

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

"Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"

В. Г. Журавлев

ЯДЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Монография

Владимир 2019

УДК 34, 36

ББК 22.13

Ж 91

Рецензенты:

Кандидат физико - математических наук,
доцент кафедры Бизнес - информатики и экономики, ФГБОУ ВО
"Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых"
B. E. Крылов

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры современного образования Владимирского филиала
Российского университета кооперации
B. B. Красильщиков

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Ж 91

Ядерные цепные дроби: монография / В. Г. Журавлев; Владим. гос. ун-т им.
А.Г. и Н.Г. Столетовых.- Владимир: ВлГУ, 2019. - 283 с.
ISBN

Монография объединяет новые результаты исследований по актуальным направлениям диофантовых приближений действительных и алгебраических чисел и включает в себя подробное изложение современной теории многомерных цепных дробей.

Может быть полезна исследователям в области теории диофантовых приближений, а также преподавателям высшей школы, аспирантам, магистрам и студентам.

Ил. 5. Библиогр.: 116 назв.

УДК 34, 36
ББК 22.13
© ВлГУ, 2019

ISBN

1

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 14-11-00433.

Перечень стандартных обозначений

Множества и отображения

X^{int} — множество внутренних точек из X

$X = X_1 \sqcup X_2$ — строгое разбиение множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$X = X_1 \cup X_2$ — нестрогое разбиение множества X в случае, если $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \emptyset$

id — тождественное отображение

$[x]$ — целая часть вещественного числа x

$\|x\|$ — расстояние от x до ближайшего целого числа

Поля и кольца

\mathbb{Z} — кольцо целых рациональных чисел

\mathbb{R} — поле вещественных чисел

$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — мультиликативная группа поля \mathbb{R}

\mathbb{Q} — поле рациональных чисел

Пространства

\mathbb{R}^d — вещественное векторное пространство размерности d

\mathbb{P}^d — проективное пространство размерности d

\mathbb{C}^d — комплексное векторное пространство размерности d

$\mathbb{Z}^d = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_d$ — кубическая решетка размерности d в пространстве \mathbb{R}^d

$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ — тор размерности d относительно кубической решетки \mathbb{Z}^d

$\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d / L$ — тор размерности d относительно полной d -мерной решетки
 $L \subset \mathbb{R}^d$

Группы

$\text{GL}_d(\mathbb{R})$ — полная линейная группа невырожденных квадратных матриц порядка d с коэффициентами из \mathbb{R}

$\text{GL}_d(\mathbb{Z})$ — подгруппа унимодулярных матриц M из $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ с коэффициентами из \mathbb{Z} и определителем $\det M = \pm 1$

$\text{PGL}_{d+1}(\mathbb{R})$ — проективная группа преобразований, получающаяся факторизацией $\text{PGL}_{d+1}(\mathbb{R}) = \text{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times$ группы $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$

Введение

Отображение дифференцирования.

На множестве пар $v = \{v_0, v_1\}$ вещественных чисел $v_0 > 0, v_1 < 0$ зададим отображение *дифференцирования*

$$\sigma : v \rightarrow v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma\}, \quad (0.0.1)$$

где

$$v_0^\sigma = v_0 + v_1, \quad v_1^\sigma = v_1 \quad (0.0.2)$$

или

$$v_0^\sigma = v_0, \quad v_1^\sigma = v_0 + v_1 \quad (0.0.3)$$

соответственно при выполнении условий $v_0 + v_1 \geq 0$ или $v_0 + v_1 < 0$.

Выберем $v_0 = a_0, v_1 = -a_1$, где a_0, a_1 — произвольные натуральные числа, подействуем на пару $v = \{v_0, v_1\}$ отображением (0.0.1) несколько раз

$$v \rightarrow v^\sigma \rightarrow (v^\sigma)^\sigma \rightarrow \dots \rightarrow v_{\text{fin}} = ((v^\sigma)^\sigma \dots)^\sigma \quad (0.0.4)$$

и остановимся при появлении одной из пар вида $v_{\text{fin}} = (a, 0)$ или $v_{\text{fin}} = (0, a)$.

