

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. Расчет стержневых систем

Конспект лекций

Составитель
Л.Е. КОНДРАТЬЕВА

Владимир 2007

УДК 624.04/519.61
ББК 38.112/22.192
О-75

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
А.В. Белевич

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Основы метода конечных элементов : Введение. Расчет стержневых систем : конспект лекций / Владим. гос. ун-т ; сост. Л.Е. Кондратьева. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 36 с.

Предназначен для использования при освоении теоретической части курсов «Машинные методы расчета строительных конструкций», «Машиноинформационные программы в строительстве», «Численные методы в строительстве» и др., где изучается метод конечных элементов (МКЭ). Рассмотрены принципы и приемы дискретизации исследуемых областей различных видов, приведения внешних нагрузок к узловым, матрицы жесткости различных одномерных элементов в местной и глобальной системах координат, основные соотношения для отдельного одномерного элемента и для стержневой системы.

Написан для студентов специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270105 «Городское строительство и хозяйство», 270115 «Экспертиза и управление недвижимостью». Может быть использован студентами других специальностей при изучении МКЭ.

Ил. 31. Библиогр.: 6 назв.

УДК 624.04/519.61
ББК38.112/22.192

ВВЕДЕНИЕ

История развития и области применения метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод решения дифференциальных уравнений, широко используемый в различных областях техники (ракето- и самолетостроение, кораблестроение, строительство и др.). Основателем теории МКЭ считается Р. Курант (1943 г.). М. Тернер, Х. Мартин и др. внедрили МКЭ в строительную механику и механику сплошных сред (конец пятидесятых – начало шестидесятых годов двадцатого века).

Существенно расширили область применения МКЭ Б. Сабо, О. Зенкевич и др. (конец шестидесятых – начало семидесятых годов), показав, что его можно использовать для решения любых дифференциальных уравнений.

Большой вклад в развитие МКЭ внесли отечественные ученые Л. Розин, В. Корнеев, В. Постнов и др.

Развитие МКЭ неразрывно связано с совершенствованием вычислительной техники, ускоряющей сложные численные расчеты. Соответственно совершенствовались вычислительные программы, реализующие этот метод. Наиболее распространенными программами расчета конструкций на основе МКЭ являются в настоящее время COSMOS, ЛИРА, STARK (строительные конструкции).

Основная концепция метода конечных элементов

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую *непрерывную* в некоторой области величину (например, внутреннее усилие в фундаментной балке, перемещение в плите перекрытия и т.п.) можно аппроксимировать *дискретной* моделью, которая создается из множества *кусочно-непрерывных* функций, определенных в конечном числе подобластей (элементов). Обычно такими функциями являются полиномы – линейные, квадратичные, кубические и т.д. Кусочно-непрерывные функции строятся с помощью значений непрерывной величины в точках соединения элементов (в узлах).

Таким образом, чтобы определить неизвестную непрерывную величину, нужно определить ее значения в узлах.

Основные этапы создания дискретной модели неизвестной величины следующие:

1. В исследуемой области задается конечное число точек (узлов).
2. Значения непрерывной величины в каждом узле считаются неизвестными, они должны быть определены.
3. Исследуемая область разбивается на конечное число подобластей (элементов), имеющих общие точки (узлы).
4. Непрерывная величина в каждом элементе аппроксимируется полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины: для каждого элемента определяется свой полином, но его коэффициенты подбираются так, чтобы сохранялась непрерывность величины на каждой границе элемента.

Основную идею МКЭ иллюстрирует следующий пример.

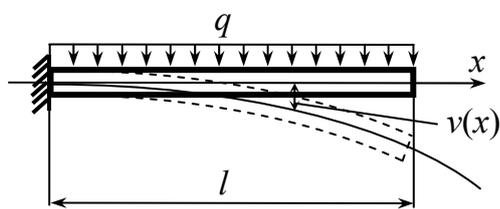


Рис. 1

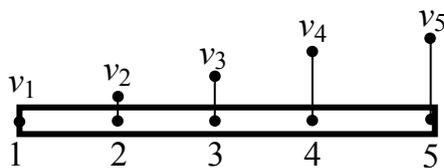


Рис. 2

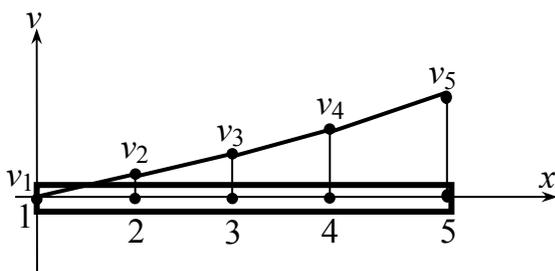


Рис. 3

Рассматриваются прогибы v в стержне (рис. 1).

Непрерывная величина – функция прогиба $v(x)$. Ее область определения (исследуемая область) – стержень длиной l .

Задается пять точек (узлов). Фиксируются прогибы в каждом узле: v_1, v_2, \dots, v_5 (рис. 2).

Аппроксимирующая функция – линейный по x полином, так как на каждый элемент приходится по два узла. Окончательная аппроксимация $v(x)$ – четыре кусочно-линейные функции, каждая из которых определена на отдельном элементе (рис. 3).

Неизвестные узловые значения $v(x)$ должны быть отрегулированы таким образом, чтобы приближение к истинной функции $v(x)$ было наилучшим.

Это осуществляется минимизацией некоторой величины, связанной с физической сущностью задачи. Процесс минимизации сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений $v(x)$.

Если неизвестная непрерывная величина φ определена в двух- или трехмерной области, аппроксимирующими являются функции от x и y или от x , y и z соответственно. Двумерная область разбивается обычно на элементы в форме треугольника или четырехугольника, трехмерная область – на элементы в форме тетраэдра или параллелепипеда. Аппроксимирующие функции изображаются в таком случае плоскими (рис. 4, а) или криволинейными (рис. 4, б) поверхностями (двумерная область).

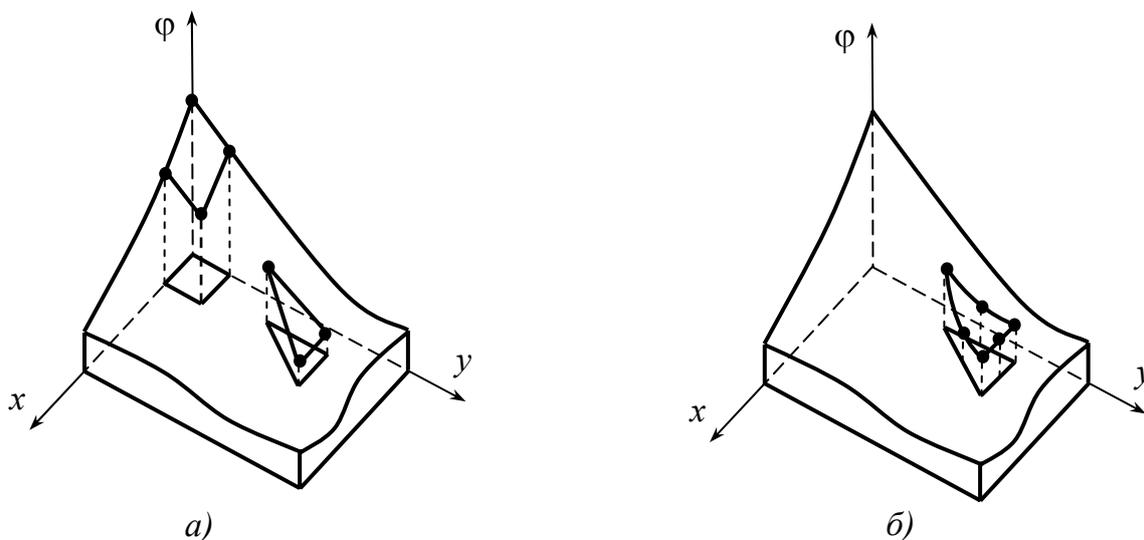


Рис. 4

Из сказанного выше следует, что основными преимуществами МКЭ являются следующие:

1. Возможность исследовать тела (конструкции), составленные из нескольких материалов (так как свойства материалов соседних элементов могут быть разными).
2. Возможность исследовать области (конструкции) любой формы (так как криволинейная область аппроксимируется прямолинейными элементами или точно описывается криволинейными элементами).
3. Возможность учета различных граничных условий: с разрывной нагрузкой, смешанных.
4. Возможность составления общих методик и программ для решения различных по физике задач одного определенного вида (например, программа осесимметричной задачи о распространении тепла может быть использована для решения любой задачи данного типа: о распределении напряжений в осесимметричной конструкции и т.п.).

