

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



« 01 » сентября 2020 г. А.В. Федин

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Направление подготовки 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность подготовки 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Уровень высшего образования подготовка кадров высшей квалификации

Форма обучения очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ акад. час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экз./зачет)
4	4/144	36	4		32	Экзамен 72
Итого	4/144	36	4		32	Экзамен 72

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Алгебраическая теория чисел» являются формирование у аспирантов знаний компетенций в области теории чисел, использующей алгебраические методы. Данная дисциплина способствует формированию будущих научно-педагогических кадров в области математики и других естественных наук.

Цель дисциплины – ознакомить аспирантов с арифметикой целых алгебраических чисел, показать сходство и различие классической арифметики и арифметики колец целых чисел конечных расширений поля рациональных чисел. Алгебро-геометрические методы, дзета-функции, ряды Дирихле, позволяют показать иное воплощение традиционных объектов арифметики. Полученные знания помогут пониманию теории алгебраических кривых (теория дивизоров, ветвление, группа классов дивизоров и т. д.), прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий.

Аспирантам будет предложено изучить и прикладные аспекты алгебраической теории чисел.

Задачами освоения дисциплины «Алгебраическая теория чисел» являются: определение группы классов идеалов поля алгебраических чисел как меры неоднозначности разложения на простые; вычисление группы классов идеалов – получение аналитической формулы; навыки конкретных вычислений в алгебраической теории чисел.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина (Б1.В.ДВ.2.1) «Алгебраическая теория чисел» относится к вариативной части учебного плана для подготовки аспирантов по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций. Опирается на знания, полученные в курсе «Алгебра и теория чисел», «Диофантовы уравнения», «Нестандартная арифметика».

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
1	2	3
ОПК-1	частично	<i>Знать:</i> - основные аналитические формулы и их качественные пояснения; - приложения алгебраической теории чисел к задачам криптографии; <i>Уметь:</i> - реферировать научную литературу, в том числе на иностранных языках, при условии соблюдения научной этики и авторских прав; - находить группу разложения идеала, находить образующие суммы и произведения идеалов; <i>Владеть:</i> - способами тестирования идеала на простоту; - современными информационно-коммуникационными технологиями;

ПК-1	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные аналитические формулы и их качественные пояснения;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно проводить конкретные вычисления, необходимые для доказательства свойств и теорем курса;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методами проведения теоретических и экспериментальных исследований в области теории чисел;</li> </ul>
ПК-2	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- определения основных объектов алгебраической теории чисел: кольцо целых, след и норма элемента, дискриминант поля, единица кольца, идеал, норма идеала, индекс ветвления, группа разложения, группа классов идеалов, характер Дирихле, суммы Гаусса, дзета-функции, ряды Дирихле;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать опыт и результаты собственных научных исследований для формирования профессионального мышления;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- прикладными информационными технологиями в научно-исследовательской деятельности и использовать их в представлении результатов НИР;</li> </ul>
УК-1	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные методы научно-исследовательской деятельности.</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах; критически оценивать любую поступающую информацию, вне зависимости от источника;</li> <li>- избегать автоматического применения стандартных формул и приемов при решении задач;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методами решения базовых задач криптографии и математической теории кодов, находить число классов квадратичного поля;</li> </ul>
УК-3	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методы критического анализа и оценки современных научных достижений;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- находить целые базисы и дискриминанты квадратичных и кубических полей;</li> <li>- в рамках теоремы Куммера находить разложения главных идеалов, порожденных простыми числами;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- технологиями планирования профессиональной деятельности в сфере научных исследований;</li> </ul>
УК-5	частично	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- приемы и технологии целеполагания и целереализации;</li> <li>- пути достижения более высоких уровней профессионального и личного развития;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формулировать цели профессионального и личностного развития, оценивать свои возможности, реалистичность и адекватность намеченных способов и путей достижения планируемых целей;</li> <li>- находить сокращенные формы пропозициональной логики, предикатов, целые базисы и дискриминанты квадратичных и кубических полей;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- приемами целеполагания, планирования, реализации необходимых видов деятельности, оценки и самооценки результатов деятельности по решению профессиональных задач;</li> </ul>

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 часов

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Арифметика полей алгебраических чисел	4		6			5	3/50%	
2	Геометрические методы в теории чисел	4		6	2		5	3/50%	
3	Аналитические методы в теории чисел	4		6			5	4/50%	
4	Аналитическая формула для числа классов идеалов	4		6			5	3/50%	
5	Важные примеры	4		6			6	4/50%	
6	Прикладные аспекты алгебраической теории чисел	4		6	2		6	3/50%	
Итого за 4 семестр:				36	4		32	20/50%	Экзамен 72
Наличие в дисциплине КП/КР					-				
Всего по УП				36	4		32	20/50%	Экзамен 72

