

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор  
по учебно-методической работе

А.А.Панфилов

« 17 » 04 2015 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### «КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения - очная

Семестр	Трудоем- кость зач. ед, час.	Лек- ций, час.	Практич. занятий, час.	Лаборат. работ, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
5	5/180	36	18	18	63	КР; экз. (45 ч.)
Итого	5/180	36	18	18	63	КР; экз. (45 ч.)

Владимир, 201 5

## 1. Цели освоения дисциплины

Изучение дисциплины «Качественная теория динамических систем» имеет своей целью:

- знакомство с фундаментальными понятиями и положениями дисциплины,
- формирование математического мышления при исследовании процессов различной природы и анализе их моделей;
- знакомство с методами исследования инвариантных характеристик динамических систем аналитическими методами исследования геометрических объектов,
- формирование представлений о возможностях применения качественных методов теории динамических систем к исследованию объектов профессиональной деятельности.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Качественная теория динамических систем» является обязательной дисциплиной вариативной части ОПОП подготовки бакалавра по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Ее изучение позволит обучающимся

— применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;

— уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности, проводить их анализ, выделять и вычислять их ключевые характеристики.

Для освоения данной дисциплины обучающимся необходимо иметь теоретические знания и практические навыки по дисциплинам «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Физика», «Алгоритмы и алгоритмические языки», иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией и её обработки.

Основные понятия дисциплины используются при изучении дисциплин, связанных с математическим моделированием и качественным анализом динамических процессов, таких как математическое моделирование, уравнения математической физики.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать:

Способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ОПК-1).

Способностью к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям (ОПК-3)

Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат (ПК-2).

**знать** основные понятия и методы данной области математики и иметь представление о сфере применения их при анализе объектов профессиональной деятельности;

**уметь** свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать задачи анализа динамических процессов различной природы, давать интерпретацию полученных при анализе характеристик объектов профессиональной деятельности;

владеть основными методами локального и глобального анализа динамических процессов и уметь применять его на практике.

**4. Структура и содержание дисциплины «Качественная теория динамических систем»**  
Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС	КП/КР		
1	Индекс кривой и особой точки	5	1-2	4	2	-	4		2(33%)	
2	Нормальные формы	5	2-4	4	2	6	10		3(25%)	
3	Многообразия	5	5-6	4	2	-	4		2(33%)	РК1
4	Тонкие топологии	5	7	2	-	-	2		1(50%)	
5	Теоремы трансверсальности	5	8-9	4	-	-	4		1(25%)	
6	Особенности. Понятие классификации.	5	10-11	4	2	6	10		3(25%)	
7	Структурная устойчивость векторных полей и отображений	5	12-14	6	2	-	10	КР	2(25%)	РК2
8	Семейства функций (векторных полей). Версальные деформации.	5	15	2	4	-	6		2(33%)	
9	Простейшие бифуркации. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.	5	16	2	4	4	8		2(20%)	
10	Хаотическая динамика. Теорема Такенса	5	17-18	4	-	2	5		2(33%)	РК3
	Итого: 5-й семестр			36	18	18	63	КР	20(28%)	КР, экзамен 45 ч.
	Всего:			36	18	18	63	КР	20(28%)	КР, экзамен 45 ч.

### СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Раздел 1. Понятие индекса. Индекс замкнутой кривой в векторном поле, его непрерывность. Индекс изолированной особой точки, теорема об индексе и следствия из неё: теорема о причисывании «ежа», основная теорема алгебры и другие. Примеры.

Раздел 2. Нормальные формы. Понятие ростка объекта, эквивалентности ростков, нормальной формы. Нормальные формы ростков векторных полей и отображений. Теорема сведения Шюпитайшвилли. Примеры.

Раздел 3. Введение в теорию особенностей. Понятие карты, атласа, дифференциальной структуры, многообразия. Тонкие топологии. Понятие типичности как инструмента исследования, особенности, классификации. Понятие структурной устойчивости динамических систем и отображений. Примеры.

