

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет**  
**имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**



«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор  
по учебно-методической работе

А.А. Панфилов

«17» 04 2015 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Уравнения математической физики»**

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки:

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоёмкость, час.	Лекций, час.	Практич. занятий, час.	Лаборат. работ, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экс./зачёт)
6	216 (6 з.е.)	54	36	-	90	Экзамен (36)
Итого	216 (6 з.е.)	54	36	-	90	Экзамен (36)

Владимир, 201\_

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины «Уравнения математической физики» заключается в ознакомлении с фундаментальными методами исследования соотношений между бесконечно малыми величинами, которые возникают при моделировании физических процессов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Уравнения математической физики» относится к обязательной дисциплине вариативной части учебного плана по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (бакалавриат). Ее изучение позволит обучающимся:

- применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;
  - уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности.
- В результате изучения дисциплины обучающийся должен знать основы и применять методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, необходимые для анализа моделей физических процессов.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Выпускник, освоивший программу бакалавриата, должен обладать компетенциями:

- способностью к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям (ОПК-3);
- способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат (ПК-2);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**знать** - основные понятия и методы теории уравнений с частными производными, в том числе корректные постановки классических задач; уметь разбирать доказательства математических утверждений и получать следствия формулируемых результатов;

**уметь** - применять математические методы для построения математических моделей и исследования объектов профессиональной деятельности

**владеть навыками** - решения дифференциальных уравнений с частными производными на уровне, позволяющем анализировать простейшие математические модели прикладных задач.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 6 зачётных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)					Объем учебной работы, с применением интерактивн ых методов (в часах / %)	Формы текущего контроля, форма промежуточно й аттестации
				Лекции	Практические занятия	Лабораторны е работы	СРС	КП / КР		
1	Линейные однородные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	6	1	3	2		5		2.5 / 50 %	
2	Канонический вид и классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных в точке.	6	2	3	2		5		2.5 / 50 %	
3	Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Теорема о канонической форме	6	3	3	2		5		2.5 / 50 %	
4	Уравнение колебаний струны. Формула Даламбера. Единственность решения задач	6	4	3	2		5		2.5 / 50 %	

	Коши и Гурса								
5	Задача Штурма-Лиувилля. Схема метода Фурье в применении к гиперболическим уравнениям	6	5	3	2		5	2.5 / 50 %	
6	Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородности	6	6	3	2		5	2.5 / 50 %	Рейтинг-контроль 1
7	Понятие корректности краевой задачи. Примеры. Пример Адамара. Волновое уравнение. Задача Коши при $n > 1$ . Формулы Кирхгофа и Пуассона	6	7	3	2		5	2.5 / 50 %	
8	Задача Штурма-Лиувилля в пространстве. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье	6	8	3	2		2	2.5 / 50 %	
9	Цилиндрические функции и их свойства. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье	6	9	3	2		5	2.5 / 50 %	
10	Основные краевые задачи для эллиптических уравнений. Уравнение Лапласа и его общее решение в полярных координатах на плоскости	6	10	3	2		5	2.5 / 50 %	
11	Принцип максимума для эллиптических уравнений.	6	11	3	2		5	2.5 / 50 %	

	Единственность решения краевых задач								
12	Представимость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона.	6	12	3	2		5	2.5 / 50 %	
13	Фундаментальные решения оператора Лапласа. Формулы Грина и их следствия.	6	13	3	2		5	2.5 / 50 %	Рейтинг-контроль 2
14	Гармонические функции и их свойства. Теоремы о среднем.	6	14	3	2		5	2.5 / 50 %	
15	Функция Грина оператора Лапласа и её свойства.	6	15	3	2		5	2.5 / 50 %	
16	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при известной функции Грина. Формула Пуассона (случай шара).	6	16	3	2		5	2.5 / 50 %	
17	Одномерное уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач. Решение смешанной задачи методом Фурье. Принцип максимума. Единственность решения смешанной задачи	6	17	3	2		5	2.5 / 50 %	
18	Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.	6	18	3	2		5	2.5 / 50 %	Рейтинг-контроль 3

	Единственность решения задачи Коши								
Всего			54	36		90		45 / 50 %	Экзамен(36)

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

1. Лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекции и практические занятия).
2. Обучение в малых группах (выполнение практических работ в группах из двух или трёх человек).
3. Технология развития критического мышления (прививание студентам навыков критической оценки предлагаемых решений).
4. Проведение занятий с применением компьютерных презентаций (на усмотрение лектора и преподавателя).