#### Содержание дисциплины по темам (разделам)

№ п/п	Наименование раздела учебной дисциплины	Содержание раздела
1	2	3
1.	Раздел I. Арифметика полей алгебраических чисел	Поле алгебраических чисел. Порядки в алгебраических числовых полях. Минимальный многочлен элемента поля. Дискриминант поля алгебраических чисел.
2.	Раздел II. Геометрические методы в теории чисел	Геометрическое изображение алгебраических чисел. Геометрическое изображение алгебраических чисел. Вычисление специальных объемов. Логарифмическое пространство. Геометрическое изображение единиц.
3.	Раздел III. Аналитические методы в теории чисел	Аналитический метод. Аналитическая формула для числа классов дивизоров. Дзета-функция Дедекинда. Фундаментальная область. Вычисление объема. Принцип Дирихле. Тождество Эйлера. Число классов дивизоров кругового поля. Простые дивизоры первой степени. Число классов дивизоров квадратичного поля

1	2	3
4.	Раздел IV. Аналитическая формула для числа классов идеалов	Фундаментальная область. Вычисление одного объема. Принцип Дирихле. Аналитическая формула для числа классов. Разложение идеалов дедекиндова кольца в произведение простых идеалов. Дробные идеалы. Группа классов. Нормы идеалов. Разложение простых чисел в квадратичных и круговых полях.
5.	Раздел V. Важные примеры	Примеры
6.	Раздел VI. Прикладные аспекты алгебраической теории чисел	Законы разложения в кубических полях. Круговое поле. Многочлен деления круга, его свойства. Кольцо целых элементов кругового поля. Законы разложения в круговых полях. Суммы Гаусса и их свойства. Суммы Гаусса как элементы круговых полей. Необходимое условие простоты числа на языке сумм Гаусса.

### 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Алгебраическая теория чисел» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- Интерактивная лекция (Раздел №1,2,3,5);
- Применение имитационных моделей (Раздел №5,6);

### 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ

#### *Текущий контроль успеваемости*

1. Основной параллелепипед решетки. Критерий полноты решетки.
2. Лемма Минковского о выпуклом теле.
3. Геометрическое изображение алгебраических чисел.
4. Вычисление специальных объемов.
5. Логарифмическое пространство.
6. Геометрическое изображение единиц.
7. Докажите, что существует бесконечно много простых вида  $4k + 3$ ,  $k$  — целое неотрицательное.
8. Докажите, что среди целых чисел, представимых многочленом положительной степени с целыми коэффициентами, имеется бесконечно много составных.
9. Некоторое натуральное число имеет 3 простых делителя, квадрат этого числа имеет 27 делителей. Сколько делителей имеет куб этого числа?
10. Проверить, что кольцо многочленов  $K[x]$  не является полем (Какой многочлен является обратным к многочлену  $x^2$  по умножению?). Проверить, что кольцо матриц  $M_n(K)$  при  $n > 1$  не является полем.
11. Сформулируйте Китайскую теорему об остатках.
12. Покажите, что любые два вычета, удовлетворяющие системе сравнений, лежат в одном классе по модулю  $M$ .

$$13. \begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv r_3 \pmod{m_3} \end{cases}$$

14. Найдите остаток от деления  $735^{286}$  на 2431

*Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)*

*Вопросы к экзамену*

1. Минимальный многочлен элемента поля. Сопряженные элементы. Норма и след элемента, их свойства.
2. Дискриминант поля алгебраических чисел. Идеалы в кольцах целых алгебраических чисел. Примеры неглавных идеалов.
3. Норма идеала. Норма главного идеала. Определение дробного идеала. Операции над идеалами, свойства операций.
4. Теорема об однозначности разложения целого идеала в произведение простых идеалов и ее следствия. Законы разложения в кольцах целых алгебраических чисел.
5. Теорема Куммера. Законы разложения.
6. Расширения Галуа. Понятие сопряженных идеалов. Законы разложения в случае нормальных расширений.
7. Решетки. Основной параллелепипед решетки. Критерий полноты решетки. Лемма Минковского о выпуклом теле. Геометрическое изображение алгебраических чисел. Вычисление специальных объемов. Логарифмическое пространство. Геометрическое изображение единиц.
8. Структура группы единиц. Регулятор поля алгебраических чисел. Построение системы основных единиц.
9. Нахождение основной единицы вещественного квадратичного поля. Группа классов идеалов поля алгебраических чисел. Теорема о конечности числа классов.
10. Дзета-функция Дедекинда, ее свойства. Характеры Дирихле. L-ряды Дирихле. Основные свойства L-рядов Дирихле. Первое фундаментальное неравенство теории полей классов. L-функции абелевых расширений.
11. Фундаментальная область. Вычисление одного объема. Принцип Дирихле. Аналитическая формула для числа классов.
12. Квадратичное поле. Описание арифметики квадратичного поля. Законы разложения в квадратичных полях. Единицы квадратичного поля.
13. Уравнение Пелля. Нахождение фундаментальной единицы поля. Кубическое поле. Случай нормального и ненормального расширения. Вычисление целого базиса для чисто кубического расширения поля рациональных чисел.
14. Законы разложения в кубических полях. Круговое поле. Многочлен деления круга, его свойства. Кольцо целых элементов кругового поля. Законы разложения в круговых полях.
15. Суммы Гаусса и их свойства. Суммы Гаусса как элементы круговых полей. Необходимое условие простоты числа на языке сумм Гаусса.

