

В первой области деформации ползучести древесины затухают с течением времени, и может быть принята линейная зависимость деформаций от их скоростей и напряжений. Во второй области деформации ползучести не затухают, а сам процесс ползучести проходит три стадии:

- 1) с переменной скоростью деформаций ползучести (затухающая ползучесть);
- 2) с постоянной скоростью;
- 3) с резко нарастающей скоростью деформаций ползучести (стадия разрушения).

Следовательно, во второй области деформаций конструкции обладают длительной несущей способностью.

Предполагается, что при действии эксплуатационных нагрузок материал АДК (древесина) работает в первой области деформирования. Для описания процесса деформации древесины в этой области может быть использован общий линейный закон деформирования упруго-пластических и упруго-вязких материалов, для которых наследственные функции определяются экспериментальным путем, по результатам испытаний на ползучесть, то есть, могут быть применены теории упругой наследственности и упруго-ползучесть тела.

До настоящего времени нет полного физико-химического объяснения природы ползучести древесины. При этом наиболее распространенной является точка зрения на природу ползучести, которая сводится к тому, что развитие этих деформаций является следствием перемещения (выдавливания) воды в стенках клеток, вязких деформаций и деформаций клеточно-волокнистого скелета.

Теории ползучести подразумевают установление зависимости между напряжениями, деформациями и временем, что может быть представлено в виде функции:

$$\epsilon(t) = \phi[\sigma(t); t \text{ и } \tau], \quad (2)$$

где  $\epsilon(t)$  — полная относительная деформация в момент времени  $t$ ;  $\sigma(t)$  — напряжение в любой момент времени;  $t$  — время отсчета;  $\tau$  — текущая координата времени.

В современных условиях все существующие теории ползучести носят феноменологический характер, то есть основаны на описании наиболее изученных экспериментальных явлений.

Учитывая состояние вопроса, для определения влияния длительных действующих нагрузок на НДС армированных деревянных конструкций мы рассматриваем в работе применение теории упругой наследственности

и теории упруго-ползучего тела как наиболее приемлемых для оценки деформативности деревянных конструкций во времени [7, 8, 10].

С целью получения сопоставимых теоретических результатов деформативности армированных деревянных конструкций во времени рассмотрим два метода расчета с учетом ползучести, основанных на теории упругой наследственности (Больцмана–Вольбулла) и теории упруго-ползучего тела.

Рассматриваемые теории ползучести основаны на следующих допущениях.

Древесина рассматривается как однородный материал.

Между полными деформациями древесины (мгновенно-упругими деформациями) и напряжениями в ней существует линейная зависимость:

$$\sigma_a = E_a \epsilon_a. \quad (26)$$

Между напряжениями и деформациями ползучести также существует линейная зависимость.

Абсолютные величины деформаций (упругих и неупругих) принимаются не зависящими от напряжений.

Для деформаций ползучести, как и для упругих мгновенных деформаций, действителен принцип наложения.

Арматура во времени работает упруго, и ее смещение относительно древесины отсутствуют, т. е.  $\epsilon_a = \epsilon_d$ .

Исходя из результатов анализа изохронных кривых ползучести древесины при напряжениях, превышающих предел длительной прочности, который показал, что древесина относится к линейно-ползучим материалам, и учитывая сформулированные выше показатели ползучести, запишем более уравнение линейной ползучести в виде:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0(t) + \sigma_a(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma_a(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (27)$$

Здесь  $\epsilon_0(t)$  — мгновенная деформация, вызванная напряжением, возникшим в момент времени  $\tau_1$ ;  $\sigma_a(\tau_1) \delta(t, \tau_1)$  — деформация ползучести, возникающая в момент времени  $t$  от длительного действия постоянного напряжения  $\sigma_a(\tau_1)$ ; выражение под интегралом представляет собой сумму мгновенной деформации и деформации ползучести к моменту времени  $t$ , вызываемых дифференциалом напряжения

$\frac{d\sigma_a(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau$ , который добавляется к начальному напряжению в произвольный момент времени  $\tau$ .

Принимая во внимание, что

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_d(t)} = 1/E_d(t);$$

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_d(t)}{E_d(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_d(t) \frac{d}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau.$$

Из уравнения (29) следует, что полная деформация  $\varepsilon(t) - \varepsilon_0(t)$  состоит из упругой деформации

$$\varepsilon_d = \sigma_d(t)/E_d(t)$$

и деформации ползучести

$$\varepsilon_n(t) = - \int_{\tau_1}^t \sigma_d(t) \frac{d}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau.$$

Поскольку уравнение (27) является общим уравнением теории ползучести, рассмотрим два метода решения поставленной задачи основанные на теории упругой наследственности (теория Больцмана-Вольтерра) и теории упруго-ползучего тела [7, 8, 10].

### 2.11.2. Метод расчета изгибаемых АДК с учетом длительного действия нагрузки на основе теории упругой наследственности

Для учета ползучести в линейной теории упругой наследственности связь между напряжениями и деформациями элемента используется интегральное уравнение Больцмана-Вольтерра [7, 8, 9, 10]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_{\tau_1}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

в котором в качестве ядра ползучести, применяемого для древесины, использована затухающая экспоненциальная функция:

$$K(t-\tau) = A_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}$$

где  $A_1$  и  $\alpha_1$  — постоянные коэффициенты, найденные опытным путем по кривым ползучести деревянных элементов при изгибе с использованием методики А. К. Малмейстера ( $A_1 = 0,02$ ,  $\alpha_1 = 0,0625$ ).

Раскроем значение входящих в ядро ползучести (26) коэффициентов  $A_1$  и  $\alpha_1$ :

$$A_1 = \frac{E_d - E_d(t)}{E_d \eta_d};$$

$$\alpha_1 = \frac{E_d(t)}{E_d \eta_d}, \tag{35}$$

где  $E_d$  и  $E_d(t)$  — мгновенный и длительный модули упругости древесины;  $\eta_d$  — коэффициент времени релаксации.

$E_d$ ,  $E_d(t)$  и  $\eta_d$  называют реологическими постоянными, в данном случае, древесины.

Реологические постоянные  $E_d$ ,  $E_d(t)$  и  $\eta_d$  определяются по экспериментальной кривой ползучести (рис. 2.8).

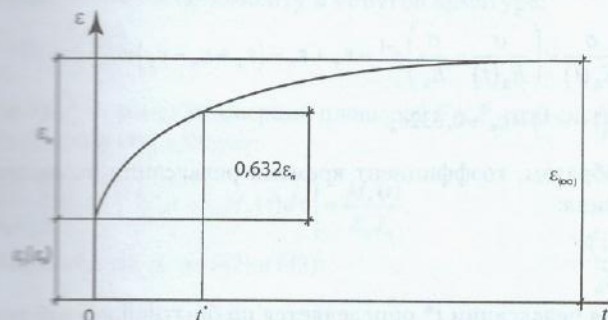


Рис. 2.8. Экспериментальная кривая ползучести древесины

Мгновенный модуль упругости находится по мгновенной деформации в момент  $t = 0$ , а именно:

$$E_d = \sigma_0 / \varepsilon_0 \tag{36}$$

Длительный модуль упругости определяется по формуле:

$$E_d(t) = \sigma(t) / \varepsilon(\infty) \tag{37}$$

При обработке экспериментальных кривых наиболее трудно определить  $\varepsilon(\infty)$  из-за требования очень длительной выдержки образца под нагрузкой. Поэтому величину  $\varepsilon(\infty)$  целесообразно определять способом экстраполяции, аппроксимируя кривую ползучести экспонентой.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_d(t)} \left( 1 - \frac{E_d - E_d(t)}{E_d} \cdot e^{-\frac{t E_d(t)}{E_d \eta_d}} \right), \tag{38}$$

Можно вывести формулу для определения предельной деформации ползучести по экстраполяции [21]:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2} \tag{39}$$

Время  $t_1$  и  $t_2$  выбирается таким, чтобы выполнялось соотношение  $t_2 = 2 t_1$ .

Деформации  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  определяются по опытной кривой. Образец, оставленный под нагрузкой в течение времени,

$$t^* = \frac{\eta_n E_n}{E_d(t)}$$

будет иметь деформацию, определяемую уравнением (31)  $t = t^*$ :

$$\begin{aligned} \epsilon(t^*) &= \frac{\sigma}{E_d(t)} - \left( \frac{\sigma}{E_d(t)} - \frac{\sigma}{E_n} \right) e^{-1} = \epsilon_y + \epsilon_n - (\epsilon_y + \epsilon_n - \epsilon_y) e^{-1} = \\ &= \epsilon_y + \epsilon_n (1 - e^{-1}) = \epsilon_y + 0,632 \epsilon_n. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент времени релаксации вычисляется из выражения:

$$\eta_n = \frac{E_n(t) t^*}{E_n}$$

где время релаксации  $t^*$  определяется по опытной кривой ползучести при деформациях согласно (41) (см. рис. 2.8).

Определим напряжение в изгибаемом элементе от внешнего момента  $M$  (рис. 2.9) из условия равенства моментов относительно оси  $Z$ , проходящей через упругий центр сечения:

$$M_d(t) + M_a(t) = M,$$

где  $M_d(t)$  и  $M_a(t)$  моменты, воспринимаемые деревом и арматурой в начальное время  $t$ .

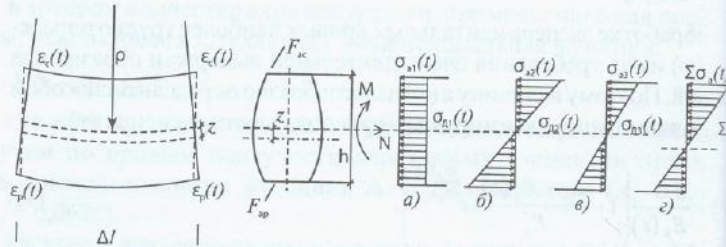


Рис. 2.9. Эпюры нормальных напряжений в поперечных сечениях армированного сжато-изгибаемого элемента, работающего в области линейной ползучести: а — от продольной силы; б — от изгибающего момента; в — от дополнительного изгибающего момента; г — суммарные напряжения

В качестве дополнительного условия примем равенство кривизн изгибаемого элемента, определенных по моментам  $M_d(t)$  и  $M_a(t)$ .

$$\frac{1}{\rho_d} = \frac{1}{\rho_a} \quad (44)$$

Кривизна балки по моменту, воспринимаемому арматурой:

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{1}{E_a J_a} \left[ M_a(t) + \int_0^t K(t-\tau) M_a(\tau) d\tau \right] \quad (45)$$

Кривизна балки по моменту в упругой арматуре:

$$\frac{1}{\rho_d} = \frac{M_d(t)}{E_d J_d} \quad (46)$$

$J_d$  и  $J_a$  — моменты инерции площадей  $F$  и  $P_a$  относительно оси  $Z$ .

Из условия (44) следует:

$$\frac{1}{E_d J_d} \left[ M_d(t) + \int_0^t K(t-\tau) M_d(\tau) d\tau \right] = \frac{M_a(t)}{E_a J_a} \quad (47)$$

Подставим  $M_d(t)$  из (47) в (43):

$$M_d(t) + \frac{E_d J_d}{E_a J_a} \left[ M_d(t) + \int_0^t K(t-\tau) M_d(\tau) d\tau \right] = M, \quad (48)$$

$$M_d(t) (1 + m_1) + m_1 \int_0^t K(t-\tau) M_d(\tau) d\tau = M, \quad (49)$$

$$m_1 = \frac{E_d J_d}{E_a J_a}$$

Взяв интегральное уравнение (49) относительно  $M_d(t)$ , получим:

$$M_d(t) = \frac{ME_d J_d}{E_d J_d + E_a J_a} \left[ \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right], \quad (50)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{A_1 m_1}{1 + m_1}. \quad (51)$$

Напряжения в древесине:

$$\sigma_d(t) = \frac{M_d(t) y}{J_d} \quad (52)$$

Подставляя (50) в (52), получим:

$$\sigma_d(t) = \frac{M y}{J_d} \left[ \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right], \quad (53)$$

где  $J_{np}$  — приведенный момент инерции сечения относительно оси  $Z$ .

$$J_{np} = J_d + \frac{E_a}{E_d} J_a.$$

Изменение напряжений в арматуре от изгиба определится по моменту  $M_a(t)$  из выражения (43):

$$M_a(t) = M - M_d(t).$$

Подставляя (50) в (54) получим:

$$M_a(t) = \frac{MJ_a E_a}{J_{np} E_d} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right].$$

Напряжения в арматуре:

$$\sigma_a(t) = \frac{M_a(t) y_a}{J_a};$$

$$\sigma_a(t) = \frac{M y_a E_a}{J_{np} E_d} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right],$$

где  $M$  — изгибающий момент от внешней нагрузки;  $J_{np}$  — приведенный момент инерции расчетного сечения;  $E_a$  — модуль упругости арматуры;  $E_d$  — модуль упругости древесины;  $y$  — расстояние нейтральной оси до расчетного слоя;  $y_a$  — расстояние от нейтральной оси до центра тяжести арматуры;  $t$  — время в сутках выдержки элемента с момента загрузки.

Если положить в формулах (53) и (57)  $t = 0$ , то получим мгновенное решение задачи.

Формулы (53) и (57) отражают картину изменения во времени напряженного состояния армированного элемента.

С изменением во времени общих деформаций изгибаемых элементов происходит перераспределение напряжений между практически упругой арматурой и обладающей ползучестью древесиной. Причем напряжения в арматуре увеличиваются, а в древесине — уменьшаются. Это показал и анализ полученных формул: с увеличением  $t$  напряжения в древесине по выражению (53) уменьшаются, в арматуре (57) — увеличиваются. Необходимо отметить, что деформативность армированных деревянных элементов при длительном действии нагрузки ниже неармированных, так как ползучесть древесины происходит под действием уменьшающихся во времени напряжений.