Проделаем те же операции с \mathbb{Z} -модулем $M = \mathbb{Z}[a_0, a_1]$, порождаемым числами a_0, a_1 :

$$M \rightarrow M^\sigma \rightarrow (M^\sigma)^\sigma \rightarrow \dots \rightarrow M_{\text{fin}} = ((M^\sigma)^\sigma \dots)^\sigma, \quad (0.0.5)$$

где последним модулем M_{fin} будет

$$M_{\text{fin}} = \mathbb{Z}[a] \quad (0.0.6)$$

— главный модуль с одним порождающим элементом $a > 0$. По определению (0.0.1) имеем

$$\mathbb{Z}[a_0, a_1]^\sigma = \mathbb{Z}[a_0^\sigma, a_1^\sigma], \quad (0.0.7)$$

откуда следует инвариантность

$$M^\sigma = M \quad (0.0.8)$$

\mathbb{Z} -модулей M относительно отображения дифференцирования σ . Сопоставляя (0.0.5) и (0.0.6) с равенством (0.0.8), получаем

$$\mathbb{Z}[a_0, a_1] = \mathbb{Z}[a] \quad (0.0.9)$$

и, значит, наибольший общий делитель н.о.д.(a_0, a_1) равен

$$\text{н.о.д.}(a_0, a_1) = a. \quad (0.0.10)$$

Сопоставим алгоритм Евклида

$$\mathcal{E} : \{a_0, a_1\} \rightarrow \text{н.о.д.}(a_0, a_1) \quad (0.0.11)$$

с отображение дифференцирования σ из (0.0.1). Подробный анализ алгоритма Евклида показывает, что он представляет собою композицию

$$\mathcal{E} = \underbrace{\sigma \cdot \dots \cdot \sigma}_s \quad (0.0.12)$$

отображений дифференцирования σ порядка

$$s = q_0 + q_1 + \dots + q_t \quad (0.0.13)$$

где q_i — неполные частные в алгоритме Евклида (0.0.11).

Звезды и их производные.

Переходя к многомерному случаю, заменим множество пар вещественных чисел $v = \{v_0, v_1\}$ на системы $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, содержащие $d + 1$ вектор v_i из вещественного векторного пространства \mathbb{R}^d размерности d . Система векторов v образует звезду, если любая ее подсистема из d векторов линейно независима и гиперплоскость любых ее $d - 1$ векторов разделяет два оставшихся вектора. Из определения следует, что рассмотренные выше пары чисел $v = \{v_0, v_1\}$ образуют одномерную звезду. На множестве звезд v можно определить отображения дифференцирования

$$\sigma : v \rightarrow v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \quad (0.0.14)$$

нумеруемые элементами $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из совокупности всех сочетаний Σ из двух элементов множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Аналогично (0.0.2), (0.0.3) дифференцирование (0.0.14) также сводится к сложению векторов $v_{k_1} + v_{k_2}$ с заменой условий $v_0 + v_1 \geq 0$ или $v_0 + v_1 \leq 0$ на разделение векторов гиперплоскостью, проходящей через оставшиеся векторы $v \setminus \{v_{k_1}, v_{k_2}\}$. Таким образом, количество дифференцирований $\sigma \in \Sigma$ равно числу сочетаний $\#\Sigma = \frac{d(d+1)}{2}$. В частности, для размерности $d = 1$ имеем $\#\Sigma = 1$ — одно дифференцирование, как и было определено в (0.0.1). Если же $d \geq 2$, то дифференцирований $\#\Sigma = 3$ и в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2$ они не коммутируют

$$(v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \neq (v^{\sigma_2})^{\sigma_1}. \quad (0.0.15)$$

Дифференцирования и разложения в цепные дроби. Одномерный случай.

