для функции  $J(u) = -u^3 + 2u^2 + 5u - 2$  на отрезке  $[-2, 3]$ .
22. Оценить постоянную Липшица  $L$  для функции  $J(u) = -2u^3 + 6u^2 - u + 10$  на отрезке  $[-2, 3]$ .
23. Найти глобальный минимум функции  $J^*$  по методу последовательного перебора для функции  $J(u) = -u^3 + 2u^2 + 5u - 2$  на отрезке  $[-2, 3]$ .
24. Найти глобальный минимум функции  $J^*$  по методу последовательного перебора для функции  $J(u) = -2u^3 + 6u^2 - u + 10$  на отрезке  $[-2, 3]$ .
25. Найти точку максимума функции  $(f(x) \rightarrow \text{max}) f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$  при ограничениях  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$ .

26. Найти точку максимума функции  $(f(x) \rightarrow \max) f(x) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$  при ограничениях  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$ .
27. Найти точку максимума функции  $(f(x) \rightarrow \max) f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$  при ограничениях  $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$ .
28. Найти точку максимума функции  $(f(x) \rightarrow \max) f(x) = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2$  при ограничениях  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \geq 8 \end{cases}$ .
29. Найти точку максимума функции  $(f(x) \rightarrow \max) f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$  при ограничениях  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$ .

### Контрольные вопросы к рейтинг-контролю №2

1. Найти все точки локального безусловного минимума у следующих функций.

1.  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 1)^2 + x_1 - 2x_2$ ;
2.  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2$ ;
3.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 + 2)^2 - x_1^2$ ;
4.  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2^2 + 1)^2 + x_1$ ;
5.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^2 + x_1^2 - x_2^2$ ;
6.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2 + 4)^2 + x_1^2$ ;
7.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2 + 1)^2 - 4x_2^2$ ;
8.  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 3)^2 - x_1 + 2x_2$ ;
9.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_3 - 5)^2$ ;
10.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 4)^2$ ;
11.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2 + (x_1 - 1)^2$ ;
12.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 + (x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_2 + x_3 - 1)^2$ ;
13.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1 - x_2^2$ ;
14.  $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - x_1^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 4x_2^2$ ;
15.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_1 + 4x_2^2$ ;
16.  $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 - x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2$ ;
17.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2^2$ ;
18.  $f(x_1, x_2) = x_1(5/3x_1^2 - x_1 - 1) + x_2(2x_1 + x_2)$ ;
19.  $f(x_1, x_2) = x_1(-x_1^2 + x_1 + 4) + x_2(2x_1 + x_2)$ ;
20.  $f(x_1, x_2) = 5x_1(x_1^2 + x_1 - 1) + 3x_2(x_1 + x_2)$ ;
21.  $f(x_1, x_2) = 2x_1(x_1^2 + 2x_1 - 3/2) + 2x_2(-x_1 + x_2)$ ;

22.  $f(x_1, x_2) = x_1(-x_1^2 + 5x_2) + 4x_2(x_1 + 2x_2)$ ;  
 23.  $f(x_1, x_2) = 2x_1(2x_1^2 + x_1 - 1) + 2x_2(x_1 - x_2)$ ;  
 24.  $f(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1^2 + 6x_1) - x_2(x_1 + x_2)$ .

2. Решить следующие задачи на условный минимум.

1.  $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (2x_1 - x_2 + 1)^2 \rightarrow \min; x_1 - x_2 = 1$ .
2.  $(x_1 + 2x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 = 1$ .
3.  $(x_1 + 3x_2 - 6)^2 + x_1 \rightarrow \min; x_1 - x_2 = 0$ .
4.  $(x_1 - x_2 + 1)^2 - x_2 \rightarrow \min; 2x_1 + x_2 = 2$ .
5.  $x_1 + x_2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
6.  $2x_1 + x_2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
7.  $x_1 \rightarrow \min; (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 = 1$ .
8.  $x_1 - x_2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 1$ .
9.  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 1$ .
10.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
11.  $x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 4$
12.  $x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
13.  $(x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .
14.  $(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .
15.  $(x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 - x_3 = 1$ .
16.  $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 \rightarrow \min; x_2 + x_3 = 4$ .
17.  $(x_1 - x_2 + x_3 + 1)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_2 - x_3 = 2$ .
18.  $(x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + 2x_3 = 4, x_2 + 2x_3 = 6$ .
19.  $(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ .
20.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1$ .
21.  $x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 1$ .
22.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2 + x_3 = 1$ .
23.  $x_1^2 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + 2x_2 + x_3 = 1$ .
24.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3^2 = 1$ .