Определим прогиб изгибаемого элемента в середине пролета с учетом продолжительности действия нагрузки.

В общем случае прогиб изгибаемого элемента от внешней нагрузки можно определить по интегралу Мора:

$$f(t) = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x,t)}{E_d \cdot I_{np}} dx + k \int_0^l \frac{\bar{Q}(x)Q(x,t)}{G_d \cdot E_{np}} dx, \quad (58)$$

где  $k$  — безразмерная величина, зависящая от формы и размеров поперечного сечения, учитывающая неравномерность распределения нормальных напряжений по высоте сечения:

$$k = \frac{E_a}{E_d} \int \frac{S^2(y)}{I(y)} dy.$$

Прогиб изгибаемого элемента равен:

$$f(t) = f_d(t) + f_q(t), \quad (59)$$

где  $f_d(t)$  — прогиб изгибаемых элементов без учета деформаций сдвига;  $f_q(t)$  — прогиб, возникающий вследствие деформаций сдвига.

Для определения прогиба элемента от внешней нагрузки необходимо задаться схемой загрузки, то есть конкретизировать  $M$ . В случае равномерно распределенной по длине пролета нагрузки составим дифференциальное уравнение изогнутой оси армированного элемента при поперечном изгибе, получим формулу прогиба элемента для любого момента времени без учета деформаций сдвига:

$$f_d(t) = \frac{5q^2 l^4}{384 E_d I_{np}} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] \quad (60)$$

Прогиб, возникающий вследствие деформаций сдвига, определяем соотношением:

$$f_q = \frac{QM(x)}{GF_{np}} \quad (61)$$

Конкретизируя внешнюю нагрузку  $M$ , получим выражение прогиба балки вследствие деформаций сдвига:

$$f_q(t) = \frac{3 q l^4}{16 G_d F_{np}} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (62)$$

Подставляя уравнения (60) и (62) в уравнение (59), получим выражение для прогиба балки с учетом деформаций сдвига:

$$f(t) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E_d J_{np}} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] + \frac{3}{16} \frac{q l^2}{G_d F_{np}} \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right], \quad (63)$$

где  $l$  — пролет элемента;  $q$  — равномерно распределенная по длине пролета нагрузка.

Проведенные экспериментально-теоретические исследования и наблюдения за армированными деревянными конструкциями в процессе эксплуатации показали, что под нагрузкой с течением времени напряженно-деформированное состояние значительно изменяется. Применяемые для соединения арматуры с древесиной клеевые композиции обеспечивают их надежную совместную работу, однако вследствие ползучести основного материала — древесины, во времени происходит перераспределение усилий между арматурой и древесиной. При этом в расчетных сечениях нормальные напряжения в арматуре и клеевом шве «арматура—древесина» возрастают, а в древесине снижаются, что вызвано изменением (снижением) модуля упругости древесины. В принципе, это положительно влияет на долговечность и надежность конструкций, так как арматура со временем «разгружает» более «слабый» материал — древесину, в результате чего снижается отрицательное влияние пороков строения древесины на несущую способность, что позволяет использовать в конструкциях пиломатериалы 3-го сорта.

Влияние продолжительности действия нагрузки необходимо учитывать при проектировании армированных конструкций, так как учет фактора времени может привести к потере несущей способности или к недопустимому росту деформаций (перемещений).

Использование формул, полученных для практического расчета, затруднено из-за их громоздкости. Известно, что в области затухающей ползучести, при длительном действии статической нагрузки, конструкция через определенное время приобретает напряженно-деформированное состояние, в дальнейшем практически неизменное. В связи с этим указанные формулы можно упростить, заменив переменные операторы коэффициентами влияния, отражающими установившееся напряженно-деформированное состояние.

Поэтому в связи с перераспределением усилий между арматурой и древесиной при длительном действии постоянной нагрузки

при расчете элементов необходимо ввести коэффициенты влияния  $K_d(t)$  — учитывающий снижение во времени напряжений в древесине и  $K_a(t)$  — учитывающий увеличение напряжений в арматуре. Тогда при расчете по первой группе предельных состояний нормальные напряжения в древесине следует определять по формуле:

$$\sigma_d(t) = \frac{MK_{dl}^a}{W_{np}} \leq \frac{R_d}{\gamma_n}, \quad (64)$$

где  $K_{dl}^a$  является численным значением выражения, заключенного в квадратные скобки формулы (53) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$K_{dl}^a = \left[ \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad (65)$$

а в арматуре по формуле:

$$\sigma_a(t) = \frac{M_a K_{dl}^a}{W_{np}} \leq \frac{R_a}{\gamma_n}, \quad (66)$$

где  $K_{dl}^a$  является численным значением выражения, заключенного в квадратные скобки формулы (57) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$K_{dl}^a = \left[ \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] = \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1}. \quad (67)$$

Напряжения, вычисленные по формулам (64) и (66), соответствуют установившимся длительным.

В случае необходимости определения напряжений в любой момент времени  $t$ , можно воспользоваться выражениями (53) и (57).

Расчет по предельному состоянию второй группы заключается в отыскании прогиба армированного элемента и сравнении его с нормативной величиной.

Установившийся прогиб армированного элемента от действия равномерно распределенной нагрузки определяется выражением (см. формулу 63):

$$f(t) = \left( \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{E_d J_{np}} + \frac{3 q l^2}{16 G_d F_{np}} \right) K_{dl}^a. \quad (68)$$

Для балки прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$ , имеющей симметричное армирование в растянутой и сжатой зонах площадью  $F_a$ , имеем:

$$J_d = \frac{b \cdot h^3}{12} \text{ — момент инерции древесины; } J_a = \frac{2 \cdot F_a \cdot h^2}{4} \text{ — момент инерции арматуры;}$$

$$\frac{J_a}{J_d} = \frac{2F_a h^2 12}{4bh^3} = \frac{2F_a 3}{bh} = 3\mu; \quad m_1 = \frac{E_a J_a}{E_d J_d} = 3m\mu, \quad (69)$$

где  $\mu = \frac{\sum F_a}{bh}$  — коэффициент армирования;

$n = E_a/E_d$  — коэффициент, учитывающий соотношение расчетных модулей упругости арматуры и древесины.

Подставляя выражение (69) в (51), получим:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{A_1 m_1}{1 + m_1} = \alpha_1 + \frac{A_1 3m\mu}{1 + 3m\mu}. \quad (70)$$

Таким образом, для симметрично армированного элемента прямоугольного сечения выражения (67) и (70) примут вид:

$$K_{дл}^a = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{A_1 \cdot 3m\mu}{1 + 3m\mu}} \leq 1; \quad (71)$$

$$K_{дл}^a = \frac{A_1 + \alpha_1}{\beta_1} = \frac{A_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \frac{A_1 \cdot 3m\mu}{1 + 3m\mu}} \geq 1. \quad (72)$$

Подставляя выражения (34) и (35) в (71) и (72), получим:

$$K_{дл}^a = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{A_1 \cdot 3m\mu}{1 + 3m\mu}} = \frac{E_d(t)(1 + 3m\mu)}{E_d(t) + E_d \cdot 3m\mu} = \frac{1 + 3m\mu}{1 + 3m\mu m_{дл}}^{-1}; \quad (73)$$

$$K_{дл}^a = \frac{A_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \frac{A_1 \cdot 3m\mu}{1 + 3m\mu}} = \frac{E_d(1 + 3m\mu)}{E_d(t) + E_d \cdot 3m\mu} = \frac{1 + 3m\mu}{m_{дл} + 3m\mu} \geq 1, \quad (74)$$

где  $m_{дл} = E_d(t)/E_d$ .

Полученные выражение (73) и (74) показывают, что значения коэффициентов  $K_{дл}^a$  и  $K_{дл}^a$  зависят от коэффициента армирования сечения упругих характеристик древесины и арматуры (рис. 2.10–2.11).

Коэффициент  $K_{дл}^a$  учитывает снижения напряжений в древесине, а  $K_{дл}^a$  — увеличение напряжений в арматуре при изгибе армированных элементов длительно действующей нагрузкой.

Приведенные выше формулы описывают работу армированных деревянных изгибаемых элементов в области затухающей ползучести. При статических нагрузках, превышающих предел длительной несущей способности, рост деформаций во времени неизбежно завершается разрушением конструкции.

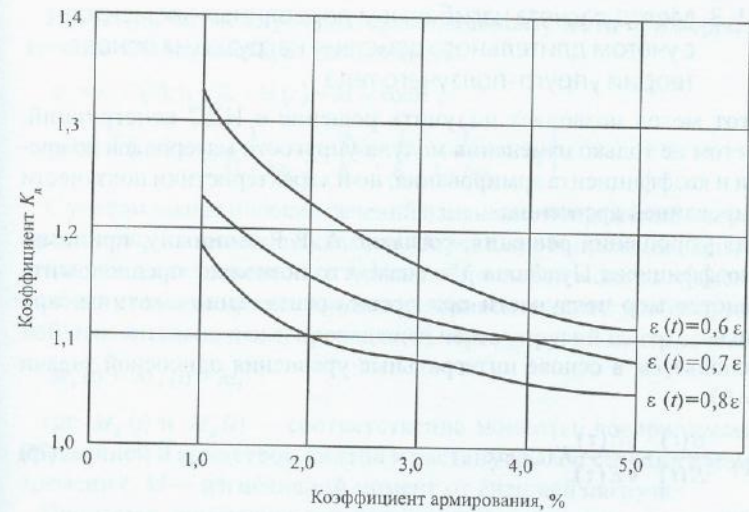


Рис. 2.10. Зависимость коэффициентов перераспределения усилий в арматуре от коэффициента армирования

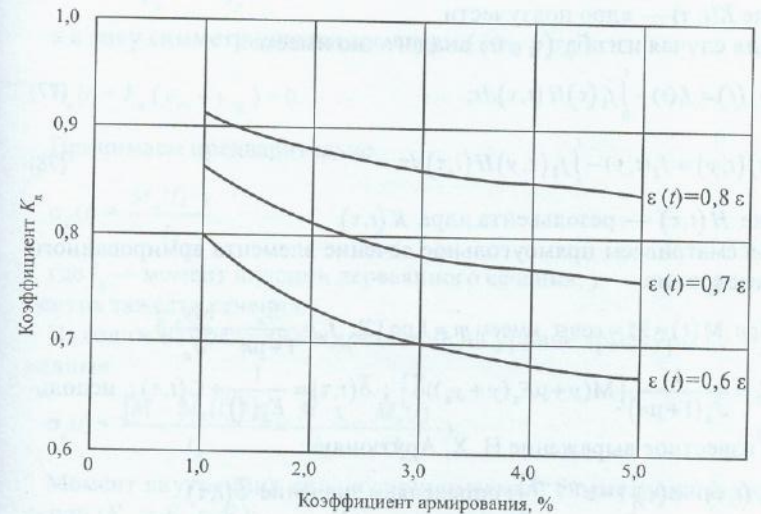


Рис. 2.11. Зависимость коэффициентов перераспределения усилий в древесине от коэффициента армирования

### 2.11.3. Метод расчета изгибаемых деревянных элементов с учетом длительного действия нагрузки на основе теории упруго-ползучего тела

Этот метод позволяет получить решение о НДС конструкций, с учетом не только изменения модуля упругости материалов во времени и коэффициента армирования, но и характеристики ползучести армированной древесины.

Для упрощения решения, согласно А. Р. Ржаницыну, принимаем коэффициент Пуассона  $\mu = \text{const}$ , что позволяет предположить равенство мер ползучести при осевом растяжении-сжатии и при сдвиге.

Используем в основе интегральные уравнения одноосной задачи ( $\tau_1 = 0$ ):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau \quad (75)$$

или

$$\frac{\sigma(t)}{E(t)} = E(t) - \int_0^t E(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (76)$$

где  $K(t, \tau)$  — ядро ползучести.

Для случая изгиба ( $\tau_1 = 0$ ) аналогично имеем:

$$\sigma_a(t) = f_1(t) - \int_0^t f_1(\tau) H(t, \tau) d\tau; \quad (77)$$

$$\sigma_d(t, y) = f_2(t, y) - \int_0^t f_2(\tau, y) H(t, \tau) d\tau, \quad (78)$$

где  $H(t, \tau)$  — резольвента ядра  $K(t, \tau)$ .

Рассматриваем прямоугольное сечение элемента армированного симметрично.

При  $M(t) = M = \text{const}$  имеем  $m = 1$  по [2];  $f_1 = \frac{E_d}{1 + \mu n} - \frac{M y_a}{J_d} \bar{\delta}$ ,

$f_2 = \frac{1}{J_d (1 + \mu n)} [M(y + \mu E_a (y + y_a)) \bar{\delta}]$ ;  $\bar{\delta}(t, \tau) = \frac{1}{E_a(\tau)} + C(t, \tau)$ ; исполь-

зуя известное выражение Н. Х. Арутюняна:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \text{ определяем значение } \bar{\delta}(t, \tau).$$

При  $E_d = \text{const}$ ;  $E_d(\tau) = E_d (1 + \delta \varphi_\tau)$ ,

где  $\delta$  — опытный параметр не зависящий от времени.