Выберем α из единичного интервала $\Delta_1 = (0, 1)$ и рассмотрим звезду $v = \{v_0, v_1\}$, состоящую из чисел $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$. Если α — иррациональное число, то процесс дифференцирования (0.0.5) будет бесконечным

$$v \rightarrow v^\sigma \rightarrow (v^\sigma)^\sigma \rightarrow \dots \rightarrow v^{[\sigma]_n} \rightarrow \dots, \quad (0.0.16)$$

где обозначили

$$v^{[\sigma]_n} = \underbrace{((v^\sigma)^\sigma \dots)^\sigma}_n. \quad (0.0.17)$$

Из определения дифференцирования (0.0.1) следует, что на n -ом шаге звезда $v^{[\sigma]_n}$ имеет вид

$$v^{[\sigma]_n} = \{v_0^{[\sigma]_n}, v_1^{[\sigma]_n}\}, \quad (0.0.18)$$

при этом

$$v_0^{[\sigma]_n} = Q_0^{[\sigma]_n} \alpha - P_0^{[\sigma]_n}, \quad v_1^{[\sigma]_n} = Q_1^{[\sigma]_n} \alpha - P_1^{[\sigma]_n}, \quad (0.0.19)$$

где $Q_0^{[\sigma]_n}$ — натуральное число, а $P_0^{[\sigma]_n}$ и $P_1^{[\sigma]_n}$ — целые неотрицательные числа. Также из определения (0.0.1) вытекает, что радиус звезды

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(v^{[\sigma]_n}) = \max_{i=0,1} |v_i^{[\sigma]_n}| \quad (0.0.20)$$

обладает свойством

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (0.0.21)$$

Поэтому из (0.0.19) и (0.0.21) будет вытекать

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \rightarrow \alpha \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (0.0.22)$$

Из разложения (0.0.12) алгоритма Евклида \mathcal{E} следует, что среди дробей $\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}$ для $n = 1, 2, 3, \dots$ содержится подпоследовательность всех *обычных подходящих дробей*

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{P_i^{[\sigma]_{n_m}}}{Q_i^{[\sigma]_{n_m}}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (0.0.23)$$

получающихся по алгоритму Евклида (0.0.11). Оставшиеся же из дробей $\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}$ образуют *промежуточные подходящие дроби*, поэтому свойство сходимости (0.0.35) позволяет и всю расширенную последовательность $\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}$ также называть *подходящими дробями* для иррационального числа α .

Открытый отрезок или интервал

$$T^{(n)} = T(v^{[\sigma]_n}) = (v_1^{[\sigma]_n}, v_0^{[\sigma]_n}) \quad (0.0.24)$$

обладает свойством минимальности, состоящим в следующем: *точка Фарея*

$$v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n} = v_0^{[\sigma]_n} + v_1^{[\sigma]_n} = Q^{[\sigma]_n}\alpha - P^{[\sigma]_n}, \quad (0.0.25)$$

где $Q^{[\sigma]_n} = Q_0^{[\sigma]_n} + Q_1^{[\sigma]_n}$ и $P^{[\sigma]_n} = P_0^{[\sigma]_n} + P_1^{[\sigma]_n}$, содержится

$$v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n} = Q^{[\sigma]_n}\alpha - P^{[\sigma]_n} \in T^{(n)} \quad (0.0.26)$$

в интервале (0.0.24) и любая другая точка

$$Q\alpha - P \notin T^{(n)}, \quad (0.0.27)$$

если ее коэффициент $1 \leq Q < Q^{[\sigma]_n}$.

В свойстве минимальности интервала $T^{(n)}$ нетривиальным является только свойство (0.0.27), так как включение (0.0.26) непосредственно вытекает из (0.0.19) и (0.0.24).

Дифференцирования и разложения в цепные дроби. Многомерный случай.