Дискретизация области

Разбиение области на подобласти – первый этап в решении задачи МКЭ. Эта операция требует инженерных навыков и опыта. Неудачное разбиение приведет к ошибочным результатам решения задачи.

При разбиении области необходимо уже иметь некоторые общие представления о результатах решения задачи, чтоб уменьшить размеры элементов в тех частях области, где ожидаемый результат может резко меняться, и увеличить размеры в тех частях, где ожидаемый результат близок к постоянному. Вообще, при разбиении области всегда идет поиск золотой середины: с одной стороны, элементы должны быть достаточно малыми, чтоб получить результаты необходимой точности; с другой стороны, чем крупнее элементы, тем меньше вычислительной работы.

Одномерные элементы

Одномерный элемент – это стержневой элемент. Он используется при расчете стержневых конструкций (фермы, балки, рамы и т.п.).

Одномерные элементы могут быть с двумя узлами (рис. 5, а), тремя (квадратичные) (рис. 5, б), четырьмя (кубические) (рис. 5, в).

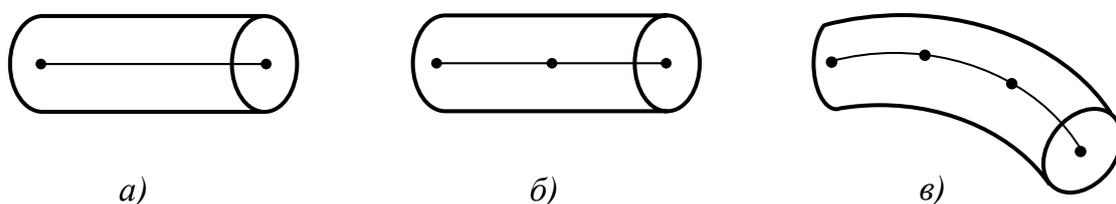


Рис. 5

Двумерные элементы

Основные виды двумерных элементов – треугольные и четырехугольные (рис. 6).

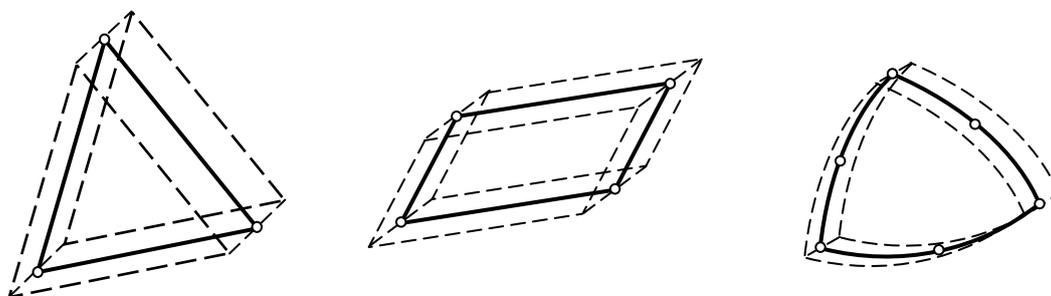


Рис. 6

Толщина элементов может быть постоянна или может являться функцией координат. Такие элементы используются при расчете различных пластин (плиты перекрытий, стеновые панели и т.п.).

Трехмерные элементы

Наиболее часто используются трехмерные элементы в виде тетраэдра или параллелепипеда (рис. 7).

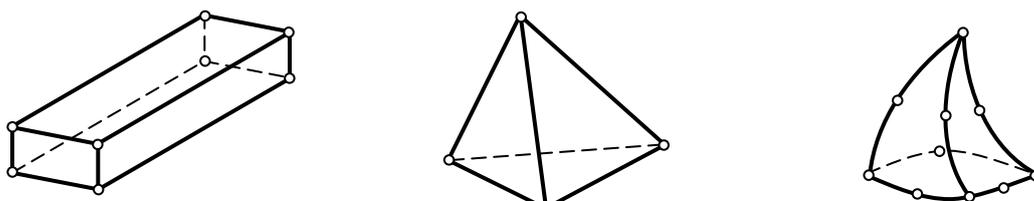


Рис. 7

При рассмотрении конструкций специфической формы (например, осесимметричных) используются специальные элементы (рис. 8).

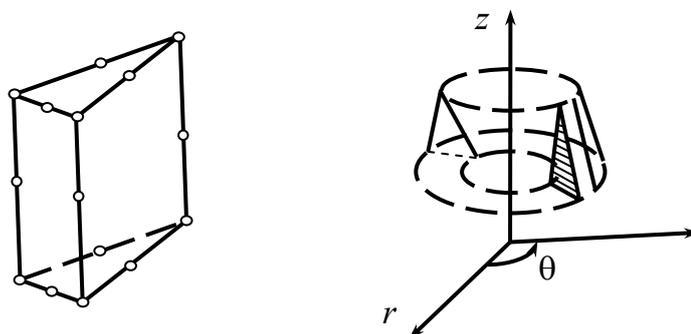


Рис. 8

Разбиение области на элементы

Разбиение одномерной конструкции на элементы не представляет трудностей.

При разбиении двумерной области чаще используются треугольные элементы.

Сначала область делится на треугольные и четырехугольные подобласти (зоны): границы между зонами определяются изменением геометрии области, изменением нагрузки, свойств материалов.

Затем зоны разбиваются на элементы. Наиболее легко разбить треугольную зону, выбрав определенное количество узлов вдоль каждой сто-

роны зоны и соединив соответствующие узлы линиями (рис. 9). Если на каждой стороне такой зоны выбрано по n узлов, число полученных треугольных элементов равно $(n - 1)^2$.

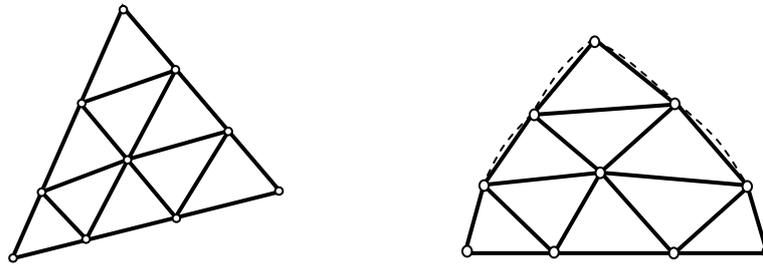


Рис. 9

Четырехугольные зоны обычно разбиваются соединением узлов на противоположных сторонах (рис. 10). Если число узлов на двух противоположных сторонах такой зоны одинаково и равно n и m для двух пар противоположных сторон, число прямоугольных элементов этой зоны будет $2(n - 1)(m - 1)$.

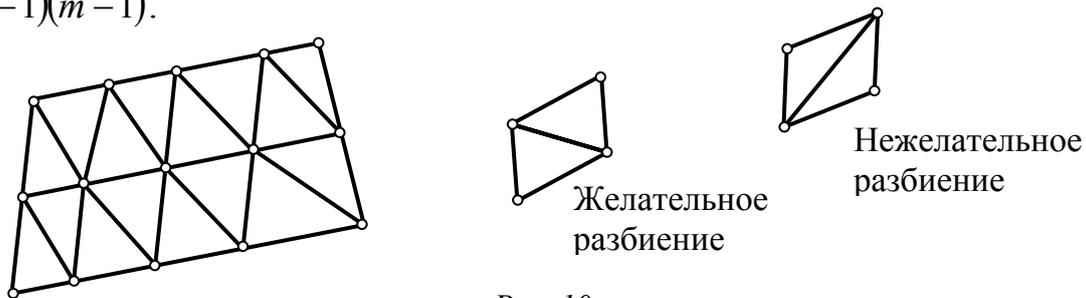


Рис. 10

Четырехугольные элементы в дальнейшем можно разбивать на треугольные проведением более короткой диагонали в четырехугольнике. Разбиение более короткой диагональю дает элементы, наиболее близкие к равностороннему треугольнику, что ведет к более точным результатам.