Известно, что между характеристикой ползучести  $\varphi$  и мерой ползучести  $C(t)$  существует зависимость:

$$\varphi_t = E_d C(t); \tau_1 = 0; M(t) = M = \text{const},$$

$$\text{тогда } \bar{\delta}(t, \tau) = \frac{1}{E_d (1 + \delta \varphi_\tau)} + \frac{\varphi_\tau}{E_d} = \frac{1}{E_d} \left( \frac{1}{1 + \delta \varphi_\tau} + \varphi_\tau \right). \quad (79)$$

С учетом закона плоских сечений изменение напряжений в сечении происходит по линейному закону. Определим напряжения в изгибаемом элементе от внешнего момента  $M$  в любой момент времени из условия равенства моментов, воспринимаемых арматурой и деревянной относительно оси  $z$ , проходящей через упругий центр сечения:

$$M_a(t) + M_d(t) = M, \quad (80)$$

где  $M_d(t)$  и  $M_a(t)$  — соответственно моменты, воспринимаемые древесиной и арматурой сжатой и растянутой зон сечения в момент времени  $t$ ;  $M$  — изгибающий момент от внешней нагрузки

Принимая допущение, что напряжения в сечении изменяются по линейному закону:

$$\sigma_a(t) = \frac{N_a(t)}{F_d} + \frac{M_a(t)}{I_d} \cdot y, \quad (81)$$

а в силу симметричности арматуры ( $y_{ac} = \sigma_{ap}$ )

$$N_a(t) = F_a (y_{ac} - y_{ap}) = 0. \quad (82)$$

Принимаем предварительно

$$\sigma_d(t) = \frac{M_d(t) \cdot y}{I_d}, \quad (83)$$

где  $I_d$  — момент инерции деревянного сечения;  $y$  — расстояние от центра тяжести сечения.

Находим напряжения в древесине на уровне арматуры ( $y = y'$ ), равные

$$\sigma_a(t) = \frac{[M - M_a(t)] \cdot y}{I_d} = \frac{M \cdot y}{I_d} - \frac{M_a(t)}{I_d} \cdot y. \quad (84)$$

Момент внутренних сил, воспринимаемый симметричной арматурой ( $F_{ap} = F_{ac} = F_a$ ):

$$M_a(t) = 2y F_a \sigma_a(t). \quad (85)$$

Подставляя значение  $M_a(t)$  в (81), имеем:

$$\sigma_d(t) = \frac{M}{I_d} \cdot y - \frac{2F_a \sigma_a(t)}{I_d} \cdot y^2.$$

Разделим вторую часть выражения на  $F_d$  и учтем, что

$$\mu = 2F_a / F_d \cdot F_a = \mu \cdot F_d \cdot r^2 = \frac{I_d}{F_d}$$

( $r$  — радиус инерции сечения древесины,  $\mu$  — коэффициент армирования)

$$\frac{\frac{2F_a}{F_d} \sigma_a(t)}{\frac{I_d}{F_d}} \cdot y^2 = \frac{\mu \sigma_a(t)}{r^2} \cdot y^2.$$

Получаем:

$$y_d(t) = \frac{M}{I_d} y - \mu \sigma_a(t) \frac{y^2}{r^2}. \quad (86)$$

Обозначим  $y^2 / r^2 = \rho$ , получаем:

$$\sigma_d(t) = \frac{M}{I_d} \cdot y - \mu \cdot \rho \cdot \sigma_a(t). \quad (87)$$

Продифференцируем уравнение (81) по  $t$ :

$$\frac{d\sigma_d(t)}{dt} = -\mu \cdot \rho \cdot \frac{d\sigma_a(t)}{dt}. \quad (88)$$

Уравнение совместности деформации арматуры и древесины на уровне нижней (верхней) арматуры имеет вид:

$$\frac{\sigma_a(t)}{E_a} = \frac{\sigma_d}{E_d} + \frac{f(\sigma_d)\varphi_t}{E_d} + \int_0^t \left\{ \frac{1}{E_d(\tau)} \frac{d\sigma_d(\tau)}{d\tau} + \frac{df[\sigma_d(\tau)]}{d\tau} \frac{\varphi_t - \varphi_\tau}{E_d} \right\} dt, \quad (89)$$

где  $E_d$  — начальный модуль упругости древесины в момент загрузки;  $\varphi_t$  — отношение деформации ползучести в момент  $t$  к начальной упругой деформации — характеристика ползучести.

В теории упруго-ползучего тела обычно принимают

$$E_d(\tau) = E_d(1 + \delta \cdot \varphi_\tau), \quad (90)$$

где  $\delta$  — опытные параметры, не зависящие от времени.

Известно, что между характеристикой ползучести  $\varphi_t$  и мерой ползучести  $C(t)$  существует зависимость:

$$\varphi_t = E_d \cdot C(t). \quad (91)$$

Дифференцируя (34) по  $t$  и выражая

$$\frac{d\sigma_a(t)}{dt} \text{ через } \frac{d\sigma_d(t)}{dt}, \quad (92)$$

на основании равенства (88) получаем:

$$d\sigma_a(t) \left[ \frac{1}{E_d(t)} + \frac{1}{E_d \mu \rho} \right] = -\frac{1}{E_d} f[\sigma_d(t)] d\varphi_t. \quad (93)$$

Для разделения переменных используем (90):

$$E_d(t) = E_d(1 + \delta \cdot \varphi_t),$$

тогда имеем:

$$\frac{d\sigma_d(t)}{f[\sigma_d(t)]} = -\frac{d\varphi_t}{E_d \left[ \frac{1}{E_d(1 + \delta\varphi_t)} + \frac{1}{E_d \mu \rho} \right]}. \quad (94)$$

Интегрируя (94) и принимая нелинейную функцию Н. Х. Арутюняна [8], получаем:

$$f[\sigma_d(t)] = \sigma_d(t) + \beta_0 \sigma_d^2(t), \quad (95)$$

где  $\beta_0$  — функция уровня напряжений.

Находим напряжения в древесине на уровне верхней (нижней) арматур в произвольный момент времени.

$$\sigma_d(t) = \left[ \frac{e^{-\xi\varphi_t}}{1 + \beta_0 \sigma_d (1 - e^{-\xi\varphi_t})} \right] \sigma_d, \quad (96)$$

где  $\sigma_d$  — определяется на момент загрузки по упругой стадии.

Обозначим переменную часть выражения (96) как коэффициент влияния  $K_d$ , а конечное значение, соответствующее  $t = \infty$ , как  $K_d(t)$ , имеем

$$K_d = \left[ \frac{e^{-\xi\varphi_t}}{1 + \beta_0 (\sigma_d - e^{-\xi\varphi_t})} \right]; \quad (97)$$

$$\sigma_d(t) = \sigma_d K_d(t). \quad (98)$$



В целях упрощения примем выражение  $\xi$  по И. И. Улицкому:

$$\xi = n \mu / (1 + n \mu \cdot \rho).$$

В момент времени  $t = 0$  уравнение (87) принимает вид:

$$\sigma_a = \frac{M}{I_a} \cdot y - \mu \cdot \rho \cdot \sigma_a. \quad (99)$$

Вычитая (99) из (87), получим:

$$\sigma_a(t) - \sigma_a = \mu \cdot \rho \cdot [(\sigma_a - \sigma_a(t))],$$

откуда

$$\sigma_a(t) = \left[ \frac{1}{\mu \cdot \rho} \cdot (\sigma_a - \sigma_a(t)) + \sigma_a \right]. \quad (100)$$

С учетом (96) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_a - \sigma_a(t) &= \sigma_a - \frac{\sigma_a e^{-\xi \varphi_t}}{1 + \beta_0 (1 - e^{-\xi \varphi_t})} = \\ &= \frac{\sigma_a + \beta_0 \sigma_a^2 (1 - e^{-\xi \varphi_t}) - \sigma_a e^{-\xi \varphi_t}}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi_t})} = \\ &= \frac{(\sigma_a + \beta_0 \sigma_a^2) (1 - e^{-\xi \varphi_t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi_t})}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma_a = \sigma_a / n$ ,  $E_a / E_d = n$ , то после подстановки получаем:

$$\sigma_a - \sigma_d(t) = \frac{(n + \beta_0 \sigma_a) (1 - e^{-\xi \varphi_t})}{n + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi_t})} \cdot \frac{\sigma_a}{n}.$$

Это выражение подставляем в (2.73) и находим напряжение в арматуре в любой момент времени:

$$\sigma_a(t) = \sigma_a \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot \mu \cdot \rho} \cdot \frac{(n + \beta_0 \sigma_a) (1 - e^{-\xi \varphi_t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi_t})} \right]. \quad (101)$$

Аналогично, переменную часть выражения  $\sigma_a(t)$ , (101) обозначим как коэффициент влияния  $K_a$ , а его конечное значение ( $t = \infty$ ) через  $K_a(t)$ :

$$K_a(t) = \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot \mu \cdot \rho} \cdot \frac{(n + \beta_0 \sigma_a) (1 - e^{-\xi \varphi_t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi_t})} \right]; \quad (102)$$

$$\sigma_a(t) = \sigma_a K_a(t); \quad \sigma_0 = \sigma_a, \text{ при } t = 0. \quad (103)$$

При линейной ползучести древесины  $\beta_0 = 0$  соответственно

$$K_d(t) = e^{-\xi \varphi_t}; \quad (104)$$

$$K_a(t) = \left[ 1 + \frac{1}{n \mu \rho} \cdot (1 - e^{-\xi \varphi_t}) \right]. \quad (105)$$

При  $t = \infty$   $\varphi_t = \varepsilon^{\text{полз}} / \varepsilon_{\text{упр}}$ , по данным исследований при  $\sigma_d(t) \leq \sigma_{дл}$

значение  $\varphi_t = 0,17 - 0,25$ , или в среднем  $\varphi_t = 0,21$  [13].

Здесь  $\varphi_t$  — отношение деформаций ползучести к деформациям упругим (на момент загрузки) и является, по сути, функцией времени, однако для предварительных расчетов можно пользоваться численными значениями  $\varphi_t$ .

Для практических расчетов коэффициенты  $K_a(t)$  и  $K_d(t)$  удобно определять графически. На рис. 2.12 представлены графики  $K_a(t)$  и  $K_d(t)$  в зависимости от  $\varphi_t$  и  $\mu$ , построенные по формулам (93) и (97).

Для прямоугольного симметрично армированного сечения выражение  $\xi = n \mu / (1 + n \mu \cdot \rho)$  упрощается:

$$\rho = \frac{y^2}{r^2} = 3, \quad y = 0,5h, \quad \mu = 2F_a / F_d;$$

$$\xi = n \mu / (1 + 3 n \mu).$$

Предельные значения коэффициентов влияния  $K_a(t)$  и  $K_d(t)$  зависят от уровня напряжений, коэффициента армирования, деформаций ползучести и времени действия нагрузки.

Строго говоря, значение  $\beta$  является функцией уровня напряжений,  $\beta = 0$  соответствует линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Введение в решение  $\beta$  как функции времени значительно усложняет решение дифференциальных уравнений ползучести, поэтому будем и далее считать  $\beta$  постоянной величиной ( $\beta = \beta_0$ ).

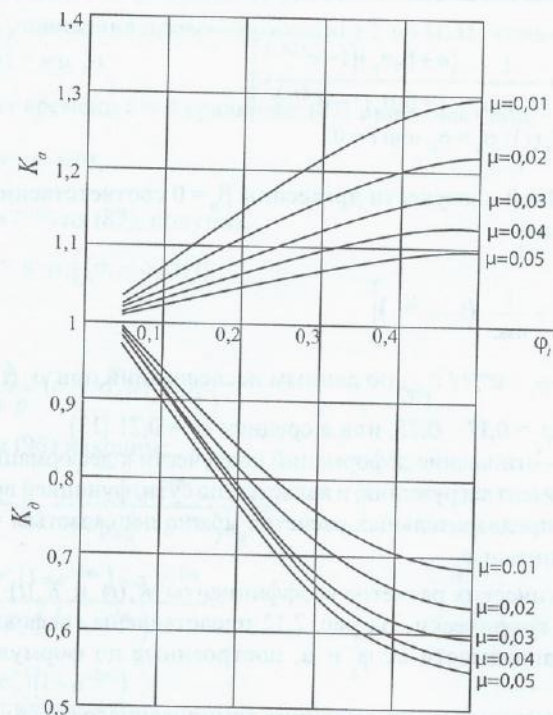


Рис. 2.12. Зависимость изменения коэффициентов  $K_a$  и  $K_d$  от коэффициента армирования и характеристики ползучести древесины  $\mu$ .

В общем случае прогиб армированного деревянного элемента во времени равен:

$$f(t) = f_M(t) + f_Q(t). \quad (106)$$

Для симметрично армированных прямоугольных сечений, используя выражения для  $\sigma_a(t)$  и  $\sigma_g(t)$ , получим выражения кривизны изгибаемого элемента при деформации элемента длиной, равной  $l$ .

Из подобия  $\triangle ABC$  и  $\triangle OF$  имеем:

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\varepsilon' + \varepsilon}{h}; \quad \frac{1}{r_k} = \frac{2\varepsilon}{h}, \text{ поскольку } \varepsilon + \varepsilon';$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a} \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot \mu \cdot \rho} \frac{(n + \beta_0 \sigma_a)(1 - e^{-\varphi t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\varphi t})} \right]; \quad (107)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a = \frac{\sigma_a(t)}{E_a(t)} = \frac{\sigma_a \cdot e^{-\varphi t}}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\varphi t}) E_d(t)}; \quad (108)$$

$$\frac{1}{r_k} = \frac{2\sigma_a}{E_a h} \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot \mu \cdot \rho} \frac{(n + \beta_0 \sigma_a)(1 - e^{-\varphi t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\varphi t})} \right]; \quad (109)$$

Известно:

$$f_M = \frac{1}{r_k} S l^2, \quad (110)$$

где  $S$  — коэффициент, учитывающий схему нагружения.