Чтобы перейти к многомерному случаю, рассмотрим множество $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, состоящих из произвольных сочетаний σ_i из Σ ; и пусть $[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ обозначает отрезок из первых n членов последовательности σ , при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \emptyset$. Для размерности $d > 1$ вместо числа α выберем вещественную точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с координатами $\alpha_i > 0$ такую, что инверсная к ней точка $\alpha_- = (1 - \alpha_1, \dots, 1 - \alpha_d)$ принадлежит единичному d -мерному симплексу $\Delta = \Delta_d$ с вершинами в точках $e_0 = (0, \dots, 0)$, $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1)$ из пространства \mathbb{R}^d . Кроме того, будем предполагать, что точка α является иррациональной, когда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над колцом целых рациональных чисел \mathbb{Z} . Точке α отвечает d -мерная звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, составленная из лучей $v_0 = \alpha - e_0$, $v_1 = \alpha - e_1, \dots, v_d = \alpha - e_d$.

Если положить

$$v^{[\sigma]_n} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_n} \quad (0.0.28)$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$, то последовательность дифференцирований (0.0.16) в многомерном случае примет вид

$$v \rightarrow v^{\sigma_1} \rightarrow (v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \rightarrow \dots \rightarrow v^{[\sigma]_n} \rightarrow \dots, \quad (0.0.29)$$

где $[\sigma]_n$ -производная звезда

$$v^{[\sigma]_n} = \{v_0^{[\sigma]_n}, v_1^{[\sigma]_n}, \dots, v_d^{[\sigma]_n}\} \quad (0.0.30)$$

имеет лучи

$$v_i^{[\sigma]_n} = Q_i^{[\sigma]_n}\alpha - P_i^{[\sigma]_n} \quad (0.0.31)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$. Здесь $Q_i^{[\sigma]_n}$ — натуральные числа, а $P_i^{[\sigma]_n} = (P_{i1}^{[\sigma]_n}, \dots, P_{id}^{[\sigma]_n})$ — d -мерные векторы с целыми неотрицательными координатами.

Вместо интервала (0.0.24) появляется открытый параллелоэдр $T^{[\sigma]_n} = T(v^{[\sigma]_n})$, порождаемый $[\sigma]_n$ -производной звездой $v^{[\sigma]_n}$. Например, в двумерном случае $T^{[\sigma]_n}$ представляет собою шестиугольник с вершинами $v_i^{[\sigma]_n}$ для $i = 0, 1, 2$ и $v_i^{[\sigma]_n} + v_j^{[\sigma]_n}$ для $0 \leq i < j \leq 2$. Параллелоэдр $T^{[\sigma]_n}$ является ядром некоторого разбиения d -мерного тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, где $\mathbb{Z}^d = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_d$ — кубическая решетка в пространстве \mathbb{R}^d . По этой причине $T^{[\sigma]_n}$ далее будем называть *ядром*.

Теперь свойство (0.0.21) заменяется более слабым свойством

$$\text{vol } T^{[\sigma]_n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (0.0.32)$$

где через $\text{vol } T^{[\sigma]_n}$ обозначили объем ядра $T^{[\sigma]_n}$. Что же касается сходимости

$$\varrho_{\max,d}^{[\sigma]_n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty \quad (0.0.33)$$

радиуса

$$\varrho_{\max,d}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max,d}(T^{[\sigma]_n}) \quad (0.0.34)$$

ядра $T^{[\sigma]_n}$, то ее выполнимость зависит от выбора бесконечной последовательности дифференцирований или специализации дифференцирований σ из множества Ξ . Поэтому совместное приближение

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right) \rightarrow \alpha \text{ при } n \rightarrow +\infty \quad (0.0.35)$$

точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ многомерными рациональными дробями $\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}$ с общим знаменателем $Q_i^{[\sigma]_n}$ удается гарантировать только при выполнении условия сходимости (0.0.33).

Выбрав за нормирующее тело выпуклый многогранник $T^{[\sigma]_n}$, зададим отвечающую ему $T^{(n)}$ -норму

$$\|\cdot\|^{(n)} = \|\cdot\|_\alpha^{[\sigma]_n}, \quad (0.0.36)$$

зависящую от точки α , специализации $\sigma \in \Xi$, порядка производной n и являющуюся квазинормой. Определим *точку Фарея*

$$v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n} = v_0^{[\sigma]_n} + \dots + v_d^{[\sigma]_n} = Q^{[\sigma]_n} \alpha - P^{[\sigma]_n}, \quad (0.0.37)$$

