

Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет»

С. А. Маврина

Статика стержневых систем
Курс лекций
по строительной механике
Часть 1. Статически определимые системы

УДК 624.04 (07)
ББК 38.112 я2
С86

Рецензент
Кандидат технических наук,
доцент кафедры «Строительные конструкции»
Т. Н. Яшкова

Статика стержневых систем. Курс лекций по строительной механике. Часть 1. Статически определимые системы: Учебное электронное издание / Владим. гос. ун-т ; сост. С.А. Маврина. – Владимир, 2010. – 50 с.

Лекции в достаточно краткой форме содержат основные теоретические сведения по расчету *статически определимых систем* на неподвижную и подвижную нагрузки.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению «Строительство»: «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство», «Автомобильные дороги и аэродромы». Ориентировано на студентов очной, заочной, дистанционной и др. форм обучения.

Табл. 2. Ил. 22. Библиогр.: 5 назв.

УДК 624.04 (07)
ББК 38.112 я2
С86

Предисловие

Строительная механика рассматривает основные методы расчета различных конструкций на неподвижную и подвижную нагрузки. Расчет на неподвижную нагрузку представляет прежде всего построение эпюр внутренних силовых факторов; расчет на подвижную нагрузку – построение линий влияния и последующего нахождения внутренних силовых факторов по линиям влияния.

Строительная механика является одной из фундаментальных общенаучных дисциплин в образовании инженера, обучающегося по направлению «Строительство». В строительной механике изучают поведение строительных конструкций на основе расчетных схем под действием различных внешних факторов: нагрузки, температуры, осадки опорных связей. Рассматриваются и анализируются расчетные схемы основных типовых строительных конструкций: многопролетных балок различного очертания, рам, арок и ферм. Изучение поведения данных конструкций с позиций строительной механики дает будущему инженеру представление о различных методах анализа работы строительных сооружений на основе изучения работы соответствующих расчетных схем; позволяет определить эффекты (внутренние силовые факторы, перемещения и др.), возникающие в сооружении под внешним воздействием.

В строительной механике выделяют три основных раздела: «Статика сооружений», «Динамика сооружений» и «Устойчивость сооружений».

Представленные лекции в достаточно краткой форме содержат основные теоретические сведения по расчету *статически определимых систем*, т.е. содержат основы статики сооружений. Автор не претендует на полноту изложения, но надеется, что данный электронный вариант лекций будет полезным при изучении основных задач статики сооружений.

Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Введение

В современных условиях строительная механика является фундаментальной наукой по расчету конструкций и сооружений *любого типа*. Строительной механикой, в широком смысле слова, называется наука о методах расчета различных *сооружений* на прочность, жесткость и устойчивость. В этой трактовке изучаемая ранее дисциплина «Сопротивление материалов» рассматривается как начальная ступень строительной механики. В представленных лекциях будем рассматривать строительную механику (в узком смысле слова) как *дисциплину*, в которой изучаются методы расчета различных строительных конструкций.

Основные разделы строительной механики: статика сооружений, динамика сооружений, теория устойчивости сооружений. *Статика сооружений* изучает методы расчета сооружений при статическом действии нагрузки. Вспомним из курса сопротивления материалов особенности действия статической нагрузки: статическая нагрузка действует на сооружения так, что постепенно достигает своей величины в течение некоторого конечного промежутка времени и в дальнейшем не изменяется. *Динамика сооружений* рассматривает расчеты на динамическую нагрузку, меняющуюся во времени. Наконец, *устойчивость сооружений* – специальный раздел, изучающий методы расчета сооружений на устойчивость.

Под *сооружением* будем понимать совокупность твердых тел (элементов), неподвижно соединенных между собой. К любому сооружению предъявляются следующие главные требования:

- неподвижность относительно основания и неизменяемость заданной геометрической формы в течение всего срока эксплуатации;
- прочность, жесткость и устойчивость, что гарантирует безопасность эксплуатации сооружения (т.е. практически должна быть исключена возможность разрушения в течение заданного срока службы) и ограничивает деформацию в таких пределах, которые не препятствуют нормальным условиям эксплуатации;
- экономичность.

В рамках данного курса лекций в качестве *сооружений* будем рассматривать *стержневые системы*, причем наибольшее внимание будем уделять статике сооружений стержневых систем. Тематика представленных лекций поможет изучающим эту дисциплину сформировать базовые представления о расчете наиболее распространенных стержневых систем – балок, арок, ферм и рам. При этом подробно рассматриваются основные этапы расчета стержневых систем как на неподвижную, так и на подвижную нагрузки. Усвоение теоретических знаний позволит в дальнейшем самостоятельно применить их к практическому решению задач строительной механики.

В курсе строительной механики рассматривают *геометрически неизменяемые* системы, то есть такие, перемещения отдельных точек которых возможны только в результате деформации самой системы. Характерной особенностью геометрически неизменяемой системы является способность её элементов при внешнем воздействии лишь незначительно изменять свою форму вследствие упругой деформации (деформация выражается в изменении размеров элементов или в изменении одновременно и размеров и формы). При этом перемещения отдельных точек системы настолько малы, что можно считать положение точек приложения внешних сил и направления этих сил неизменными.

В строительной механике большое внимание уделяется выполнению *кинематического анализа*. Именно кинематический анализ выясняет, является ли заданная система геометрически неизменяемой, и какую роль играют отдельные элементы этой системы. Поэтому *кинематический анализ* должен предшествовать расчету любого сооружения.

Кинематический анализ

При выполнении кинематического анализа выделяют две части.

Часть 1. *Определение степени свободы системы W* . Для стержневых систем

$$W = 3D - 2Ш - C_{оп}.$$

Здесь D – число дисков, которые можно выделить в системе; $Ш$ – общее число простых шарниров, учтенных со своей кратностью; $C_{оп}$ – количество опорных стержней в системе.

Под *диск* понимается простейшая геометрически неизменяемая система, т. е. прямой или ломаный стержень без шарнирных включений. Заметим, что понятие «земля» также рассматривается как диск. В строительной механике выделяют простые и сложные шарниры. Понятие *кратность шарнира* определяется как число, на единицу меньшее количества соединяемых шарниром стержней (см. рис. 1.1, цифра указывает кратность шарнира).

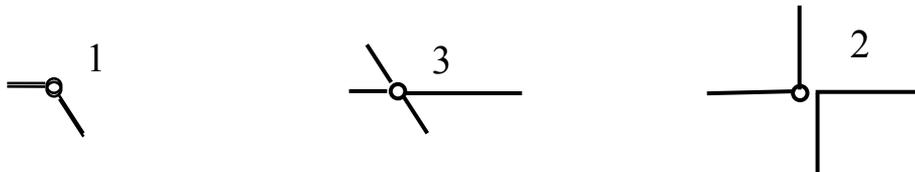


Рис. 1.1

При вычислении значения $C_{оп}$ (обратите внимание!) считают количество именно опорных стержней, а не общее количество наземных опор.

Для шарнирно-стержневых систем в виде ферм, имеющих большое количество стержней и соединительных шарниров, подсчет степени свободы удобнее проводить по формуле

$$W = 2U - C - C_{оп}.$$

Здесь U – число узлов, определяется непосредственным подсчетом узлов фермы; C – количество стержней фермы (т.е. считают стержни, образующие решетку фермы); $C_{оп}$ – количество опорных стержней фермы.

При вычислении степени свободы системы могут быть получены три варианта значений: $W < 0$, $W = 0$, $W > 0$ и сделаны следующие выводы.

1. $W > 0$ – в системе *нет* достаточного количества *необходимых связей*. В этом случае делается вывод о том, что такая система не может служить в качестве строительного сооружения. *Кинематический анализ завершен*.
2. $W = 0$ – в системе достаточное количество необходимых связей, система является статически определимой.
3. $W < 0$ – в системе избыток необходимых связей, система является статически неопределимой.

Для 2-го и 3-го случаев кинематический анализ должен быть продолжен: необходимо выяснить, насколько правильно установлены связи системы.

Часть 2. *Структурный анализ системы.* Этот анализ основан на принципах образования геометрически неизменяемых систем. Рассмотрим предварительно некоторые из этих принципов.

1. К диску присоединяется диада (двухстержневая система). Образованная в результате единая система (в которую входят первоначально отдельный диск и два стержня, соединенные шарниром) есть новый самостоятельный диск.

2. Два диска соединены с помощью шарнира и стержня, не пересекающего этот шарнир. Образованная в результате единая система (в которую входят два первоначально отдельных диска, шарнир и стержень) есть новый самостоятельный диск.

3. Два диска соединены с помощью трех, не пересекающихся в одной точке стержней. Образованная в результате единая система (в которую входят два первоначально отдельных диска и три стержня) есть новый самостоятельный диск. Заметим, что стержни, соединяющие два диска, не должны быть одновременно все три параллельны, т. к. параллельность с точки зрения математики можно рассматривать как пересечение в бесконечно удаленной точке.

4. Три диска соединены с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой (т. е. соединены в виде треугольника). Образованная в результате единая система (в которую входят три первоначально отдельных диска и три однократных шарнира) есть новый самостоятельный диск.

Таким образом, при выполнении структурного анализа необходимо проверить, соблюдаются ли указанные принципы при образовании рассматриваемой системы. В заключение кинематического анализа делается соответствующий вывод, например: *система образована в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых систем, значит, она сама является геометрически неизменяемой системой.*

В строительной механике рассматривается не все сооружение в целом, а его *расчетная схема* – упрощенное изображение действительного сооружения, свободное от второстепенных факторов, не играющих существенной роли. Расчетные схемы выбираются в зависимости от требований точности расчета.

Лекция 2. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Расчет на неподвижную нагрузку

Многопролетной (или шарнирной) балкой называется геометрически неизменяемая статически определяемая стержневая система, составленная из расположенных в определенной последовательности однопролетных простых шарнирных и (или) консольных балок, соединенных между собой шарнирами. Такого типа балки называют разрезными балками, что, собственно, обуславливает суть расчета: можно мысленно разрезать балку по имеющимся промежуточным шарнирам и представить заданную многопролетную балку в виде совокупности отдельных однопролетных балок.

Структура многопролетных балок должна подчиняться следующим основным правилам.

1. $Ш = C_{оп} - 3$, где Ш – число промежуточных (врезных) шарниров, $C_{оп}$ – количество опорных стержней балки. Число «3» указывает количество уравнений статики (уравнений равновесия) для плоского случая.

2. В каждом пролете может быть не более двух промежуточных шарниров.

3. Пролеты с двумя шарнирами чередуются с пролетами без шарниров.

4. Пролеты с одним шарниром могут чередоваться один за другим, но в этом случае в многопролетной балке должен быть один пролет без промежуточных шарниров.

Расчет многопролетной разрезной балки проводится на основе поэтажной схемы заданной балки.

Поэтажная схема – схема взаимодействия отдельных простых балок, которые можно мысленно выделить из заданной многопролетной балки. Для построения поэтажной схемы введем понятия *основной* и *подвесной* балок. *Основными* будем называть балки, опирающиеся только на землю и самостоятельно выдерживающие заданную нагрузку. К таким балкам относятся шарнирные (шарнирно - консольные) однопролетные балки (см. рис. 2.1, а), консольные балки (балки с жестким защемлением на левом или правом концах – см. рис. 2.1, б).