Имеем:

$$f_M = \frac{2\sigma_a}{E_a h} K_a(t) S l^2. \quad (111)$$

Прогиб от деформаций сдвига по известному выражению:

$$f_Q = \int_0^l \frac{\bar{Q}(x) Q(x, t)}{G_g \cdot F_{np}} dx, \quad (112)$$

$$f_Q = \int_0^l Q(x) \gamma dx \quad (113)$$

или через изгибающий момент и коэффициент  $K$ :

$$f_Q = KM(x) / GF_{np}, \quad (114)$$

где  $K$  — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нормальных напряжений:

$$K = \frac{F_{np}}{I_{np}} \int_0^l \frac{S^2(y)}{b(y)} dy. \quad (115)$$

$$f = f_0 \left( 1 + C \frac{h^2}{l^2} \right) K_a(t);$$

$$f = f_q + f_Q.$$

Для частного случая загрузки в виде равномерно распределенной нагрузки получим:

$$f_Q = \frac{5 q \cdot l^2 K_a(t)}{16 G_{\tau} F_{np}}.$$

Общий прогиб равен:

$$f = \left\{ \frac{5 \sigma_a l^2}{24 E_a h} \left[ 1 + \frac{1}{n \cdot \mu \cdot \rho} (1 - e^{-\varphi t}) \right] + \frac{5 q l^2}{16 G_r F_{np}} \frac{1/e^{-\varphi t}}{1 + \beta_0 \sigma_d (1 - e^{-\varphi t})} \right\} \cdot K_a(t), \quad (116)$$

где  $l$  — пролет элемента;  $q$  — равномерно распределенная по длине пролета нагрузка.

#### Инженерный метод расчета

При проектировании армированных изгибаемых элементов целью расчета является определение наибольших (конечных) значений напряжений и прогибов, что позволяет упростить расчетные формулы, используя предельные значения характеристик древесины при длительном действии нагрузки.

С этой целью выделим в переменные части и соответственно обозначим:

- $K_d(t)$  — коэффициент влияния, учитывающий уменьшение напряжений в древесине;
- $K_a(t)$  — коэффициент влияния, учитывающий рост напряжений в арматуре.

Выражение (96) запишем в виде:

$$K_d(t) = \frac{e^{-\varphi t}}{1 + \beta_0 \sigma_d (1 - e^{-\varphi t})}; \quad (117)$$

$$\sigma_d(t) = \sigma_d \cdot K_d(t),$$

$\sigma_d$  — напряжение при мгновенном (начальном) приложении нагрузки.

Выражение (97):

$$K_a(t) = \left[ 1 + \frac{1}{n \mu \rho} \frac{(n + \beta_0 \sigma_a)(1 - e^{-\xi \varphi t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-\xi \varphi t})} \right]; \quad (118)$$

$$\sigma_a(t) = \sigma_a K_a(t).$$

При линейной ползучести  $\beta_0 = 0$

$$K_d(t) = e^{-\varphi t}; \quad K_a(t) = \left( 1 + \frac{1 - e^{-\varphi t}}{\mu \rho \cdot n} \right). \quad (119)$$

По данным экспериментальных исследований предельное значение в среднем равно  $\varphi_t = m = 0,22 - 0,35$ .

$$\xi = n \mu / (1 + n \mu \cdot \rho). \quad (120)$$

При  $\varphi_t = 0,21$

$$K_d(t) = \frac{e^{-0,21 t}}{1 + \beta_0 \sigma_d (1 - e^{-0,21 t})}; \quad (121)$$

$$K_a(t) = \left[ 1 - \frac{1}{n \mu \rho} \frac{(n + \beta_0 \sigma_a)(1 - e^{-0,21 t})}{1 + \beta_0 \sigma_a (1 - e^{-0,21 t})} \right]. \quad (122)$$

Формулы для  $\sigma_a(t)$  и  $\sigma_d(t)$  принимают вид:

$$\sigma_a(t) = \frac{M \cdot n}{W_{np}} K_a(t) \leq R_a / \gamma_n; \quad (123)$$

$$\sigma_d(t) = \frac{M}{W_{np}} K_d(t) \leq R_d / \gamma_n.$$

Обозначения в формулах при определении геометрических характеристик элементов соответствуют приведенным в предыдущей главе.

Графическая зависимость  $K_d(t)$  и  $K_a(t)$  от коэффициента  $\mu$  и характеристики ползучести  $\varphi_t$  показана на рис. 2.12.

Практический расчет выполняется аналогично приведенному в п. 2.13.2.

Сравнение значений  $K_d(t)$  и  $K_a(t)$ , вычисленных по формулам (108)–(109), со значениями  $K_{дл}^d$  и  $K_{дл}^a$ , вычисленными по формулам (73) и (74), показывает, что разница составляет 1,5–5%, то есть оба метода расчета дают сопоставимые результаты и могут быть использованы при расчете армированных деревянных конструкций.

В методе, изложенном в п. 2.13.2, влияние коэффициента ползучести учитывается через отношение  $E_d(t) / E_d$ , так как  $\varphi_t$  может быть представлен в виде:

$$\varphi_t = \frac{E_d - E_d(t)}{E_d} < 1,$$

то есть, с изменением  $E_d(t)$  от 0,8 до 0,5  $E_d$ , значение  $\varphi_t$  меняется в пределах от 0,2 до 0,5, что соответствует значениям коэффициента ползучести при длительном действии нагрузки и при  $\sigma_d(t) < \sigma_{дл}(t)$ .

## 2.11.4. Расчет АДК по предельным состояниям

Практическое приложение методов расчета рассмотрим на примере алгоритма расчета армированной деревянной балки. При этом используем коэффициенты влияния, учитывающие перераспределение усилий, приведенные в п. 2.2, как наиболее удобных при практических расчетах.

Расчет по двум группам предельных состояний согласно СНиП II-25-80\* ведется с учетом упругой работы материалов и включает следующие проверки:

**по первой группе** (с учетом раскрепления элементов каркаса от потери устойчивости):

1) прочности древесины по нормальным напряжениям в зоне максимальных усилий:

$$\frac{MK_{дл}^a}{W_{пр}} \leq R_n / \gamma_n; \quad (124)$$

2) прочности арматуры в зоне максимальных усилий:

$$\frac{M_n K_{дл}^a}{W_{пр}} \leq R_a / \gamma_n; \quad (125)$$

3) прочности опорных сечений по древесине на действие касательных напряжений:

$$\frac{QS_{пр} K_{дл}^a}{I_{пр} b_{рас}} < \frac{R_{ск}}{\gamma_n}; \quad (126)$$

4) прочности приопорных сечений по древесине на действие главных растягивающих напряжений при  $h/l < 1/18$  на расстоянии  $X = 0,65 h$  от опоры:

$$\sigma_{ра} = \left( \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_x^2} \right) \cdot K_{дл}^a < \frac{R_{ра}}{\gamma_n}; \quad (127)$$

5) прочности клевого соединения «арматура–древесина»:

$$\frac{QS_{пр}^a K_{дл}^a}{I_{пр} D_{рас}} < \frac{R_{ск}}{\gamma_n}; \quad (128)$$

**по второй группе предельных состояний:**

6) прогибов:

$$f(t) = f_0 (K_{сдв} + K_{ж}) K_{дл}^a = f_0 K \cdot K_{дл}^a. \quad (129)$$

В этих выражениях обозначены:

$M, Q$  — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении;  $I_{пр}, W_{пр}, S_{пр}$  и  $S_{пр}^a$  — приведенные (к древесине как к основному материалу) геометрические характеристики армированного сечения: соответственно момент инерции, момент сопротивления, статический момент сдвигаемой части сечения и статический момент арматуры относительно нейтральной оси;  $R_n, R_{ск}, R_{ра}$  — расчетное сопротивление древесины соответственно изгибу, скалыванию и растяжению под углом к волокнам;  $R_a$  — расчетное сопротивление арматуры;  $\gamma_n$  — коэффициент надежности по назначению;  $n$  — коэффициент, учитывающий соотношение расчетных модулей упругости арматуры и древесины;  $b_{расч}, D_{расч}$  — соответствующие расчетная ширина сечения и расчетная поверхность сдвига арматуры, равная 0,75 периметра длины клевого шва, соединяющего арматуру с древесиной;  $\sigma_x$  и  $\tau_x$  — соответственно нормальные и касательные напряжения в древесине на уровне  $(h - d_a) / 2$  от нейтральной оси на расстоянии  $x = 0,65 h$  от опоры;  $d_a$  — диаметр арматуры;  $\alpha$  — угол, определяющий направление главных растягивающих напряжений, находим из зависимости:

$$\alpha = 0,5 \arctg \frac{2\tau_x}{\sigma_x},$$

где  $\varphi$  — коэффициент, принимаемый по СНиП II-25-80\*;  $f$  — полный прогиб;  $f_0$  — прогиб балки в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $c$  — коэффициент, зависящий от соотношения изгибной и сдвиговой жесткостей и формы сечения [СНиП];  $h$  — высота сечения;  $l$  — пролет балки.

В формуле (129) коэффициент  $K = K_{сдв} + K_{ж}$  учитывает влияние сдвигающих усилий и изменение жесткости по длине элемента на величину прогиба.

Влияние изменения жесткости из-за упругих деформаций сдвига арматуры в зоне анкеровки на длине  $x_0$  от опор ранее было отмечено В. Бондиным [17, 18, 19].

В дальнейшем эта задача с учетом коэффициента армирования на жесткость армированных деревянных элементов постоянной и переменной по длине пролета жесткости была решена В. А. Репиным и В. Ю. Шуко при исследовании армированных балок с рациональным армированием, при котором арматура растянутой зоны размещается по длине балки по траекториям растягивающих деформаций.

При этом считается, что для изгибаемого армированного элемента прямоугольного сечения, нагруженного равномерно распределенной по длине пролета нагрузкой, мгновенный прогиб при  $t = 0$  равен:

$$f_0 = 5q\ell^4 / 384E_d J_{np}; \quad (130)$$

$K_{сдв}$  — коэффициент, учитывающий влияние деформаций сдвига от поперечной силы, равный:

$$K_{сдв} = 1 + C \left( \frac{h}{l} \right)^2 \cdot K_{\mu}, \quad (131)$$

где  $C = 19,2$  для прямоугольного сечения при  $G = 5000$  кгс/см<sup>2</sup>;  $E_d = 100\,000$  кгс/см<sup>2</sup>;  $K_{\mu}$  — коэффициент, учитывающий влияние количества арматуры в сечении, равный:

$$K_{\mu} = 1 + 0,133\mu; \quad (132)$$

$K_{ж}$  — коэффициент, учитывающий влияние изменения жесткости по длине пролета на расстоянии от опор, равном  $x_0 = 20$  да (длина зоны эффективной анкеровки), или при обрыве арматуры в пролете на расстоянии  $x_0$  от опор; может быть приближенно определен по формуле:

$$K_{ж} = 322\mu \left( \frac{x_0}{l} \right)^3 \left( \frac{h}{x_0} - 0,3 \right). \quad (133)$$

Анализ полученных выражений показывает, что вследствие влияния сдвигающих усилий и упругой податливости (сдвиг) арматуры в зоне анкеровки прогибы увеличиваются на 8–12%.

Для практических расчетов значение выражения в скобках  $K = K_{сдв} + K_{ж}$  может быть принято равным  $K = 1,10$ .

В случае, если не выполняется условие прочности (113), необходимо усиливать приопорное сечение вклеиванием наклонных (преимущественно) или поперечных стержней на участке длиной  $x = h$  от опор, способных воспринять часть сдвигающих усилий.

Пример расчета балки сдвойным симметричным армированием

**Задание.** Спроектировать однопролетную клееную армированную балку покрытия с параллельными поясами пролетом 18 м под рулонную кровлю по клефанерным плитам размером 1,5 × 6 м. Полная расчетная нагрузка  $q = 18$  кН/м, нормативная  $q_n = 14,4$  кН/м,  $\gamma_{qp} = 1,25$ . Постоянная нагрузка на балку (составляющая полной) 6 кН/м (включает собственный вес конструкции, покрытия и оборудования).

**Выполнение расчета.** Здание II класса ответственности по назначению, тогда  $\gamma_n = 0,95$  (СНиП 2.01.07–85). Условия эксплуатации: внутри отапливаемых помещений при температуре до 35 °С, с относительной влажностью воздуха от 60 до 75% (класс зданий А-2). При этих

условиях  $m_b = 1,0$  (СНиП II-25–80\*, табл. 5). Древесина балки — сосна 3-го сорта с расчетным сопротивлением  $R_n = 11$  МПа;  $R_{ск} = 1,5$  МПа, модуль упругости  $E_d = 10\,000$  МПа;  $E_d(t) = 6900$  МПа по СНиП II-25–80\*. Арматура из стали класса А-II с  $R_a = 280$  МПа. Расчетный пролет балки 17,7 м. Расчетный изгибающий момент:

$$M = q\ell^2 / 8 = 18 \cdot 17,7^2 / 8 = 704,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Поперечная сила на опоре } Q = q\ell / 2 = 18 \cdot 17,7 / 2 = 159,3 \text{ кН}.$$

В соответствии с величиной действующей нагрузки принимаем относительную высоту сечения балки  $h_0 / \ell = 1 / 17$ , или  $h_0 = 1,06$  м. Подбираем сечение из 33 досок толщиной 33 мм, тогда  $h_0 = 33 \cdot 0,033 = 1,089$  м. Ширину сечения принимаем  $h_0 / 6 = 0,17$  м. Геометрические характеристики принятого сечения равны:

$$J_d = 17 \cdot 108,9^3 / 12 = 1\,829\,579 \text{ см}^4;$$

$$W_d = 2 \cdot 1\,829\,579 / 108,9 = 33\,601 \text{ см}^3;$$

$$S_d = 17 \cdot 108,9^2 / 8 = 25\,201 \text{ см}^3.$$

Определяются значения требуемых моментов сопротивления инерции:

$$W_{тр} = M \gamma_n / R_n = 704,9 \cdot 0,95 \cdot 10^3 / 9,02 = 74\,241 \text{ см}^3;$$

$$R_n = 11 m_b m_c m_{cl} = 11 \cdot 1 \cdot 0,82 \cdot 1 = 9,02 \text{ МПа};$$

$$J_{тр} = 5 \cdot 704,9 \cdot 10^3 \cdot 1770^2 \cdot 0,95 / 48 \cdot 1,25 \cdot 10^4 (1/300) = 3\,814\,760 \text{ см}^4.$$

Тогда требуемое значение коэффициентов армирования равно [по формулам (12) и (13)]:

$$\mu_{тр}^W = (74\,241 - 33\,601) / 3 \cdot 20 \cdot 33\,601 = 0,02;$$

$$\mu_{тр}^J = (3\,814\,760 - 1\,829\,579) / 3 \cdot 20 \cdot 1\,829\,579 = 0,018.$$

Определяется требуемая площадь арматуры:

$$F_a^{тр} = 0,02 \cdot 17 \cdot 108,9 = 37,026 \text{ см}^2.$$

Принимаем в качестве арматуры 4 Ø 36 А-II с  $F_a = 40,716 \text{ см}^2 > F_a^{тр}$

Арматурные стержни размещаются по сечению балки симметрично по 2 Ø 36 в сжатой и растянутой зонах в отдельных пазах.