3. Найти все точки локального условного минимума у следующих функций при наличии ограничения  $x \geq 0$ .

1.  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 1)^2 + x_1 - 2x_2$ ;
2.  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2$ ;
3.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 + 2)^2 - x_1^2$ ;
4.  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2^2 + 1)^2 + x_1$ ;



5.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^2 + x_1^2 - x_2^2$ ;
6.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2 + 4)^2 + x_1^2$ ;
7.  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2 + 1)^2 - 4x_2^2$ ;
8.  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 3)^2 - x_1 + 2x_2$ ;
9.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_3 - 5)^2$ ;
10.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 4)^2$ ;
11.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2 + (x_1 - 1)^2$ ;
12.  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 + (x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_2 + x_3 - 1)^2$ ;
13.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1 - x_2^2$ ;
14.  $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - x_1^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 4x_2^2$ ;
15.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_1 + 4x_2^2$ ;
16.  $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 - x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2$ ;
17.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2^2$ ;
18.  $f(x_1, x_2) = x_1(5/3x_1^2 - x_1 - 1) + x_2(2x_1 + x_2)$ ;
19.  $f(x_1, x_2) = x_1(-x_1^2 + x_1 + 4) + x_2(2x_1 + x_2)$ ;
20.  $f(x_1, x_2) = 5x_1(x_1^2 + x_1 - 1) + 3x_2(x_1 + x_2)$ ;
21.  $f(x_1, x_2) = 2x_1(x_1^2 + 2x_1 - 3/2) + 2x_2(-x_1 + x_2)$ ;
22.  $f(x_1, x_2) = x_1(-x_1^2 + 5x_2) + 4x_2(x_1 + 2x_2)$ ;
23.  $f(x_1, x_2) = 2x_1(2x_1^2 + x_1 - 1) + 2x_2(x_1 - x_2)$ ;
24.  $f(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1^2 + 6x_1) - x_2(x_1 + x_2)$ .

4. Решить следующие задачи на условный минимум заменяя ограничение типа «=» на ограничение типа « $\leq$ ».

1.  $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (2x_1 - x_2 + 1)^2 \rightarrow \min; x_1 - x_2 = 1$ .
2.  $(x_1 + 2x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 = 1$ .
3.  $(x_1 + 3x_2 - 6)^2 + x_1 \rightarrow \min; x_1 - x_2 = 0$ .
4.  $(x_1 - x_2 + 1)^2 - x_2 \rightarrow \min; 2x_1 + x_2 = 2$ .
5.  $x_1 + x_2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
6.  $2x_1 + x_2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
7.  $x_1 \rightarrow \min; (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 = 1$ .
8.  $x_1 - x_2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 1$ .
9.  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 1$ .
10.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
11.  $x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
12.  $x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min; 2x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
13.  $(x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

14.  $(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1.$
15.  $(x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 - x_3 = 1.$
16.  $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 \rightarrow \min; x_2 + x_3 = 4.$
17.  $(x_1 - x_2 + x_3 + 1)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_2 - x_3 = 2.$
18.  $(x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 \rightarrow \min; x_1 + 2x_3 = 4, x_2 + 2x_3 = 6.$
19.  $(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4)^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3 = 1, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$
20.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1.$
21.  $x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 1.$
22.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + x_2 + x_3 = 1.$
23.  $x_1^2 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; x_1^2 + 2x_2 + x_3 = 1.$
24.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; x_1 + x_2 + x_3^2 = 1.$

### Контрольные вопросы к рейтинг-контролю №3

Оценка по рейтинг-контролю №3 формируется по итогам выполнения и защит лабораторных работ при ответе на дополнительные вопросы. Темы лабораторных работ:

- Метод дихотомии.
- Метод золотого сечения.
- Метод ломаных.
- Метод касательных.
- Метод множителей Лагранжа.
- Градиентный метод наискорейшего спуска.
- Метод условного градиента.
- Метод покоординатного спуска.
- Метод штрафных функций.