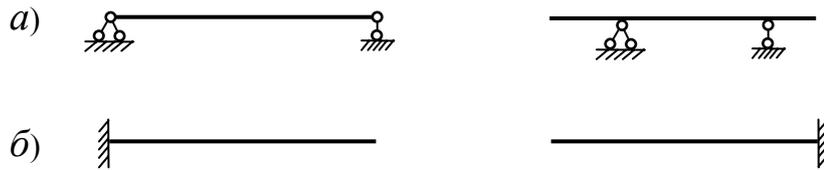


Рис.2.1

Для построения поэтажной схемы нужно мысленно разрезать заданную многопролетную балку по имеющимся шарнирам и проанализировать, к какому типу (в зависимости от имеющихся опорных закреплений) можно отнести полученные отдельные балки. В поэтажной схеме основные балки изображаются на определенном уровне (этаже); такие балки всегда непосредственно опираются на землю. Подвесные балки (их еще называют вспомогательными) изображают *выше* основных балок. Для аналитического расчета в точке опирания подвесной балки на основную вводится *шарнирно-неподвижная опора*, с помощью которой подвесная балка опирается на основную в поэтажной схеме – см. рис. 2.2. Как правило, подвесные балки опираются на основные или на основные балки и на землю одновременно. Таким образом, в поэтажной схеме каждый этаж представляет самостоятельную балку, которую достаточно легко рассчитать.

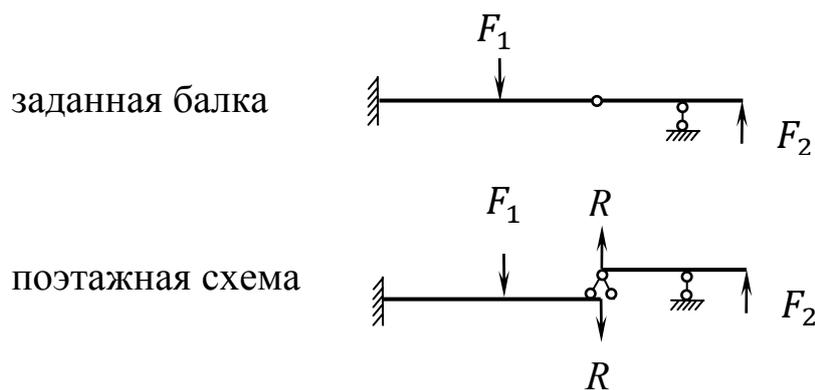


Рис. 2.2

Расчет многопролетной разрезной балки всегда начинают с расчета подвесных балок, так как они воспринимают только заданную нагрузку, приложенную к ним непосредственно. Основные балки, помимо собственной заданной нагрузки, испытывают давление вышележащих подвесных балок. Поэтому основные балки рассчитывают не только от собственной заданной нагрузки, но и от дополнительной. В качестве дополнительных нагрузок рассматриваются реакции, найденные для вышележащих (подвесных) балок. Эти реакции прикладываются в точках опирания подвесных балок на основную с противоположным (относительно первоначально найденного) направлением (см. показанные направления реакции R на рис. 2.2). Из рис. 2.2 очевидно, что подвесная балка (вышележащая) рассчитывается на заданную нагрузку F_2 , а основная (нижележащая балка) – на заданную нагрузку F_1 и реакцию R , возникающую от действия нагрузки на подвесной балке.

Расчет на неподвижную нагрузку представляет собой построение и последующий анализ эпюр изгибающего момента M и поперечной силы Q от заданной нагрузки. Сначала строятся эпюры для каждой отдельной балки поэтажной схемы по известным из сопротивления материалов правилам. Важно соблюдать последовательность построения: начинать расчет следует с подвесных балок. Расчет основных балок проводится с учетом передачи реакций от нагрузок на подвесных балках. Эпюры, полученные для отдельных однопролетных балок, следует перенести на общую для многопролетной балки базисную линию. Проверкой правильности полученных эпюр должно быть обязательное соблюдение дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой для первоначально заданной многопролетной балки. Дополнительно следует обратить внимание на эпюру изгибающего момента: в сечениях под врезными шарнирами изгибающий момент должен быть равен нулю (исключением является случай, если бесконечно близко к сечению с шарниром приложен сосредоточенный момент как внешнее воздействие).

Лекция 3. ПОНЯТИЕ О ЛИНИЯХ ВЛИЯНИЯ. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Линией влияния какой-либо величины (внутреннего силового фактора или опорной реакции), называется график изменения этой величины в зависимости от положения единичного груза, движущегося по сооружению. Заметим, что единичный груз является безразмерной величиной.

В данной лекции под сооружением будем понимать многопролетные разрезные балки. Так как положение единичного груза непрерывно меняется, то непрерывно меняются и опорные реакции, и внутренние силовые факторы: указанные величины есть функции, зависящие от положения груза. Принято строить линии влияния для конкретного (заданного) сечения балки. Построение линий влияния в многопролетных балках основано на построении линий влияния в однопролетных балках. При этом различают три типа правил построения линий влияния в зависимости от положения сечения в балке, а именно:

- 1) сечение расположено между шарнирными опорами;
- 2) сечение расположено на консоли, закрепленной левым концом;
- 3) сечение расположено на консоли, закрепленной правым концом.

Аналитический метод построения линий влияния в шарнирной балке

Построение линий влияния опорных реакций.

Предположим, что единичный груз находится на расстоянии x от левой опоры балки (см. рис. 3.1, *a*). Составим уравнение равновесия балки:

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A + 1 \cdot (l - x) = 0, \text{ тогда } R_A = \frac{l - x}{l}.$$

Полученному аналитическому выражению реакции соответствует график наклонной прямой – линия влияния опорной реакции R_A . Проводим эту прямую через две точки:

при $x = 0$ $R_A = 1$;

при $x = l$ $R_A = 0$.

Аналогично получаем аналитическое выражение для правой вертикальной реакции:

$$\sum m_A = 0; -R_B l + 1 \cdot x = 0, \text{ тогда } R_B = \frac{x}{l}.$$

Проводим соответствующую прямую через две точки:

при $x = 0$ $R_B = 0$;

при $x = l$ $R_B = 1$.

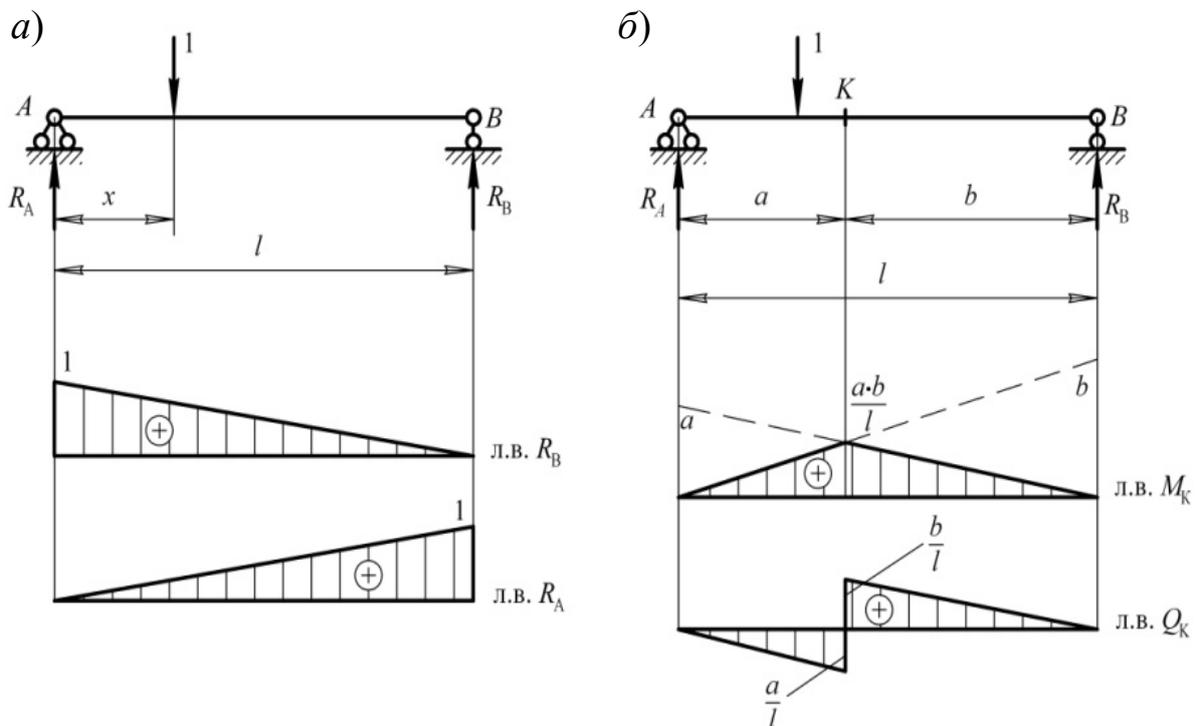


Рис. 3.1

Построенные графики (рис. 3.1, *a*) представляют собой линии влияния опорных реакций. Таким образом, линии влияния строим на базисных линиях, параллельных оси балки; положительные значения откладываем вверх от базисной линии, а отрицательные вниз от базисной линии.

Построение линий влияния внутренних силовых факторов для произвольного сечения балки.

Рассмотрим произвольное сечение балки k . Принято обозначать: a – расстояние от левой опоры балки до рассматриваемого сечения;

b – расстояние от правой опоры балки до рассматриваемого сечения. Конкретное положение движущегося единичного груза неизвестно, поэтому обязательными рассматриваются *два предположения* относительно положения груза: 1) движущийся груз расположен *слева* от рассматриваемого сечения; 2) движущийся груз расположен *справа* от рассматриваемого сечения.

Построение линии влияния изгибающего момента в заданном сечении

1) Пусть груз $F = 1$ движется *слева* от сечения k .

Составим уравнение равновесия изгибающего момента относительно сечения k той части балки, где нет груза, то есть правой части:

$$\sum m_k^{\text{прав}} = 0; M_k = R_B b.$$

Тогда аналитическое выражение линии влияния изгибающего момента примет вид

$$\text{л. в. } M_k = (\text{л. в. } R_B) b.$$

В правой части скобки подчеркивают тот факт, что линия влияния опорной реакции есть *функция*, зависящая от положения единичного груза. Таким образом, линия влияния изгибающего момента представляет собой линию влияния соответствующей опорной реакции, все ординаты которой умножены на постоянный множитель b . Важно подчеркнуть, что получено *уравнение левой ветви линии влияния*, т.к. фактическое движение единичного груза рассматривалось именно слева от заданного сечения. Следовательно, для построения левой ветви линии влияния необходимо предварительно построить линию влияния правой опорной реакции (л. в. R_B) и умножить полученные ординаты на величину b . Фактически на правой опорной вертикали (то есть вертикали, проведенной из правой опоры балки до базисной линии) выше базисной линии следует отложить в масштабе величину b и соединить (пунктиром) с нулевым значением на базисной линии в сечении под левой опорой. Из полученного графического треугольника действительной частью линии влияния будет участок, соответствующий предполагаемому участку движения груза (здесь слева от опоры A до сечения – см. рис. 3.1, *б*). Эту часть линии влияния обводим на графике непрерывной линией.

2) Пусть груз $F = 1$ движется *справа* от сечения k .

Составим выражение изгибающего момента в этом сечении левой части балки (то есть той части, где нет груза):

$$\sum m_k^{\text{лев}} = 0; \quad M_k = R_A a.$$

Следовательно, соответствующее выражение линии влияния имеет вид:

$$\text{л. в. } M_k = (\text{л. в. } R_A) a.$$

Получили уравнение *правой ветви* линии влияния, т.к. движение груза предполагалось *справа* от рассматриваемого сечения. Для построения этой ветви линии влияния необходимо построить л. в. R_A , а затем умножить все ординаты полученной линии влияния на постоянную величину a . Фактически на левой опорной вертикали (то есть вертикали, проведенной из левой опоры балки до базисной линии) от базисной линии следует отложить в масштабе положительное значение a (вверх от базисной линии) и соединить пунктиром с нулевым значением на базисной линии под правой опорой. Действительной будет та часть линии влияния, которая соответствует предполагаемому участку движения груза. Проводим сплошную линию на соответствующем участке графика (здесь *справа* от опоры B до сечения).