Геометрические характеристики сечений балки, армированной 4 Ø 36 А-II, следующие:

$$\mu = 40,716 / 17 \cdot 108,9 = 0,022;$$

$$J_{np} = bh_0^3 (1 + 3 n \mu) / 12 = 17 \cdot 108,9^3 (1 + 3 \cdot 20 \cdot 0,022) / 12 = 4\,344\,624 \text{ см}^4;$$

$$W_{np} = 2 J_{np} / h_0 = 2 \cdot 4\,344\,624 / 108,9 = 77\,954 \text{ см}^3;$$

$$S_{np} = bh_0^2 (1 + 2 n \mu) / 8 = 17 \cdot 108,9^2 (1 + 2 \cdot 20 \cdot 0,022) / 8 = 47\,377 \text{ см}^3;$$

$$S_{np}^a = n F_a h_0 / 4 = 20 \cdot 40,716 \cdot 108,9 / 4 = 22\,170 \text{ см}^3;$$

$$D_{расч} = 0,9 m_{ст} 2\pi (d_a + 0,5) / 3 = 0,9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,14 (3,6 + 0,5) / 3 = 15,46 \text{ см},$$

где 0,9 — коэффициент условий работы одиночно вклеенных стержней;  $m_n$  — количество стержней в ряду;  $D = 2\pi(d_a + 0,5) / 3$  — периметр клеевого шва;  $K_{дл}^a = 1,15$  при  $\frac{E_d(t)}{E_d^a} = 0,69$  по формуле (74) и  $K_a(t) = 1,13$  по формуле (2.81) или графически на рис. 2.12 при  $\varphi_n = 0,21$ ,  $K_{дл}^a = 1,15$ ,  $K_{дл}^a = 0,796$ .

Проверяется несущая способность балки по формулам (2.52)–(2.56):

1) по древесине:

$$704,9 \cdot 10^3 \cdot 0,796 / 77\,954 = 7,19 < 9,02 / 0,95 = 9,49 \text{ МПа};$$

2) по арматуре:

$$704,9 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 1,15 / 77\,954 = 207,9 < R_s / \gamma_n = 280 / 0,95 = 294,7 \text{ МПа};$$

3) по древесине на действие касательных напряжений в опорных сечениях:

$$159,3 \cdot 47\,377 \cdot 0,796 / 4\,244\,624 \cdot 17 = 0,84 < R_{сх} / \gamma_n = 1,5 / 0,95 = 1,58 \text{ МПа};$$

4) по клеевому шву, соединяющему арматуру с древесиной, на действие касательных напряжений:

$$159,3 \cdot 10^6 \cdot 22\,170 \cdot 1,15 / 4\,244\,624 \cdot 10^8 \cdot 15,46 = 0,62 < 1,58 \text{ МПа};$$

5) на действие главных растягивающих напряжений при  $X = 0,65^* \times 1,13 = 0,735 \text{ м}$

$$\sigma_{ра} = \left( \frac{1,44}{2} + \sqrt{\left(\frac{1,44}{2}\right)^2 + 0,96^2} \right) \cdot 1,15 = 1,92 < \frac{R_{рх}}{\gamma_n} = \frac{1,85}{0,95} = 1,95 \text{ МПа}.$$

Здесь  $M = qx(\ell - x) / 2 = 18 \cdot 0,735(17,7 - 0,735) / 2 = 112,2 \text{ кНм};$

$$\sigma_x = 112,2 \cdot 10^3 / 77\,954 = 1,44 \text{ МПа};$$

$$Q_x = q(\ell/2 - x) / 2 = 18(17,7/2 - 0,735) = 146,1 \text{ кН};$$

$$\tau_x = Q_x S_{сп} / J_{сп} b = 146,1 \cdot 47\,377 \cdot 10 / 4\,244\,624 \cdot 17 = 0,96 \text{ МПа};$$

$$\alpha = 0,5 \arctg 2\tau_x / \sigma_x = 0,5 \arctg 2 \cdot 0,96 / 1,44 = 26,6^\circ.$$

При  $26,6^\circ$  по графику (см. рис. 2.11) для древесины третьего сорта  $\sigma_{р,а} = 1,85 \text{ МПа}.$

Проверяется прогиб балки по формуле (83):

$$f = 4,34 \cdot 1,15 \cdot 1,10 \cdot (1 + 19,2 \cdot 108,9^2 / 1770^2) = 5,86 < f_n / \gamma_n = 6,32 \text{ см};$$

$$f_0 = 5 \cdot 14,4 \cdot 1770^4 / 384 \cdot 10^3 \cdot 4\,244\,624 = 4,34 \text{ см};$$

$$C = 19,2 \text{ (прил. 4, табл. 3 СНиП 11-25-80*)};$$

$K_1 = 1,10$  — коэффициент, учитывающий изменение жесткости по длине зоны анкеровки арматуры.

Условие прочности и жесткости балки с принятым количеством арматуры выполняется.

### 2.11.5. Расчет предельной прочности армированных деревянных изгибаемых элементов при длительном действии нагрузки

Наибольшую нагрузку, которую может воспринять армированный деревянный изгибаемый элемент, характеризует предел длительной прочности.

Теоретически оценку длительной прочности армированного деревянного изгибаемого элемента (при симметричном армировании) проводим на основе идеализированных (спрямленных) диаграмм работы древесины на растяжение и сжатие вдоль волокон (диаграммы Белянкина–Прагера) (рис. 2.13) [12].

Диаграммы построены в предположении того, что в сжатой зоне древесины напряжения изменяются в начальный период после загрузки по линейному закону до величины  $\sigma_{дл,с}$ , после чего при постоянном значении напряжений растут только деформации. В растянутой зоне напряжения изменяются по линейному закону до величины  $\sigma_{дл,р}$ .

Внешнему изгибающему моменту противодействует момент внутренних сил  $M_{дл}$ , который соответствует пределу длительной прочности армированного деревянного элемента.

Рассмотрим элемент с двойным симметричным армированием (рис. 2.13), диаграмму Белянкина–Прагера (Прендтля).

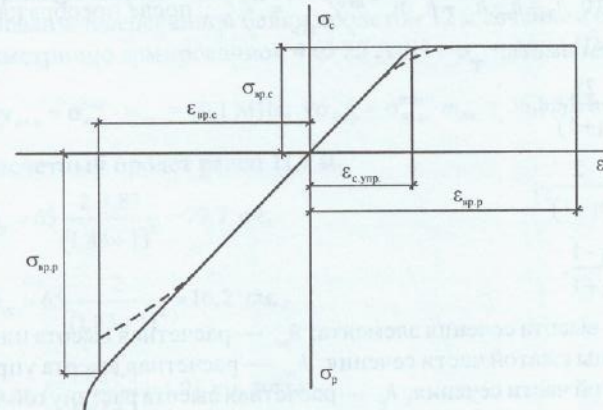


Рис. 2.13. Спрямоленные диаграммы работы древесины (диаграмма Белянкина–Прагера)

Нормальные усилия, действующие в сечении элемента, равны:  
а) в сжатой и растянутой арматуре:

$$N_{ас}(t) = \sigma_{\tau} F_{ас} \text{ и } N_{ар}(t) = \sigma_{\tau} F_{ар}$$

б) в сжатой и растянутой зонах сечения

$$N_{дл} = \int_{F_{yc}} \sigma_c dF_{yc} + \int_{F_{nc}} \sigma_{дл.с} dF_{nc} = b \int_0^{h_{yc}} \sigma_c dy_{yc} + b \int_{h_{nc}}^{h_{nc}+h_{yc}} \sigma_{дл.с} dy_{nc}$$

усилие, воспринимаемое сжатой зоной сечения, равное сумме усилий, воспринимаемых упругой и пластической частями.

$$\overline{N}_{дл.р} \int_{F_{рп}} \sigma_p dF_{рп} = \int_0^{h_p} \sigma_p dy_p$$

усилие, воспринимаемое древесиной растянутой зоны.

Из условия равновесия внутренних усилий:

$$N_{ас} + N_{дл.с} - N_{дл.р} - N_{ар} = 0, \quad (134)$$

учитывая, что

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{дл.с} \cdot y_{yc}}{h_{yc}} \text{ и } \sigma_p = \frac{\sigma_{дл.р} \cdot y_p}{h_p},$$

после преобразования получим

$$\sigma_{дл.с} (h_{yc} + 2h_{nc}) - \sigma_{дл.р} h_p = 0. \quad (135)$$

Зная, что  $h_{nc} = h_{yc} h - h$  и  $\frac{\sigma_{дл.с}}{\sigma_{дл.р}} = \frac{h_{yc}}{h_p}$ , после преобразования

(121) будем иметь:

$$h_p = h \frac{2\eta}{(\eta+1)^2}; \quad (136)$$

$$h_{yc} = h \frac{2}{(\eta+1)^2}; \quad (137)$$

$$h_{nc} = h \frac{\eta-1}{\eta+1}, \quad (138)$$

где  $h$  — высота сечения элемента;  $h_{nc}$  — расчетная высота пластической зоны сжатой части сечения;  $h_{yc}$  — расчетная высота упругой зоны сжатой части сечения;  $h_p$  — расчетная высота растянутой части

сечения;  $\eta = \frac{\sigma_{дл.р}^{\min}}{\sigma_{дл.с}^{\min}}$  — отношение вероятных минимальных значений длительной прочности древесины при растяжении и сжатии.

Условие равновесия армированного элемента запишем в виде:

$$M = M_{дл} = M_{дл.с} + M_{дл.р} + M_{ас} + M_{ар}. \quad (139)$$

Здесь моменты, воспринимаемые арматурой сжатой и растянутой зон:

$$M_{ас} = N_{ас} \cdot h_{ос} = \sigma_{\tau} F_{ас} (h_{nc} - a_s + h_{yc}); \quad (140)$$

$$M_{ар} = N_{ар} \cdot h_p = \sigma_{\tau} F_{ар} \cdot h_p.$$

Моменты, воспринимаемые древесиной сжатой и растянутой зон:

$$M_{дл.с} = \int_{F_{yc}} \sigma_c y_c dF_{yc} + \int_{F_{nc}} \sigma_{дл.с} y_c dF_{nc} = \frac{1}{3} \sigma_{дл.с} b \left( h_{yc}^2 + \frac{3}{2} h_{nc}^2 + 3h_{nc} h_{yc} \right);$$

$$M_{дл.р} = \int_{F_{рп}} \sigma_p y_p dF_{рп} = \frac{1}{3} \sigma_{дл.р} b h_p^2. \quad (141)$$

Подставляя переменные значения внутренних моментов в выражение условия равновесия (6), получим:

$$M_{дл} = \sigma_{дл.с} b \left[ \frac{h_{yc}^2 + \eta h_p^2 + \frac{3h_{nc}}{2 \cdot (h_{nc} + h_{yc})}}{3} \right] + \frac{\sigma_s h_0 F_a}{2}. \quad (142)$$

Полученное выражение позволяет определить конкретную величину предела длительной прочности армированного деревянного элемента.

**Пример.** Определить предел длительной прочности клееной армированной деревянной балки пролетом 12 м сечением 650 x 120 мм симметрично армированной 4 Ø 25 А-III с  $\sigma_{\tau} = 400$  МПа.

$$\sigma_{дл.с} = \sigma_{вр.с}^{\min} \cdot m_{дл} = 20,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_{дл.р} = \sigma_{вр.р}^{\min} \cdot m_{дл} = 36,8 \text{ МПа}.$$

Расчетный пролет равен 11,7 м

$$h_p = 65 \frac{2 \cdot 1,83}{(1,83+1)^2} = 79,7 \text{ см};$$

$$h_{yc} = 65 \frac{2}{(1,83+1)^2} = 16,2 \text{ см};$$

$$h_{nc} = 65 \frac{1,83-1}{1,83+1} = 1,91 \text{ см, тогда}$$

$$M_{дл} = 20,1 \cdot 12 \cdot \left[ \frac{15,2^2 + 1,83 \cdot 29,7^2 + \frac{3 \cdot 19,1}{2 \cdot (19,1+15,2)}}{3} \right] + \frac{400 \cdot 62,5 \cdot 19,63}{2} =$$

$$= 6 \, 470 \, 020 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

При испытаниях двух балок были получены величины разрушающих моментов, равны 5 800 370 и 5 211 100 кгс · см, то есть разница с теоретическими значениями составила соответственно 10,3 и 19,5%, при этом коэффициент запаса соответственно равен 2,220 и 1,996.