Раздел 4. Семейства и бифуркации. Понятие семейства, эквивалентности семейств и бифуркации. Бифуркация Андронова-Хопфа, мягкая и жесткая потери устойчивости. Примеры.

Раздел 5. Хаотическая динамика. Понятие хаотической динамики. Аттрактор и размерность его вложения. Теорема Такенса и реконструкция динамической системы. Примеры применения динамического хаоса.

#### **5. Образовательные технологии**

1. Лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекционные и практические занятия);
2. Обучение в малых группах (выполнение лабораторных работ, в том числе в рамках самостоятельной работы);
3. Применение мультимедиа технологий (проведение лекционных и практических занятий с применением компьютерных презентаций);
4. Технология развития критического мышления (критическая оценка изучаемых моделей, понятий, получаемых решений и их интерпретации);
5. Информационно-коммуникационные технологии. Объем учебной работы, с применением интерактивных методов 20 часов — 28%.

#### **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

В рамках документа «Положение о рейтинговой системе комплексной оценки знаний студентов» разработан регламент проведения и оценивания контрольных действий. Процедура оценивания знаний, умений, навыков по дисциплине включает учёт успешности выполнения ряда мероприятий: текущий контроль (контрольных работ, рейтинг – контролей, лабораторных работ); самостоятельной работы (типовых расчетов, курсовых работ и др.) и промежуточной аттестации (зачёта, зачета с оценкой или экзамена).

Публикуемые компоненты ФОС:

1. Полный список теоретических вопросов промежуточной аттестации (несменяемая часть).
2. Типовые формы текущего контроля.
3. Типовые формы самостоятельной работы (ТР).

Для генерирования сменяемой части оценочных средств (задач), используются материалы библиотеки ВлГУ и указанных там же специальных сайтов.

#### **Лабораторные работы** Темы лабораторных работ

##### Работа 1

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса найти особую точку векторного поля, собственные числа и собственные векторы линеаризации поля в этой точке, определить тип особой точки.

##### Работа 2

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса предложить асимптотику изменения величин из лабораторной работы 1 при стремлении к нулю ширины полосы роста функции перехода и найти параметры предложенных асимптотик.

##### Работа 3

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса найти цикл векторного поля, аппроксимировать отображение последования для

этого цикла и вычислить производную этого отображения в точке цикла. Предложить асимптотику изменения этих параметров при стремлении к нулю ширины полосы роста функции перехода.

#### Работа 4

Для заданного временного ряда посчитать его численные характеристики.

#### Текущий контроль в форме рейтинг – контроля

Рейтинг-контроль 1. «Инварианты векторных полей»  
Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №1

1. Индекс кривой в векторном поле. Примеры.
2. Найти особые точки векторного поля  $(x^2+2y^2-9, y-2x^2)$  на плоскости и определить их тип.
3. Вблизи своей неподвижной точки - начала координат - гладкое отображение имеет вид  $(x,y) \mapsto (2x+2003xy+o(x^2+y^2), x+16y+y^2+x^2+o(x^2+y^2))$ . Какова формальная нормальная форма отображения вблизи этой точки?
4. Вблизи нуля гладкое векторное поле имеет вид  $(2x+2009xy+o(x^2+y^2), x-2008y+y^2+x^2+o(x^2+y^2))$ . Какова формальная нормальная форма этого поля вблизи этой точки?

Рейтинг-контроль 2. «Типичность и трансверсальность»  
Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №2

1. Понятие  $k$ -струи. Пространство  $k$ -струй.
2. Вычислить 2-струю отображения  $(x,y) \mapsto (\arctg(2x-y), e^{x+2y}-1)$  в нуле.
3. Трансверсальны ли отображения вещественной прямой на плоскость  $t \mapsto (x=t^3, y=t^2)$  и  $t \mapsto (x=t^2, y=t)$ ?
4. Может ли пересечение образов двух трансверсальных отображений быть отрезком?