Свойство линии влияния изгибающего момента: ветви линии влияния пересекаются под сечением k . Максимальная ордината (под рассматриваемым сечением) находится из подобия треугольников, образованных при построении линии влияния, она равна ab/l .

Построение линии влияния поперечной силы в заданном сечении

Рассматриваем два предположения относительно положения груза.

1) Пусть $F = 1$ движется *слева* от сечения k . (Построение левой ветви линии влияния.)

Составим уравнение равновесия всех сил правой части (где нет груза) на вертикальную ось (рис. 3.2):

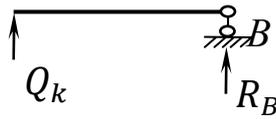


Рис. 3.2

$$\sum y^{\text{прав}} = 0; Q_k + R_B = 0; Q_k = -R_B.$$

Тогда аналитическое выражение линии влияния примет вид:

$$\text{л. в. } Q_k = -\text{л. в. } R_B.$$

Получено аналитическое выражение *левой ветви* линии влияния, что соответствует предполагаемому положению движущегося груза. Графиком левой ветви линии влияния является линия влияния правой опорной реакции R_B , все ординаты которой умножены на минус единицу. Пунктиром показываем данную ветвь линии влияния: на правой опорной вертикали от базисной линии вниз откладываем единицу и соединяем с нулевым значением на базисной линии на левой опорной вертикали. Действительной является часть графика от левой опоры до сечения (на графике этот участок линии влияния показываем сплошной линией).

1) Пусть $F = 1$ движется *справа* от сечения k . (Построение правой ветви линии влияния.)

Составим уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил левой части (где нет груза) на вертикальную ось:

$$\sum y^{\text{лев}} = 0; -Q_k + R_A = 0; Q_k = R_A.$$

Соответствующее аналитическое выражение линии влияния

$$\text{л. в. } Q_k = \text{л. в. } R_A,$$

то есть линия влияния поперечной силы в сечении k совпадает с линией влияния левой опорной реакции. Показываем пунктиром эту линию влияния. Действительную часть линии влияния (находится на участке движущегося груза) обводим непрерывной линией. Полученная линия влияния показана на рис. 3.1, б.

Свойство линии влияния поперечной силы: ветви линии влияния поперечной силы параллельны. Линия влияния поперечной силы имеет скачок под рассматриваемым сечением, размер которого равен значению движущегося груза (то есть равен единице):

$$a/l + b/l = 1.$$

Обратим внимание на следующее.

1) Каждая ордината линии влияния представляет значение того фактора, для которого она построена, в предположении, что единичный груз при своем движении находится в сечении балки над этой ординатой.

2) Если шарнирная балка имеет консольные участки, то линия влияния продолжается на эти участки.

Линии влияния опорной реакции и внутренних силовых факторов в консольных балках показаны на рис. 3.3, а – для балки, закрепленной левым концом; на рис. 3.3, б – для балки, закрепленной правым концом. Обратим внимание на то, что положение сечения в консольных балках определяется расстоянием «с», которое отсчитывается от свободной точки.

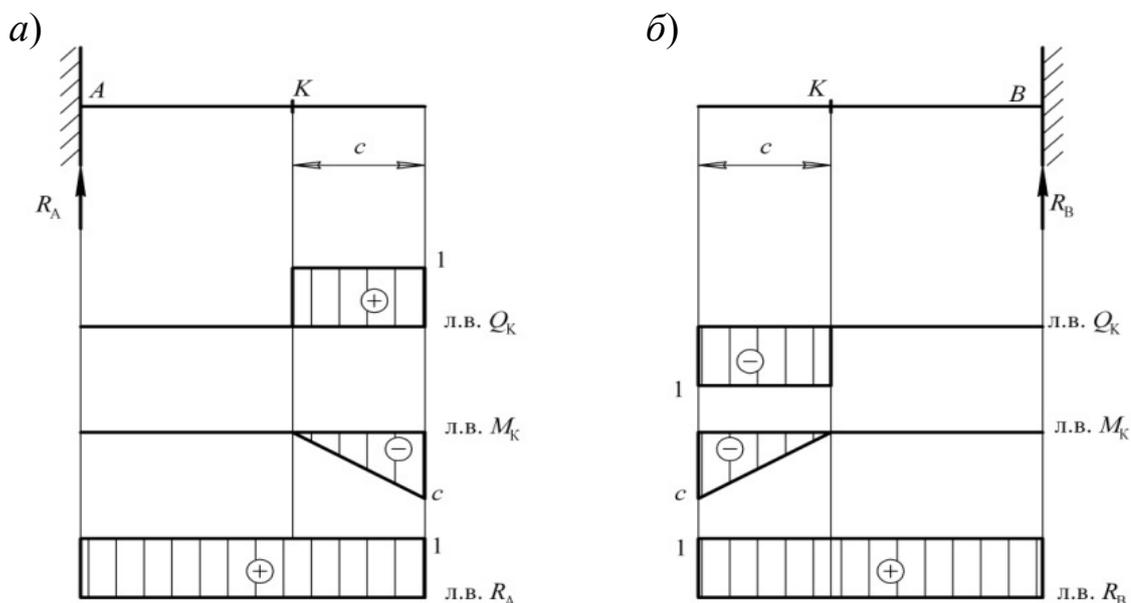


Рис. 3.3

Правила построения линий влияния в многопролетной разрезной балке

1. Построить поэтажную схему балки.

2. Найти положение рассматриваемого сечения на определенном этаже поэтажной схемы и определить тип балки, которому принадлежит это сечение (балка шарнирная; балка консольная, закрепленная левым концом; балка консольная, закрепленная правым концом).

3. Построить линию влияния требуемого фактора в пределах этажа балки в зависимости от положения сечения (между опорами шарнирной балки или на консоли) по правилам построения линии влияния в однопролетных балках. Если в пределах рассматриваемого этажа шарнирная балка имеет консольные участки, то соответствующая линия влияния продолжается до конца этих участков.

4. Учесть вышележащие этажи: концевую ординату построенного участка линии влияния соединить с нулевым значением под наземной опорой подвесной балки; на консоль (если она есть) линию влияния просто продолжить.

Определение усилий по линиям влияния

Принято рассматривать три типа внешнего (неподвижного) воздействия: сосредоточенные силы F_i ; равномерно распределенные по некоторой длине нагрузки q_i ; сосредоточенные изгибающие моменты M_i . От заданной неподвижной нагрузки по линии влияния можно найти только ту величину, для которой построена рассматриваемая линия влияния. Например, по линии влияния изгибающего момента в сечении можно найти значение изгибающего момента именно в этом сечении.

Пусть T – усилие, которое необходимо найти по линии влияния. Используем следующую зависимость:

$$T^{л.в.} = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{i=1}^n q_i^{j-k} \omega_i + \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Здесь суммирование в каждом слагаемом проводится по количеству нагрузок определенного типа. *Положительными* при этом считаются направления, показанные на рис. 3.4.

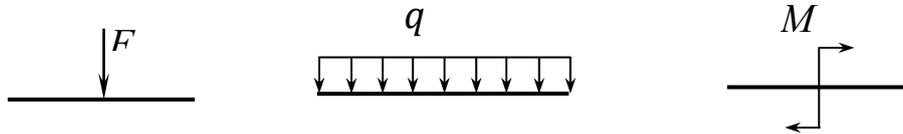


Рис. 3.4

В рассматриваемой зависимости

y_i — ордината, взятая из линии влияния под точкой приложения сосредоточенной силы;

ω_i^{j-k} — площадь участка $j - k$ линии влияния, лежащего под участком действия равномерно распределенной нагрузки q_i^{j-k} ;

α - острый угол, образованный линией влияния с базисной (горизонтальной) линией.

Правило знаков: ордината y_i и площадь ω учитываются со знаком соответствующей линии влияния. $\text{tg}\alpha_i > 0$, если *при положительном моменте* линия влияния *возрастает*. (Вспомним: при анализе графика слева направо линии влияния возрастает, если соответствующая линия на графике слева направо идет вверх.)

Понятие о трехшарнирной арке

Трехшарнирные арки (и трехшарнирные рамы) относятся к распорным системам: в таких системах при вертикальной нагрузке возникают не только вертикальные, но и горизонтальные реакции. Горизонтальные реакции в арке возникают как в левой, так и в правой шарнирной опоре. Очевидно, при отсутствии горизонтальных внешних воздействий (или их горизонтальных проекций) эти реакции равны между собой, т. к. должно выполняться уравнение статики: сумма проекций всех сил на горизонтальную ось должна быть равна нулю. Горизонтальные реакции в арке называются *распором* и обозначаются H .

Трехшарнирная арка представляет собой статически определимую распорную систему, состоящую из двух полуарок (криволинейных стержней), соединенных между собой и поверхностью земли шарнирами. При этом опорные шарниры называются пятовыми, а промежуточный – ключевым. Трехшарнирная рама представляет собой распорную систему, состоящую из ломаных стержней, которые соединены между собой аналогичным образом. Ограничимся рассмотрением трехшарнирных арок (см. рис. 4.1). На практике встречаются различные по форме и виду арки. Опорные шарниры могут быть на разном уровне, но более распространены арки с опорами, расположенными на одном уровне. В трехшарнирной арке опорами являются шарнирно неподвижные опоры. Если одну из опор заменить шарнирно подвижной с вертикальным опорным стержнем, то для обеспечения геометрической неизменяемости арки необходимо ввести дополнительный горизонтальный стержень – затяжку.

Рассмотрим трехшарнирные арки с опорами на одном уровне под действием вертикальной нагрузки. Принята следующая терминология (см. рис. 4.1, *а*): l – пролет арки; f – стрела подъема; A, B – опорные (пятовые) шарниры; C – ключевой шарнир. Промежуточный шарнир не обязательно расположен в точке наивысшего подъема оси арки (см. рис. 4.1, *б*), но стрела подъема отсчитывается от горизонтали до положения ключевого шарнира. На рис. 4.1, *в* изображена арка с затяжкой, на рис. 4.1, *г* – арка с повышенной затяжкой.