где

$$\begin{aligned} Q^{[\sigma]_n} &= Q_0^{[\sigma]_n} + \dots + Q_d^{[\sigma]_n} = Q_n, \\ P^{[\sigma]_n} &= P_0^{[\sigma]_n} + \dots + P_d^{[\sigma]_n} = (P_{n1}, \dots, P_{nd}), \end{aligned} \quad (0.0.38)$$

здесь Q_n — натуральное число и P_{n0}, \dots, P_{nd} — целые числа. Тогда в терминах $T^{(n)}$ -нормы *свойство минимальности* ядра $T^{[\sigma]_n}$ можно сформулировать следующим образом: точка Фарея $v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n}$ удовлетворяет неравенству

$$\|v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n}\|^{(n)} = \|Q^{[\sigma]_n} \alpha - P^{[\sigma]_n}\|^{(n)} < 1, \quad (0.0.39)$$

а любая другая точка $Q\alpha - P$ — неравенству

$$\|Q\alpha - P\|^{(n)} \geq 1, \quad (0.0.40)$$

если она имеет коэффициент $1 \leq Q < Q^{[\sigma]_n}$.

Снова в свойстве минимальности нетривиальным является только неравенство (0.0.40), так как из определения точки Фарея (0.0.37) вытекает включение $v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n} \in T^{(n)}$. Из этого включения также получается оценка приближения

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_{n1}}{Q_n} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_{nd}}{Q_n} \right| < \frac{\varrho_{\max,d}^{[\sigma]_n}}{Q_n} \quad (0.0.41)$$

точки α подходящими дробями $\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}} = \frac{P_n}{Q_n} = \left(\frac{P_{n1}}{Q_n}, \dots, \frac{P_{nd}}{Q_n} \right)$ с общим знаменателем Q_n . Оценка будет нетривиальной только при выполнении условия (0.0.33) на радиус ядра $T^{[\sigma]_n}$.

У нас появились две нормы: переменная $T^{(n)}$ -норма $\|\cdot\|^{(n)}$, зависящая от порядка n производной звезды $v^{[\sigma]_n}$, и 1-метрика $|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_d|$ для $x = (x_1, \dots, x_d)$ из \mathbb{R}^d . В терминах $T^{(n)}$ -нормы формулируется свойство минимальности ядра $T^{(n)}$, а 1-метрики — оценивается скорость приближения подходящими дробями $\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}} = \frac{P_n}{Q_n}$.

Свойство минимальности (0.0.39), (0.0.40) означает, что точка Фарея $v_{\text{Farey}}^{[\sigma]_n} = Q^{[\sigma]_n}\alpha - P^{[\sigma]_n}$ является ближайшей к нулю точкой относительно $T^{(n)}$ -нормы среди всех других точек вида $Q\alpha - P$ с коэффициентами $1 \leq Q < Q^{[\sigma]_n}$. Другими словами, точка Фарея $Q^{[\sigma]_n}\alpha - P^{[\sigma]_n}$ дает *наилучшее приближение* нуля относительно $T^{(n)}$ -нормы. Следствием этого факта будет неравенство (0.0.41). Однако, в обратную сторону не следует, что дробь $\frac{P}{Q}$, удовлетворяющая неравенству (0.0.41), будет также определять точку $Q\alpha - P$, ближайшую к нулю относительно $T^{(n)}$ -нормы. Из приведенных рассуждений вытекает, что октаэдральную 1-метрику $|x|_1$ можно заменить любой другой метрикой $|x|_*$, например, шаровой евклидовой 2-метрикой $|x|_2 = (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_d\|^2)^{1/2}$, и при этом сохраняться неравенство (0.0.41), но уже в выбранной метрике $|x|_*$.

Возникает *дуальность*: свойство быть наилучшим приближением лучше формулировать на языке $T^{(n)}$ -норм, а скорость приближения (0.0.41) подходящими дробями $\frac{P_n}{Q_n}$ оценивать в терминах обычных метриках $|x|_*$.

Ядерные разбиения тора.