Объём учебной работы с применением интерактивных методов в среднем составляет 50% общего объёма аудиторной учебной работы.

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В рамках документа «Положение о рейтинговой системе комплексной оценки знаний студентов» разработан регламент проведения и оценивания контрольных действий. Процедура оценивания знаний, умений, навыков по дисциплине включает учёт успешности выполнения ряда мероприятий: контрольных работ, рейтинг – контролей, типовых расчетов и промежуточной аттестации – экзамена.

### Текущий контроль в форме рейтинг - контроля.

Рейтинг-контроль 1 «Уравнения в частных производных 1-го порядка; гиперболические уравнения»

Контрольная работа к рейтинг-контролю №1

Типы задач

1. Методом характеристик построить общее решение линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
2. Методом характеристик построить интегральную поверхность линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, проходящую через данное начальное многообразие.
3. Методом характеристик привести к каноническому виду линейное уравнение в частных производных второго порядка на плоскости.
4. Для данного линейного уравнения в частных производных второго порядка на плоскости (гиперболического или параболического типа) построить решение задачи Коши.

Рейтинг-контроль 2 «Эллиптические уравнения»

Контрольная работа к рейтинг-контролю №1

Типы задач

1. Решить задачу Штурма-Лиувилля (задачу на собственные значения и собственные функции).
2. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения колебаний струны при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
3. Методом разделения переменных решить задачу о колебаниях круглой мембраны.



Рейтинг-контроль 3.«Параболические уравнения».  
Контрольная работа к рейтинг-контролю №3  
Типы задач

1. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
2. Методом разделения переменных построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа либо уравнения Пуассона в круге (кольце, секторе, прямоугольнике и т.п.).

**Промежуточная аттестация в форме экзамена.**

Вопросы к экзамену:

1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, теорема об общем решении, локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши).
2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, построение общего решения).
3. Существование и единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Метод построения решения задачи Коши.
4. Канонический вид линейного уравнения 2-го порядка от  $n$  переменных в точке. Классификация уравнений.
5. Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Пример уравнения смешанного типа.
6. Теорема о канонической форме линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области.
7. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны (неограниченной и полуограниченной).
8. Задача Гурса. Формула решения в случае уравнения свободных колебаний струны.
9. Задача Штурма-Лиувилля; свойства её решений.
10. Общая схема решения первой краевой задачи для однородных гиперболических уравнений методом разделения переменных.
11. Решение смешанной задачи для уравнения свободных колебаний струны методом разделения переменных (случаи закреплённых концов и свободных концов).
12. Первая краевая задача для уравнения колебаний струны: общий случай неоднородности.
13. Понятие корректности постановки краевой задачи. Примеры корректно и некорректно поставленных задач (в т.ч. пример Адамара).
14. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны. Устойчивость решения.
15. Единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны.
16. Решение задачи Коши для волнового уравнения при  $n=3$  (формула Кирхгофа).
17. Решение задачи Коши для волнового уравнения при  $n=2$  (формула Пуассона).
18. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве; свойства её решений.
19. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом разделения переменных.
20. Цилиндрические функции и их свойства.

21. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом разделения переменных.
22. Преобразование оператора Лапласа к полярным координатам на плоскости. Общее решение уравнения Лапласа на плоскости.
23. Принцип максимума для эллиптических уравнений.
24. Доказательство единственности решения первой и третьей краевых задач для эллиптических уравнений с помощью принципа максимума.
25. Формулировка теоремы о единственности решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге; условие разрешимости задачи.
26. Лемма о представимости решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда (сходимость ряда метода Фурье).
27. Теорема о представлении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде интеграла Пуассона (непрерывные краевые условия).
28. Формулы Грина и их следствия.
29. Фундаментальные решения оператора Лапласа.
30. Лемма о представлении значения гармонической функции в точке в виде некоторого интеграла по границе области гармоничности.
31. Теоремы о среднем для гармонических функций.
32. Существование и свойства производных от гармонической функции.
33. Функция Грина для оператора Лапласа и её свойства. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по известной функции Грина.
34. Вывод формулы Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
35. Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом разделения переменных.
36. Общий случай неоднородности в смешанной задаче для одномерного уравнения теплопроводности.
37. Принцип максимума для одномерного уравнения теплопроводности.
38. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
39. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