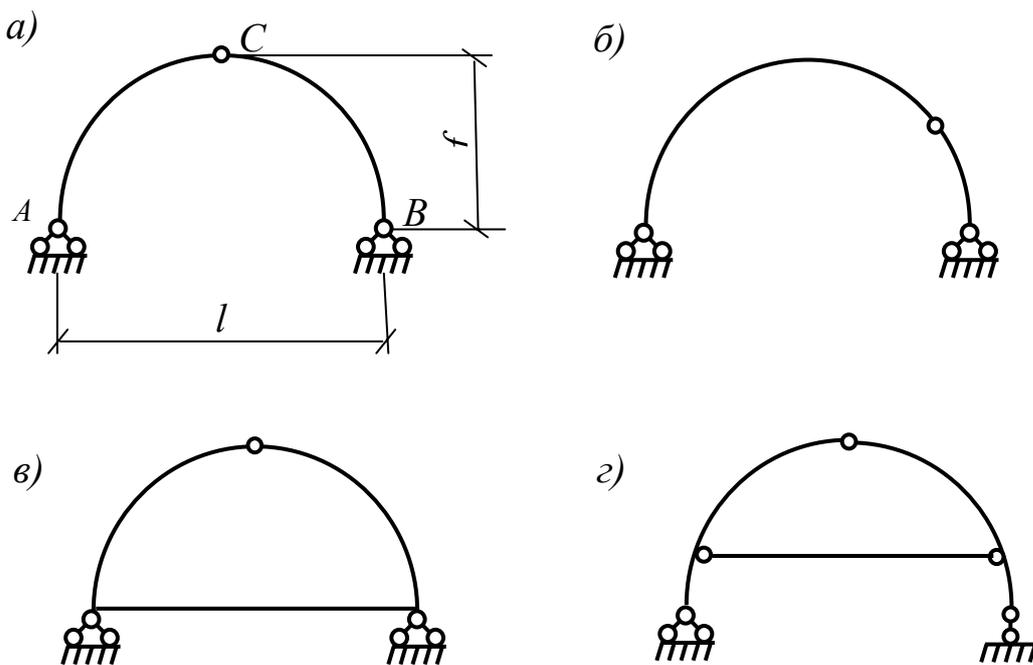


Рис. 4.1

Трехшарнирные арки имеют различные очертания оси. Наиболее распространены очертания либо по окружности, либо – по квадратной параболе. Ось арки – квадратная парабола:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Формула очертания оси записана в системе координат $xу$, при этом x – горизонтальная ось, y – вертикальная ось. Как правило, начало системы координат совпадает с левой опорой арки.

Ось арки – окружность:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f.$$

Здесь R – радиус окружности, частью которой является ось арки.

Расчет трехшарнирной арки на неподвижную вертикальную нагрузку. Определение опорных реакций

Рассмотрим трехшарнирную арку под действием сосредоточенных сил (рис. 4.2) Найдем возникающие при этом вертикальные и горизонтальные реакции.

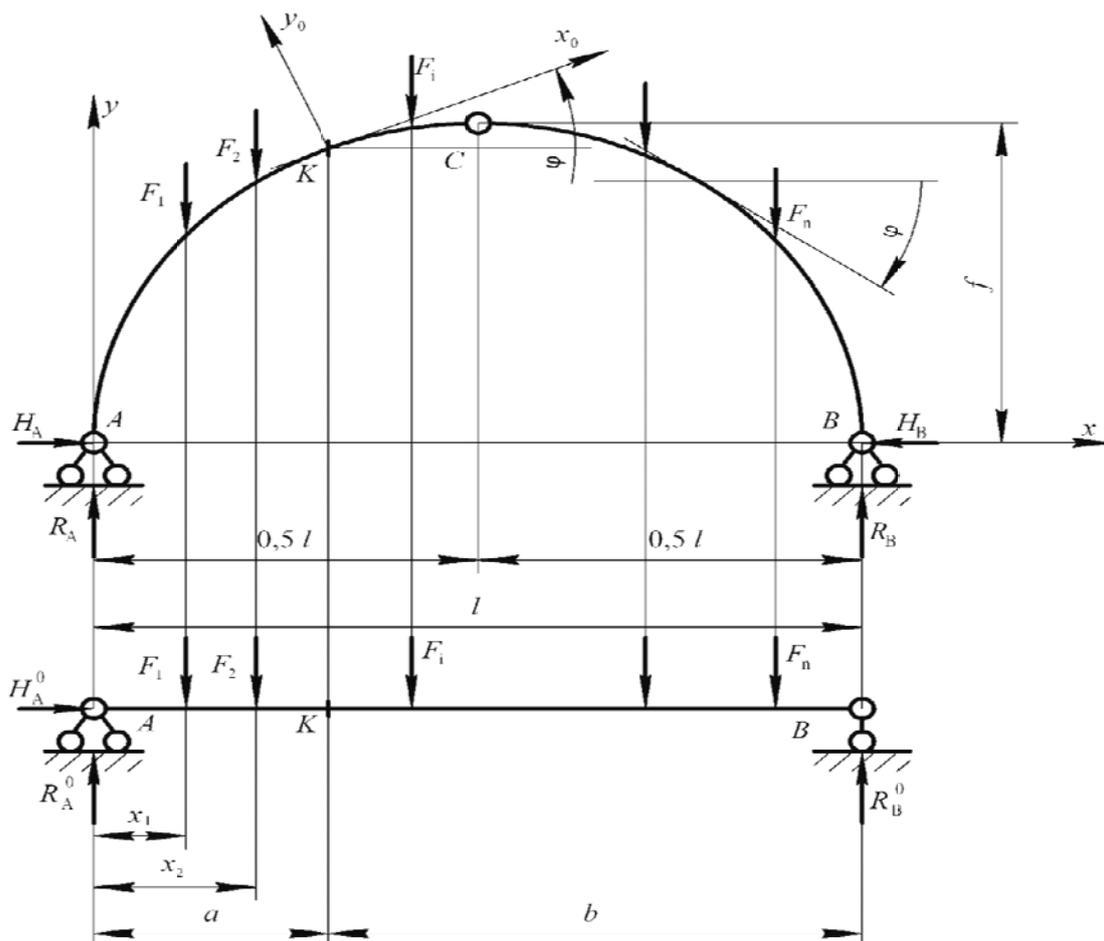


Рис. 4.2

Расчет трехшарнирной арки начинают с расчета шарнирной балки, которой можно заменить рассматриваемую арку. При этом длина балки должна быть равна длине пролета арки, расчетная нагрузка должна быть одинаковой. Найдем реакции в такой балке, их принято дополнительно обозначать верхним индексом «ноль». Так как горизонтальная нагрузка отсутствует, горизонтальных реакций в балке нет. Определим вертикальные реакции в балке («балочные» реакции). Как следует из рисунка,

положение каждой сосредоточенной силы F_i определяется расстоянием x_i , которое отсчитывается от левой опоры.

Рассмотрим уравнения равновесия балки.

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A^0 l + \sum_{i=1}^n F_i(l - x_i) = 0, \quad R_A^0 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i(l - x_i),$$

где n – количество заданных сил, x_i – расстояние от левой опоры до точки приложения силы F_i .

Аналогично,

$$\sum M_A = 0, \quad R_B^0 l - \sum_{i=1}^n F_i x_i = 0, \quad R_B^0 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i x_i.$$

Заметим, что если составить аналогичные уравнения равновесия в арке ($\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$), то будут найдены те же значения вертикальных реакций трехшарнирной арки, что и ранее найдены для балки. Таким образом, $R_A = R_A^0$; $R_B = R_B^0$. Здесь и в дальнейшем верхний индекс «0» будем относить к «балочным» величинам, то есть величинам, вычисленным для балки того же пролета, что и арка, и от той же самой нагрузки.

Найдем горизонтальные реакции в арке.

$$\sum X = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_A = H_B = H.$$

Рассмотрим равновесие левой (или правой) части арки относительно ключевого шарнира С.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \quad \left(\text{или} \quad \sum M_C^{\text{прав}} = 0 \right), \quad -R_A \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i \left(\frac{l}{2} - x_i \right) + Hf = 0,$$

где $n_{\text{лев}}$ – количество сил, приложенных в левой части арки.

Обозначим: $M_C^0 = -R_A \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i \left(\frac{l}{2} - x_i \right)$, тогда $M_C^0 = Hf$, $H = \frac{M_C^0}{f}$.

Таким образом, распор в арке (т. е. горизонтальные реакции) находится как отношение «балочного» изгибающего момента относительно ключевого шарнира всех сил левой или правой части арки к значению стрелы подъема арки.

Определение внутренних усилий в произвольном сечении трехшарнирной арки

Рассмотрим произвольное сечение K заданной арки (см. рис. 4.2). Положение сечения определим расстояниями a , b , соответственно от левой и правой опор до рассматриваемого сечения.

Вычислим изгибающий момент в указанном сечении из условия равновесия всех сил левой (или правой) части арки.

$$M_K = \left[R_A a - \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i (a - x_i) \right] - H y_K,$$

$$M_K = R_A a - \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i (a - x_i) - H y_K,$$

Очевидно, что выражение в квадратных скобках есть балочный изгибающий момент всех сил левой части арки относительно сечения K , то есть M_K^0 . Окончательно,

$$M_K = M_K^0 - H y_K.$$

Проведем в сечении K вспомогательную систему координат $x_0 y_0$: ось x_0 совпадает с касательной, проведенной к оси арки в сечении K , ось y_0 перпендикулярна к оси x_0 . Вычислим поперечную силу в сечении K из условия равновесия всех сил левой части, то есть рассмотрим проекцию

всех сил левой части на ось y_0 .

$$Q_K = R_A \cos \varphi - F_1 \cos \varphi - F_2 \cos \varphi - \dots - F_i^{n_{\text{лев}}} \cos \varphi - H \sin \varphi =$$

$$= \left(R_A - \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i \right) \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

Выражение в скобках представляет собой «балочную» поперечную силу $-Q_K^0$. Это поперечная сила, вычисленная в аналогичном сечении балки того же пролета, что и арка, от действия всех сил левой (до рассматриваемого сечения) части в проекции на ось y_0 . Здесь φ – острый угол, который отсчитывается от горизонтальной оси, проведенной в сечении, до касательной в этом же сечении. Окончательно,

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

Аналогично составим проекцию всех сил левой части на ось x_0 .

$$N_K = -R_A \sin \varphi + F_1 \sin \varphi + F_2 \sin \varphi + \dots + F_i^{n_{\text{лев}}} \sin \varphi - H \cos \varphi =$$

$$= - \left(R_A - \sum_{i=1}^{n_{\text{лев}}} F_i \right) \sin \varphi - H \cos \varphi.$$

Выражение в скобках представляет собой «балочную» поперечную силу $-Q_K^0$. Окончательно,

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi + H \cos \varphi).$$

Таким образом, в каждом сечении арки внутренние усилия вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_K &= M_K^0 - Hy_K, \\ Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi - H \sin \varphi, \\ N_K &= -(Q_K^0 \sin \varphi + H \cos \varphi). \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что в формулах вычисления внутренних усилий в арке тригонометрические функции рассчитываются в каждом конкретном сечении, т.е. следует понимать $\sin \varphi = \sin \varphi_K$; $\cos \varphi = \cos \varphi_K$. Тригонометрические функции, входящие в уравнения, вычисляются из уравнения очертания оси арки. Например, для арки, очерченной по квадратной параболе (см. ранее соответствующее выражение уравнения очертания оси), имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = 4f \frac{l - 2x}{l^2}.$$

Тогда по известным тригонометрическим соотношениям находим интересные нас функции:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi = \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

Можно поступить проще. Зная $\operatorname{tg} \varphi$, найти угол φ по выражению

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(4f \frac{l - 2x}{l^2} \right),$$

а затем вычислить другие тригонометрические функции найденного угла. Важно правильно учесть знак функции $\sin \varphi$. На рис. 4.2 показана правильная трактовка угла φ для левой и правой половины трехшарнирной арки: *угол φ рассматривается как острый угол, который всегда отсчитывается от горизонтали к касательной*. В соответствии с этим определением в левой половине арки угол φ принадлежит первой четверти тригонометрического круга, так что $\operatorname{tg} \varphi > 0$, $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$. В правой половине арки угол φ принадлежит четвертой четверти тригонометрического круга, поэтому $\operatorname{tg} \varphi < 0$, $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi < 0$.

