

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



УТВЕРЖДАЮ

Проректор

по научной и инновационной работе

А.В. Федин

« 01 »

09

20 20 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Направление подготовки 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность подготовки 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Уровень высшего образования подготовка кадров высшей квалификации

Форма обучения очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ академ. час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экз./зачет)
7	2/72	18			54	
8	1/36					Экзамен 36
Итого	3/108	18			54	Экзамен 36

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины ознакомить аспирантов с основными конструкциями математической логики, алгебры и теории чисел. Алгебро-геометрические методы, дзета-функции, ряды Дирихле, позволяют показать иное воплощение традиционных объектов арифметики. Полученные знания помогут пониманию теории алгебраических кривых (теория дивизоров, ветвление, группа классов дивизоров и т. д.), прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий.

Задачи: определение пропозициональной логики, предикатов, алгебраических структур, теоретической и прикладной теории чисел.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина (Б1.В.ОД.5) является базовой дисциплиной для подготовки аспирантов по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
1	2	3
ОПК-1	частично	<i>Знать:</i> - теоретические и методологические основания избранной области научных исследований; - арифметику квадратичного поля и кругового поля - основные направления развития теории; алгебраических чисел; <i>Уметь:</i> -вырабатывать свою точку зрения в профессиональных вопросах и отстаивать ее во время дискуссии со специалистами и неспециалистами; - реферировать научную литературу, в том числе на иностранных языках, при условии соблюдения научной этики и авторских прав; <i>Владеть:</i> - современными информационно-коммуникационными технологиями;
ПК-1	частично	<i>Знать:</i> - основные аналитические формулы и их качественные пояснения; <i>Уметь:</i> - в рамках теоремы Куммера находить разложения главных идеалов, порожденных простыми числами; <i>Владеть:</i> - методами проведения теоретических и экспериментальных исследований в области теории чисел;
ПК-2	частично	<i>Знать:</i> - приложения алгебраической теории чисел к задачам криптографии и математической теории кодов; <i>Уметь:</i>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать опыт и результаты собственных научных исследований для формирования профессионального мышления;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- прикладными информационными технологиями в научно-исследовательской деятельности и использовать их в представлении результатов НИР;</li> </ul>
УК-1	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные методы научно-исследовательской деятельности.</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах; критически оценивать любую поступающую информацию, вне зависимости от источника;</li> <li>- избегать автоматического применения стандартных формул и приемов при решении задач;</li> <li>- находить фундаментальные единицы для вещественных квадратичных полей</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методами решения базовых задач криптографии и математической теории кодов, находить число классов квадратичного поля;</li> </ul>
УК-3	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формулировки основных теорем курса;</li> <li>- методы критического анализа и оценки современных научных достижений;</li> <li>- методы научно-исследовательской деятельности;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- технологиями планирования профессиональной деятельности в сфере научных исследований;</li> </ul>
УК-5	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- направления профессиональной самореализации;</li> <li>- приемы и технологии целеполагания и целереализации; - пути достижения более высоких уровней профессионального и личного развития;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формулировать цели профессионального и личностного развития, оценивать свои возможности, реалистичность и адекватность намеченных способов и путей достижения планируемых целей;</li> <li>- находить сокращенные формы пропозициональной логики, предикатов, целые базисы и дискриминанты квадратичных и кубических полей;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- приемами целеполагания, планирования, реализации необходимых видов деятельности, оценки и самооценки результатов деятельности по решению профессиональных задач;</li> </ul>

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Аксиоматическая теория множеств.	7		2			6	1/50%	
2	Исчисление высказываний	7		2			6	1/50%	
3	Алгебраические структуры: кольца, поля, алгебры.	7		2			6	1/50%	
4	Арифметика полей алгебраических чисел	7		2			6	1/50%	
5	Геометрические методы в теории чисел	7		2			6	1/50%	
6	Аналитические методы в теории чисел	7		2			6	1/50%	
7	Аналитическая формула для числа классов идеалов	7		2			6	1/50%	
8	Важные примеры	7		2			6	1/50%	
9	Прикладные аспекты теории чисел: коды	7		2			6	1/50%	
Итого за семестр:		7		18			54	9/50%	
1	Кандидатский экзамен по специальности	8							Экзамен
Итого за семестр:		8							Экзамен 36
Всего по УП				18			54	9/50%	Экзамен 36