Чтобы доказать свойство минимальности (0.0.39), (0.0.40) параллелоэдров $T^{[\sigma]_n}$, необходимо локальные дифференции звезд $v^{[\sigma]_n}$, определенные в (0.0.28), дополнить объединяющей глобальной конструкцией разбиений d -мерного тора \mathbb{T}^d .

Роль такой конструкции для нас будут играть *ядерные разбиения*

$$\mathcal{T}^{[\sigma]_n} = \mathcal{T}(v^{[\sigma]_n}) \quad (0.0.42)$$

тора \mathbb{T}^d , получающиеся по следующей схеме:

$$v \Rightarrow v^{[\sigma]_n} \Rightarrow T^{[\sigma]_n} \Rightarrow \mathcal{T}^{[\sigma]_n} \quad (0.0.43)$$

Здесь v — начальная звезда для вещественной точки α , $v^{[\sigma]_n}$ — ее $[\sigma]_n$ -производная звезда (0.0.30) порядка n , $T^{[\sigma]_n} = T(v^{[\sigma]_n})$ — параллелоэдр, порождаемый звездой $v^{[\sigma]_n}$, и $\mathcal{T}^{[\sigma]_n}$ — разбиение тора \mathbb{T}^d , для которого $T^{[\sigma]_n}$ будет ядром

$$T^{[\sigma]_n} = \text{Kr}^{[\sigma]_n} = \text{Kr}(\mathcal{T}^{[\sigma]_n}). \quad (0.0.44)$$

Последнее означает, что разбиение тора $\mathcal{T}^{[\sigma]_n}$ состоит из параллелепипедов $T_i^{[\sigma]_n}$, образующих параллелоэдр

$$T^{[\sigma]_n} = T(v^{[\sigma]_n}) = T_0^{[\sigma]_n} \sqcup T_1^{[\sigma]_n} \sqcup \dots \sqcup T_d^{[\sigma]_n}. \quad (0.0.45)$$

При этом сам параллелоэдр $T^{[\sigma]_n}$ является разверткой некоторого малого тора и такая развертка будет перекладывающейся: параллелепипеды $T_i^{[\sigma]_n}$ в (0.0.45) можно параллельными сдвигами переложить таким образом, чтобы переложенные они снова составляли весь параллелоэдр $T^{[\sigma]_n}$.

Алгоритмы разложения в многомерные цепные дроби.

Условимся о следующей эквивалентности:

$$\text{ядерный алгоритм } \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{специализация дифференцирований } \sigma \in \Xi, \quad (0.0.46)$$

означающей, что выбрав некоторую специализацию $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ мы, тем самым, определили отвечающий ей алгоритм $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma$ и обратно — каждый алгоритм \mathcal{A} задает специализацию $\sigma = \sigma_{\mathcal{A}}$.

Учитывая соглашение (0.0.46) можем сказать, что для произвольной иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ любой ядерный алгоритм $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma$ позволяет находить бесконечную последовательность точек Фарея $Q^{[\sigma]_n} \alpha - P^{[\sigma]_n}$ с наилучшим приближением нуля относительно $T^{(n)}$ -нормы. По этой причине *d-мерные подходящие дроби*

$$\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{n1}}{Q_n}, \dots, \frac{P_{nd}}{Q_n} \right) \rightarrow \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad (0.0.47)$$

будем называть *ядерными цепными дробями*. Они представляют собою один из возможных вариантов многомерных обобщений обычных цепных дробей [47].

Если целью будет получить хорошие приближения (0.0.41) точки α подходящими рациональными дробями $\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{n1}}{Q_n}, \dots, \frac{P_{nd}}{Q_n} \right)$ относительно некоторой произвольной метрики $|x|_*$, то нужно с ростом n избегать вытягивания ядра $T^{[\sigma]_n}$, стремясь к максимально возможному удерживанию у него сферической формы в выбранной метрике $|x|_*$, что аналитически записывается в виде условия

$$\varrho_{\max, d}(T^{[\sigma]_n}) \asymp (\text{vol } T^{[\sigma]_n})^{1/d} \text{ при } n \rightarrow +\infty \quad (0.0.48)$$

на радиус и объем ядра $T^{[\sigma]_n}$.