### Вопросы к экзамену

Математическая постановка задачи оптимизации. Классификация задач оптимизации. Основные определения методов оптимизации. Постановка задачи оптимизации для функций одной переменной. Классический метод. Минимизация функций одной переменной. Метод деления отрезка пополам (Дихотомии). Минимизация функций одной переменной. Симметричные методы. Метод Фибоначчи. Минимизация функций одной переменной. Симметричные методы. Метод золотого сечения. Минимизация функций одной переменной. Липшевость функции. Оценка константы Липшица. Минимизация функций одной переменной. Метод ломаных. Описание алгоритма. Численная реализация метода ломаных. Минимизация функций одной переменной. Метод ломаных. Теорема о сходимости метода ломаных. Минимизация функций одной переменной. Методы перебора. Методы пассивного и последовательного перебора. Выпуклые функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие выпуклости (критерий выпуклости).

Выпуклые функции одной переменной. Теоремы о непрерывности, гладкости и липшевости выпуклой функции.

Выпуклые функции одной переменной. Теорема о касательной. Следствие теоремы о касательной.

Выпуклые функции одной переменной. Теорема о минимуме выпуклой функции.

Выпуклые функции одной переменной. Свойства выпуклых функций. Необходимые и достаточные условия выпуклости.

Минимизация функций одной переменной. Метод касательных. Описание алгоритма. Теорема о сходимости метода касательных.

Постановка задачи оптимизации для функций многих переменных. Основные определения. Теоремы о существовании минимума функции многих переменных.

Классический метод решения задачи условной и безусловной оптимизации для функций многих переменных.

Метод множителей Лагранжа оптимизации функций многих переменных.

Выпуклые множества. Основные определения и свойства.

Выпуклые функции многих переменных. Теорема о минимуме выпуклой функции.

Выпуклые функции многих переменных. Критерий выпуклости.

Выпуклые функции многих переменных. Критерий оптимальности.

Выпуклые функции многих переменных. Свойства выпуклых функций многих переменных.

Проекция точки на множество.

Задача выпуклого программирования. Седловая точка функции Лагранжа. Необходимый и достаточный признак седловой точки.

Задача выпуклого программирования. Взаимосвязь её решения с седловой точкой.

Задача выпуклого программирования. Теоремы Куна-Таккера.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Общая идея градиентных методов. Способы выбора шага метода.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Градиентный метод наискорейшего спуска. Геометрический смысл.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод проекций градиента. Геометрический смысл.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод условного градиента. Геометрический смысл.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод Ньютона.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод покоординатного спуска. Теорема о сходимости метода покоординатного спуска.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод множителей Лагранжа.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Метод штрафных функций. Описание алгоритма.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Сходимость метода штрафных функций.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Методы случайного поиска.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Эвристические методы. Генетические алгоритмы. Компоненты генетического алгоритма.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Эвристические методы. Генетические алгоритмы. Операторы генетического алгоритма.

Численные методы оптимизации функций многих переменных. Эвристические методы. Генетические алгоритмы. Настройка параметров генетического алгоритма.