Рейтинг-контроль 3. «Версальность и бифуркации»  
Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №3

1. Понятие бифуркации. Примеры бифуркаций.
2. Для семейства векторных полей на плоскости  $(x^2+\epsilon x+\epsilon, y)$  укажите возможные бифуркационные значения параметра  $\epsilon$ .
3. Для отображения вещественных прямых  $x \mapsto x^3$  предложите миниверсальную деформацию и обоснуйте её.
4. Автономное гладкое векторное поле на плоскости имеет лишь гиперболические особые точки. Может ли его цикл или цикл достаточно  $C^1$ -близкого векторного поля охватывать ровно две особые точки?

#### Промежуточная аттестация в форме экзамена

Вопросы к экзамену

1. Действие диффеоморфизма на векторное поле. Теорема о выпрямлении поля вблизи неособой точки.
2. Резонансы и резонансные мономы. Формальные нормальные формы векторных полей.
3. Резонансы и резонансные мономы. Формальные нормальные формы диффеоморфизмов.
4. Индекс кривой в векторном поле. Индекс изолированной особой точки.

- Сохранение индекса при непрерывных деформациях.
5. Теорема об индексе. Следствия из теоремы об индексе.
  6. Уравнения с периодической правой частью.
  - Отображение за период. Периодические решения и их устойчивость.
  7. Отображение Пуанкаре и устойчивость циклов автономных векторных полей.
  8. Многообразия. Понятие карты, атласа, согласованности карт и атласов.
- Дифференциальной структуры. Примеры многообразий.
9. Расслоения. Касательное расслоение. Риманова метрика.
  10. Обыкновенное дифференциальное уравнение на многообразии.
  11. Ростки и струи. Расслоения струй. Теорема об эквивалентности струй отрезкам рядов Тейлора.
  12. Слабые и сильные (тонкие) топологии. Типичность.
  13. Понятие трансверсальности. Теоремы трансверсальности. и следствия из них.
  14. Следствия из теорем трансверсальности. Типичность невырожденных и гиперболических особых точек векторных полей.
  15. Локальная алгебра отображения. Подготовительная теорема и следствия из нее.
  16. Понятие особенности. Классификация простых особенностей функций.
  17. Структурная устойчивость векторных полей. Структурно устойчивые поля на двумерной сфере.
  18. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.
  19. Структурная устойчивость отображений. Примеры.
  20. Семейства векторных полей (отображений). Эквивалентность семейств. Версальные деформации.
  22. Простейшие бифуркации. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.
  23. Понятие странного аттрактора и его размерности. Теорема Такенса. Пространство вложения динамической системы.

### Самостоятельная работа студента

#### Вопросы к самостоятельной работе студента

1. Разобрать действие диффеоморфизма на векторное поле. Построить примеры такого действия и примеры выпрямления поля.
2. Изучить понятие резонанса для особой точки векторного поля. Построить примеры резонансного и нерезонансного случаев. Предложить соответствующие формальные нормальные формы полей вблизи особых точек.
3. Изучить понятие резонанса для неподвижной точки отображения. Построить примеры резонансного и нерезонансного случаев. Предложить соответствующие формальные нормальные формы отображения вблизи особых точек.
4. Разобрать понятие индекс кривой в векторном поле. Построить примеры.
5. Разобрать теорему об индексе и следствия из неё. Предложить примеры использования.
6. Построить примеры уравнений с периодической правой частью, отображения за период для него. Разобрать понятие периодического решения и его устойчивости.
7. Построить примеры отображение Пуанкаре для циклов автономных векторных полей. Разобрать понятие устойчивости цикла.
8. Изучить понятия карты, атласа, согласованности карт и атласов, дифференциальной структуры, многообразия. Привести примеры многообразий с атласом из одной карты, двух,  $n \in \mathbb{N}$  карт.
9. Разобрать понятие расслоения, касательного расслоение, римановой метрики. Построить примеры.
10. Разобрать понятие обыкновенного дифференциального уравнение на многообразии, его решения, задачи Коши.