Будут рассмотрены три семейства ядерных алгоритмов:

- 1) *калибровочные алгоритмы* (\mathcal{G} -алгоритмы);
- 2) *симплекс-модульные алгоритмы* (\mathcal{SM} -алгоритмы);
- 3) *симплекс-ядерные алгоритмы* (\mathcal{SK} -алгоритмы).

Первые два образуют *настраиваемые* на точку α алгоритмы, третье — *свободные* алгоритмы, предполагающие на каждом своем шаге n выбор одной из $\#\Sigma = \frac{d(d+1)}{2}$ операций дифференцирования $\sigma \in \Sigma$. \mathcal{G} -алгоритмы применяются для приближений чисел Пизо, \mathcal{SM} -алгоритмы — для алгебраических иррациональностей α и \mathcal{SK} -алгоритмы — для произвольных вещественных иррациональностей $\alpha \in \mathbb{R}^d$. \mathcal{SM} -алгоритмы приводят к периодическим подходящим дробям $\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}}$ и предполагают знание хотя бы одной алгебраической единицы поля $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Если же известен полный набор единиц поля $\mathbb{Q}(\alpha)$, то данные алгоритмы позволяют получать метрические приближения (0.0.41), сколь угодно близкие к оптимальным относительно обычных метрик $|x|_*$. Эти алгоритмы и \mathcal{G} -алгоритмы можно отнести к теоретическим алгоритмам, а \mathcal{SK} -алгоритмы — к прикладным, поскольку они являются универсальными, простыми и быстрыми алгоритмами.

БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Укажем на отличия от классических подходов к построению многомерной теории цепных дробей [10], [60], [61], [80], [83], [91], [93], [94], [102], [111]. Также приведем литературу, содержащую подробные обзоры алгоритмов разложения в цепные дроби [4], [56], [57], [59], [76], [97], [107], [108], [109].

Исходным мотивом для нас стали *множества ограниченного остатка* [19] – [22]. Одномерные множества давно и хорошо изучены. Их открытие принадлежит Э. Гекке [82]. Трудный шаг — найти правильный способ деления многомерных множеств ограниченного остатка [25].

В результате появились ядерные разбиения $\mathcal{T}^{[\sigma]_n}$ тора \mathbb{T}^d на параллелоэдры, представляющие собою развертки малых торов. Ядерные разбиения — это многомерный аналог разбиений Фибоначчи [17] и двумерных разбиений Рози [104], [16]. Как и последние, ядерные разбиения $\mathcal{T}^{[\sigma]_n}$ позволяют находить наилучшие рациональные приближения относительно ядерных $T^{(n)}$ -норм.

В универсальных \mathcal{SK} -алгоритмах контроль осуществляется по размерам радиусов $\varrho_{\max,d}(T^{[\sigma]_n})$ ядер $T^{[\sigma]_n}$ производных разбиений и такой способ обеспечивает *сильную сходимость*, что всегда приводит к нетривиальным приближениям и снимает проблему сходимости (0.0.35) подходящих дробей $\frac{P^{[\sigma]_n}}{Q^{[\sigma]_n}}$. Обычный же контроль по размерам симплексов может гарантировать только *слабую сходимость* [56].

Часть I

Ядерные разбиения тора

Глава 1

Дифференцирование ядерных разбиений тора

Рассматриваются индуцированные разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\text{Kr}}$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ размерности d , порождающиеся вложенным в него ядром Kr , являющимся перекладывающейся разверткой другого меньшего тора $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$, где \mathcal{L} и L — полные решетки из пространства \mathbb{R}^d .

Для данных разбиений определены операции дифференцирования $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^\sigma$ таким образом, чтобы в результате получались снова индуцированные разбиения $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\text{Kr}^\sigma}$ того же тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$, порождаемые некоторым новым ядром Kr^σ . На языке ядер Kr дифференцирование $\sigma : \text{Kr} \rightarrow \text{Kr}^\sigma$ сводится к комбинации геометрических преобразований пространства \mathbb{R}^d , состоящей из преобразований косого сдвига и сжатий вдоль прямой.