### Вопросы для проверки самостоятельной работы

1. Дайте определение унимодальной функции.
2. Каким образом в методе дихотомии гарантируется попадание точки минимума  $u^*$  в отрезок  $[a_k, b_k]$  при любом  $k > 0$ ?
3. Чем отличается метод дихотомии от метода золотого сечения?
4. Почему в методе золотого сечения, начиная со второй итерации, необходимо вычислять только один раз значение функции  $J(u)$  вместо двух в методе дихотомии?
5. Какой из рассмотренных в лабораторной работе методов сходится быстрее и почему?
6. Дайте определение липшицевой функции.
7. Геометрическая интерпретация липшицевости функции.
8. Будет ли ломанная линия, получаемая при помощи метода ломанных, пересекать график функции  $J(u)$  и почему.
9. К чему может привести заниженная оценка константы Липшица и почему?
10. Дайте определение выпуклой функции.
11. Геометрическая интерпретация выпуклой функции.
12. Всякая ли «липшицева» функция является выпуклой, и наоборот, всякая ли выпуклая функция является «липшицевой» и почему?
13. Каким образом определяется точка  $u_{k+1}$  после построения ломанной  $g_k(u)$  в методе касательных?
14. Дайте определение градиента функции.
15. В какую сторону направлен вектор градиента.
16. Чем отличается метод условного градиента от метода наискорейшего спуска? Для какого класса задач используется метод условного градиента?
17. Дайте определения выпуклого множества.
18. Докажите, что отрезок является выпуклым множеством.
19. Что такое вспомогательное приближение в методе условного градиента и для чего оно используется?
20. Почему  $k+1$  приближение, получаемое по формуле метода условного градиента, не выходит за пределы выпуклого множества  $U$ ?
21. Опишите идею метода покоординатного спуска.
22. Геометрический смысл метода покоординатного спуска.
23. Приведите формулу перебора координатных направлений.
24. Что называют удачной итерацией?
25. В каких случаях выполняется дробление шага?
26. Каково условие сходимости метода?
27. Дайте характеристику метода покоординатного спуска в сравнении с градиентными методами.
28. Приведите преимущества и недостатки метода покоординатного спуска.
29. Опишите идею метода штрафных функций.
30. Дайте определение штрафной функции.
31. Приведите примеры штрафных функций?
32. Каким образом решается вспомогательная задача в методе штрафных функций, какой способ применен в данной работе?
33. Каково условие сходимости метода?

34. Дайте характеристику метода штрафных функций в сравнении с ранее рассмотренными методами.
35. Приведите преимущества и недостатки метода штрафных функций.

#### ОБЪЕМ СРС И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ВИДАМ УЧЕБНЫХ РАБОТ В ЧАСАХ

| Вид СРС   | Количество часов |
|---|------------------|
| Работа с лекционным материалом, самостоятельное изучение отдельных тем дисциплины; поиск и обзор литературы и электронных источников; чтение и изучение учебника и учебных пособий. | 30               |
| Подготовка к проверочным работам  | 20               |
| Выполнение домашних заданий, подготовка к лабораторным занятиям   | 40               |
| Итого   | 90               |

#### 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Методы оптимизации и теории управления: методические указания к самостоятельной работе по дисциплинам «Методы оптимизации», «Математические методы теории управления» – Электрон. текстовые данные.– Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2013.– 18 с.
2. Сеславин А.И. Исследование операций и методы оптимизации: учебное пособие/ Сеславин А.И., Сеславина Е.А.– Электрон. текстовые данные.– М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2015.– 200 с.
3. Казанская О.В. Модели и методы оптимизации. Практикум: учебное пособие/ Казанская О.В., Юн С.Г., Альсова О.К.– Электрон. текстовые данные.– Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2012.– 204 с.
4. Аттетков А.В. Введение в методы оптимизации: учебное пособие/ Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.– Электрон. текстовые данные.– М.: Финансы и статистика, 2014.– 272 с.
5. Методы оптимизации: учебное пособие/ О.А. Васильева [и др.].– Электрон. текстовые данные.– М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.– 96 с.

б) дополнительная литература:

1. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.– Электрон. текстовые данные.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.– 367 с.
2. Розова В.Н. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Розова В.Н., Максимова И.С.– Электрон. текстовые данные.– М.: Российский университет дружбы народов, 2010.– 112 с.
3. Пантелеев А.В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Пантелеев А.В., Летова Т.А.– Электрон. текстовые данные.– М.: Логос, 2011.– 424 с.

в) периодические издания:

1. «Информационные технологии» Ежемесячный теоретический и прикладной научно-технический журнал ISSN 1684-6400 Подписной индекс 72656
2. Журнал «Бизнес-информатика» – рецензируемый междисциплинарный научный журнал, выпускаемый с 2007 года Национальным исследовательским университетом «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). Администрирование журнала осуществляется Школой бизнес-информатики НИУ ВШЭ.
3. Журнал «Вестник Института экономики РАН» –
4. Журнал «Вестник компьютерных и информационных технологий»
5. Журнал «Вестник МГУ: экономика»
6. Журнал «Вестник Российского экономического университета им. Плеханова»
7. Журнал «Вестник финансового университета»
8. Журнал «Вопросы экономики»
9. Журнал «Вычислительные технологии»

в) интернет-ресурсы:

Ресурсы для дистанционного освоения курса, размещенные на сайте [www.cs.vlsu.ru](http://www.cs.vlsu.ru).

