

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор  
по научной и инновационной работе  
  
А.В. Федин  
« 09 » 09 20 20 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
ДИОФАНТОВА ТЕОРИЯ

Направление подготовки 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность подготовки 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Уровень высшего образования подготовка кадров высшей квалификации

Форма обучения очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ акад. час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экз./зачет)
3	108/3	36	4		32	Экзамен 36
Итого	108/3	36	4		32	Экзамен 36

Владимир 2020

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Диофантова теория» формирование у аспирантов знаний и компетенций в области теории чисел, использующей арифметико-алгебраические методы. Данная дисциплина способствует формированию будущих научно-педагогических кадров в области математики и других естественных наук.

Цель дисциплины – ознакомить аспирантов с арифметикой и геометрией диофантовых уравнений в целых алгебраических чисел, показать сходство и различие классической арифметики и арифметики колец целых чисел конечных расширений поля рациональных чисел, ознакомить аспирантов с нормированными полями, нормированиями поля рациональных чисел и его конечных расширений. Изложить учащимся основы арифметики и анализа в локальных полях. На примере квадратичных форм раскрыть суть принципа Минковского-Хассе.

Полученные знания помогут пониманию теории диофантовых уравнений, прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий. Параллельное изучение теории алгебраических кривых позволит проследить аналогии между числовыми и функциональными полями. Аспирантом будет предложено изучить и прикладные аспекты алгебраической теории чисел.

Задачами освоения дисциплины «Диофантова теория чисел» являются: введение нормирований и пополнений поля рациональных чисел как инструмента решения диофантовых задач; сведение диофантовой задачи в локальном случае к задаче над конечным полем; навыки конкретных вычислений; знакомство с основами анализа, арифметики локальных полей.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина (Б1.В.ДВ.1.) «Диофантова теория» относится к вариативной части учебного плана для подготовки аспирантов по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций. Опирается на знания, полученные в курсе «Алгебра и теория чисел», «Диофантовы уравнения», «Нестандартная арифметика».

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
1	2	3
ОПК-1	частично	<i>Знать:</i> - теоретические и методологические основания диофантовой теории с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий; <i>Уметь:</i> - реферировать научную литературу, в том числе на иностранных языках, при условии соблюдения научной этики и авторских прав;

		<p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- современными информационно-коммуникационными технологиями;</li> </ul>
<i>ПК-1</i>	<i>частично</i>	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные аналитические формулы и их качественные пояснения;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно проводить конкретные вычисления, необходимые для доказательства свойств и теорем курса;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методами проведения теоретических и экспериментальных исследований в области теории чисел;</li> </ul>
<i>ПК-2</i>	<i>частично</i>	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия курса: нормированное поле, виды нормирований, кольцо нормирования, идеал нормирования, пополнение поля по норме, представление элементов полного нормированного поля, символ Гильберта;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать опыт и результаты собственных научных исследований для формирования профессионального мышления;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- прикладными информационными технологиями в научно-исследовательской деятельности и использовать их в представлении результатов НИР;</li> </ul>
<i>УК-1</i>	<i>частично</i>	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные методы научно-исследовательской деятельности.</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах; критически оценивать любую поступающую информацию, вне зависимости от источника;</li> <li>- избегать автоматического применения стандартных формул и приемов при решении задач;</li> <li>- находить фундаментальные единицы для вещественных квадратичных полей</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методами решения базовых задач криптографии и математической теории кодов, находить число классов квадратичного поля;</li> </ul>
<i>УК-3</i>	<i>частично</i>	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формулировки основных теорем курса;</li> <li>- принцип Минковского-Хассе;</li> <li>- методы критического анализа и оценки современных научных достижений;</li> <li>- об особенностях <math>p</math>-адического анализа и арифметики;</li> </ul> <p><i>Уметь:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов;</li> <li>- определять эквивалентны или нет бинарные квадратичные формы, отвечать на вопрос о представлении рационального числа квадратичной формой от двух или трех переменных, вычислять символ Гильберта, доказывать его свойства;</li> </ul> <p><i>Владеть:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- технологиями планирования профессиональной деятельности в сфере научных исследований;</li> </ul>
<i>УК-5</i>	<i>частично</i>	<p><i>Знать:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- направления профессиональной самореализации;</li> </ul>

		<p>- приемы и технологии целеполагания и целереализации; - пути достижения более высоких уровней профессионального и личного развития;</p> <p><i>Уметь:</i></p> <p>- формулировать цели профессионального и личностного развития, оценивать свои возможности, реалистичность и адекватность намеченных способов и путей достижения планируемых целей;</p> <p>- находить сокращенные формы пропозициональной логики, предикатов, целые базисы и дискриминанты квадратичных и кубических полей;</p> <p><i>Владеть:</i></p> <p>- приемами целеполагания, планирования, реализации необходимых видов деятельности, оценки и самооценки результатов деятельности по решению профессиональных задач;</p>
--	--	--