*Вопросы для самостоятельной работы аспирантов.*

1. Вложения областей целостности в поля.
2. Поле частных области целостности.

3. Поля рациональных дробей.
4. Китайская теорема об остатках.
5. Конечные расширения поля.
6. Алгебраические элементы над полем.
7. Трансцендентные элементы над полем.
8. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
9. Алгебраические расширения полей.
10. Трансцендентные расширения полей.
11. Простое расширение поля.
12. Поле разложения многочлена и его существование и единственность.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, издательство	Год	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		печатные издания (кол-во)	электронные (наименование ресурсов)
1	2	3	4
<b>Основная литература</b>			
1. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с	2013		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-91134-460-3
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015. - 400 с.	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html</a>
3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортакровский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.:	2015		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-16-010206-1
<b>Дополнительная литература</b>			
1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. [Электронный ресурс] / Салимов Р.Б. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 484 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html</a>
2. Конвей Дж. "О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. [Электронный ресурс] / Конвей Дж.; Пер. с англ. С.М. Львовского. - М.: МЦНМО, 2009." - 184 с.	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html</a>
3. Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники [Электронный ресурс] / Смирнов Е.Ю. - М.: МЦНМО, 2009. - 48 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html</a>
4. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: ИНФРА-М, 2010. - 528 с.:	2010		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-9776-0163-4

5. Гулиян, Б. Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс] : учебник / Б. Ш. Гулиян, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 712 с.	2011		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-902597-61-2.
Интернет-ресурсы			
1. Журнал «Алгебра и анализ» РАН			<a href="http://www.pdmi.ras.ru/AA">http://www.pdmi.ras.ru/AA</a>
2. Журнал вычислительной математики и математической физики			<a href="http://www.mathnet.ru/zvmmf">http://www.mathnet.ru/zvmmf</a>
3. Журнал "Математическое моделирование"			<a href="http://www.imamod.ru/journal">http://www.imamod.ru/journal</a>
4. Журнал «Математические заметки»			<a href="http://www.mathnet.ru/mz">http://www.mathnet.ru/mz</a>
5. Журнал «Математический сборник»			<a href="http://www.mathnet.ru/msb">http://www.mathnet.ru/msb</a>

## 7.2. Материально-техническое обеспечение учебного процесса

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы (указать необходимое).

Лекционно-семинарская аудитория 230 Владимир, пр-т. Строителей, д. 11, (к.7)

Лицензии на Microsoft Windows/Office: Microsoft Open License 61248656/62857078/63848368/64196124

Visual Studio professional: MSDN подписка,

Mathcad 14.0 M011: PKG-7518-FN

Лицензия на антивирусное ПО: Kaspersky Endpoint Security Standart 1356-161220-101943-827-71



Рабочую программу составил  
профессор кафедры МОиИТ, д. ф.-м. н. В.Г. Журавлев



Рецензент

(представитель работодателя) к. ф.-м. н. доцент кафедры ИТ

РТБООУ РАНХиГС Л.А. Мухомова Мухомов

(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий

Протокол № 10 от 26.06.2020 года

Заведующий кафедрой МОиИТ Ю.Ю. Евсеева



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.06.01 «Математика и механика»

Протокол № 1 от 31.08.2020 года

Председатель комиссии заместитель директора по УМР В.А.Игонин



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

*Алгебраическая теория чисел*

образовательной программы направления подготовки 01.06.01 «Математика и механика»,

направленность: 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» (подготовка кадров высшей квалификации)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата распорядительного документа о внесении изменения)
1			
2			
3			

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий, протокол №\_\_ от \_\_. \_\_ 201\_\_ г.

Зав. кафедрой МОиИТ \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

*Подпись*

*ФИО*