

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



Первый проректор, проректор по научной  
и инновационной работе

В.Г. Прокошев

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Диофантова теория

(наименование дисциплины)

Направление подготовки 01.06.01 – Математика и механика

Направленность (профиль) подготовки Математическая логика, алгебра и теория чисел

Уровень высшего образования Подготовка кадров высшей квалификации

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения Очная

Год	Трудоем- кость зач. ед, час.	Лек- ции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРА, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
2	3/108	18	18		72	зачет
Итого	3/108	18	18		72	зачет

г. Владимир 2015 г.

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Диофантова теория» формирование у аспирантов знаний и компетенций в области теории чисел, использующей арифметико-алгебраические методы. Данная дисциплина способствует формированию будущих научно-педагогических кадров в области математики и других естественных наук.

Цель дисциплины – ознакомить аспирантов с арифметикой и геометрией диофантовых уравнений в целых алгебраических числах, показать сходство и различие классической арифметики и арифметики колец целых чисел конечных расширений поля рациональных чисел, ознакомить аспирантов с нормированными полями, нормированиями поля рациональных чисел и его конечных расширений. Изложить учащимся основы арифметики и анализа в локальных полях. На примере квадратичных форм раскрыть суть принципа Минковского-Хассе.

Полученные знания помогут пониманию теории диофантовых уравнений, прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий. Параллельное изучение теории алгебраических кривых позволит проследить аналогии между числовыми и функциональными полями. Аспирантом будут предложены изучить и прикладные аспекты алгебраической теории чисел.

*Задачами освоения дисциплины «Диофантова теория чисел» являются:* введение нормирований и пополнений поля рациональных чисел как инструмента решения диофантовых задач; сведение диофантовой задачи в локальном случае к задаче над конечным полем; навыки конкретных вычислений; знакомство с основами анализа, арифметики локальных полей.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ (ОПОП ВО)

Дисциплина «Диофантова теория» относится к разделу «Дисциплины по выбору» научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций.

Современная теория чисел характеризуется значительным разнообразием существующих методов и подходов. Данная особенность характерна для двух ключевых разделов современной теории чисел – алгебраической и геометрической ее составляющих.

Дисциплина «Диофантова теория» является базовой дисциплиной для подготовки аспирантов по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Имея ключевые знания в части алгебраических основ теории чисел, будущий кандидат наук может значительно повысить системность своей научной и педагогической деятельности, более качественно определять перспективные направления развития теории чисел, определять эффективные механизмы ее применения в прикладных областях: теории кодирования и криптосистем, теории информации и др.

Дисциплина «Диофантова теория» относится к разделу «Дисциплины по выбору» научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций.

#### **Связь с последующими дисциплинами**

Полученные знания будут использованы в курсах по теории алгебраических групп, арифметике алгебраических многообразий, теоретико-числовых методов в криптографии, теории полей классов, теории локальных полей. Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, необходимы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Курс базируется на сочетании образовательной, специальной и практической подготовки.

### **3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

В результате освоения программы аспирантуры у выпускника должны быть сформированы:

- **универсальные компетенции**, не зависящие от конкретного направления подготовки;
- **общепрофессиональные компетенции**, определяемые направлением подготовки;

– **профессиональные компетенции**, определяемые направленностью (профилем) программы аспирантуры в рамках направления подготовки (далее – направленность программы).

Аспирант в результате обучения данной дисциплины должен овладеть следующими **компетенциями**:

- Общепрофессиональными:

1) способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

- Профессиональными:

1) владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области теории чисел (ПК-1);

2) способность адаптировать и обобщать результаты современных теоретико-числовых исследований для целей преподавания алгебраических дисциплин в высших учебных заведениях (ПК-2);

- Универсальными

1) способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях(УК-1);

2) готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач(УК-3);

3) способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития(УК-5).

В результате освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Иметь представление:

- об основных способах и принципах решения диофантовой задачи (ОПК-1, ПК-1, ПК-2);

- об аналогиях в изучении полей алгебраических функций полей алгебраических чисел (ОПК-1, ПК-1, ПК-2).

1. Знать:

- основные понятия курса: нормированное поле, виды нормирований, кольцо нормирования, идеал нормирования, пополнение поля по норме, представление элементов полного нормированного поля, символ Гильберта (ОПК-1, ПК-1, ПК-2);

- формулировки основных теорем курса (УК-1, ПК-1, ПК-2);

- квадратичный закон взаимности, символ Гильберта, его свойства, формулу произведения (УК-3, ПК-1, ПК-2);
- об особенностях  $p$ -адического анализа и арифметики (УК-1, ПК-1, ПК-2);
- принцип Минковского-Хассе (УК-3, ПК-1, ПК-2).