## Содержание дисциплины по темам (разделам)

№ п/п	Наименование раздела учебной дисциплины	Содержание раздела
1	2	3
1.	Раздел I. Аксиоматическая теория множеств.	Теория множеств Цермело — Френкеля . Комментарии к аксиомам. Универсум множеств и классы. Ординалы. Ординалы и фундированные отношения. Мощность множества. Кардиналы. Классификация кардиналов
2.	Раздел II. Исчисление высказываний	Исчисление высказываний (ИВ) Второе доказательство теоремы о полноте Поиск контрпримера и исчисление секвенций Интуиционистская пропозициональная логика
3.	Раздел III. Алгебраические структуры: кольца, поля, алгебры.	Основы теории алгебраических структур, включая вопросы мировоззренческого характера (группы, кольца, поля, решетки)
4.	Раздел IV. Арифметика полей алгебраических чисел	Понятие поля. Поля классов вычетов. Алгебраическая замкнутость поля. Корни многочленов. Локализация корней. Поле из четырех элементов. Алгебры над полем.
5.	Раздел V. Геометрические методы в теории чисел	Геометрический метод представления чисел разложимыми формами. Геометрическое изображение алгебраических чисел. Решетки. Логарифмическое пространство.
6.	Раздел VI. Аналитические методы в теории чисел	Аналитическая формула для числа классов дивизоров. Число классов дивизоров кругового поля. Простые дивизоры первой степени. Число классов дивизоров квадратичного поля. Число классов дивизоров поля деления круга на простое число частей.
7.	Раздел VII. Аналитическая формула для числа классов идеалов	Дискриминант поля алгебраических чисел. Идеалы в кольцах целых алгебраических чисел. Примеры неглавных идеалов. Норма идеала. Норма главного идеала. Определение дробного идеала. Операции над идеалами, свойства операций.
8.	Раздел VIII. Важные примеры	
9.	Раздел IX. Прикладные аспекты теории чисел: коды	

### 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- Интерактивная лекция (Раздел №1,2,3,5);
- Применение имитационных моделей (Раздел №5,6);

## **6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ**

### *Текущий контроль успеваемости (7 семестр)*

1. Понятие высказывания. Алгебра высказываний.
2. Логические операции над высказываниями.
3. Логические вентили, схемы и структуры
4. Формулы алгебры логики. Равносильные формулы.
5. Булевы функции. Функционально полные системы булевых функций.
6. Минимизация булевых функций. Совершенные нормальные формы.
7. Понятие формулы исчисления высказываний. Доказуемые формулы.
8. Производные правила вывода.
9. Правила выводимости. Теорема дедукции.
10. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.
11. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.
12. Понятие предиката. Операции над предикатами. Кванторные операции.

### *Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)*

#### *Вопросы к экзамену (8 семестр)*

1. Аксиомы теории множеств. Фундированные множества, вполне упорядоченные множества. Трансфинитная индукция. Теорема Цермело. Лемма Цорна.
2. Формулы исчисления высказываний. Булевы функции и их представление в КНФ и ДНФ. Алгоритм приведения в КНФ/ДНФ. Булевы схемы. Эффективная булева схема для сложения чисел.
3. Гильбертовское исчисление высказываний. Корректность. Лемма о дедукции. Основные правила натурального вывода. Теорема о полноте гильбертовского исчисления.
4. Исчисление секвенций. Резолюционная система доказательств.
5. Выразимость в арифметике. Бета-функции Геделя, арифметичность вычислимых функций. Арифметическая иерархия. Универсальные множества в арифметической иерархии.
6. Теоремы Тарского о невыразимости и Геделя о неполноте арифметики. Вторая теорема Геделя о неполноте.
7. Арифметика Пеано.
8. Минимальный многочлен элемента поля. Сопряженные элементы. Норма и след элемента, их свойства.
9. Дискриминант поля алгебраических чисел. Идеалы в кольцах целых алгебраических чисел. Примеры неглавных идеалов.
10. Норма идеала. Норма главного идеала. Определение дробного идеала. Операции над идеалами, свойства операций.
11. Теорема об однозначности разложения целого идеала в произведение простых идеалов и ее следствия. Законы разложения в кольцах целых алгебраических чисел.
12. Теорема Куммера. Законы разложения.

13. Расширения Галуа. Понятие сопряженных идеалов. Законы разложения в случае нормальных расширений.
14. Решетки. Основной параллелепипед решетки. Критерий полноты решетки. Лемма Минковского о выпуклом теле. Геометрическое изображение алгебраических чисел. Вычисление специальных объемов. Логарифмическое пространство. Геометрическое изображение единиц.
15. Структура группы единиц. Регулятор поля алгебраических чисел. Построение системы основных единиц.
16. Нахождение основной единицы вещественного квадратичного поля. Группа классов идеалов поля алгебраических чисел. Теорема о конечности числа классов.
17. Фундаментальная область. Вычисление одного объема. Принцип Дирихле. Аналитическая формула для числа классов.
18. Квадратичное поле. Описание арифметики квадратичного поля. Законы разложения в квадратичных полях. Единицы квадратичного поля.
19. Уравнение Пелля. Нахождение фундаментальной единицы поля. Кубическое поле. Случай нормального и ненормального расширения. Вычисление целого базиса для чисто кубического расширения поля рациональных чисел.
20. Законы разложения в кубических полях. Круговое поле. Многочлен деления круга, его свойства. Кольцо целых элементов кругового поля. Законы разложения в круговых полях.
21. Суммы Гаусса и их свойства. Суммы Гаусса как элементы круговых полей. Необходимое условие простоты числа на языке сумм Гаусса.