## 2.12. Расчет сжато-изгибаемых АДК

На сжатие с изгибом (внецентренное сжатие) работают элементы распорных конструкций (арки, рамы), а также колонны, стойки, верхние пояса ферм и т. п.

При одновременном действии на элемент сжимающей силы и изгибающего момента суммарный изгибающий момент равен:

$$\Sigma M = M + Nf, \quad (143)$$

где  $f$  — полный прогиб элемента от совместного действия изгибающего момента и продольной силы (рис. 2.14).

Значение полного прогиба определяем в предположении синусоидальной формы изогнутой оси элемента:

$$f(t) = f_0(t) / \left(1 - \frac{N}{N_{кр}(t)}\right). \quad (144)$$

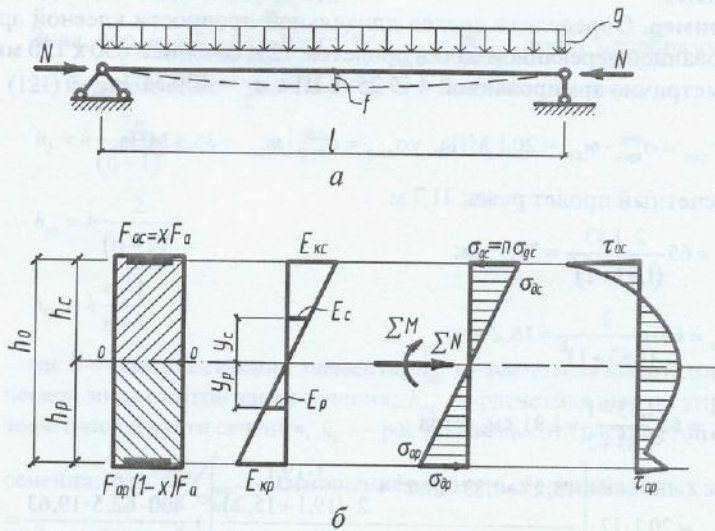


Рис. 2.14. К расчету сжато-изгибаемых АДК: а — расчетная схема; б — эпюры нормальных и касательных напряжений

Выражение в знаменателе представляет собой коэффициент, учитывающий увеличение изгибающего момента от действия продольной силы,  $N_{кр}(t)$  может принять значение:

$$N_{кр}(t) = \varphi_{кр} R_c F_{пр}.$$

Формула (143) может быть использована в случае когда продольная сила меньше критической, так как при  $N = N_{кр}(t)$  прогиб конструкции стремится к бесконечности. Для практических целей формула (143) дает достаточно точное решение, когда продольная сила действует в интервале  $0 \leq N \leq 0,8 N_{кр}(t)$ . В практике строительных конструкций значение продольной силы обычно не превышает  $0,5-0,6 N_{кр}(t)$ .

При этом значение приведенного коэффициента продольного изгиба равно:

$$\varphi_p = \sigma_{кр}(t) / \sigma_{вр.с}(t) = \pi^2 E_d(t) / \lambda_{пр}^2 \sigma_{вр.с}(t). \quad (145)$$

Зная, что  $E_d / \sigma_{вр.с} = E_d(t) / \sigma_{вр.с}(t) = 300$ , получим:

$$\varphi_{кр} = \frac{3000}{\lambda_{пр}^2} \text{ при } \lambda_{пр} > 70.$$

Здесь  $\lambda_{пр} = \ell_0 / \sqrt{J_{пр} / F_{пр}} = \eta \lambda$  — приведенная гибкость армированного элемента;  $\eta$  — коэффициент приведения гибкости.

При двойном симметричном армировании сечения  $\eta = \sqrt{1 + \eta\mu / 1 + 3\eta\mu}$ ;

при одиночном армировании сжатой зоны сечения  $\eta = 1 + \eta\mu / \sqrt{1 + 4\eta\mu}$ .

При  $\lambda_{кр} > 70 \varphi_{кр}$  определяем по известной зависимости:

$$\varphi_{пр} = 1 - 0,8 (\lambda_{пр} / 100)^2.$$

Значение коэффициента, учитывающего влияние дополнительного изгибающего момента определяется по формуле:

$$\xi_{пр} = 1 - N / \lambda_{пр} R_c F_{пр}. \quad (146)$$

Тогда полный прогиб элемента будет равен:

$$f(t) = f_0(t) / \xi_{пр}. \quad (147)$$

Наибольшие крайевые напряжения в древесине сжатой зоны будут равны:

$$\Sigma \sigma_d^с = N / F_{пр} + M / W_{пр}^с + Nf(t); \quad (148)$$



Запишем выражение (148) в виде условия равновесия, при  $\sigma_d^c = R_c$ , тогда:

$$N/R_c N_{кр} + M/W_{пр}^c R_c + Nf(t)/W_{пр}^c R_n \leq 1. \quad (149)$$

Решаем неравенство (149) относительно  $R_c$  и группируя члены, получим формулу для определения нормальных напряжений в сжатой зоне сечения, учитывая, что  $R_c/R_n = 1$ .

### 2.13. Расчет сжато-изгибаемых АДК при длительном действии нагрузки

Учитывая результаты расчета изгибаемых армированных деревянных элементов, оценку напряженно-деформированного состояния сжато-изгибаемых армированных деревянных элементов с учетом длительного действия нагрузки производим, используя математический аппарат теории упругой наследственности.

#### 2.13.1. Основные положения расчета изгибаемого армированного элемента при длительном действии нагрузки

Сложное напряженно-деформированное состояние (сжатие с изгибом) возникает, как правило, в элементах распорных строительных конструкций (арках, рамах), при внеузловом загрузении стержневых систем (верхние пояса ферм), колоннах и др.

Рассмотрим случай сжато-изгибаемого элемента при длительном действии поперечной нагрузки и продольной силы (рис. 2.15).

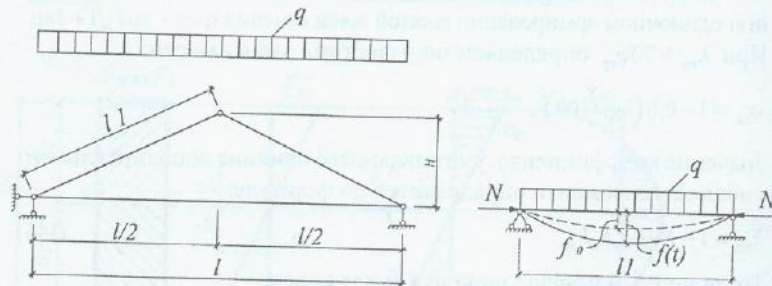


Рис. 2.15. Расчетная схема арки

Как известно, возможны два случая напряженно-деформированного состояния элемента при сжатии с изгибом:

- а) случай малых эксцентриситетов при  $e = M/N \leq r_{ядр}$ ;
- б) случай больших эксцентриситетов при  $e = M/N > r_{ядр}$ ,

где  $M$  — изгибающий момент,  $N$  — продольная сила,  $r_{ядр}$  — радиус ядра сечения.

Для большинства распорных систем (арки, рамы и т. п.) характерен случай больших эксцентриситетов. В этом случае эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении элемента двузначна, причем интенсивность напряжений в сжатой зоне выше, чем в растянутой (рис. 2.16) [2].

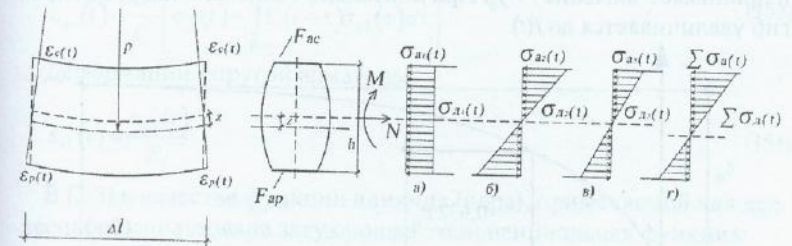


Рис. 2.16. Эпюры нормальных напряжений в поперечных сечениях армированного сжато-изгибаемого элемента, работающего в области линейной ползучести: а — от продольной силы; б — от изгибающего момента; в — от дополнительного изгибающего момента; г — суммарные напряжения

Как было рассмотрено выше (гл. 2), в основе расчета армированных деревянных элементов лежит решение упругих задач, поэтому решение статической задачи теории линейной ползучести может быть получено путем замены упругих постоянных интегральными соотношениями, например уравнениями Больцмана–Вольтерра [7, 8, 9].

При расчете деревянных армированных сжато-изгибаемых элементов с учетом длительного действия нагрузки считаем, что сечения при деформации в любой момент времени остаются плоскими; материалы работают в пределах упругих деформаций в течение времени; модули упругости древесины растянутой и сжатой зон сечения одинаковы и изменяются по одному закону в течение времени; изгибная жесткость арматуры по сравнению с жесткостью деревянного элемента мала и может не учитываться; соединение арматуры с древесиной обеспечивает их совместную работу в течение всего времени.

Рассматривая деформированный элементарный отрезок сжато-изгибаемого армированного деревянного элемента и определяя относительные деформации сжатия  $\epsilon_c^0$  и растяжения  $\epsilon_p^0$  в начальный период после загрузки и соответственно  $\epsilon_c(t)$  и  $\epsilon_p(t)$  в период

времени  $t$  через кривизну изогнутой оси элемента  $\rho$ , получим из уравнений равновесия внутренних сил внешним формулы для определения нормальных напряжений в древесине и арматуре (см. рис. 2.17).

При приложении нагрузки элемент получает начальный прогиб  $f_0$ . В момент приложения силы  $N$  прогиб элемента увеличивается и принимает значение  $f > f_0$ . При длительном действии нагрузки прогиб увеличивается до  $f(t)$ .

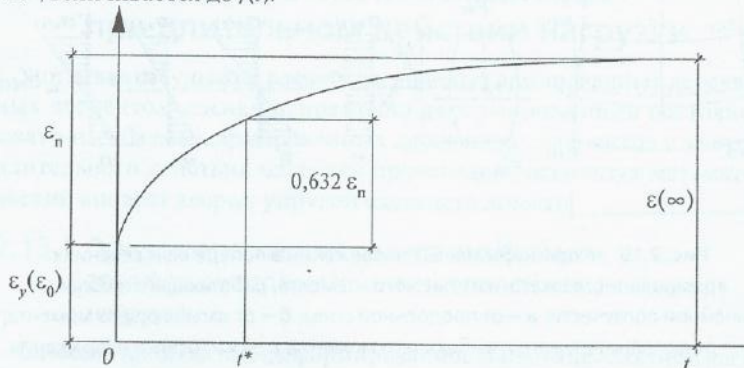


Рис. 2.17. Экспериментальная кривая ползучести древесины

Для учета ползучести древесины в армированных элементах при длительном действии нагрузки используем интегральное уравнение Больцмана–Вольтерра с функцией влияния, представленной в виде экспоненты.

### 2.13.2. Метод расчета на основе теории упругой наследственности

Дальнейший расчет ведем с применением принципа независимости действия, т. е. по отдельности определяем напряженно-деформированное состояние армированного деревянного элемента от внешней продольной силы и изгибающего момента, вызванного внешней поперечной нагрузкой.

Считаем внешней продольную силу  $N = N(t)$  приложенной в центре тяжести сечения (см. рис. 2.17). Определим значение нормальных напряжений в армированном сечении от действия силы  $N$ .

Условие равновесия внутренних усилий внешним во времени запишем в виде:

$$N = N_{ал}(t) + N_{ал}(t) = \sigma_{ал}(t)F_d + \sigma_{ал}(t)F_a. \quad (150)$$

При совместных деформациях древесины и арматуры имеем:

$$\varepsilon_{ал}(t) = \varepsilon_{ал}(t). \quad (151)$$

Деформации древесины в элементе с учетом ползучести запишем в виде уравнения Больцмана–Вольтерра:

$$\varepsilon_{ал}(t) = \frac{1}{E_d} \left[ \sigma_{ал}(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_{ал}(\tau) d\tau \right] \quad (152)$$

Деформации упругой арматуры:

$$\varepsilon_{ал}(t) = \frac{\sigma_{ал}(t)}{E_a}. \quad (153)$$

В (3.3) в качестве функции влияния (ядра), применяемой для древесины, использована затухающая экспоненциальная функция:

$$K(1-\tau) = A e^{-\alpha(1-\tau)}. \quad (154)$$

Значения входящих в ядро ползучести (154) коэффициентов  $A$  и  $\alpha$  равны:

$$A = \frac{E_d - E_d(t)}{E_d C_d}; \quad (155)$$

$$\alpha = \frac{E_d(t)}{E_d C_d}, \quad (156)$$

где  $E_d$  и  $E_d(t)$  — мгновенный и длительный модули упругости древесины;  $C_d$  — коэффициент времени релаксации.  $E_d$ ,  $E_d(t)$  и  $C_d$  называются реологическими постоянными древесины.

Реологические постоянные  $E_d$ ,  $E_d(t)$  и  $C_d$  определяются по экспериментальной кривой ползучести (рис. 2.18), где  $A$  и  $\alpha$  — значения постоянных коэффициентов, находятся опытным путем по кривым ползучести деревянных элементов с использованием методики А. К. Малмейстера и равные:  $A = 0,0275$ ,  $\alpha = 0,0625$  [12, 13].