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых	3		6			5	3/50%	
2	Общие теоремы о квадратичных формах	3		6	2		5	3/50%	РК-1
3	Формы над конечными полями	3		6			5	4/50%	
4	Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел	3		6			5	3/50%	РК-2
5	Теорема Минковского-Хассе	3		6			6	4/50%	
6	Задачи для самостоятельного решения.	3		6	2		6	3/50%	РК 3
Итого за 3 семестр:				36	4		32	20/50%	Экзамен 36
Всего по УП				36	4		32	20/50%	Экзамен 36

## Содержание дисциплины по темам (разделам)

№ п/п	Наименование раздела учебной дисциплины	Содержание раздела
1	2	3
1.	Раздел I. Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых	
1.1.	Тема I. Нормированные поля	<p>Определение нормированного поля. Простейшие свойства норм. Архимедовы и неархимедовы нормирования. Эквивалентные определения неархимедовой нормы. Примеры нормированных полей. Нормирования конечного поля.</p> <p>Нормирования поля рациональных чисел и функций. Эквивалентные нормирования. Описание нормирований поля рациональных чисел. <math>p</math>-адическое нормирование поля рациональных чисел. Показатели, их свойства. Теорема Островского. Полные и неполные нормированные поля. Процедура пополнения поля по норме.</p>
1.2.	Тема II. Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых	<p>Представление <math>p</math>-адических чисел рядами. Идеал нормирования, кольцо целых <math>p</math>-адических чисел – пример локального кольца. Единицы кольца, описание единиц кольца. Запись <math>p</math>-адического числа в виде произведения единицы и степени униформизирующего элемента. Особенности <math>p</math>-адической метрики. Сходимость <math>p</math>-адических рядов. Экспонента и логарифм в поле <math>p</math>-адических чисел. Описание квадратов в поле <math>p</math>-адических чисел. Индекс подгруппы квадратов в мультипликативной группе поля. Корни из единицы в полях <math>p</math>-адических чисел.</p>
2.	Раздел II. Общие теоремы о квадратичных формах	<p>Ранг, матрица, матричная запись квадратичной формы. Эквивалентные квадратичные формы, некоторые инварианты классов эквивалентности. Теорема Лагранжа. Представление элементов поля квадратичными формами. Представление нуля квадратичной формой, некоторые свойства и следствия этих представлений. Общие свойства бинарных квадратичных форм. Прямая сумма квадратичных форм. Теорема о сокращении Витта. Классы Витта.</p>
3.	Раздел III. Формы над конечными полями	<p>Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений. Вычисление группы классов Витта квадратичных форм над конечными полями.</p>
4.	Раздел IV. Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел	<p>Теорема о представлении нуля <math>p</math>-адической квадратичной формой, и ее следствия. Бинарные квадратичные формы и их свойства. Символ Гильберта, его свойства. Описание эквивалентности бинарных форм с помощью символа Гильберта. Формула произведения для символов Гильберта.</p>

1	2	3
5.	Раздел V. Теорема Минковского-Хассе	Доказательство теоремы Минковского-Хассе. Эквивалентность квадратичных форм над полем рациональных чисел. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.
6.	Раздел VI. Задачи для самостоятельного решения	

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Диофантова теория» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- Интерактивная лекция (Раздел №1,2,3,5);
- Применение имитационных моделей (Раздел №5,6);

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ

*Текущий контроль успеваемости*

*Рейтинг-контроль №1*

1. Вычислить группу классов Витта квадратичных форм над полями  $p$ -адических чисел.
2. Доказать компактность кольца целых  $p$ -адических чисел.

*Рейтинг-контроль № 2*

1. Используя символ Хассе, решить вопрос о представлении нуля квадратичными формами от трех и четырех переменных;
2. Изучить кривую Зельмана, для которой нарушается принцип Минковского-Хассе.

*Рейтинг-контроль № 3*

1. Суммы трех квадратов над  $o$ -кольцом Фибоначи.
2. Суммы четырех квадратов над  $o$ -кольцом Фибоначи.
3. Квази решетка Фибоначи – суперметод.

*Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)*

*Вопросы к экзамен*

1. Определение нормированного поля. Нормирования конечного поля. Нормирования поля рациональных чисел.
2. Нормирования поля рациональных функций. Теорема Островского.
3. Представление  $p$ -адических чисел рядами. Экспонента и логарифм в поле  $p$ -адических чисел.
4. Описание квадратов в поле  $p$ -адических чисел. Корни из единицы в полях  $p$ -адических чисел. Лемма Гензеля и ее применение.
5. Эквивалентные квадратичные формы, некоторые инварианты классов эквивалентности.
6. Теорема Лагранжа. Представление элементов поля квадратичными формами.