В заключение можно подчеркнуть следующее. Арка (при прочих равных условиях, то есть одинаковых размерах по горизонтали, одинаковых нагрузках) является более прочной конструкцией, чем шарнирная балка: возникающие в трехшарнирной арке изгибающие моменты меньше изгибающих моментов в аналогичной балке за счет влияния распора арки.

Замечание. В арке с повышенной затяжкой можно выделить два типа сечений:

- 1) сечения, расположенные ниже затяжки;
- 2) сечения, расположенные выше затяжки.

В первом случае в арке отсутствует распор, то есть $H = 0$, но возникает усилие в затяжке $N_{\text{зат}}$, которое принимает на себя роль распора. Значение усилия в затяжке $N_{\text{зат}}$ определяется из рассмотрения равновесия левой или правой половины арки относительно ключевого шарнира, т. е. Е. аналогично определению значения распора. Тогда расчетные формулы принимают вид, представленный в таблице 1.

Таблица 4.1

Сечение расположено ниже затяжки	Сечение расположено выше затяжки
$\left. \begin{aligned} M_K &= M_K^0, \\ Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi, \\ N_K &= -(Q_K^0 \sin \varphi). \end{aligned} \right\}$	$\left. \begin{aligned} M_K &= M_K^0 - N_{\text{зат}} y_K, \\ Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi - N_{\text{зат}} \sin \varphi, \\ N_K &= -(Q_K^0 \sin \varphi + N_{\text{зат}} \cos \varphi). \end{aligned} \right\}$

Важно. 1. Из курса сопротивления материалов известно: в сечении, балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре «балочных» поперечных сил наблюдаем скачок на величину силы F_i . В арке под точками приложения сосредоточенных сил наблюдаются скачки и на эпюре поперечной силы, и на эпюре продольной силы. Размер скачков соответственно равен $F_i \cos \varphi$ и $F_i \sin \varphi$. (В формулах расчета поперечной и продольной сил в арке размер скачка определяется первым слагаемым соответствующей формулы.)

2. Расчет арки на неподвижную нагрузку (построение эпюр внутренних силовых факторов) выполняют обычно для 8 - 12 сечений, которые выбирают следующим образом. Обязательными рассматривают сечения пятовых и ключевого шарниров (для арки с затяжкой дополнительно учитывают сечения присоединения затяжки); сечения, в которых приложены сосредоточенные силы; сечения начала и конца участков действия равномерно распределенной нагрузки. Все другие сечения выбирают произвольно.

3. По вычисленным в каждом сечении арки значениям внутренних силовых факторов M_k, Q_k, N_k строят соответствующие эпюры внутренних силовых факторов. При этом все значения принято откладывать *от базиса, параллельного горизонтальной оси*, но соединять их следует плавными кривыми. Обратите внимание: все три эпюры внутренних силовых факторов в арке (независимо от заданной нагрузки) являются криволинейными. Это обусловлено криволинейным очертанием оси арки. В учебной литературе можно встретить построение эпюр от базиса, повторяющего очертание криволинейной оси арки. Все значения также соединяют плавными кривыми линиями.

Расчет на подвижную нагрузку

Расчет на подвижную нагрузку предусматривает построение линий влияния внутренних силовых факторов в интересующем сечении. Существует аналитический метод построения линий влияния в арке и графический (метод нулевых точек). Рассмотрим аналитический метод. В этом случае линии влияния строят по соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{л. в. } M_K &= \text{л. в. } M_K^0 - (\text{л. в. } H) u_K, \\ \text{л. в. } Q_K &= (\text{л. в. } Q_K^0) \cos \varphi - (\text{л. в. } H) \sin \varphi, \\ \text{л. в. } N_K &= -((\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi + (\text{л. в. } H) \cos \varphi). \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим более подробно построение линии влияния распора — л. в. H . На основании рассмотренной ранее формулы аналитического вычисления распора, очевидно, можно записать аналитическое выражение для линии влияния в виде:

$$\text{л. в. } H = \frac{(\text{л. в. } M_C^0)}{f}.$$

В этом выражении л. в. M_C^0 — линия влияния балочного изгибающего момента в сечении, где расположен ключевой шарнир. Очевидно, построение этой линии влияния такое же, как рассмотрено и показано ранее на примере построения линии влияния изгибающего момента в балке. Для

построения л. в. H все ординаты л. в. M_C^0 необходимо разделить на постоянное число, равное значению стрелы подъема арки. Соответственно, л. в. Q_K и л. в. N_K можно рассматривать как алгебраическую сумму линий влияния балочной поперечной силы и линии влияния распора, ординаты которых умножены на значения тригонометрических функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Подробное построение линий влияния внутренних силовых факторов различных сечений рассмотрено в руководстве к решению задач. Здесь же обратим внимание на основные свойства линий влияния в арке.

1. Линия влияния изгибающего момента в сечении имеет два перелома: под рассматриваемым сечением и в сечении под проекцией точки положения ключевого шарнира.

2. Линия влияния поперечной силы в сечении имеет перелом в сечении под проекцией точки положения ключевого шарнира и скачок под рассматриваемым сечением. Размер скачка равен значению тригонометрической функции $\cos \varphi_K$ в этом сечении. При этом соответствующие ветви линии влияния параллельны.

3. Линия влияния продольной силы в сечении имеет перелом в сечении под проекцией точки положения ключевого шарнира и скачок под рассматриваемым сечением. Размер скачка равен значению тригонометрической функции $\sin \varphi_K$ в этом сечении. При этом соответствующие ветви линии влияния параллельны.

Лекция 6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ФЕРМ

Фермой называется стержневая система, которая остается геометрически неизменяемой после условной замены в расчетной схеме жестких узлов шарнирами. При этом считают, что оси всех стержней проходят через центры шарниров, а шарниры являются идеально гладкими, лишенными трения. Кратко будем называть фермой шарнирно-стержневую конструкцию.

Если нагрузка на ферму передается только в узлах в виде сосредоточенных сил, то она вызывает в стержнях фермы один внутренний силовой фактор – продольную силу. В случае распределенной или подвижной нагрузки предполагается наличие на ферме дополнительных элементов, опирающихся на узлы фермы и передающих нагрузку в узлы.

Таким образом, расчет фермы проводится при двух основных допущениях:

- 1) все узлы фермы – идеальные шарниры;
- 2) действует *сосредоточенная нагрузка* в отдельных (или в каждом) узлах фермы.

Указанные допущения обуславливают возникновение в каждом стержне фермы только продольной силы.

Расчет на неподвижную нагрузку

Расчет на неподвижную нагрузку представляет собой нахождение опорных реакций и продольных сил в каждом стержне фермы от заданной статической нагрузки. При необходимости найденные значения продольной силы в каждом стержне фермы можно представить в виде эпюры продольной силы.

Усилия в фермах определяются аналитическими методами или графическим. Распространенным графическим методом является метод построения диаграммы Максвелла-Кремоны, однако, в настоящее время этот метод применяется редко.

Аналитическими методами являются метод вырезания узлов и метод сечений. Заметим, что определение усилий в стержнях фермы проводится после нахождения опорных реакций. Для их нахождения используются известные уравнения статики для плоской системы.

Метод вырезания узлов состоит в последовательном проведении таких разрезов, каждый из которых отсекает от фермы по одному узлу. Аналитическими условиями равновесия в этом случае являются два уравнения в виде суммы проекций всех сил на взаимно перпендикулярные оси, именно: $\sum x = 0$, $\sum y = 0$.

Определение усилий методом вырезания узлов необходимо начинать с узла, в котором сходятся только два стержня. (Разумеется, можно вырезать первоначально узел, в котором сходятся большее количество стержней. Но неизвестными могут быть усилия только в двух стержнях из всех попавших в этот узел, а во всех других стержнях усилия должны быть предварительно найдены каким-либо еще способом.) Неизвестные усилия следует направлять от узла, предполагая их положительными (т. е. растягивающими, как известно из курса сопротивления материалов).

Проектируя нагрузку, опорную реакцию (если они приложены в рассматриваемом узле) и неизвестные усилия на оси декартовой системы координат и составляя уравнения равновесия в виде проекций всех сил на эти оси, найдем продольные силы в каждом интересующем нас стержне.

Метод вырезания узлов является последовательным: в любой стадии расчета следует вырезать тот узел, в котором осталось лишь два неизвестных усилия. Например, для узла, изображенного на рис. 6.1, можно записать уравнения:

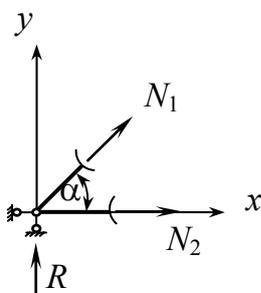


Рис. 6.1

$$\left. \begin{aligned} \sum x = 0, & \quad N_1 \cos \alpha + N_2 = 0, \\ \sum y = 0, & \quad R + N_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\}$$

(Здесь угол α определяется из геометрии фермы.)

Недостатками метода вырезания узлов является зависимость последующих вычислений от предыдущих и постепенное накопление погрешностей при достаточно большой цепи вычислений.

Метод сечений (рис. 6.2) (другие названия: метод моментной точки или метод Риттера, по имени немецкого ученого Отто Риттера). В этом случае при нахождении усилия в каком-либо стержне соответствующей панели фермы проводится *сквозное сечение* так, чтобы в разрез попало не более трех стержней с неизвестными усилиями, включая интересующий.

(Разумеется, можно провести сечение и через большее количество стержней, но неизвестными могут быть усилия только в трех из них.) Аналитическими уравнениями равновесия являются уравнения равновесия изгибающих моментов одной из рассеченных частей фермы относительно моментной точки. Моментной точкой для искомого усилия называется точка пересечения направлений двух других стержней, через которые проходит сечение. Если моментная точка находится в бесконечности (например, для ферм с параллельными поясами), в качестве уравнения равновесия рассматривают сумму проекций всех сил отсеченной части на вертикальную ось.

На рис. 6.3 для нахождения усилия N_{1-2} проведено сечение через три стержня. Моментной точкой является точка 3 – точка пересечения двух других стержней, через которые проведено сечение, но которые нас не интересуют в данный момент. Также в левой и правой рассеченной части показаны положительными неизвестные продольные силы, возникающие в каждом рассеченном стержне.

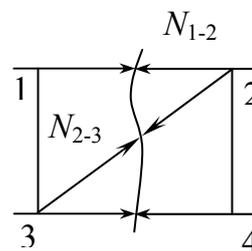


Рис. 6.2

Для нахождения усилия N_{1-2} необходимо составить уравнение равновесия в виде $\sum m_3 = 0$ левой (или правой) отсеченной части фермы. Как правило, рассматривают ту часть, где приложено меньше нагрузок.

Для нахождения усилия N_{2-3} моментная точка – точка пересечения параллельных стержней 1 – 2 и 3 – 4 (находится в бесконечности), поэтому необходимо составить уравнение $\sum y = 0$, где y – вертикальная ось.

Преимущество данного метода по сравнению с методом вырезания узлов состоит в том, что усилие в любом из рассеченных стержней находится независимо от усилий в других стержнях.

Расчет ферм на подвижную нагрузку

Как уже известно, целью этого расчета является построение линий влияния внутренних силовых факторов в отдельных сечениях. В фермах при сделанных ранее допущениях в каждом стержне возникает только

один внутренний силовой фактор – продольная сила. Следовательно, в фермах можно построить *линии влияния продольной силы* для интересующего нас стержня. Рассмотрим *построение линий влияния продольной силы аналитическим методом применительно к простым фермам* (т. е. фермам без дополнительных устройств в виде шпренгелей). Предварительно необходимо найти продольную силу в интересующем нас стержне методом вырезания узла или методом сечений. В результате получим аналитическое выражение продольной силы в виде некоторой линейной зависимости от функций опорных реакций, например, $N_i = f(R_{\text{лев (прав)}})$. Тогда *аналитическое выражение линии влияния* этого усилия можно записать в виде: л. в. $N_i = r \cdot \text{л. в. } R_{\text{лев (прав)}}$, где r – числовой коэффициент, полученный при выполнении конкретных расчетов.