Современные информационные системы для создания и реализации математических методов в экономике и финансах:

1. Mathcad – программное средство, среда для выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, снабженная простым в освоении и в работе графическим интерфейсом, которая предоставляет пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстами. В среде Mathcad доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения математических задач различной сложности (<http://www.ptc.com>).
2. MatLab – высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. С помощью MATLAB можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения (<http://matlab.ru>).
3. Maple – одна из наиболее популярных систем символьных вычислений, обладающая превосходной научной графикой (<http://www.maplesoft.com>).
4. Power Sim Constructor, Power Sim Studio – программное обеспечение Powersim включает в себя различные типы инструментов имитационного моделирования (<http://powersim.ru>)
5. Anylogic AnyLogic - инструмент имитационного моделирования (<http://www.anylogic.ru>)
6. BPWin – мощный инструмент моделирования, разработанный фирмой Computer Associates Technologies который используется для анализа, документирования и реорганизации сложных бизнес-процессов. Модель, созданная средствами BPwin, позволяет четко документировать различные аспекты деятельности - действия, которые необходимо предпринять, способы их осуществления, требующиеся для этого ресурсы и др. (<http://www.ca.com>).

Интернет-ресурсы, базы данных, информационно-справочные и поисковые системы по тематике дисциплины:

1. <http://www.exponenta.ru> – Образовательный математический портал.

2. <http://www.kxlab.com> - сайт \_kx Лаборатории. Отправная точка поиска информации о новейших научных разработках в области вычислительной математики, автоматизации моделирования и программных продуктах \_kx Лаборатории.
3. [www.mathhelpplanet.com](http://www.mathhelpplanet.com) - некоммерческий математический форум, на котором можно получить консультацию и реальную помощь в решении по практически любому вопросу, связанному с математикой и многочисленными её приложениями.
4. [www.csin.ru](http://www.csin.ru) - Образовательный интернет-проект, посвященный computer science и смежным дисциплинам. Мы формируем комьюнити людей, профессионально занимающихся или даже просто интересующихся данной тематикой. Также мы собираем информацию, например, русскоязычные курсы по информатике.
5. [www.teorver.ru](http://www.teorver.ru) - Портал, посвященный таким разделам математики, как теория вероятностей, математическая статистика, теория массового обслуживания, математическая теория телетрафика и другим приложениям теории вероятностей.
6. <http://edu.ru> - Федеральный портал "Российское образование", поддерживаемый ФГУ ГНИИ ИТТ "Информика". Каталог интернет-ресурсов по предметам.
7. <http://www.mathtree.ru> - Древовидный каталог математических ресурсов содержит информацию о кафедрах, персонах, публикациях, библиотеках, журналах и т.п.
8. <http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал, предоставляющий российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.
9. <http://algotlist.manual.ru> - Сайт, посвященный алгоритмам и методам программирования.
10. <http://www.ecsocman.edu.ru/> - Образовательный портал - экономика, социология, менеджмент.
11. <http://www.fea.ru/> - Портал лаборатории "Вычислительная механика" физикомеханического факультета СПбГПУ.

## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Лекционные аудитории, оснащённые доской (для мела или маркера), экраном для проекционных систем, проектором и ноутбуком.

Аудитории для проведения лабораторных занятий, оснащённые современными персональными компьютерами, объединёнными в локальную вычислительную сеть и укомплектованными необходимым системным и прикладным программным обеспечением, аудитории вычислительного центра.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Рабочую программу составил доцент кафедры ФиПМ \_\_\_\_\_ Абрахин С.И.

Рецензент

(представитель работодателя) \_\_\_\_\_  
(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФиПМ

Протокол № 11А от 17.04.15 года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ Аракелян С.М.  
(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Протокол № 11А от 17.04.15 года

Председатель комиссии \_\_\_\_\_ Аракелян С.М.  
(ФИО, подпись)

### ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на 18-19 учебный год

Протокол заседания кафедры № 1 от 03.09.18 года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(ФИО, подпись)

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_