7. Представление нуля квадратичной формой, некоторые свойства и следствия этих представлений.
8. Общие свойства бинарных квадратичных форм. Прямая сумма квадратичных форм. Теорема о сокращении Витта.
9. Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений.
10. Теорема о представлении нуля  $p$ -адической квадратичной формой, и ее следствия.
11. Бинарные квадратичные формы и их свойства.
12. Символ Гильберта, его свойства. Описание эквивалентности бинарных форм с помощью символа Гильберта.
13. Формула произведения для символов Гильберта.
14. Доказательство теоремы Минковского-Хассе.
15. Эквивалентность квадратичных форм над полем рациональных чисел.
16. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.

*Вопросы для самостоятельной работы аспирантов.*

1. Примеры нормированных полей. Нормирования конечного поля.
2. Процедура пополнения поля по норме.
3. Идеал нормирования, кольцо целых  $p$ -адических чисел – пример локального кольца.
4. Корни из единицы в полях  $p$ -адических чисел.
5. Теорема о сокращении Витта. Классы Витта.
6. Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений. Вычисление группы классов Витта квадратичных форм над конечными полями.
7. Доказательство теоремы Минковского-Хассе.
8. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, издательство	Год	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		печатные издания (кол-во)	электронные (наименование ресурсов)
1	2	3	4
<b>Основная литература*</b>			
1. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с	2013		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-91134-460-3
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015. - 400 с.	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html</a>
3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.:	2015		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-16-010206-1

Дополнительная литература*			
1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. [Электронный ресурс] / Салимов Р.Б. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 484 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111560.html</a>
2. Конвей Дж. "О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. [Электронный ресурс] / Конвей Дж.; Пер. с англ. С.М. Львовского. - М.: МЦНМО, 2009." - 184 с.	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html</a>
3. Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники [Электронный ресурс] / Смирнов Е.Ю. - М.: МЦНМО, 2009. - 48 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575252.html</a>
4. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: ИНФРА-М, 2010. - 528 с.:	2010		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-9776-0163-4
5. Гулиян, Б. Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс] : учебник / Б. Ш. Гулиян, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 712 с.	2011		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-902597-61-2.
Интернет-ресурсы			
1. Журнал «Алгебра и анализ» РАН			<a href="http://www.pdmi.ras.ru/AA">http://www.pdmi.ras.ru/AA</a>
2. Журнал вычислительной математики и математической физики			<a href="http://www.mathnet.ru/zvmmf">http://www.mathnet.ru/zvmmf</a>
3. Журнал "Математическое моделирование"			<a href="http://www.imamod.ru/journal">http://www.imamod.ru/journal</a>
4. Журнал «Математические заметки»			<a href="http://www.mathnet.ru/mz">http://www.mathnet.ru/mz</a>
5. Журнал «Математический сборник»			<a href="http://www.mathnet.ru/msb">http://www.mathnet.ru/msb</a>

## 7.2. Материально-техническое обеспечение учебного процесса

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы (указать необходимое).

Лекционно-семинарская аудитория 230 Владимир, пр-т. Строителей, д. 11, (к.7)

Лицензии на Microsoft Windows/Office: Microsoft Open License 61248656/62857078/63848368/64196124

Visual Studio professional: MSDN подписка,

Mathcad 14.0 M011: PKG-7518-FN

Лицензия на антивирусное ПО: Kaspersky Endpoint Security Standart 1356-161220-101943-827-71



Рабочую программу составил

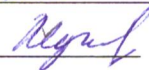
профессор кафедры МОиИТ, д. ф.-м. н. В.Г. Журавлев



Рецензент

(представитель работодателя) к.ф.-м.н. доцент кафедры ИТ

ФГБОУ РАНХиГС А.А. Жукова

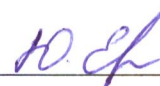


(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий

Протокол № 10 от 26.06.2020 года

Заведующий кафедрой МОиИТ Ю.Ю. Евсеева



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.06.01 «Математика и механика»

Протокол № 1 от 31.08.2020 года

Председатель комиссии заместитель директора по УМР В.А.Игонин



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

*Диофантова теория*

образовательной программы направления подготовки *01.06.01 «Математика и механика»*,  
направленность: *01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» (аспирантура)*

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата распорядительного документа о внесении изменения)
1			
2			
3			

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического образования и информационных технологий, протокол № \_\_\_ от \_\_. \_\_ 201 \_\_ г.

Зав. кафедрой МОиИТ \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

*Подпись*

*ФИО*