Пример нахождения усилий в простой ферме

Рассмотрим нахождение усилий в отмеченных стержнях фермы, представленной на рис. 6.3, различными методами.

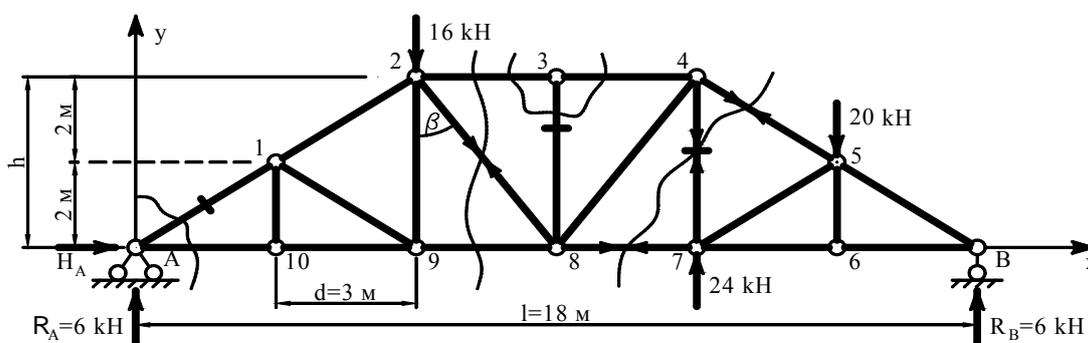


Рис. 6.3

Принята следующая терминология: l – пролет фермы (расстояние между центрами опорных узлов), h – высота фермы, d – длина панели фермы (расстояние между соседними узлами фермы). Стержни, ограничивающие нижний контур фермы, образуют нижний пояс; стержни, ограничивающие верхний контур фермы, образуют верхний пояс. Все стержни, расположенные между верхним и нижним поясом, образуют решетку фермы.

Решетку фермы образуют вертикальные стержни – стойки, наклонные стержни – раскосы.

Найдем опорные реакции в ферме. Так как по условию нагрузка вертикальная, то из уравнения проекций всех сил на горизонтальную ось находим: $\sum x = 0$, $H_A = 0$, то есть горизонтальная реакция отсутствует.

Определим вертикальные реакции R_A и R_B .

$$\sum M_B = 0, -R_A l + 16 \cdot (l - 2d) + 20 \cdot d - 24 \cdot 2d = 0;$$

$$\text{откуда } R_A \cdot 18 = 16 \cdot 12 + 60 - 144, R_A = \frac{108}{18} = 6 \text{ кН.}$$

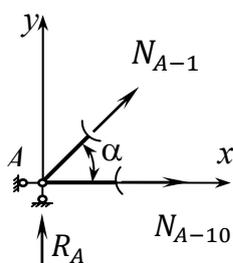
$$\sum M_A = 0, R_B l - 20 \cdot (l - d) - 16 \cdot 2d + 24 \cdot (l - 2d) = 0;$$

$$\text{откуда } R_B \cdot 18 = 20 \cdot 15 + 96 - 24 \cdot 12, R_B = \frac{108}{18} = 6 \text{ кН.}$$

Положительные знаки найденных реакций означают, что вертикальные реакции R_A и R_B направлены в соответствии с предполагаемыми направлениями, то есть вверх. Сумма проекций найденных реакций и заданных сил на вертикальную ось равна нулю, что является проверкой правильности нахождения реакций:

$$\sum y = 0, R_A + R_B + 24 - 16 - 20 = 0, 36 - 36 = 0.$$

Найдем продольную силу N_{A-1} методом вырезания узлов. Вырежем узел A (рис. 6.4).



$$\sum y = 0, R_A + N_{A-1} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{A-1} = -\frac{R_A}{\sin \alpha} = -\frac{6}{\sin \alpha},$$

где угол α определяется из геометрии фермы.

Рис. 6.4

Очевидно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 37,43 = 37^{\circ}26'$.

$$\sin \alpha = \sin 37^{\circ}26' = 0,6078;$$

$$N_{A-1} = -\frac{6}{0,6078} = -9,87 \text{ кН.}$$

Заметим, что предполагали (рис. 6.4) усилие в стержне $A-1$ растягивающим, но полученный знак минус указывает на то, что фактическое усилие в этом стержне является сжимающим.

Найдем усилие N_{3-8} методом вырезания узлов. Вырезаем узел 3 (рис. 6.4).

$\sum y = 0$, $N_{3-8} = 0$, так как узел является незагруженным.

Найдем усилие N_{4-7} методом сечений. Проводим сечение через три стержня, включая интересующий нас (рис. 6.3). В левой и правой отсеченных частях фермы показываем неизвестные усилия, предполагая их положительными, то есть направленными от соответствующих узлов.

Моментной точкой является узел B , то есть точка пересечения осей не интересующих нас стержней $4-5$ и $8-7$, через которые проходит сечение. Составим уравнение равновесия правой отсеченной части фермы относительно моментной точки B :

$$\sum M_B^{\text{прав}} = 0, \quad -N_{7-4} \cdot 6 + 20 \cdot 3 = 0,$$

$$\text{откуда } N_{7-4} = \frac{60}{6} = 10 \text{ кН.}$$

Заметим, что изгибающий момент реакции R_B относительно точки B равен нулю, так как линия действия этой реакции проходит через точку B .

Найдем усилие N_{2-8} методом сечений. Проводим сечение через три стержня, включая рассматриваемый (рис. 6.3). Так как моментная точка

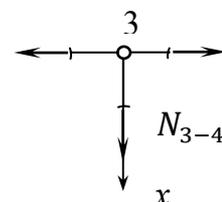


Рис. 6.4

(в этом случае *точка пересечения параллельных стержней 2 – 3 и 9 – 8*) находится в бесконечности, рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы и составим уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил левой отсеченной части фермы на вертикальную ось:

$$\sum y^{\text{лев}} = 0, \quad R_A - N_{2-8} \cos \beta - 16 = 0;$$

$$N_{2-8} = \frac{6 - 16}{\cos \beta} = -\frac{10}{\cos \beta}.$$

Угол β находим из геометрии фермы. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}, \quad \beta = \operatorname{arctg} 0,75 = 40,9665 = 40^\circ 58' \approx 41^\circ.$$

Тогда $\cos \beta = \cos 41^\circ \approx 0,755$.

Окончательно,

$$N_{2-8} = -\frac{10}{0,755} = -13,245 \text{ кН (усилие является сжимающим)}.$$

Таким образом, метод вырезания узлов и метод сечений позволяют аналитически найти усилия в каждом стержне фермы.

Лекция 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. МЕТОД МОРА

Основные понятия

Известно, что изменения формы сооружения (стержневой системы) под внешним воздействием (силовым, температурным или в виде осадки опор) называется *деформацией*. При деформации сооружения все (или почти все) его точки занимают новое положение. Изменение положения точки при деформации сооружения называется *перемещением*. Изучение перемещений сооружений необходимо в следующих случаях:

1. При оценке жесткости сооружения. Очевидно, необходимо найти перемещения, чтобы убедиться в их малости, достаточной для обеспечения жесткости сооружения;
2. Для сопоставления теоретических и экспериментальных перемещений при выполнении контроля сооружений после их постройки и после длительной эксплуатации;
3. Для расчета статически неопределимых систем;
4. При решении задач курса динамики сооружений; устойчивости сооружений.

В дальнейшем будем рассматривать только линейно-деформируемые стержневые системы, для которых применим принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): суммарный эффект от действия нескольких сил на систему равен сумме эффектов от каждой силы в отдельности. На рис. 7.1 показаны перемещения точки k : Δ от совместного действия заданных сил; Δ_1 и Δ_2 от отдельного воздействия каждой силы F_1 и F_2 соответственно. На основании этого принципа должно выполняться: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

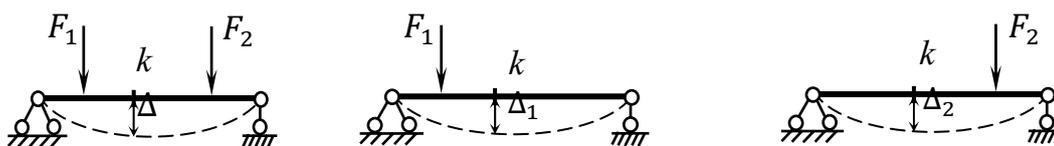


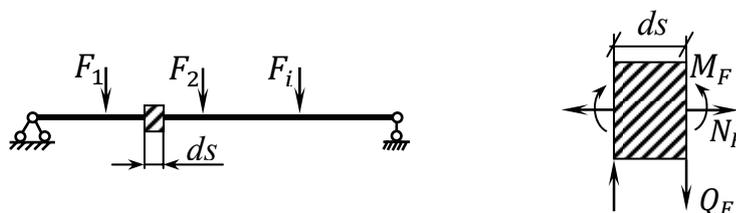
Рис. 7.1

Метод Мора

Общие методы определения перемещений линейно-деформированных систем основаны на *принципе возможных перемещений*: если система находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю. Под *возможными* перемещениями понимают малые перемещения, которые допускаются наложенными на систему связями и не зависят от заданной системы сил. При расчете реальных конструкций вместо возможных перемещений принимают *действительные*, которые возникают в конструкции от заданной нагрузки. Тогда справедливо утверждение: если система находится в равновесии, то сумма работ внутренних и внешних сил на действительных перемещениях равна нулю.

Рассмотрим упругие системы под действием внешней силовой нагрузки. Немецкий ученый Отто Мора предложил наиболее общий метод определения перемещений в таких системах, основанный на следующем. Рассматриваются два состояния системы, например, шарнирной балки (рис. 7.2).

а) Первое состояние (действительное)



б) Второе состояние (возможное)

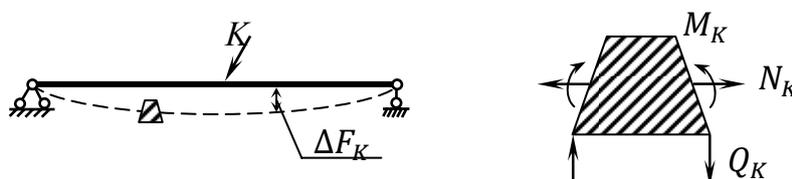


Рис 7.2

В первом состоянии (см. рис. 7.2, а) задана внешняя (произвольная) нагрузка. Тогда для любого балочного элемента длиной ds известны внутренние силы: изгибающий момент M_F , поперечная сила Q_F , продольная сила N_F (на рисунке показаны их положительные направления). Во втором состоянии (см. рис. 7.2, б) представлены малые перемещения балки, вызванные произвольной силой K . При этом каждый бесконечно малый элемент балки получает изменение формы, соответствующее общему случаю действия сил. Обозначим перемещения *точек* оси балки *второго состояния* по направлению заданной нагрузки *первого состояния* $\Delta_{F_{1K}}, \Delta_{F_{2K}}, \dots, \Delta_{F_{iK}}$. Введем понятие возможной работы силы F .