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковые размеры, используется редко. Обычно из-за ожидаемой концентрации напряжений размеры элементов варьируются, и эта возможность является важным достоинством метода конечных элементов. Наиболее простой способ изменения размеров элементов – применение черырехугольных зон с различным числом узлов на противоположных сторонах (рис. 11).

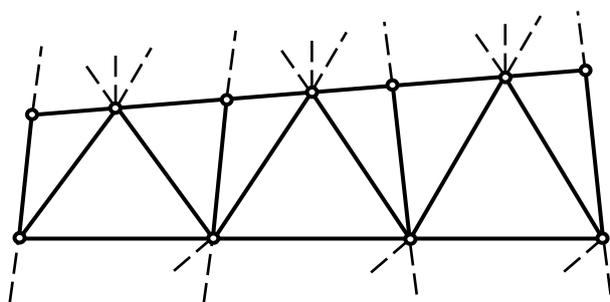


Рис. 11

размещаются, и эта возможность является важным достоинством метода конечных элементов. Наиболее простой способ изменения размеров элементов – применение черырехугольных зон с различным числом узлов на противоположных сторонах (рис. 11).

Нумерация узлов

Порядок нумерации узлов влияет на эффективность вычислений метода конечных элементов. Реализация МКЭ приводит к решению системы алгебраических уравнений, большое число коэффициентов которой нулевые. В матрице коэффициентов этой системы все ненулевые коэффициенты заключены между линиями, параллельными главной диагонали матрицы (рис. 12).

Расстояние между главной диагональю и одной из этих линий называется шириной полосы матрицы (см. рис. 12) и является показателем эффективности вычислений: чем ширина полосы уже, тем меньше размер требуемой машинной памяти и время вычислений. Ширина полосы определяется порядком нумерации узлов:

$$B = (R + 1)Q,$$

где B – ширина полосы; R – наибольшая для исследуемой области разница между номерами узлов в элементе; Q – число неизвестных в каждом узле.

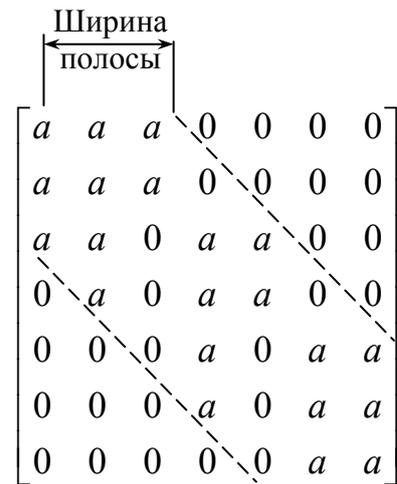


Рис. 12

Таким образом, при нумерации узлов необходимо стремиться к тому, чтобы разница между номерами узлов в элементах области была как можно меньше. Для простой прямоугольной области это проиллюстрировано на рис. 13. Вариант *a* менее эффективен: наибольшая разница между номерами узлов в элементе 8. Вариант *б* более эффективен: соответствующая разница – 4.

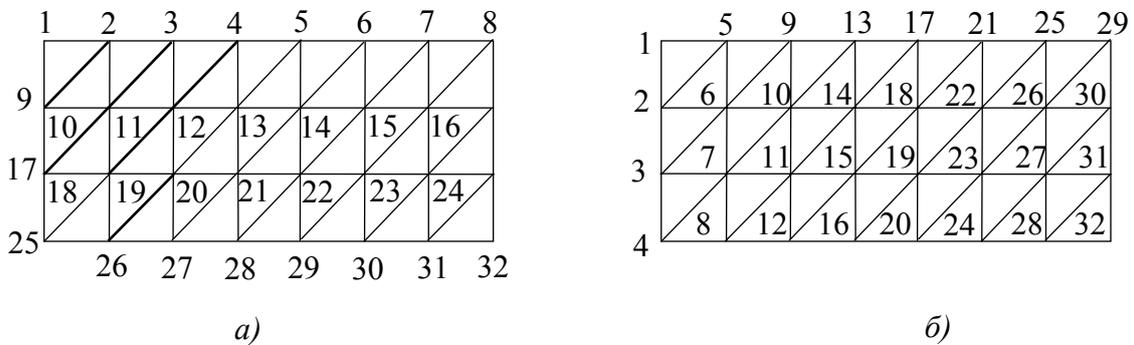


Рис. 13

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Общая постановка задачи

Рассматривается пространственная стержневая система.

Предполагается, что материал стержней идеально упругий.

Система является линейно-деформируемой.

Стержневая система разбивается на конечное число элементов, соединенных с соседними в узлах. Соединение в узле может быть жестким (рис. 14, *a* – для плоской стержневой системы) или шарнирным (рис. 14, *б* – также для плоской стержневой системы).

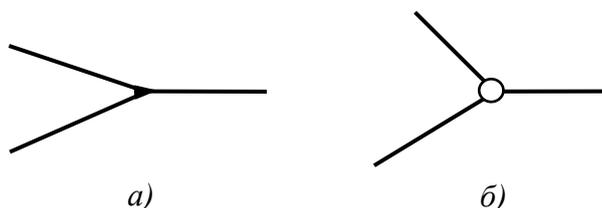


Рис. 14

Жесткий узел обеспечивает равенство всех перемещений концевых сечений элементов, примыкающих к узлу (и линейных перемещений, и углов поворота). Шарнирный узел обеспечивает равенство только линейных перемещений концов элементов.

За неизвестные принимаются перемещения узлов стержневой системы.

Матрица жесткости ферменного элемента

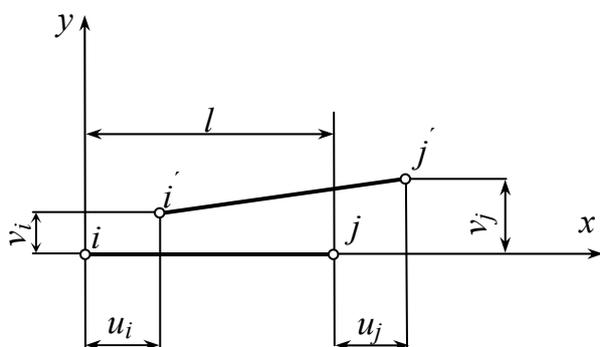


Рис. 15

Рассмотрим отдельный конечный элемент с шарнирными узлами i, j (рис. 15). Такие элементы называются ферменными. Свяжем с ним систему координат xu (см. рис. 15). Эта система координат, привязанная к конкретному конечному элементу, называется *местной*.

Под действием внешних нагрузок стержневая система деформируется, в том числе деформируется рассматриваемый элемент. Его узлы переместятся в новые положения i', j' (см. рис. 15). Матрицы-векторы перемещений узлов i и j соответственно

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad q_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix},$$

а вектор узловых перемещений элемента

$$q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим усилия, приложенные к элементу, – внутренние усилия, заменяющие действие остальной части стержневой системы на наш элемент (рис. 16).

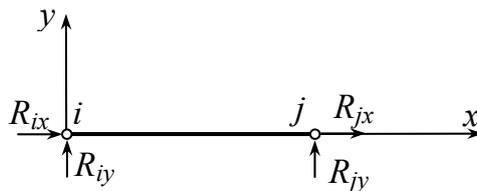


Рис. 16

Матрицы-векторы внутренних усилий для узлов i и j

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \end{bmatrix}, \quad R_j = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix},$$

вектор усилий всего элемента

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix}.$$

Если нагрузка на такой прямолинейный элемент приложена только в узлах, $R_{iy} = R_{jy} = 0$. Действительно, из условия равновесия элемента

$$\sum M_i = 0 \rightarrow R_{jy}l = 0 \rightarrow R_{jy} = 0,$$

из условия равновесия

$$\sum y = 0 \rightarrow R_{iy} + R_{jy} = 0 \rightarrow R_{iy} = 0.$$

Кроме этого из условия равновесия элемента

$$\sum x = 0 \rightarrow R_{ix} + R_{jx} = 0 \rightarrow R_{jx} = -R_{ix} = R_x.$$

Это означает, что продольные усилия одинаковы по величине и противоположны по направлению. На рис. 17 представлена соответствующая картина с растягивающими усилиями.