Мгновенный модуль упругости находится по мгновенной деформации в момент  $t = 0$ , а именно:

$$E_d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (157)$$

Длительный модуль упругости определяется по формуле:

$$E_d(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon(t)}. \quad (158)$$

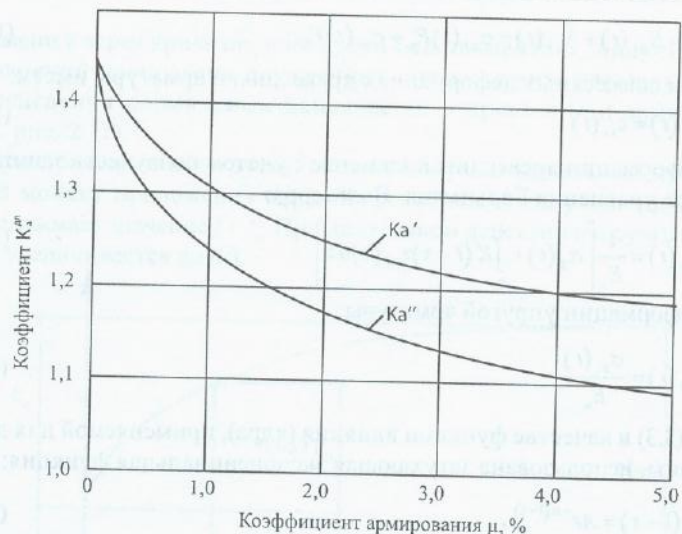


Рис. 2.18. Зависимость коэффициентов перераспределения усилий в арматуре от коэффициента армирования

При обработке экспериментальных кривых наиболее трудно определить  $\varepsilon(\infty)$  из-за требования длительного выдерживания образца под нагрузкой. Поэтому величину  $\varepsilon(\infty)$  целесообразно определять способом экстраполяции. Аппроксимируя кривую ползучести экспонентой

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_d(t)} \left( 1 - \frac{E_d - E_d(t)}{E_d} \cdot e^{-\frac{tE_d(t)}{E_d C_d}} \right), \quad (159)$$

можно вывести формулу для определения предельной деформации ползучести по экстраполяции [12]:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2}, \quad (160)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0)$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon(t_2)$ .

Время  $t_1$  и  $t_2$  выбирается таким, чтобы выполнялось соотношение  $t_2 = 2t_1$ .

Деформации  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  определяются по опытной кривой.

Образец, оставленный под нагрузкой в течение времени  $t^* = \frac{C_d E_d}{E_d(t)}$

(время релаксации), будет иметь деформацию, определяемую уравнением (159) при  $t = t^*$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t^*) &= \frac{\sigma}{E_d(t)} - \left( \frac{\sigma}{E_d(t)} - \frac{\sigma}{E_d} \right) e^{-1} = \varepsilon_y + \varepsilon_n - (\varepsilon_y + \varepsilon_n - \varepsilon_y) e^{-1} = \\ &= \varepsilon_y + \varepsilon_n (1 - e^{-1}) = \varepsilon_y + 0,632\varepsilon_n. \end{aligned} \quad (162)$$

Таким образом, коэффициент времени релаксации вычисляется из выражения:

$$C_d = \frac{E_d(t) \cdot t^*}{E_d}, \quad (163)$$

где время релаксации  $t^*$  определяется по опытной кривой ползучести при деформациях согласно (162) (см. рис. 2.18).

Подставляя (152) и (153) в (151), получим:

$$\frac{1}{E_d} \left[ \sigma_{a1}(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_{a1}(\tau) d\tau \right] = \frac{\sigma_{a1}(t)}{E_a}. \quad (164)$$

Из условия (150) имеем:

$$\sigma_{a1}(t) = \frac{N - \sigma_{d1}(t) F_d}{F_a}. \quad (165)$$

Подставляя (165) в (164), получим интегральное уравнение:

$$\sigma_{a1}(t) \left( \frac{1}{E_d} + \frac{F_d}{F_a E_d} \right) + \frac{1}{E_d} \int_0^t (A_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \sigma_{a1}(\tau) d\tau) = \frac{N}{F_a E_a}$$

или, преобразуя, получим:

$$\sigma_{a1}(t) + \frac{m}{1+m} \int_0^t (A_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \sigma_{a1}(\tau) d\tau) = \frac{N}{F_{np}}. \quad (167)$$

В формулах (150)–(167) приняты следующие обозначения:  $F_d$  и  $F_a$  — соответственно площадь поперечного сечения древесины и арматуры;  $\sigma_{d1}(t)$  и  $\sigma_{a1}(t)$  — соответственно длительные нормальные напряжения в древесине и арматуре от действия продольной силы

$N$ ;  $E_d$  и  $E_a$  — мгновенный модуль упругости древесины и арматуры;  $m = \frac{E_a F_a}{E_d F_d}$ ;  $F_{np} = F_d + \frac{E_a}{E_d} F_a$  — денная площадь поперечного сечения элемента.

Решение интегрального уравнения (167) относительно  $\sigma_{a1}(t)$  имеет вид:

$$\sigma_{a1}(t) = \frac{N}{F_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{-\beta t} \right], \quad (168)$$

$$\text{где } \beta = \alpha + \frac{Am}{1+m}.$$

Напряжения в арматуре определим из (165), подставляя (168):

$$\sigma_{a1}(t) = \frac{N}{F_a} - \frac{NF_a}{F_{np}F_a} \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{-\beta t} \right],$$

$$\text{или, принимая } m = \frac{E_a F_a}{E_d F_d},$$

$$\sigma_{a1}(t) = \frac{NE_a}{F_{np}E_d} \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{-\beta t} \right]. \quad (169)$$

Нормальные напряжения в армированном элементе от изгибающего момента  $M$  (рис. 2.16) определим из условия равенства моментов:

$$M = M_{a2}(t) + M_{d2}(t). \quad (170)$$

Дополнительным условием примем равенство кривизн элемента, определенных по моментам  $M_{a1}(t)$  и  $M_{d1}(t)$ :

$$\frac{1}{\rho_{a2}}(t) = \frac{1}{\rho_{d2}}(t). \quad (171)$$

Кривизна армированного элемента по моменту в древесине с учетом ползучести:

$$\frac{1}{\rho_{d2}}(t) = \frac{1}{E_d I_d} \left[ M_{d2}(t) + \int_0^t K(t-\tau) M_{d2}(\tau) d\tau \right]. \quad (172)$$

Кривизна армированного элемента по моменту при упругой работе арматуры:

$$\frac{1}{\rho_{a2}}(t) = \frac{M_{a2}(t)}{E_a I_a}, \quad (173)$$

где  $I_d$  и  $I_a$  — соответственно моменты инерции площадей древесины  $F_d$  и арматуры  $F_a$  относительно оси  $z$ .

Из условия (172) имеем:

$$\frac{1}{E_d I_d} \left[ M_{d2}(t) + \int_0^t K(t-\tau) M_{d2}(\tau) d\tau \right] = \frac{M_{a2}(t)}{E_a I_a}. \quad (174)$$

Подставляя  $M_{a2}(t)$  из (3.24) в (3.20), получим:

$$M_{d2}(t) + \frac{E_a I_a}{E_d I_d} \left[ M_{d2}(t) + m_1 \int_0^t K(t-\tau) M_{d2}(\tau) d\tau \right] = M, \quad (175)$$

или, преобразуя, имеем:

$$M_{d2}(t)(1+m_1) + m_1 \int_0^t K(t-\tau) M_{d2}(\tau) d\tau = M, \quad (176)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{E_a I_a}{E_d I_d}.$$

Решая интегральное уравнение (176) относительно  $M_{d2}(t)$ , получим:

$$M_{d2}(t) = \frac{ME_d I_d}{E_d I_d + E_a I_a} \left[ \frac{\alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right], \quad (177) \text{ где } \beta_1 = \alpha + \frac{Am_1}{1+m_1}.$$

Нормальные напряжения в древесине от изгибающего момента определяются по формуле:

$$\sigma_{d2}(t) = \frac{M_{d2}(t)}{I_d}. \quad (178)$$

Подставляя (177) в (178), получим значения нормальных напряжений в древесине:

$$\sigma_{d2}(t) = \frac{My}{I_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right], \quad (179)$$

где  $I_{np} = I_d + \frac{E_a}{E_d} \cdot I_a = I_d + n \cdot I_a$  — приведенный момент инерции армированного сечения относительно оси  $z$ .

Нормальные напряжения в арматуре от изгибающего момента определяются из условия (170):

$$M_{a2}(t) = M - M_{d2}(t). \quad (180)$$

Подставляя (177) в (180) и преобразуя, получим:

$$M_{a2}(t) = \frac{MI_a E_a}{I_{np} E_d} \left[ \frac{A+\alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A+\alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (181)$$

Тогда нормальные напряжения в арматуре от  $M_{a2}(t)$  равны:

$$\sigma_{a2}(t) = \frac{M_{a2}(t) y_a}{I_a},$$

где  $y_a$  — расстояние от нормальной оси до центра тяжести рассматриваемой арматуры.

$$\sigma_{a2}(t) = \frac{M y_a E_a}{I_{np} E_d} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (182)$$

в) Нормальные напряжения в армированном деревянном сжато-изгибаемом элементе от дополнительного изгибающего момента  $Nf(t) = N_{д3} f(t) + N_{a3} f(t)$  (рис. 2.16). Определим аналогично напряжения от изгибающего момента  $M$ .

Нормальные напряжения в древесине определим аналогично (179) (без учета усилий от  $M$ ):

$$\sigma_{д3}(t) = \frac{Nf(t)y}{I_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (183)$$

Нормальные напряжения в арматуре определим аналогично (182):

$$\sigma_{a3}(t) = \frac{Nf(t)y_a E_a}{I_{np} E_d} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (184)$$

Для определения дополнительного изгибающего момента от продольной силы  $Nf(t)$  необходимо знать величину полного прогиба армированного элемента  $f(t)$ , нарастающего при длительном действии нагрузки.

Прогиб элемента без учета продольной силы в общем виде определяется по интегралу Мора:

$$f_m(t) = \int_0^l \bar{M}(x) \frac{1}{\rho_m}(x, t) dx. \quad (185)$$

В соответствии с принципом Вольтерра изменение кривизны элемента может быть определено с учетом ползучести древесины из выражения:

$$\frac{1}{\rho_m}(t) = \frac{-M_a(t)}{E_a I_a} = -\frac{M}{E_d I_{np}} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (186)$$

Для элемента, загруженного равномерно распределенной нагрузкой:

$$f_0(t) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E_d I_{np}} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right].$$

Предполагая, что начальный прогиб элемента может быть описан синусоидой, то есть  $f_0 = f_0^* \sin \frac{\pi}{l} x$ , решение уравнения (186) ищем в виде:

$$f(t) = f^*(t) \sin \frac{\pi}{l} x \quad (187)$$

Считая, что форма изогнутой оси элемента в любой момент времени остается постоянной, а меняется только амплитуда (прогиб), после подстановки (186) в (185) и преобразований имеем:

$$f(t) = \left( 1 - \frac{\alpha k}{1 - \alpha} e^{-\gamma \beta_1 t} \right) \frac{f_0}{1 - \alpha(1 + k)}, \quad (188)$$

$$\text{где } \beta_2 = \frac{1 - \alpha(1 + k)}{1 - \alpha}.$$

Границей, разделяющей случай неограниченного роста функции  $e^{-\gamma \beta_1 t}$  от случая ее убывания, является значение  $\beta = 0$ , что соответствует  $\alpha = 1/(1 + k)$ .

Учитывая, что  $\frac{\beta}{1 - \alpha(1 + k)} = \frac{1}{1 - \alpha}$  при  $\beta = 0$ ,

$$f(t) = (1 + \gamma t) \frac{f_0}{1 - \alpha}. \quad (189)$$

Для практических случаев, когда соблюдается неравенство  $0 < N < N_{кр}(t)$ , значение  $N_{кр}(t)$  определяется по формуле Эйлера при значении длительного модуля упругости [6, 8, 9, 13].

В этом случае прогиб элемента ограничен и стремится к пределу, равному

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{1 - \frac{N}{N_{кр}(t)}}. \quad (190)$$

$$\text{Здесь } N_{кр}(t) = \frac{\pi^2 E_d(t) I_{np}}{l^2}, \quad (191)$$

$f_0(t)$  — прогиб от поперечной нагрузки — равен:

$$f_0(t) = f_0 \cdot \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left( 1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1} \right) e^{-\beta_1 t} \right].$$

Зная составляющие нормальных напряжений в древесине и арматуре от продольной силы  $N$ , изгибающего момента  $M$  и дополнительного изгибающего момента  $Nf(t)$ , а также значение  $f(t)$ , найдем

значение суммарных напряжений в древесине и арматуре в любой момент времени  $t$ , т. е. получим расчетные формулы, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние сжато-изгибаемых армированных деревянных элементов в любой момент времени. Напряжения в древесине:

$$\begin{aligned} \sigma_d(t) &= \sigma_{d1}(t) \pm \sigma_{d2}(t) \pm \sigma_{d3}(t); \\ \sigma_{d1}(t) &= \frac{N}{F_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{-\beta_1 t} \right] \pm \frac{M_y}{I_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta_1} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] \pm \\ &\pm \frac{Nf(t)y}{I_{np}} \left[ \frac{\alpha}{\beta_1} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right]; \end{aligned} \quad (192)$$

напряжения в арматуре

$$\sigma_a(t) = \sigma_{a1}(t) \pm \sigma_{a2}(t) \pm \sigma_{a3}(t),$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &= \frac{N}{F_{np}} \cdot \frac{E_a}{E_d} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta} + \left(1 - \frac{A + \alpha}{\beta}\right) e^{-\beta_1 t} \right] \pm \\ &\pm \frac{M y_a}{I_{np}} \cdot \frac{E_a}{E_d} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right] \pm \\ &\pm \frac{Nf(t)y_a}{I_{np}} \cdot \frac{E_a}{E_d} \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right], \text{ или} \\ \sigma_a(t) &= \frac{N}{F_{np}} n \left[ \frac{A + \alpha}{\beta} + \left(1 - \frac{A + \alpha}{\beta}\right) e^{-\beta_1 t} \right] + \\ &+ \left( \frac{M}{W_{np}} + \frac{Nf(t)}{W_{np}} \right) n \left[ \frac{A + \alpha}{\beta_1} + \left(1 - \frac{A + \alpha}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 t} \right]. \end{aligned} \quad (193)$$

Для практических расчетов достаточно определить установившееся напряженно-деформированное состояние, приобретаемое сжато-изгибаемым элементом через определенное время, т. е. для строительных конструкций важно знать конечное значение напряжений в сечениях элемента. Тогда, приняв  $t \rightarrow \infty$ , расчетные формулы (192) и (193) можно упростить:

$$\sigma_d(t) = \frac{N}{F_{np}} K'_d(t) \pm \left( \frac{M}{W_{np}} + \frac{Nf}{W_{np}} \right) K''_d(t); \quad (194)$$

$$\sigma_a(t) = \frac{N}{F_{np}} K'_a(t) n \pm \left( \frac{M y_a}{I_{np}} + \frac{Nf y_a}{I_{np}} \right) K''_a(t) n. \quad (195)$$

В формулах (194) и (195) обозначено:

$K'_d(t) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{E_d(t)(1 + \eta\mu)}{E_d(t) + E_d \eta\mu} \leq 1$  — коэффициент, учитывающий снижение напряжений в древесине сечения от продольной сжимающей силы  $N$ .