Возможной работой силы называется *работа этой силы на малом возможном перемещении* точки приложения силы по ее направлению. Рассматривая возможную работу внешних и внутренних сил, О. Мор (1874) сформулировал *основную теорему строительной механики статически неопределимых систем*: возможная работа внешних сил (F) первого состояния на перемещениях точек их приложения и по их направлениям во втором состоянии равна возможной работе внутренних сил первого состояния (M_F, Q_F, N_F) на перемещениях по их направлению во втором состоянии.

Аналитическое выражение теоремы с учетом выражения всех внутренних сил на перемещениях в возможном состоянии (приводим без вывода) имеет вид:

$$\sum F_i \Delta_{F_{iK}} = \sum_n \int_0^s M_F d\varphi_K + \sum_n \int_0^s N_F d\lambda_K + \sum_n \int_0^s Q_F dy_K. \quad (7.1)$$

Заметим, что изгибающие моменты M_F , продольные силы N_F , поперечные силы Q_F для каждого призматического элемента принимаются из первого состояния (см. рис. 7.2, а), а перемещения по направлению внутренних сил – из второго состояния (см. рис. 7.2, б). Здесь $d\varphi_K$ – взаимный угол поворота сечений элемента под действием изгибающих моментов M_F ; $d\lambda_K$ – абсолютные удлинения элемента во втором состоянии под действием продольных сил N_F ; dy_K – взаимный сдвиг центров тяжести соседних поперечных сечений элемента под действием поперечных сил Q_F . В правой части выражения (7.1) интегрирование проводится в пределах длины каждого элемента; суммирование – по количеству таких элементов.

Если перемещения во втором состоянии происходят в упругой области, используя закон Гука, будем иметь выражение теоремы Мора:

$$\sum F_i \Delta_{FiK} = \sum_n \int_0^s \frac{M_F M_K}{EJ} ds + \sum_n \int_0^s \frac{N_F N_K}{EA} ds + \sum_n \int_0^s \frac{Q_F Q_K}{GA} ds. \quad (7.2)$$

Таким образом, возможная работа внешних сил (F) на перемещениях по направлению этих сил равна возможной работе внутренних сил (M_F, Q_F, N_F) на соответствующих им перемещениях в этой же системе. Выражение (7.2) можно распространить на действительную работу внешних и внутренних сил, то есть на работу сил, которая производится этими силами на вызываемых ими перемещениях. С учетом статического действия внешних и внутренних сил во всех членах выражения (7.2) необходимо ввести коэффициент $1/2$; также учитываем равенства $d\varphi_K = d\varphi_F$; $d\lambda_K = d\lambda_F$; $dy_K = dy_F$. Тогда получим соотношение

$$\frac{1}{2} \sum F_i \Delta_{Fi} = \sum_n \int_0^s \frac{M_F M_F}{2EJ} ds + \sum_n \int_0^s \frac{N_F N_F}{2EA} ds + \sum_n \int_0^s \frac{Q_F Q_F}{2GA} ds. \quad (7.3)$$

Заметим, что правая часть выражения (7.3) представляет собой потенциальную энергию бруса при поперечном изгибе и растяжении. Полученные соотношения пока не позволяют непосредственно вычислить перемещение произвольной точки любой стержневой системы. Однако, развивая подход Мора, можно найти интересующие перемещения, что и будет показано в следующей лекции.

Лекция 8. ИНТЕГРАЛ МАКСВЕЛЛА-МОРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Основные теоремы о линейно-деформируемых системах

На основании теоремы Мора (см. выражение (7.2) лекции 7) выведен ряд положений, которые можно объединить в основные теоремы о линейно-деформируемых системах. Приведем формулировки этих теорем.

1. *Теорема о взаимности работ внешних и внутренних сил (теорема Бетти).*

Рассмотрим два силовых состояния одной и той же системы (рис. 8.1).

Внутренние силы и деформации в первом состоянии обозначим соответственно: $M_F, Q_F, N_F; d\varphi_F; d\lambda_F; dy_F$ (смысл всех введенных обозначений рассмотрен ранее). Теорема доказывает следующий факт:

$$\sum F_i \Delta_{F_i K} = \sum K_i \Delta_{K_i F}. \quad (8.1)$$

Соотношение (8.1) есть аналитическое выражение теоремы, которую можно выразить следующим образом: возможная работа внешних сил (F) первого состояния на перемещениях во втором состоянии равна возможной работе внешних сил (K) второго состояния на перемещениях первого состояния.

а) Первое состояние

б) Второе состояние

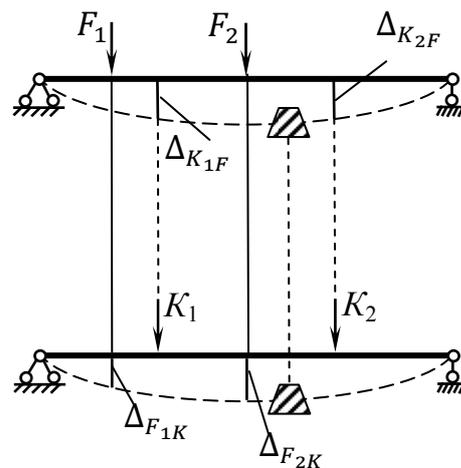


Рис. 8.1

2. Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла): перемещение точки i от внешней силы F первого состояния, приложенной в точке j , численно равно перемещению точки j от силы K второго состояния, приложенной в точке j , если силы F и K качественно одинаковы (рис. 8.2).

$$F\Delta_{FK} = K\Delta_{KF}.$$

Если $F = K$, то $\Delta_{FK} = \Delta_{KF}$.

Таким образом, теорема Максвелла позволяет упростить процесс вычисления перемещений: величина перемещения не меняется от перестановки индексов, если численно равны силовые воздействия.

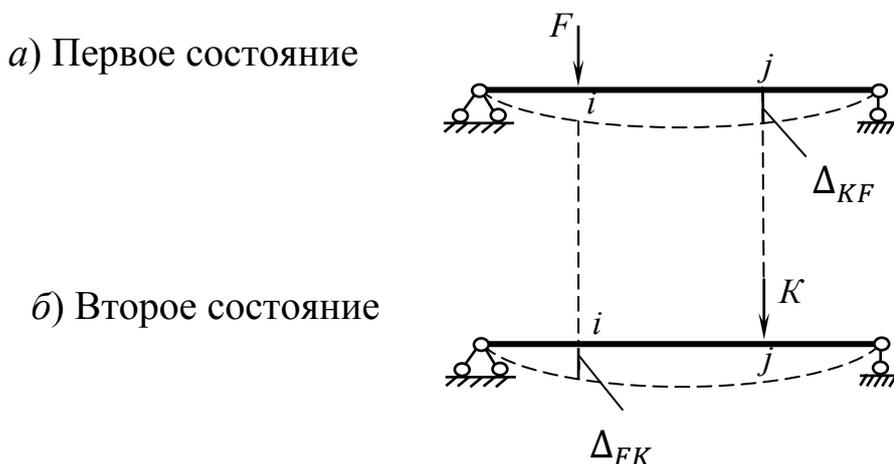


Рис. 8.2

Например, в балке необходимо найти перемещение произвольной точки i по направлению, показанному на рис. 8.3 пунктиром. Тогда необходимо рассмотреть два состояния балки (рис. 8.3): заданное состояние (или *грузовое*), показанное на рис. 8.3, *а*, и вспомогательное состояние (или *единичное*), показанное на рис. 8.3, *б*. Обратим внимание: в единичном состоянии не учитывается заданная внешняя нагрузка. Это совершенно особое вспомогательное состояние балки, которое формируем сами при определении конкретного перемещения, исходя из основных правил выбора единичного воздействия.



Рис. 8.3

Тогда для определения перемещения точки i от заданного силового внешнего воздействия в упругой области работы сооружения общая формула Мора (*интеграл Максвелла-Мора*) записывается следующим образом:

$$\Delta_{iF} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} dx + \sum_n \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} dx + \sum_n k \int_0^l \frac{\bar{Q}_i Q_F}{GA} dx. \quad (8.2)$$

где Δ_{iF} – искомое перемещение i – й точки по направлению единичного воздействия i -го состояния от заданной нагрузки. $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ – внутренние усилия, возникающие от единичной нагрузки, приложенной по направлению искомого перемещения. M_F, Q_F, N_F – внутренние усилия от заданной нагрузки; A – площадь поперечного сечения; J – осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси; E – модуль продольной упругости; G – модуль упругости при сдвиге; EJ, EA, GA – соответственно жесткости при изгибе, растяжении-сжатии и сдвиге; k – коэффициент, характеризующий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению и зависящий только от формы поперечного сечения; l – длина отдельного участка элемента системы, в пределах которого закон изменения внутренних силовых факторов остается постоянным; суммирование проводится по всем участкам системы.

Формула (8.2) широко используется для нахождения упругих перемещений любых плоских стержневых конструкций: балок, рам, арок и ферм. Заметим, что для *криволинейных систем* используется формула интеграла Максвелла-Мора в виде (8.2). На практике в системах, состоящих из *прямолинейных стержней*, формула интеграла Максвелла-Мора упрощается.

Для стержневых систем, которые работают преимущественно на изгиб (балки, рамы), влияние продольной и поперечной сил на перемещения незначительно (по сравнению с влиянием изгибающего момента) и им обычно пренебрегают. В таких системах интеграл Максвелла - Мора имеет вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} dx. \quad (8.3)$$

Если жесткость в пределах каждого элемента системы постоянна, то

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx. \quad (8.4)$$

В шарнирно-стержневых конструкциях в виде ферм изгибающие моменты и поперечные силы отсутствуют, следовательно, интеграл Максвелла - Мора принимает вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} dx. \quad (8.5)$$

Если жесткость в пределах каждого элемента системы постоянна, то

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EA} \int_0^l \bar{N}_i N_F dx. \quad (8.6)$$

Лекция 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МАКСВЕЛЛА - МОРА СПОСОБОМ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ЭПЮР

Правило Верещагина. В системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, вычисление интеграла вида $\int_0^l \overline{M}_l M_F dx$ значительно упрощается с применением способа перемножения эпюр. Способ был предложен в 1925 году студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. Верещагиным и называется *правилом Верещагина*: при перемножении эпюр, одна из которых линейна, а другая имеет произвольное очертание, интеграл $\int_0^l \overline{M}_l M_F dx$ можно вычислить как произведение площади эпюры произвольного очертания на ординату под ее центром тяжести, взятую из линейной эпюры. Таким образом,

$$\int_0^l \overline{M}_l M_F dx = \omega y_{\text{цт}}. \quad (9.1)$$

Разделив обе части равенства (9.1) на жесткость при изгибе EJ , получим искомое перемещение

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_l M_F dx = \frac{1}{EJ} \omega y_{\text{цт}}, \quad (9.2)$$

где ω – площадь криволинейной эпюры (рис. 9.1), $y_{\text{цт}}$ – ордината, взятая из линейной эпюры и лежащая под центром тяжести первой.

Таким образом, при перемножении эпюр по правилу Верещагина нужно помнить и учитывать следующее:

1. Площадь ω подсчитывается для эпюры произвольного очертания, ордината $y_{\text{цт}}$ берется из эпюры прямолинейной.

В табл. 9.1 приведены формулы подсчета площадей для наиболее часто встречающихся фигур, указано положение центров тяжести таких фигур.

2. Если обе эпюры прямолинейные, то площадь ω можно вычислить для любой из них, а ординату y взять из другой перемножаемой эпюры.