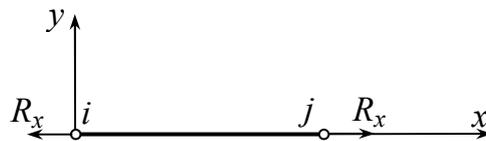


Рис. 17

Удлинение элемента $\Delta l = u_j - u_i$, тогда

$$R_x = EA \frac{\Delta l}{l} = \frac{EA}{l} (u_j - u_i),$$

где E – модуль Юнга материала; A – площадь поперечного сечения элемента.

В матричной форме

$$R = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q$$

или

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Обозначим

$$K_M = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Такая матрица называется матрицей жесткости стержневого элемента в местной системе координат.

Окончательно

$$R = K_M q. \quad (3)$$

Матрица жесткости балочного элемента

Теперь рассмотрим отдельный конечный элемент с жесткими узлами i, j (рис. 18).

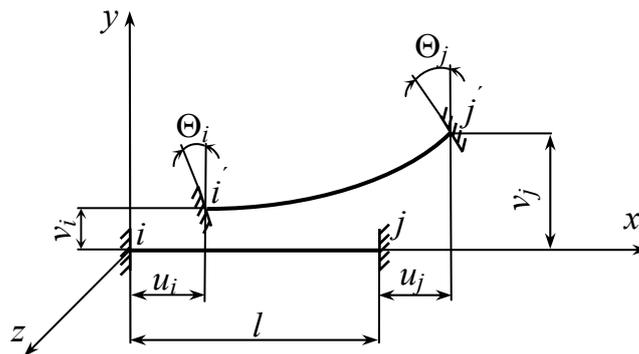


Рис. 18

Такие элементы называются балочными. В результате деформации стержневой системы под действием внешних нагрузок узлы рассматриваемого элемента переместятся в новые положения i', j' , кроме этого концевые сечения повернутся (см. рис. 18). Векторы перемещений узлов

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \end{bmatrix}, \quad q_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix},$$

а вектор узловых перемещений элемента

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

Усилия, действующие на элемент, показаны на рис. 19.

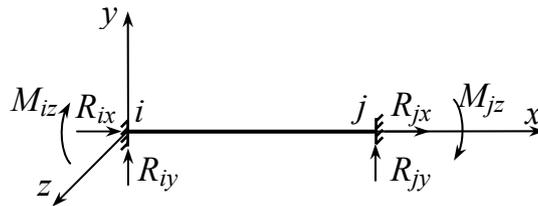


Рис. 19

Векторы внутренних усилий для узлов i, j

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}, \quad R_j = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix},$$

а вектор для всего элемента

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости K_M балочного элемента получим следующим образом. Будем отдельно рассматривать перемещения узлов по оси x , по оси y , повороты узловых сечений относительно оси z для каждого узла (рис. 20).

Узловые усилия можно определить, воспользовавшись табличными результатами для расчета рам методом перемещений [1] (рис. 21).

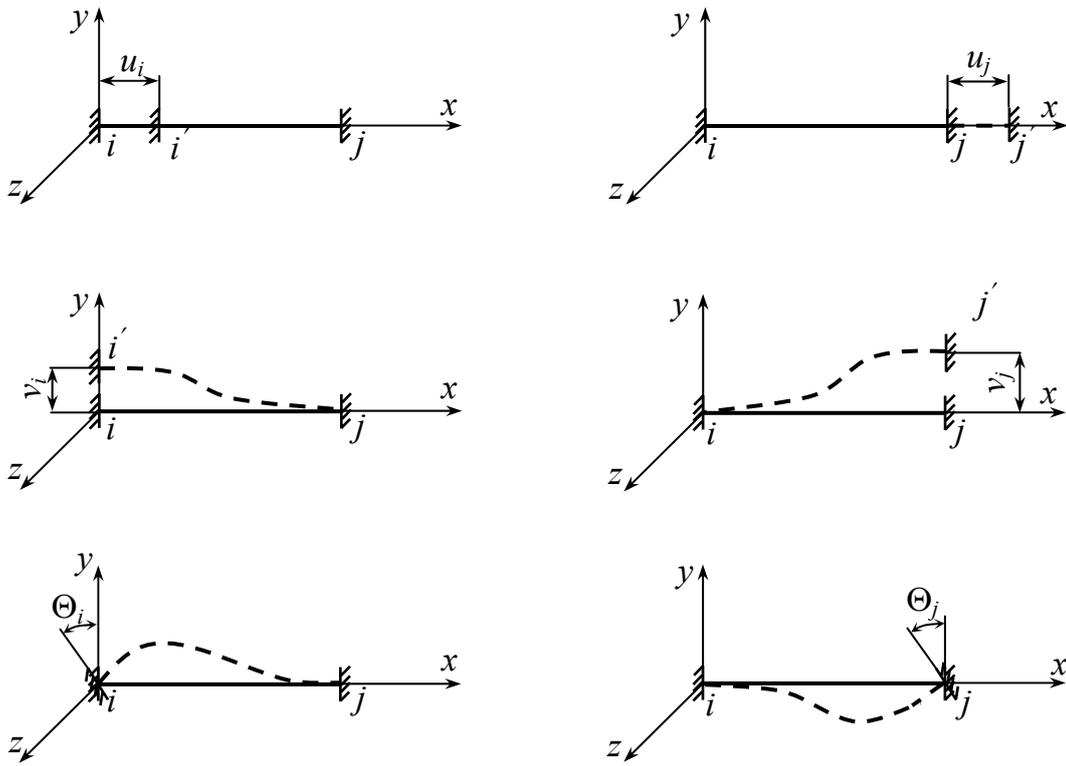
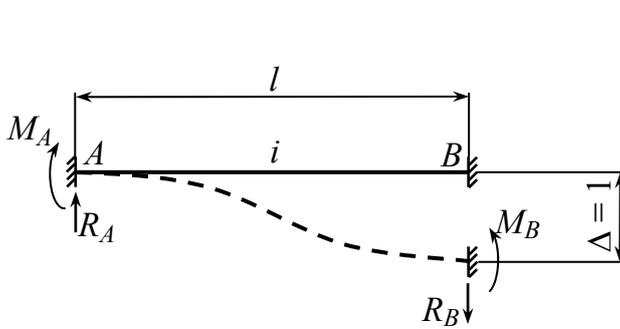


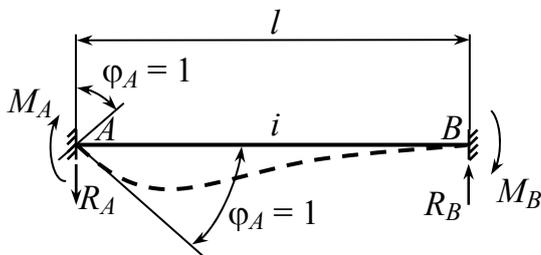
Рис. 20



$$M_A = -\frac{6i}{l};$$

$$M_B = \frac{6i}{l};$$

$$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2};$$



$$M_A = 4i;$$

$$M_B = 2i;$$

$$R_A = R_B = \frac{6i}{l};$$

где $i = \frac{EJ}{l}$

Рис. 21

Учитывая направления перемещений узлов, а также то, что смещения узлов нашего балочного элемента не единичные, а $v_i, v_j, \Theta_i, \Theta_j$ (см. рис. 20), получим усилия, соответствующие отдельным смещениям узлов, показанные на рис. 22.