11. Изучить понятие ростков и струй. Расслоения струй. Теорема об эквивалентности струй отрезкам рядов Тейлора.
12. Разобрать понятие топологии и типичности. Построить примеры.
13. Изучить понятие трансверсальности, разобрать теорему трансверсальности и следствия из них. Построить примеры.
14. Изучить понятие локальной алгебры отображения, разобрать подготовительную теорему и следствия из нее. Построить примеры.
16. Изучить понятие особенности. Привести примеры.
17. Разобрать понятие структурной устойчивости векторных полей. Привести примеры структурно устойчивых полей и не являющихся таковыми.
20. Изучить понятие семейства объектов, эквивалентности семейств, версальных и миниверсальных деформаций. Построить примеры.
22. Разобрать понятие бифуркации. Построить примеры.
23. Изучить понятие странного аттрактора и его размерности. Привести примеры эффективного применения понятия размерности. Разобрать теорему Такенса.

### **Самостоятельная работа в форме курсовой работы**

#### Типовая задача по курсовой работе

Изучить модель Холлинга-Теннера (см., например, Д.Эрроусмит, К.Плейс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Качественная теория с приложениями, стр. 146-150), выбрать четыре численных параметра модели, при которых наблюдается устойчивый предельный цикл. Затем зафиксировать два из них, а двум другим придать не менее трёх значений вблизи выбранных. При всех наборах параметров вычислить тип ненулевой особой точки векторного поля системы и найти её собственные числа, найти предельный цикл, его диаметр, период и отображение Пуанкаре. Предложить модели для аппроксимации функций диаметра, периода и отображения Пуанкаре как функций свободных параметров. Дать интерпретацию вычисленных показателей.

## **6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **Основная литература**

1. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии [Электронный ресурс] / Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html>
2. Геометрическое моделирование окружающего мира [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Уткин. - 2-е изд., стер. - М. : ФЛИНТА, 2014. - 219с. - ISBN 978-5-9765-1956-5. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976519565.html>
3. Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем [Электронный ресурс] / Елкин В.И - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115452.html>

### **Дополнительная литература**

1. Особенности дифференцируемых отображений. [Электронный ресурс] / Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. - 3-е изд., стереотип. - М.: МЦНМО, 2009. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940574569.html>
2. Основы алгебраической геометрии [Электронный ресурс] / Шафаревич И.Р. - 3-е изд., доп. - М.: МЦНМО, 2007. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940570851.html>
3. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах [Электронный ресурс] / Скопенков А.Б. - 2-е изд., испр. - М.: МЦНМО, 2010. -- 72 с. - ISBN 978-5-94057-630-3. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940576303.html>
4. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. [Электронный ресурс] / Матвеев С.В. - М.: МЦНМО, 2007.-456 с. ISBN 978-5-94057-209-1. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940572091.html>

5. Динамические системы и модели в биологии [Электронный ресурс] / Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 400 с. - ISBN 978-5-9221-1192-8  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111928.html>

**Периодические издания**

1. Автоматика и телемеханика, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)
2. Успехи математических наук, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

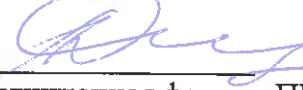
**8 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

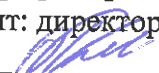
Лекционные аудитории, оснащены доской (для мела или маркера) мультимедийным проектор с экраном.

Аудитории для проведения лабораторных занятий, оснащённые современными персональными компьютерами, объединёнными в локальную вычислительную сеть и укомплектованными необходимым системным и прикладным программным обеспечением.




Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Автор: проф. каф. ФАиП А.А. Давыдов 

Рецензент: директор по маркетингу ЗАО Инвестиционная фирма «ПРОК -Инвест» Крисько О.В. 

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП протокол № 4/1 от 12.04.15 года.

Заведующий кафедрой – проф. Давыдов А.А. 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» протокол № 119 от 17.04.15 года.

Председатель комиссии 

### ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_