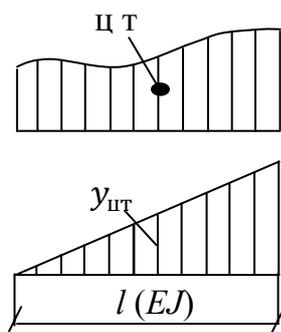


Рис. 9.1

3. Произведение ωu считается положительным, если площадь ω и ордината u расположены по одну сторону от базисных линий соответствующих эпюр; отрицательным, если они расположены по разные стороны от базисных линий.

Заметим, что наиболее простым применением формулы (9.2) оказывается в случае, когда одна из эпюр (или обе) постоянна по величине на всем участке перемножения, т. е. в случае перемножения прямоугольной эпюры на прямоугольную или в случае перемножения прямоугольной эпюры на треугольную или трапециевидальную эпюру.

С использованием правила Верещагина получены различные формулы для практического определения перемещений в стержневых системах.

Рассмотрим некоторые из них.

Правило трапеций. Перемножение эпюр, имеющих вид трапеций (рис. 9.2), можно осуществить по следующей формуле (формуле трапеций):

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_i M_F dx = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc), \quad (9.3)$$

где $2ac$ – удвоенное произведение ординат перемножаемых эпюр на левом конце участка; $2bd$ – удвоенное произведение ординат эпюр на правом конце участка; ad и bc – произведение ординат, лежащих "крест-накрест".

Все члены правой части формулы (9.3) взяты с положительным знаком, так как обе эпюры на рис. 9.2 расположены по одну сторону от базисной линии. Формула применима и в случае, когда одна (или обе) эпюры треугольная.

Формула Симпсона. В случае, когда одна из эпюр очерчена кривой 1-го, 2-го или 3-го порядка, а другая эпюра прямолинейна (или обе эпюры прямолинейны) (рис. 9.3), можно пользоваться формулой

$$\Delta_{iF} = \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx = \frac{l}{6EJ} (a\bar{a} + 4b\bar{b} + c\bar{c}), \quad (9.4)$$

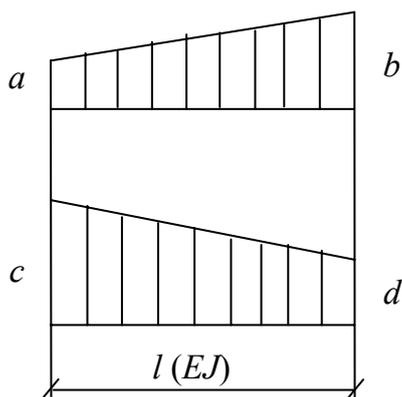


Рис. 9.2

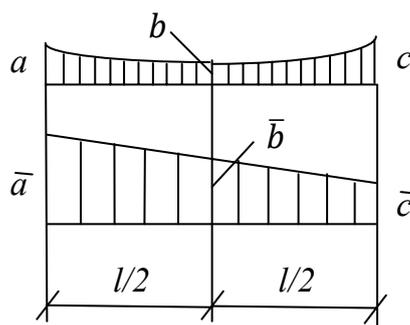


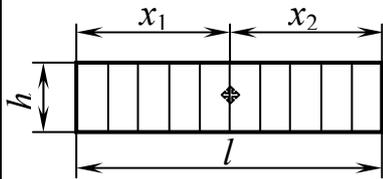
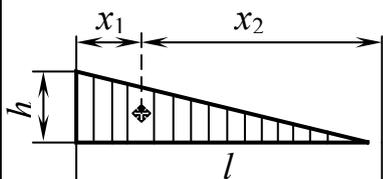
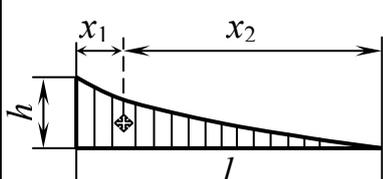
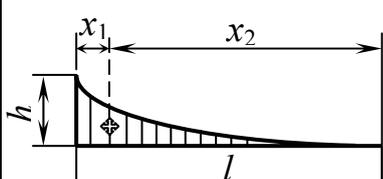
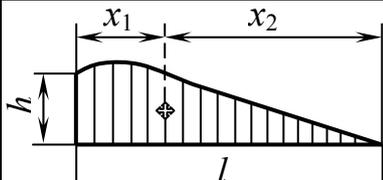
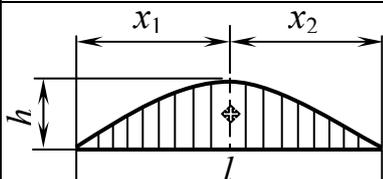
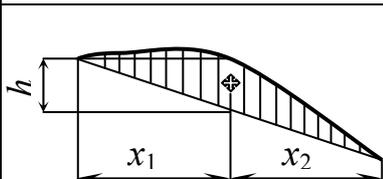
Рис. 9.3

где $a\bar{a}$ и $c\bar{c}$ – произведения ординат перемножаемых эпюр соответственно на левом и правом конце участка; $4b\bar{b}$ – учетверенное произведение ординат, лежащих посередине участка. Очевидно, если эпюры растягивают одни и те же волокна, то соответствующие члены формулы (9.4) положительны.

Для случая, когда одна из эпюр очерчена по квадратной параболе (от действия равномерно распределенной нагрузки q) (рис. 9.3), распространенной является следующая "универсальная" формула:

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} &= \sum_n \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx = \\ &= \frac{l}{6EJ} \left(2a\bar{a} + 2b\bar{b} + a\bar{b} + b\bar{a} + \frac{ql^2}{4} (\bar{a} + \bar{b}) \right). \quad (9.5) \end{aligned}$$

Таблица 9.1

Фигура	Площадь ω	Абсциссы центра тяжести	
		x_1	x_2
	lh	$l/2$	$l/2$
	$lh/2$	$l/3$	$2l/3$
	Квадратная парабола $lh/3$	$l/4$	$3l/4$
	Кубическая парабола $lh/4$	$l/5$	$4l/5$
	Квадратная парабола $2lh/3$	$3l/8$	$5l/8$
	Квадратная парабола $2lh/3$	$l/2$	$l/2$
	Квадратная парабола $2lh/3$	$l/2$	$l/2$

Здесь $2a\bar{a}$ – удвоенное произведение крайних левых ординат перемножаемых эпюр; $2b\bar{b}$ – удвоенное произведение крайних правых ординат перемножаемых эпюр; $a\bar{b}$ и $b\bar{a}$ – произведение левой ординаты первой эпюры на правую ординату второй, и наоборот, правой ординаты первой эпюры на левую ординату второй.

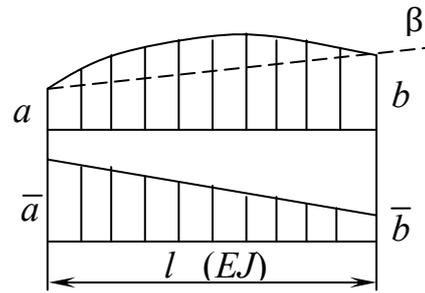


Рис. 9.4

Последнее слагаемое в скобках учитывает криволинейность одной из эпюр от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q . Если обе эпюры прямолинейные, то это слагаемое равно нулю.

Все члены правой части формулы (9.5) взяты с положительным знаком, потому что рассматриваемые эпюры расположены на одних и тех же волокнах (на рис. 9.4 обе эпюры расположены выше базисной линии). Если ординаты эпюр расположены по разные стороны от базисной линии, то соответствующие члены формулы должны быть учтены с отрицательным знаком. Знак добавки за счет кривизны одной из эпюр (слагаемое $ql^2/4(\bar{a} + \bar{b})$) определяется из сравнения параболы, расположенной над линией β , и линейной эпюры. (Линия β соединяет ординаты на концах криволинейной эпюры.) В нашем случае и парабола, расположенная над линией β , и прямолинейная эпюра расположены выше базисной линии, следовательно, растягивают одни и те же (верхние) волокна; знак добавки за счет кривизны одной из эпюр – плюс.

Заметим, что формула (9.5) значительно упрощается, если перемножаются треугольные эпюры или треугольная и трапециевидная эпюры.

Порядок вычисления перемещений способом перемножения эпюр

При определении перемещений необходимо рассматривать два вида нагрузок, действующих на систему. Первый вид нагрузок включает все реальные нагрузки (в данной работе ограничимся рассмотрением силового внешнего воздействия), вызывающие искомое перемещение. Второй вид включает только единичную нагрузку, которая выбирается дополнительно и рассматривается самостоятельно. Единичная нагрузка должна соответствовать искомому перемещению, т.е. должна быть приложена в точке

системы, перемещение которой определяется, и действовать по направлению искомого перемещения. Предлагается следующий порядок вычисления перемещений.

1. Определить значения изгибающих моментов M_F от внешней нагрузки в произвольных сечениях отдельных участков каждого элемента заданной системы и построить эпюру изгибающих моментов M_F .

2. Определить значения изгибающих моментов \overline{M}_l , приложив по направлению искомого перемещения единичное воздействие*. Построить эпюру \overline{M}_l .

Выбор единичного воздействия обусловлен следующими правилами:

а) для определения линейного перемещение сечения по какому-либо направлению необходимо приложить единичную сосредоточенную силу в этом сечении по направлению искомого перемещения;

б) для определения угла поворота сечения (углового перемещения) необходимо приложить единичный сосредоточенный момент в этом сечении;

в) для определения взаимного линейного перемещения двух сечений необходимо приложить в каждом из них единичную сосредоточенную силу по прямой линии, соединяющей эти сечения. Направления сил должны быть выбраны так, чтобы они самоуравновешивали друг друга.

г) для определения угла взаимного поворота двух сечений прикладываем в каждом сечении единичные сосредоточенные моменты так, чтобы они самоуравновешивали друг друга.

3. Перемножить эпюры по любой из формул 9.3 – 9.5. Перемножение эпюр осуществляется по участкам, на которые должны быть разбиты перемножаемые эпюры. Это разбиение нужно проводить так, чтобы в пределах рассматриваемого участка закон изменения эпюры и жесткость были постоянными. Выбор формулы перемножения должен обеспечивать простоту и удобство вычисления, поэтому на разных участках эпюры возможно перемножение по разным формулам.

4. Результат перемножения может быть как положительным по знаку, так и отрицательным. В первом случае он указывает на то, что искомое перемещение происходит в соответствии с предположенным направлением единичного воздействия. Во втором – перемещение противоположно направлению единичного воздействия.

* Любое единичное воздействие будем считать безразмерной величиной

Список использованной и рекомендательной литературы

1. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. Вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Снитко Н. К. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов / 3-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 1980. – 431 с.
3. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.
4. Руководство к практ. занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем); Учеб. пособие для студентов вузов / Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков и др.; Под ред. Г. К. Клейна. 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
5. Определение перемещений в стержневых системах. Матричная форма расчета : метод. указания к курсовой работе по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост.: С. А. Маврина, В. П. Валуйских. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2000. – 28 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<i>Лекция 1.</i> Основные положения строительной механики	4
<i>Лекция 2.</i> Многопролетные статически определимые балки	8
<i>Лекция 3.</i> Понятие о линиях влияния. Расчет многопролетных балок на подвижную нагрузку	11
<i>Лекции 4-5.</i> Расчет трехшарнирных арок	19
<i>Лекция 6.</i> Аналитический расчет ферм	29
<i>Лекция 7.</i> Определение перемещений плоских стержневых систем. Метод Мора	36
<i>Лекция 8.</i> Интеграл Максвелла - Мора для определения перемещений стержневых систем	40
<i>Лекция 9.</i> Вычисление интеграла Максвелла - Мора способом перемножения эпюр	44
Список использованной и рекомендательной литературы	50