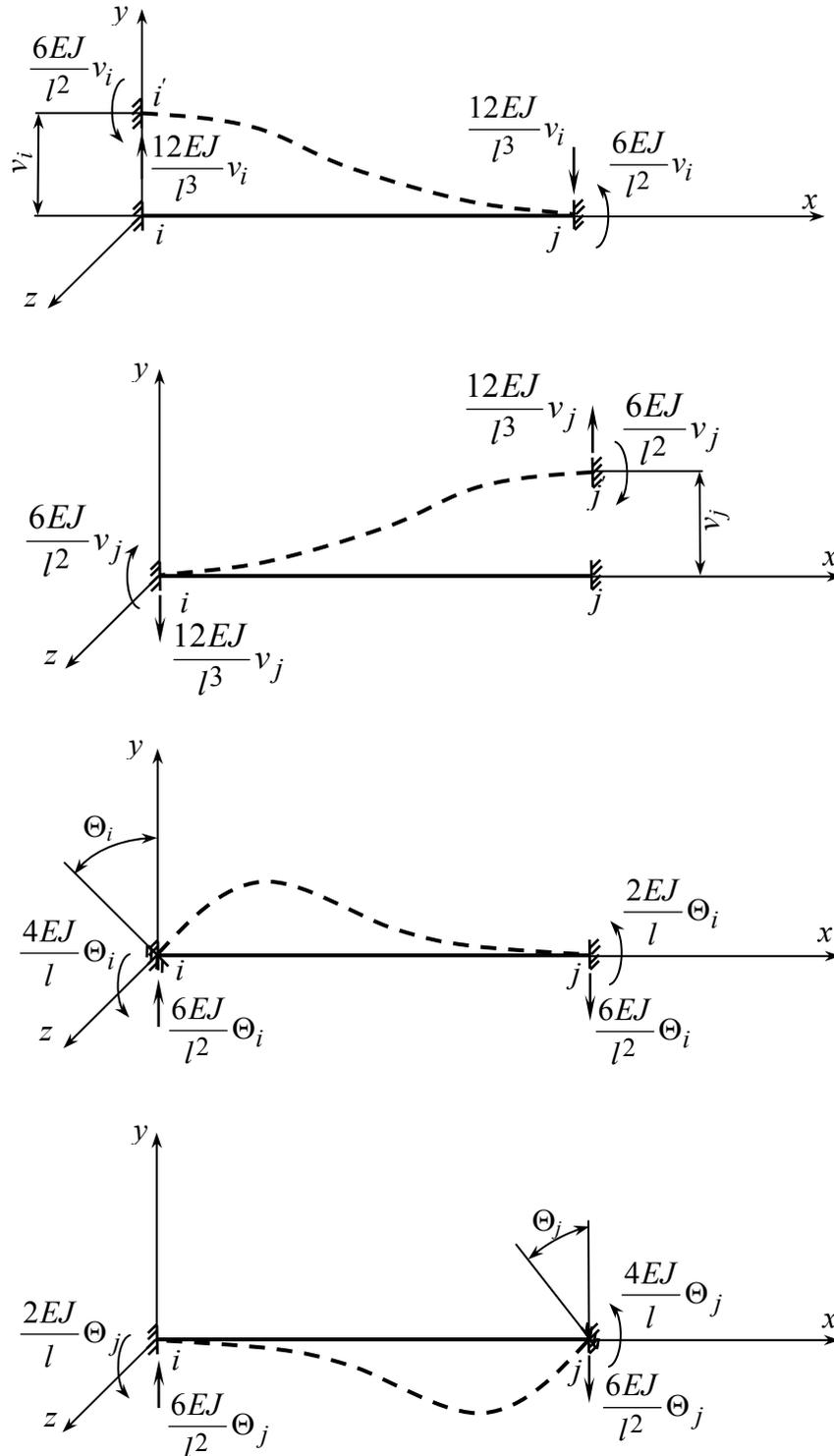


Рис. 22

Тогда узловые усилия

$$R_{iy} = 0 \cdot u_i + \frac{12EJ}{l^3} v_i + \frac{6EJ}{l^2} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{12EJ}{l^3} v_j + \frac{6EJ}{l^2} \Theta_j,$$

$$R_{jy} = 0 \cdot u_i - \frac{12EJ}{l^3} v_i - \frac{6EJ}{l^2} \Theta_i + 0 \cdot u_j + \frac{12EJ}{l^3} v_j - \frac{6EJ}{l^2} \Theta_j,$$

$$M_{iz} = 0 \cdot u_i + \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{4EJ}{l} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{6EJ}{l^2} v_j + \frac{2EJ}{l} \Theta_j,$$

$$M_{jz} = 0 \cdot u_i + \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{2EJ}{l} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{6EJ}{l^2} v_j + \frac{4EJ}{l} \Theta_j.$$

Выражения для узловых усилий R_{ix} и R_{jx} получаются с использованием формулы (1):

$$R_{ix} = \frac{EA}{l} u_i + 0 \cdot v_i + 0 \cdot \Theta_i - \frac{EA}{l} u_j + 0 \cdot v_j + 0 \cdot \Theta_j,$$

$$R_{jx} = -\frac{EA}{l} u_i + 0 \cdot v_i + 0 \cdot \Theta_i + \frac{EA}{l} u_j + 0 \cdot v_j + 0 \cdot \Theta_j.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} & 0 & -\frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 4J & 0 & -\frac{6J}{l} & 2J \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} & 0 & \frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 2J & 0 & -\frac{6J}{l} & 4J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

В общем виде это уравнение выглядит так же, как для ферменного элемента (3):

$$R = K_M q,$$

где K_M – матрица жесткости балочного элемента:

$$K_M = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} & 0 & -\frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 4J & 0 & -\frac{6J}{l} & 2J \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} & 0 & \frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 2J & 0 & -\frac{6J}{l} & 4J \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Приведение внешних нагрузок к узловым усилиям

В предыдущих разделах рассматривались стержневые элементы, на которые действует только узловая нагрузка (см. рис. 16, 19). В действительности внешняя нагрузка на стержневые конструкции может быть и распределенной (рис. 23, а).

В таких случаях перед решением задачи МКЭ проводится так называемое приведение внешних нагрузок к узловым усилиям.

Так как рассматриваются линейно-деформируемые упругие стержневые системы, можно использовать принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил). В соответствии с этим принципом результат действия группы сил равен сумме результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности.