### **Самостоятельная работа**

#### Вопросы для СРС:

1. Какое квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка не является линейным однородным?
2. Изложите схему метода характеристик построения общего и частного решений линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.
3. Сформулируйте локальную теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.
4. Какие типы линейных уравнений в частных производных второго порядка вы знаете? Дайте классификацию таких уравнений в случае двух независимых переменных и укажите каноническую форму уравнения каждого типа.
5. Методом характеристик выведите формулу общего решения одномерного уравнения колебаний струны.
6. Зная формулу общего решения одномерного уравнения колебаний струны, выведите формулу Даламбера решения задачи Коши.
7. К какому типу относится волновое уравнение? уравнение теплопроводности? уравнение Лапласа? уравнение Пуассона?



8. Корректно ли поставлена задача Коши для уравнения колебаний струны и уравнения Лапласа?
9. Сформулируйте задачу Штурма-Лиувилля. Что называется её собственной функцией? Как отличаются между собой две собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному значению?
10. Методом Фурье постройте решение смешанной задачи для уравнения малых поперечных колебаний однородной струны, жёстко закреплённой на концах.
11. Найдите распределение температуры в однородном тонком стержне, теплоизолированном как сбоку, так и на концах, если известна температура в начальный момент времени.
12. Приведите пример гармонической функции двух переменных, обращающейся в бесконечность в точках  $(0,0)$  и  $(1,1)$ .
13. Запишите оператор Лапласа от двух переменных в полярных координатах и постройте методом Фурье его общее решение.
14. Как свести задачу Дирихле для уравнения Пуассона к задаче Дирихле для уравнения Лапласа?
15. Дайте определение функции Грина оператора Лапласа. Как построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа по известной функции Грина?
16. Сформулируйте одну из теорем о среднем для гармонической функции.
17. Сформулируйте принцип максимума для эллиптического уравнения.
18. Сформулируйте принцип максимума для уравнения теплопроводности. Докажите единственность решения смешанной задачи.

## **7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

1. Уравнения в частных производных [Электронный ресурс] / Треногин В.А., Недосекина И.С. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013- 228 с.- ISBN 978-5-9221-1448-6.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html>
2. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] / Соболева Е.С., Фатеева Г.М. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 96 с. - ISBN 978-5-9221-1053-2. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110532.html>
3. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] / Романко В.К. - М. : БИНОМ, 2013. - 344 - ISBN 978-5-9963-0782-1.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996307821.html>
4. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению [Электронный ресурс] / В.К. Романко. - М. : БИНОМ, 2012. - -219 с. : ил. - ISBN 978-5-9963-0783-8. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996307838.html>

### **Дополнительная литература**


1. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] / Ильин А.М. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 192 с. - ISBN 978-5-9221-1036-5.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110365.html>
2. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными [Электронный ресурс] : В.Л. Матросов, Р.М. Асланов, М.В. Топунов. - М. : ВЛАДОС, 2011. - 376 с. - ISBN 978-5-691-01655-4.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785691016554.html>
3. Лекции об уравнениях с частными производными [Электронный ресурс] / Петровский И.Г. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 404 с.- ISBN 978-5-9221-1090-7.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110907>
4. Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г.


Попов - М. : Издательский дом МЭИ, 2011. - 352 с. - ISBN 978-5-383-00640-5.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383006405.html>


## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**


1. Компьютерный класс 528-3: достаточное количество посадочных мест.
2. Электронные учебные материалы на компакт -дисках.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Автор: ст. преподаватель каф. ФАиП Ю.В. Скиндер 

Рецензент: директор по маркетингу ЗАО Инвестиционная фирма «ПРОК -Инвест» Крисько О.В. 

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП протокол № 42 от 14.04.15 года.  
Заведующий кафедрой – проф. Давыдов А.А. 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.03.02 протокол № 110 от 17.04.15 года.  
Председатель комиссии 

Программа переутверждена:

на 18-19 учебный год. Протокол заседания кафедры № 1 от 03.09.18 года.  
Заведующий кафедрой  Александров С.И.

на 19-20 учебный год. Протокол заседания кафедры № 1 от 02.09.19 года.  
Заведующий кафедрой  С.И. Александров

на \_\_\_\_\_ учебный год. Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года.  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

на \_\_\_\_\_ учебный год. Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года.  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

на \_\_\_\_\_ учебный год. Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года.  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

на \_\_\_\_\_ учебный год. Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года.