*Вопросы для самостоятельной работы аспирантов.*

1. Понятие высказывания. Алгебра высказываний.
2. Логические операции над высказываниями.
3. Логические вентили, схемы и структуры
4. Формулы алгебры логики. Равносильные формулы.
5. Булевы функции. Функционально полные системы булевых функций.
6. Минимизация булевых функций. Совершенные нормальные формы.
7. Понятие формулы исчисления высказываний. Доказуемые формулы.
8. Производные правила вывода.
9. Правила выводимости. Теорема дедукции.
10. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.
11. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.
12. Понятие предиката. Операции над предикатами. Кванторные операции.
13. Формулы логики предикатов. Равносильности.
14. Предваренная нормальная форма. Сколемовские функции.
15. Общезначимость и выполнимость формул. Проблема разрешимости.
16. Алгоритмы распознавания общезначимости формул.
17. Метод резолюций в логике предикатов.
18. Интуиционистская, нечеткая и модальная логики.
19. Алгоритмические логики.
20. Формальные языки и грамматики.
21. Понятие алгоритма, его свойства. Классификация алгоритмов. Описание алгоритмов.

22. Машина Тьюринга.
23. Машина Поста.
24. Нормальные алгорифмы Маркова.
25. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества.
26. Рекурсивные функции. Классы рекурсивных функций.
27. Массовые проблемы. Неразрешимость проблем. Экстраалгоритм.
28. Алгоритмы и сложность. Сложностные классы задач.
29. Понятие NP-полной задачи.
30. Временная и пространственная сложность алгоритмов.
31. Построение эффективных алгоритмов.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, издательство	Год	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		печатные издания (кол-во)	электронные (наименование ресурсов)
1	2	3	4
<b>Основная литература</b>			
1. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с	2013		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-91134-460-3
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015. - 400 с.	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html</a>
3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.:	2015		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-16-010206-1
<b>Дополнительная литература</b>			
1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. [Электронный ресурс] / Салимов Р.Б. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 484 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html</a>
2. Конвей Дж. "О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. [Электронный ресурс] / Конвей Дж.; Пер. с англ. С.М. Львовского. - М.: МЦНМО, 2009." - 184 с.	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html</a>
3. Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники [Электронный ресурс] / Смирнов Е.Ю. - М.: МЦНМО, 2009. - 48 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html</a>
4. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: ИНФРА-М, 2010. - 528 с.:	2010		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-9776-0163-4



5. Гулиян, Б. Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс] : учебник / Б. Ш. Гулиян, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 712 с.	2011		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-902597-61-2.
Интернет-ресурсы			
1. Журнал «Алгебра и анализ» РАН			<a href="http://www.pdmi.ras.ru/AA">http://www.pdmi.ras.ru/AA</a>
2. Журнал вычислительной математики и математической физики			<a href="http://www.mathnet.ru/zvmmf">http://www.mathnet.ru/zvmmf</a>
3. Журнал "Математическое моделирование"			<a href="http://www.imamod.ru/journal">http://www.imamod.ru/journal</a>
4. Журнал «Математические заметки»			<a href="http://www.mathnet.ru/mz">http://www.mathnet.ru/mz</a>
5. Журнал «Математический сборник»			<a href="http://www.mathnet.ru/msb">http://www.mathnet.ru/msb</a>

## 7.2. Материально-техническое обеспечение учебного процесса

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы (указать необходимое).

Таблица 7.2.1 – Материально-техническое обеспечение дисциплины

Вид учебных занятий по дисциплине	Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
1	2	3	4
Лекция	Лекционно-семинарская аудитория 230 Владимир, пр-т. Строителей, д. 11, (к.7)	Компьютер с выходом в сеть Интернет, мультимедиа проектор, экран белый матовый, доска маркерная, доска меловая.	Лицензии на Microsoft Windows/Office: Microsoft Open License 61248656/62857078/6384 8368/64196124 Visual Studio professional: MSDN подписка, Mathcad 14.0 M011: PKG-7518-FN Лицензия на антивирусное ПО: Kaspersky Endpoint Security Standart 1356-161220-101943-827-71

Рабочую программу составил

профессор кафедры МОиИТ, д. ф.-м. н. В.Г. Журавлев

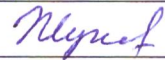


Рецензент

(представитель работодателя)

к.ф.-м.н. доцент кафедры ИИИ

ФГБОУ ВО РАНХиГС А.А. Жукова



(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий

Протокол № 10 от 26.06.2020 года

Заведующий кафедрой МОиИТ Ю.Ю. Евсева



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.06.01 «Математика и механика»

Протокол № 1 от 31.08.2020 года

Председатель комиссии заместитель директора по УМР В.А.Игонин



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

*Математическая логика, алгебра и теория чисел*

образовательной программы направления подготовки 01.06.01 «Математика и механика»,  
направленность: 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» (аспирантура)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата распорядительного документа о внесении изменения)
1			
2			
3			

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий, протокол № \_\_\_ от \_\_. \_\_ 201\_\_ г.

Зав. кафедрой МОиИТ \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Подпись

ФИО