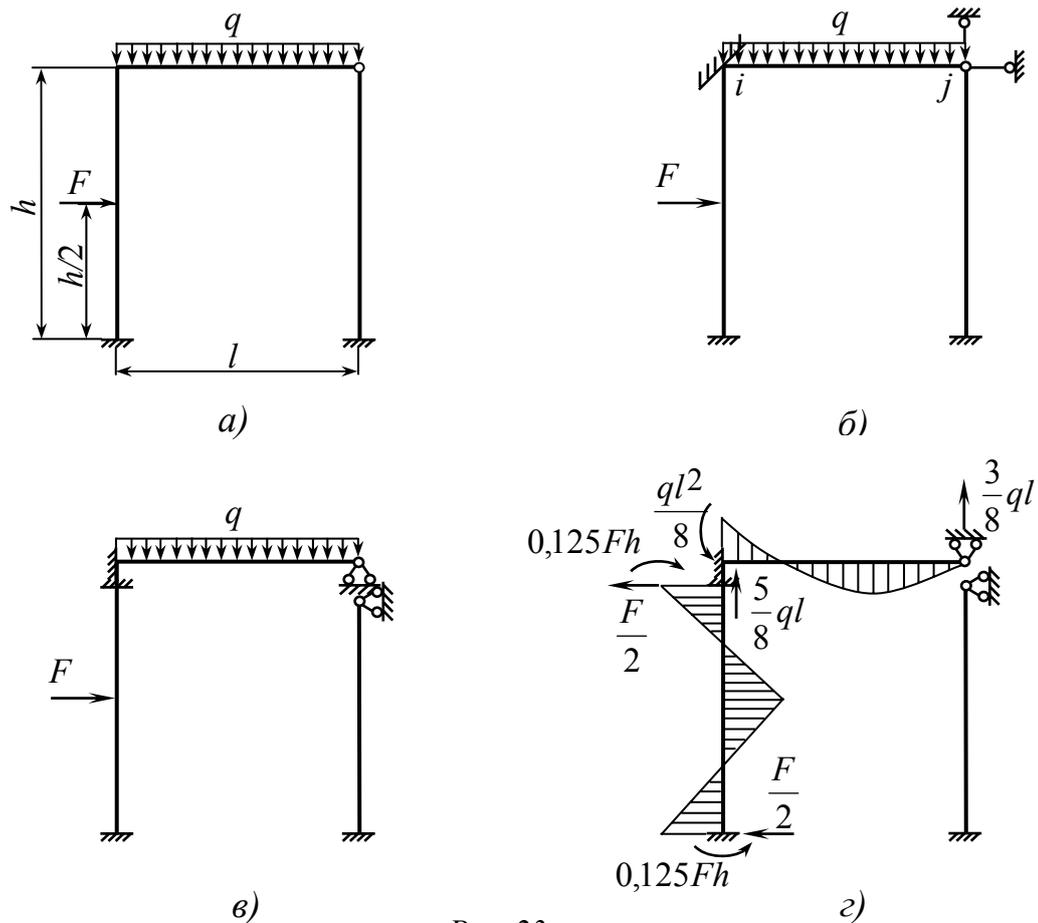


Рис. 23

Представим решение нашей задачи в виде суммы решений для той же стержневой системы от нескольких внешних воздействий, равных в сумме исходному воздействию.

Закрепим все узлы системы от всех возможных смещений (рис. 23, б): в данном случае это означает введение жесткой заделки в узел i и шарнирно-неподвижной опоры в узел j . В результате $q_i = 0$, $q_j = 0$. Получившаяся при этом система – это не связанные друг с другом стержневые элементы (рис. 23, в).

Определить усилия в такой системе можно относительно просто: каждый отдельный стержень – дважды или трижды статически неопределимая система, которая может быть рассчитана методом сил. В случае простейших внешних нагрузок можно воспользоваться готовыми решениями [1] (рис. 23, ε – эпюры изгибающих моментов $M_{изг}$ в отдельных стержнях).

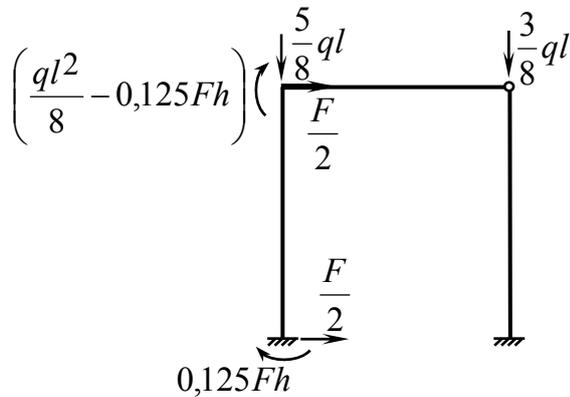


Рис. 24

Теперь рассмотрим заданную систему (см. рис. 23, a) под действием узловых усилий, равных тем, которые приходились в отдельных стержнях на их опоры (рис. 24).

По принципу суперпозиции решение исходной задачи (см. рис. 23, a) можно представить в виде суммы решений двух задач (рис. 23, b и 24).

Таким образом, расчет стержневой системы на действие произвольной внешней нагрузки состоит из расчета отдельных ее элементов на действие внешней нагрузки, относящейся к ним, и расчета всей стержневой системы в целом на действие только узловых усилий. Первый расчет, как было сказано выше, относительно прост. Поэтому задача сводится в основном к расчету стержневой системы на узловые нагрузки. Описанная операция и называется приведением внешних нагрузок к узловым усилиям.

Преобразование матрицы жесткости ферменного элемента при переходе к глобальной системе координат

Рассмотрим ферменный элемент в некоторой системе координат x, y ,

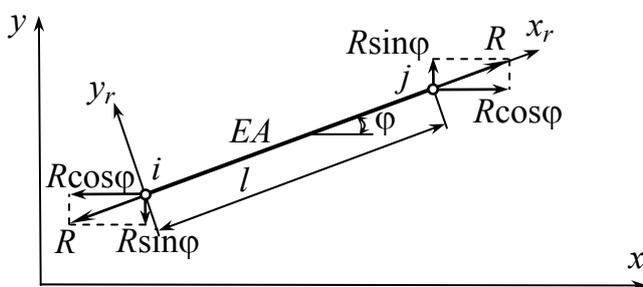


Рис. 25

единой для всей стержневой системы, состоящей из ферменных элементов (рис. 25). Такая система координат называется *глобальной*. x_r, y_r – местная система координат данного элемента.

В результате деформации узлы элемента переместятся (рис. 26).

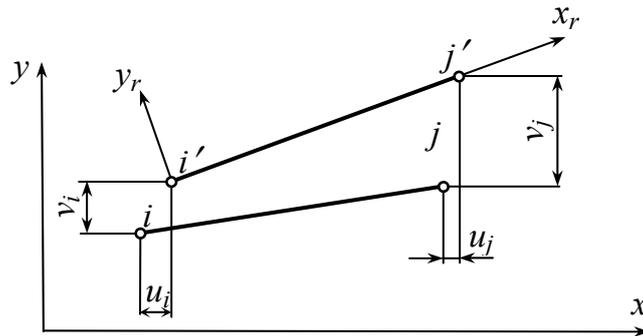


Рис. 26

Вектор узловых перемещений элемента в глобальной системе координат

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Удлинение элемента $\Delta l = (u_j - u_i) \cos \varphi + (v_j - v_i) \sin \varphi$. Тогда

$$R = \frac{EA}{l} \Delta l = \frac{EA}{l} [(u_j - u_i) \cos \varphi + (v_j - v_i) \sin \varphi].$$

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -(u_j - u_i) \cos^2 \varphi - (v_j - v_i) \sin \varphi \cos \varphi \\ -(u_j - u_i) \cos \varphi \sin \varphi - (v_j - v_i) \sin^2 \varphi \\ (u_j - u_i) \cos^2 \varphi + (v_j - v_i) \sin \varphi \cos \varphi \\ (u_j - u_i) \cos \varphi \sin \varphi + (v_j - v_i) \sin^2 \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} u_i \cos^2 \varphi + v_i \sin \varphi \cos \varphi - u_j \cos^2 \varphi - v_j \sin \varphi \cos \varphi \\ u_i \sin \varphi \cos \varphi + v_i \sin^2 \varphi - u_j \sin \varphi \cos \varphi - v_j \sin^2 \varphi \\ -u_i \cos^2 \varphi - v_i \sin \varphi \cos \varphi + u_j \cos^2 \varphi + v_j \sin \varphi \cos \varphi \\ -u_i \sin \varphi \cos \varphi - v_i \sin^2 \varphi + u_j \sin \varphi \cos \varphi + v_j \sin^2 \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Матрицу

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

называют матрицей жесткости ферменного элемента в глобальной системе координат. Коротко

$$R = Kq.$$

Нетрудно проверить, что эта матрица жесткости связана с матрицей жесткости ферменного элемента в местной системе координат K_M (2) соотношением

$$K = C^T K_M C, \quad (5)$$

где C – так называемая матрица направляющих косинусов осей x_r, y_r местной системы координат относительно осей x, y глобальной системы координат:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Преобразование матрицы жесткости балочного элемента при переходе к глобальной системе координат

Рассмотрим балочный элемент в глобальной системе координат (рис. 27).
Вектор узловых перемещений элемента в глобальной системе координат