## 2. Уметь:

- находить пределы последовательностей, суммировать ряды, извлекать корни (несколько цифр в разложении), применять лемму Гензеля в поле  $p$ -адических чисел (УК-5, ПК-1, ПК-2);
- самостоятельно проводить конкретные вычисления, необходимые для доказательства свойств и теорем курса (УК-3, ПК-1, ПК-2);
- определять эквивалентны или нет бинарные квадратичные формы, отвечать на вопрос о представлении рационального числа квадратичной формой от двух или трех переменных, вычислять символ Гильберта, доказывать его свойства (УК-1, ПК-1, ПК-2).

## 3. Владеть:

- формулировками и методами решения на основе изученной техники классические задачи о представлении чисел квадратичными формами (ОПК-1, ПК-1, ПК-2);
- способами отыскания числовых представлений чисел квадратичными формами (ОПК-1, ПК-1, ПК-2).

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «Диофантова теория»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 ч.

№ п/п	Раздел дисциплины	Год обучения	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)
			лекции	практ.	СРА	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1	Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых	2	4	4	12	тестирование
2	Общие теоремы о квадратичных формах	2	4	4	12	презентации
3	Формы над конечными полями	2	2	2	12	дискуссия
4	Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел	2	2	2	12	презентация
5	Теорема Минковского-Хассе	2	2	2	12	тестирование
6	Задачи для	2	2	2	12	дискуссия

	самостоятельного решения.					
	<b>ИТОГО:</b>		<b>18</b>	<b>18</b>	<b>72</b>	<b>зачет</b>

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

### Раздел 1. Нормированные поля.

Определение нормированного поля. Простейшие свойства норм. Архимедовы и неархимедовы нормирования. Эквивалентные определения неархимедовой нормы. Примеры нормированных полей. Нормирования конечного поля. Нормирования поля рациональных чисел.

Нормирования поля рациональных функций. Эквивалентные нормирования. Описание нормирований поля рациональных чисел.  $p$ -адическое нормирование поля рациональных чисел. Показатели, их свойства. Теорема Островского. Полные и неполные нормированные поля. Процедура пополнения поля по норме.

### Раздел 2. Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых

Представление  $p$ -адических чисел рядами. Идеал нормирования, кольцо целых  $p$ -адических чисел – пример локального кольца. Единицы кольца, описание единиц кольца. Запись  $p$ -адического числа в виде произведения единицы и степени униформизирующего элемента. Особенности  $p$ -адической метрики. Сходимость  $p$ -адических рядов. Экспонента и логарифм в поле  $p$ -адических чисел. Описание квадратов в поле  $p$ -адических чисел. Индекс подгруппы квадратов в мультипликативной группе поля. Корни из единицы в полях  $p$ -адических чисел. Лемма Гензеля и ее применение.

### Раздел 3. Общие теоремы о квадратичных формах

Ранг, матрица, матричная запись квадратичной формы. Эквивалентные квадратичные формы, некоторые инварианты классов эквивалентности. Теорема Лагранжа. Представление элементов поля квадратичными формами. Представление нуля квадратичной формой, некоторые свойства и следствия этих представлений. Общие свойства бинарных квадратичных форм. Прямая сумма квадратичных форм. Теорема о сокращении Витта. Классы Витта.

#### **Раздел 4. Формы над конечными полями**

Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений. Вычисление группы классов Витта квадратичных форм над конечными полями.

#### **Раздел 5. Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел**

Теорема о представлении нуля  $p$ -адической квадратичной формой, и ее следствия. Бинарные квадратичные формы и их свойства. Символ Гильберта, его свойства. Описание эквивалентности бинарных форм с помощью символа Гильберта. Формула произведения для символов Гильберта.

#### **Раздел 6. Теорема Минковского-Хассе**

Доказательство теоремы Минковского-Хассе. Эквивалентность квадратичных форм над полем рациональных чисел. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.

### **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

В ходе освоения дисциплины «Диофантова теория» при проведении аудиторных занятий используются следующие образовательные технологии:

- практические занятия разных типов (семинар - конференция, семинар – деловая игра);

- практические занятия с использованием активных и интерактивных форм и методов проведения занятий: групповые дискуссии, мозговой штурм, групповое проектирование, проблемные беседы, анализ конкретных ситуаций.

В рамках самостоятельной работы предполагаются разнообразные виды исследовательской деятельности аспирантов: библиографическая работа, работа с электронными образовательными порталами, реферирование и аннотирование научных работ и научных статей по теории чисел, разработка презентаций по различным темам курса, разработка авторских проектов.

Предполагается использование комплекса программ типа MAPLE по обработке данных исследований и сеть Интернет.



## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ

### Вопросы для подготовки к зачету

1. Определение нормированного поля. Нормирования конечного поля. Нормирования поля рациональных чисел.
2. Нормирования поля рациональных функций. Теорема Островского.
3. Представление  $p$ -адических чисел рядами. Экспонента и логарифм в поле  $p$ -адических чисел.
4. Описание квадратов в поле  $p$ -адических чисел. Корни из единицы в полях  $p$ -адических чисел.
5. Лемма Гензеля и ее применение.
6. Эквивалентные квадратичные формы, некоторые инварианты классов эквивалентности.
7. Теорема Лагранжа. Представление элементов поля квадратичными формами.
8. Представление нуля квадратичной формой, некоторые свойства и следствия этих представлений.
9. Общие свойства бинарных квадратичных форм.
10. Прямая сумма квадратичных форм. Теорема о сокращении Витта.
11. Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений.
12. Теорема о представлении нуля  $p$ -адической квадратичной формой, и ее следствия.
13. Бинарные квадратичные формы и их свойства.
14. Символ Гильберта, его свойства. Описание эквивалентности бинарных форм с помощью символа Гильберта.
15. Формула произведения для символов Гильберта.
16. Доказательство теоремы Минковского-Хассе.
17. Эквивалентность квадратичных форм над полем рациональных чисел.

18. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить группу классов Витта квадратичных форм над полями  $p$ -адических чисел;
2. Доказать компактность кольца целых  $p$ -адических чисел;
3. Используя символ Хассе, решить вопрос о представлении нуля квадратичными формами от трех и четырех переменных;
4. Изучить кривую Зельмана, для которой нарушается принцип Минковского-Хассе.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

№ п/п	Название и выходные данные (автор, вид издания, издательство, издания, количество страниц)	Год издания	Количество экземпляров в библиотеке университета	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ	Количество аспирантов, использующих указанную литературу	Обеспеченность аспирантов литературой, %
1	2	3	4	5	6	7
<b>Основная литература</b>						
1	Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с	2013		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-91134-460-3	22	100%
2	Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015. - 400 с.	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397</a> .	22	100%

				html		
3	<p>Линейная алгебра и аналитическая геометрия.          Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.:</p>			<p>ЭБС          «znanium»          ISBN 978-5-16-010206-1</p>	22	100%
<b>Дополнительная литература</b>						
1	<p>Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. [Электронный ресурс] / Салимов Р.Б. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 484 с</p>	2009		<p>ЭБС          «Консультант студента»  <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html</a></p>	22	100%
2	<p>Конвей Дж. "О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. [Электронный ресурс] / Конвей Дж.; Пер. с англ. С.М. Львовского. - М.: МЦНМО, 2009." - 184 с.</p>	2009		<p>ЭБС          «Консультант студента»  <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html</a></p>	22	100%
3	<p>Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники [Электронный ресурс] / Смирнов Е.Ю. - М.: МЦНМО, 2009. - 48 с</p>	2009		<p>ЭБС          «Консультант студента»  <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html</a></p>	22	100%
4	<p>Линейная алгебра: теория и прикладные</p>	2010		<p>ЭБС          «znanium»</p>	22	100%

	аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: ИНФРА-М, 2010. - 528 с.:			ISBN 978-5-9776-0163-4		
5	Гулиян, Б. Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс] : учебник / Б. Ш. Гулиян, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 712 с.	2011		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-902597-61-2.	22	100%

#### Интернет-ресурсы

1. <http://weblib.samsu.ru/level23.html>
2. [http://www.numbertheory.org/ntw/number\\_theory.html](http://www.numbertheory.org/ntw/number_theory.html)
3. [http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized\\_continued\\_fraction](http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_continued_fraction)
4. <http://lib.kbsu.ru>
5. <http://www.elibrary.ru>
6. <http://www.rsl.ru/>
7. <http://www.nlr.ru/>
8. <http://www.lib.vsu.ru>

#### Периодические издания:

1. Журнал «Алгебра и анализ» РАН (<http://www.pdmi.ras.ru/AA>)
2. Журнал вычислительной математики и математической физики (<http://www.mathnet.ru/zvmmf>)
3. Журнал "Математическое моделирование" (<http://www.imamod.ru/journal>)
4. Журнал «Математические заметки» (<http://www.mathnet.ru/mz>)
5. Журнал «Математический сборник» (<http://www.mathnet.ru/msb>)

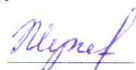
### **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Лекции с использованием мультимедийных программ. Практические занятия студентов с аудио- и видеоматериалами. Основные базы данных и основные программные продукты в сети Интернет.

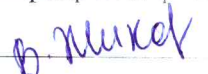
Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению 01.01.06 – Математика и механика и направленности (профилю) подготовки 01.06.01 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Рабочую программу составил

д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа Журавлев В.Г. 

Рецензент начальник отдела научной и международной деятельности, доцент кафедры информационных технологий ФГБОУ ВО Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, кандидат физико-математических наук Жукова А.А. 

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа протокол № 10а от 3.06.15 года.

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа Жиков В.В. 

Программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.06.01 «Математика и механика» (Математическая логика, алгебра и теория чисел) протокол № 1 от 3.06.2015

Председатель комиссии  к.ф.-м.н., доцент Игонин В.А.