$K''_d(t) = \frac{\alpha}{\beta_1} = \frac{E_d(t)(1 + 3\eta\mu)}{E_d(t) + E_d \cdot 3\eta\mu} \leq 1$  — коэффициент, учитывающий снижение напряжений в древесине сечения от изгибающих моментов  $M$  и  $Nf(t)$ .

$K'_a(t) = \frac{A + \alpha}{\beta} = \frac{E_a(1 + \eta\mu)}{E_a(t) + E_a \eta\mu} \geq 1$  — коэффициент, учитывающий увеличение напряжений в арматуре от действия продольной силы  $N$ .

$K''_a(t) = \frac{A + \alpha}{\beta_1} = \frac{E_a(1 + 3\eta\mu)}{E_a(t) + E_a \cdot 3\eta\mu} \geq 1$  — коэффициент, учитывающий увеличение напряжений в арматуре от изгибающих моментов  $M$  и  $Nf(t)$ .

Зависимость коэффициентов  $K'_d(t)$  и  $K''_d(t)$ ;  $K'_a(t)$  и  $K''_a(t)$  от коэффициента армирования и величины  $E_d(t)$  приведены на рис. 2.18 и 2.19.

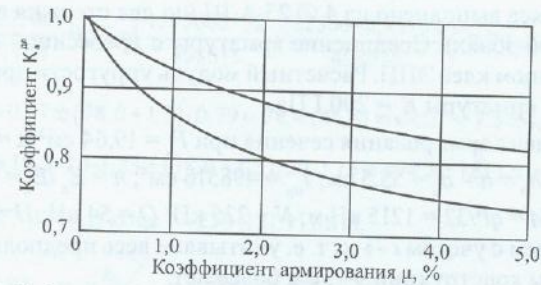


Рис. 2.19. Зависимость коэффициентов перераспределения усилий в древесине от коэффициента армирования

Анализ полученных зависимостей показывает, что на перераспределение усилий в сечении армированного сжато-изгибаемого элемента более всего оказывает влияние коэффициент армирования, причем с увеличением  $\mu$  эффект перераспределения усилий во времени снижается. Так, напряжения в арматуре при  $E_d(t) = 0,7 E_d$  возрастают на 18–33% при действии силы  $N$  и на 8–23% при действии

$M$  и  $Nf(t)$ . При уменьшении значения модуля упругости до  $E_d(t) = 0,5 E_d$  процесс интенсифицируется, и рост напряжений уже составляет 33–71% при действии  $N$  и 14–46% при действии  $M$  и  $Nf(t)$ .

При снижении модуля упругости на 29% с 0,7 до 0,5  $E_d$  прирост напряжений в арматуре резко возрастает в 1,83–2,33 раза от  $M$  и  $Nf(t)$ .

Снижение напряжений в древесине достигает 7–18% при действии  $N$  и 14–25% при действии  $M$  и  $Nf(t)$  при  $E_d(t) = 0,7 E_d$ ; и 14–32% от  $N$  и 27–43% от  $M$  и  $Nf(t)$  при  $E_d(t) = 0,5 E_d$ .

Снижение напряжений в древесине армированного сжато-изгибаемого элемента с течением времени приводит в целом к положительному эффекту, так как происходит разгрузка деревянной части армированного элемента и, следовательно, повышение ресурса элемента за счет снижения влияния как естественных пороков древесины, так и конструктивных ослаблений. Кроме того, за счет перераспределения усилий деформативность армированных деревянных элементов в процессе эксплуатации будет иметь тенденцию к снижению, что также положительно сказывается на эксплуатационных качествах армированных деревянных конструкций.

**Пример расчета.** Определить величину нормальных напряжений в арматуре и древесине верхнего пояса треугольной арки пролетом 18 м. Расчетная нагрузка 12 кН/м.

Верхний пояс арки сечением  $140 \times 580$  мм склеен из древесины сосны клеем ФРФ-50. Двойное симметричное армирование элементов верхнего пояса выполнено из 4  $\varnothing 25$  А-III (по два стержня в сжатой и растянутой зонах). Соединение арматуры с древесиной на эпоксидно-песчаном клее ЭПП. Расчетный модуль упругости древесины  $E_d = 10$  ГПа; арматуры  $E_a = 200$  ГПа.

Коэффициент армирования сечения при  $F_a = 19,64 \text{ см}^2$   $\mu = F_a / bh_0 = 0,025$ , где  $h_0 = h - d_a = 55,5$  см;  $I_{np} = 498516 \text{ см}^4$ ;  $n = E_a / E_d = 20$ ;  $F_{np} = 1166 \text{ см}^2$ ;  $M = qL^2/32 = 1215 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $N = 225 \text{ кН}$ ;  $Q = 54 \text{ кН}$ ;  $H = 215 \text{ кН}$ .

Расчет ведем с учетом  $t \rightarrow \infty$ , т. е. учитываем весь предполагаемый срок службы конструкции — 50 и более лет.

Расчет проводим с учетом ползучести древесины (см. п. 2.13.2). Тогда запишем значения

$$\alpha = \frac{E_d(t)}{E_d C_d}, \quad n = \frac{E_d - E_d(t)}{E_d C_d}, \quad \beta = \alpha + \frac{Am}{1+m},$$

$$\beta_1 = \alpha + \frac{Am_1}{1+m_1} = \frac{E_d(t) + E_d \cdot 3m\mu}{E_d C_d (1+3m\mu)},$$

$$m_1 = \frac{E_a I_a}{E_d I_d} = 3m\mu, \quad m = \frac{E_a F_a}{E_d F_d} = m\mu.$$

По формулам (3.44) и (3.45) находим напряжения в сжатой зоне, определяя значения коэффициентов перераспределения усилий в древесине при  $E_d(t) = 0,7 E_d$  по зависимостям (рис. 2.19 и 2.20):

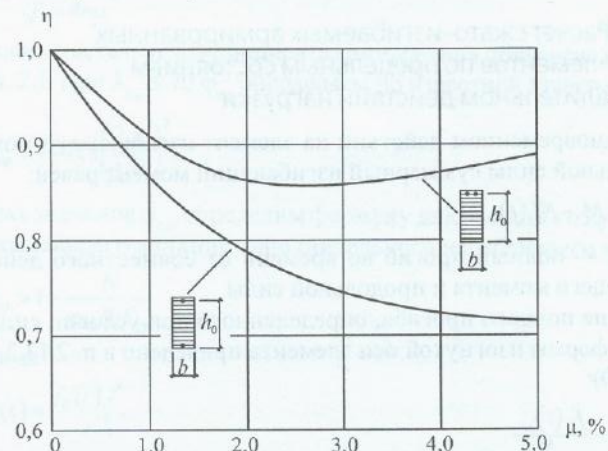


Рис. 2.20. Зависимость изменения коэффициента приведения гибкости от коэффициента армирования

$$\begin{aligned} \sigma_d(t) &= \frac{22500}{1160} \cdot 0,87 \pm \left( \frac{1215000 \cdot 32}{498615} + \frac{22500 \cdot 0,92 \cdot 32}{498615} \right) \cdot 0,79 = \\ &= 19,3 \cdot 0,87 \pm (78,0 + 1,3) \cdot 0,79 = 78,4 (45,8) \text{ кгс/см}^2 = 7,84 (4,6) \text{ МПа}; \\ \sigma_a(t) &= 19,3 \cdot 20 \cdot 1,23 \pm (78,0 + 1,3) \cdot 20 \cdot 1,15 = 474,8 \pm 1823,9 = \\ &= 2298,7 (1319,1) \text{ кг/см}^2 = 230 (131,9) \text{ МПа}. \end{aligned}$$

$$\xi_{np} = 0,92; \quad y_a = \frac{h_0}{2} + z = \frac{h_0}{2} + 0,08h_0 = 32 \text{ см}.$$

Прогиб полуарки находим при

$$f_0(t) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{E_d I_{np}} K_d''(t) = 2,15 \cdot 1,15 = 2,5 \text{ см},$$

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{1 - \frac{N}{N_{кр}(t)}} = \frac{2,5}{1 - \frac{22500}{296543}} = 2,95 \text{ см},$$

$$N_{кр}(t) = \frac{\pi^2 E_d(t) I_{пр}}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 50000 \cdot 498615}{910^2} = 29654,3 \text{ кН},$$

где  $K'_d(t) = 0,87$ ;  $K''_d(t) = 0,79$ ;  $K'_a(t) = 1,23$ ;  $K''_a(t) = 1,15$  — коэффициенты перераспределения усилий, определенные по графикам на рис. 2.12 и 2.11.

### 2.13.3. Расчет сжато-изгибаемых армированных элементов по предельным состояниям длительном действии нагрузки

При одновременном действии на элемент изгибающего момента и продольной силы суммарный изгибающий момент равен:

$$\sum M = M + Nf(t), \quad (196)$$

где  $f(t)$  — полный прогиб во времени от совместного действия изгибающего момента и продольной силы.

Значение полного прогиба, определенного при условии синусоидальной формы изогнутой оси элемента приведено в п. 2.13.2, формула (190):

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{1 - \frac{N}{N_{кр}(t)}}. \quad (197)$$

Выражение в знаменателе представляет собой коэффициент, учитывающий увеличение изгибающего момента от действия продольной силы, так как за  $N_{кр}(t)$  можно принять значение  $N_{кр}(t) = \varphi_{пр} R_c F_{пр}$  [38].

При этом значение приведенного коэффициента продольного изгиба равно:

$$\varphi_{пр} = \frac{\sigma_{кр}(t)}{\sigma_{вр.с}(t)} = \frac{\pi^2 E_d(t)}{\lambda_{пр}^2 \sigma_{вр.с}(t)}. \quad (198)$$

Зная, что  $\frac{E_d}{\sigma_{вр.с}} = \frac{E_d(t)}{\sigma_{вр.с}(t)} = 300$  [36], получим  $\varphi_{пр} = \frac{3000}{\lambda_{пр}^2}$  для стержней с  $\lambda_{пр} \geq 70$ .

Здесь  $\lambda_{пр} = \frac{l_0}{\sqrt{I_{пр}/F_{пр}}} = \eta \lambda$  — приведенная гибкость элемента;  $\eta$  — коэффициент приведения гибкости, зависящий от коэффициента армирования сечения элемента.

При двойном симметричном армировании сечения

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + m\mu}{1 + 3m\mu}};$$

при одиночном армировании сжатой зоны

$$\eta = \frac{1 + m\mu}{\sqrt{1 + 4m\mu}}.$$

Зависимость  $\eta$  от коэффициента армирования приведена на рис. 2.21, табл. 2.1. При  $\lambda_{пр} \leq 70$   $\varphi_{пр}$  определяем по известной зависимости:

$$\varphi_{пр} = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda_{пр}}{100} \right)^2.$$

Зная значение  $\varphi_{пр}$ , определим формулу для расчета коэффициента, учитывающего влияние дополнительного изгибающего момента:

$$\xi_{пр} = 1 - \frac{N}{\varphi_{пр} R_c F_{пр}}. \quad (199)$$

Тогда

$$f(t) = f_0(t) / \xi. \quad (200)$$

Таблица 2.1. Зависимость коэффициента армирования, от вида армирования

| Вид армирования      | Коэффициент армирования |       |       |       |       |       |
|----------------------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                      | 0                       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
| Двойное симметричное | 1                       | 0,866 | 0,798 | 0,756 | 0,729 | 0,707 |
| Одиночное            | 1                       | 0,896 | 0,869 | 0,868 | 0,878 | 0,894 |

При известной величине полного прогиба  $f(t)$  крайевые напряжения в древесине будут равны:

$$\sum \sigma_d = \frac{N}{F_{пр}} \pm \frac{M}{W_{пр}^c} \pm \frac{Nf(t)}{W_{пр}^c}. \quad (201)$$

Запишем выражение (201) в виде условия равновесия, считая, что предельное состояние элемент достигнет при напряжениях  $\sigma_d^c = R_c$ :

$$\frac{N}{R_c F} + \frac{M}{W_{пр}^c R_c} + \frac{Nf(t)}{W_{пр}^c R_c} \leq 1. \quad (202)$$