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

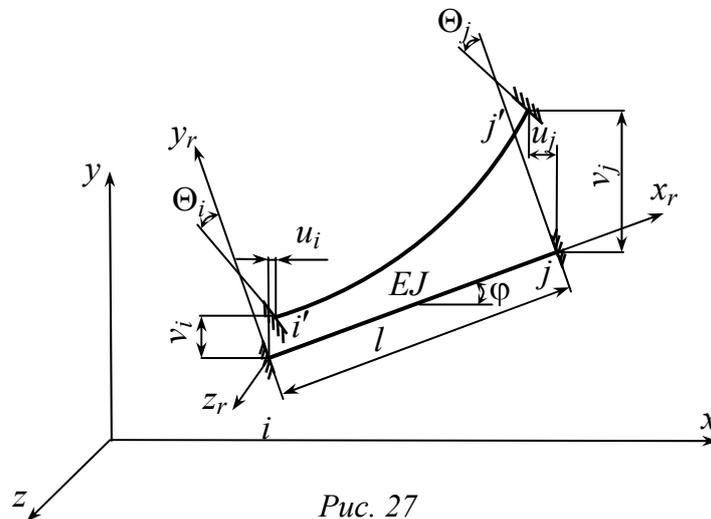


Рис. 27

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix}.$$

Подобно тому, как выше была получена матрица жесткости ферменного элемента в глобальной системе координат, может быть получена матрица жесткости балочного элемента в глобальной системе координат: $R = Kq$, где

$$K = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \left(A \cos^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \sin^2 \varphi \right) & -\left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & -\frac{6J}{l} \sin \varphi & -\left(A \cos^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \sin^2 \varphi \right) & \left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & -\frac{6J}{l} \sin \varphi \\ -\left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \left(A \sin^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \cos^2 \varphi \right) & \frac{6J}{l} \cos \varphi & \left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & -\left(A \sin^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \cos^2 \varphi \right) & \frac{6J}{l} \cos \varphi \\ -\frac{6J}{l} \sin \varphi & \frac{6J}{l} \sin \varphi & 4J & \frac{6J}{l} \sin \varphi & -\frac{6J}{l} \cos \varphi & 2J \\ -\left(A \cos^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \sin^2 \varphi \right) & \left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \frac{6J}{l} \sin \varphi & \left(A \cos^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \sin^2 \varphi \right) & -\left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \frac{6J}{l} \sin \varphi \\ \left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & -\left(A \sin^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \cos^2 \varphi \right) & -\frac{6J}{l} \cos \varphi & -\left(-A + \frac{12J}{l^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \left(A \sin^2 \varphi + \frac{12J}{l^2} \cos^2 \varphi \right) & -\frac{6J}{l} \cos \varphi \\ -\frac{6J}{l} \sin \varphi & \frac{6J}{l} \cos \varphi & 2J & \frac{6J}{l} \sin \varphi & -\frac{6J}{l} \cos \varphi & \frac{4J}{l} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица также связана с матрицей жесткости балочного элемента в местной системе координат (4) соотношением (5), при этом

$$C = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристики совокупности элементов

Выше были введены матрицы, характеризующие отдельный стержневой элемент, и получены соотношения между ними. Теперь получим характеристики совокупности стержневых элементов, образующих стержневую систему.

Первоначально будем считать элементы *не связанными* друг с другом. Общее число элементов системы – m .

$$\text{Вектор узловых перемещений системы } q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^r \\ \vdots \\ q^m \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$\text{Вектор узловых усилий системы } R = \begin{bmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^r \\ \vdots \\ R^m \end{bmatrix}.$$

$$\text{Матрица жесткости системы } K = \begin{bmatrix} K^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & K^r & & \\ & & & \ddots & \\ n & & & & u & l & i & K^m \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим элементы, *связанные* в единую систему, например раму (см. рис. 23, а).

Чтобы заставить m несвязанных элементов работать так же, как работает соответствующая система связанных элементов, нужно приравнять перемещения соответствующих узлов этих двух систем.

В матричной форме эти соотношения выглядят так:

$$q = H\bar{q},$$

где q – вектор узловых перемещений системы несвязанных элементов (6); H – так называемая матрица соединения (или логическая матрица); \bar{q} – вектор узловых перемещений системы связанных элементов.

Матрица соединения состоит из единичных матриц E . Для системы ферменных элементов

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для системы балочных элементов

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости системы связанных элементов

$$\bar{K} = H^T K H.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для иллюстрации вышеизложенных основных принципов МКЭ рассмотрим ферму (рис. 28).

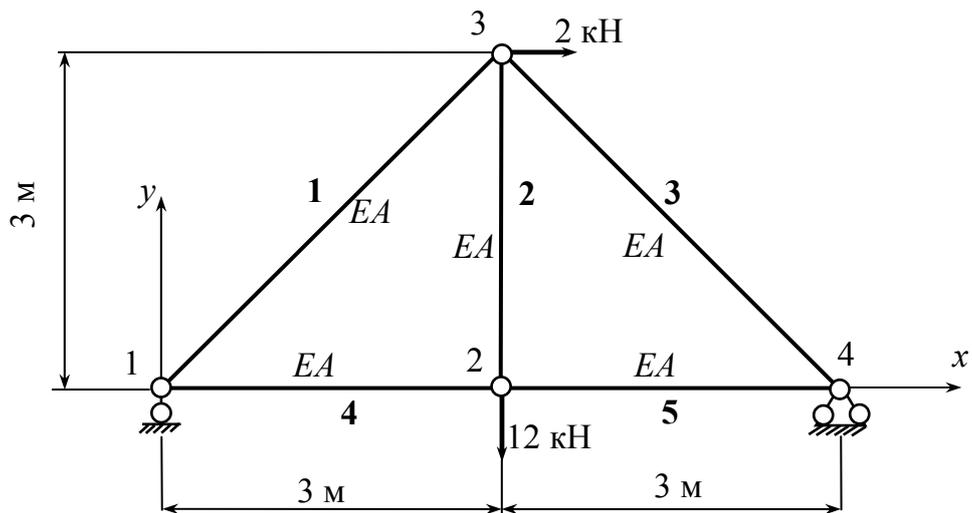


Рис. 28

Пронумеруем элементы (см. рис. 28).

Запишем матрицы жесткости отдельных элементов фермы в местных системах координат (рис. 29):

$$K_M^{1,3} = \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_M^{2,4,5} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

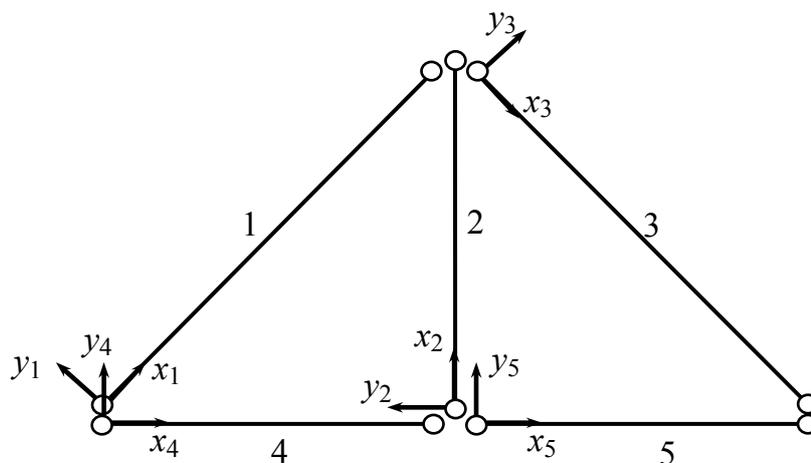


Рис. 29

Вычислим матрицы жесткости отдельных элементов фермы в глобальной системе координат xu (см. рис. 28).

Для этого составим матрицы C направляющих косинусов элементов:

$$C^1 = \begin{bmatrix} \cos(x, x_1) & \cos(y, x_1) & 0 & 0 \\ \cos(x, y_1) & \cos(y, y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(x, x_1) & \cos(y, x_1) \\ 0 & 0 & \cos(x, y_1) & \cos(y, y_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \cos 315^\circ & 0 & 0 \\ \cos 135^\circ & \cos 45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45^\circ & \cos 315^\circ \\ 0 & 0 & \cos 135^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^4 = C^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда в соответствии с (5) $K^1 = (C^1)^T K_M^1 C^1 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{EA}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K^3 = \frac{EA}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ K^4 &= K_M^4 = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K^5 = K_M^5 = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Составим матрицу жесткости системы несвязанных элементов:

$$K = \begin{bmatrix} K^1 & & & & \\ & K^2 & & & \\ & & K^3 & & \\ & & & K^4 & \\ & & & & K^5 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу жесткости системы связанных элементов \bar{K} .

Сначала составим матрицу соединения H . Для этого заставим систему несвязанных элементов (см. рис. 29) работать так же, как заданная система (см. рис. 28): приравняем перемещения соответствующих узлов этих двух систем.

$$\begin{aligned} q_1^1 &= \bar{q}_1, \\ q_2^1 &= \bar{q}_3, \\ q_1^2 &= \bar{q}_2, \\ q_2^2 &= \bar{q}_3, \\ q_1^3 &= \bar{q}_3, \\ q_2^3 &= \bar{q}_4, \\ q_1^4 &= \bar{q}_1, \\ q_2^4 &= \bar{q}_2, \\ q_1^5 &= \bar{q}_2, \\ q_2^5 &= \bar{q}_4. \end{aligned}$$

В этих выражениях $\bar{q}_i (i = 1 \div 4)$ – элементы вектора узловых перемещений \bar{q} системы связанных КЭ. Нумерация узлов заданной системы – на рис. 28.

В матричном виде эти соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_1^4 \\ q_2^4 \\ q_1^5 \\ q_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix},$$

где $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, матрица соединения имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Теперь в соответствии с формулой (7) вычислим матрицу жесткости заданной системы \bar{K} . В результате перемножения матриц получим:

$$\bar{K} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right) & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

В заданной ферме перемещения узлов 1, 4 ограничены опорами: в узле 1 невозможно вертикальное смещение, в узле 4 – и горизонтальное, и вертикальное. Поэтому в матрице \bar{K} необходимо вычеркнуть строки и столбцы 2, 7, 8. Тогда матрица примет вид:

$$\bar{K} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right) & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \end{bmatrix}$$

или

$$\bar{K} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1,35 & -1 & 0 & -0,35 & -0,35 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0,35 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ -0,35 & 0 & -1 & 0 & 1,7 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно рассчитать перемещения узлов заданной фермы.

Вектор внешних узловых нагрузок и вектор узловых перемещений заданной системы связаны соотношением $\bar{R} = \bar{K}\bar{q}$, откуда

$$\bar{q} = (\bar{K})^{-1}\bar{R}.$$

Матрица $(\bar{K})^{-1}$ обратная матрице \bar{K} :

$$(\bar{K})^{-1} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} 0,98 & 0,49 & 0,49 & 0,49 & 0,49 \\ 0,49 & 0,49 & 0,245 & 0,245 & 0,245 \\ 0,49 & 0,245 & 1,435 & 0,245 & 0,945 \\ 0,49 & 0,245 & 0,245 & 0,945 & 0,245 \\ 0,49 & 0,245 & 0,945 & 0,245 & 0,945 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0,49} =$$

$$= \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 2,93 & 0,5 & 1,93 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1,93 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,93 & 0,5 & 1,93 \end{bmatrix}.$$

Вектор внешних узловых нагрузок $\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\text{Тогда } \bar{q} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 2,93 & 0,5 & 1,93 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1,93 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,93 & 0,5 & 1,93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ -34,2 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix}.$$

Далее определим внутренние усилия в заданной ферме.

Для этого сначала запишем векторы узловых перемещений конечных элементов (в глобальной системе координат):

$$q^1 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix}, \quad q^2 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix},$$

$$q^3 = \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -2,14 \\ -22,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q^4 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34,2 \end{bmatrix},$$

$$q^5 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Затем получим векторы узловых перемещений стержней в их местных системах координат:

$$q_M^1 = C^1 q^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24,3 \\ -20,0 \end{bmatrix},$$

аналогично

$$q_M^2 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -34,2 \\ 5 \\ -22,2 \\ 2,14 \end{bmatrix}, \quad q_M^3 = \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} 20,0 \\ -24,3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_M^4 = q^4 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34,2 \end{bmatrix}, \quad q_M^5 = q^5 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычислим векторы узловых усилий элементов:

$$R_M^1 = K_M^1 q_M^1 = \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24,3 \\ -20,0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 14,3 \\ 0 \\ -14,3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,15 \\ 0 \\ -7,15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН},$$

аналогично

$$R_M^2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}, \quad R_M^3 = \begin{bmatrix} 10,0 \\ 0 \\ -10,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН},$$

$$R_M^4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}, \quad R_M^5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}.$$

Результаты расчета этих усилий для некоторых элементов показаны на рис. 30.

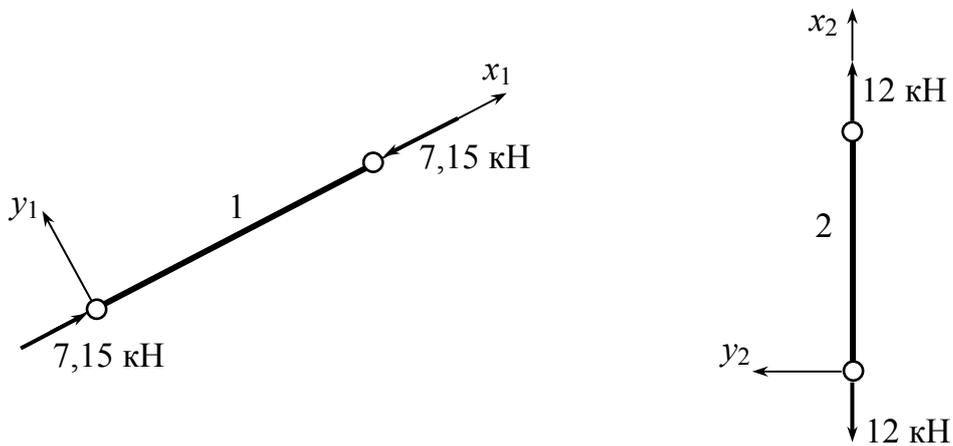


Рис. 30

Проверить результаты расчета можно, например, по условиям равновесия узлов фермы. Вырежем узел 3 и рассмотрим его равновесие под действием приложенных внешних нагрузок и внутренних усилий (рис. 31).

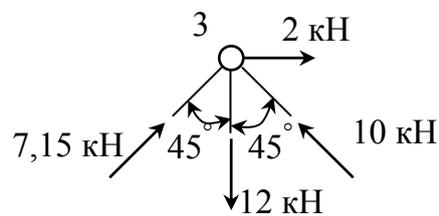


Рис. 31

Составим уравнения равновесия:

$$\sum x = 0: 7,15 \cos 45^\circ + 2 - 10 \cos 45^\circ \approx 0.$$

$$\sum y = 0: 7,15 \cos 45^\circ - 2 + 10 \cos 45^\circ \approx 0.$$

Таким образом, узлы находятся в равновесии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн [и др.]. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
2. *Розин, Л. А.* Стержневые системы как системы конечных элементов / Л. А. Розин. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1976. – 232 с.
3. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 393 с.
4. *Кислов, В. М.* Метод конечных элементов : метод. указания к практ. занятиям / В. М. Кислов ; Владим. политехн. ин-т. – Владимир : ВПИ, 1982. – 44 с.
5. *Кислов, В. М.* Определение физических и геометрических параметров конструкций на основе метода конечных элементов : учеб. пособие / В. М. Кислов ; Владим. гос. техн. ун-т. – Владимир : ВлГТУ, 1994. – 88 с.
6. *Формалев, В. Ф.* Численные методы / В. Ф. Формалев, Д. Д. Ревизников. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с. – ISBN 5-9221-0479-9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Расчет стержневых систем	10
Пример решения задачи методом конечных элементов	26
Список использованной литературы	36

36

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Введение. Расчет стержневых систем

Конспект лекций

Составитель
КОНДРАТЬЕВА Людмила Евгеньевна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент А.Ф. Ковалев

Подписано в печать 07.02.07.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 2,09. Тираж 200 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.