Указаны связи операций дифференцирования σ разбиений тора \mathcal{T} с множествами ограниченного остатка, многомерными приближениями, сбалансированными словами, ростом квазикристаллов и теорией сложности.

1.1 Согласованные множества векторов и их производные

1.1.1 Согласованные множества векторов.

Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Пусть v_0, v_1, \dots, v_d — произвольные векторы из \mathbb{R}^d и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ — дополнительное к σ сочетание. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{1.1.1}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1.1 Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \dots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}}; \quad \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \quad (1.1.2)$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ' . Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем согласованным, если для всех дополнительных (9.9.2) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.1.2) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения согласованности следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы.

Определение 1.1.2 Любое согласованное множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ из \mathbb{R}^d будем для краткости называть звездой.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1.1 Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d; \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_d \leq 1, \quad \lambda_0, \dots, \lambda_d \geq 0\}, \quad (1.1.3)$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, наименуемый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ — внутренняя часть симплекса (1.1.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(v). \quad (1.1.4)$$

1.1.2 Производные звезды.

Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \quad (1.1.5)$$

для строгого и нестрогого разбиений множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \emptyset$ соответственно, где X_k^{int} — множество внутренних точек из X_k .

Из определения 1.1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1.1 Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит плоскости $H_{\sigma'}$ из (1.1.2), где σ' — дополнительное сочетание (9.9.2) для σ . Тогда при этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.1.6)$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (1.1.7)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ — дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v .

□

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.1.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.1.3 Обозначим через

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.1.8)$$

то множество векторов из (1.1.6), которое является согласованным. Если существуют множества векторов v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, т.е. для всех σ выполняется условие леммы 1.1.1, то будем говорить, что согласованное множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождено или более кратко — звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множество невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \quad (1.1.9)$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (1.1.7), и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \quad \text{для всех } k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (1.1.9) назовем σ -производной невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной (1.1.9) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}. \quad (1.1.10)$$

По определению (1.1.9) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1, k_2\}} = v^{\{k_2, k_1\}}. \quad (1.1.11)$$

Поэтому для невырожденной звезды v существуют

$$C_{d+1}^2 = \frac{(d+1)d}{2} \quad (1.1.12)$$

ее производных звезд v^σ .

1.1.3 Инвариантность относительно афинных отображений.

Непосредственно из определения 1.1.1 вытекает следующее свойство инвариантности звезд.

Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ образует звезду, то ее образы

$$Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_d\}$$

относительно произвольного невырожденного аффинного отображения $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, где A принадлежит *полной линейной группе* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, также будут звездами.

Данное свойство позволяет, не уменьшая общности, ограничиваться рассмотрением лишь *приведенных* звезд, когда какие-то d выбранные вектора из v_0, v_1, \dots, v_d равны *единичным векторам*

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, 0, \dots, 1). \quad (1.1.13)$$

Если A — невырожденное аффинное отображение, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\sigma} & v^\sigma \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \xrightarrow{\sigma} & Av^\sigma \end{array}$$

Кратко диаграмму можно записать в виде формулы коммутируемости

$$A(v^\sigma) = (Av)^\sigma \quad (1.1.14)$$

σ -производных с аффинными отображениями $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

1.2 Индуцированные разбиения тора

1.2.1 Перекладывающиеся развертки тора.

Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \quad (1.2.1)$$

— *полная решетка* в пространстве \mathbb{R}^d с базисом l_1, \dots, l_d , т.е. векторы l_1, \dots, l_d линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} ; и пусть T — некоторое подмножество из \mathbb{R}^d . Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_L^d : x \mapsto x \bmod L$$

— биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d \quad (1.2.2)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (1.2.3)$$

на векторы v_0, v_1, \dots, v_d , связанные с базисом (1.2.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, d. \quad (1.2.4)$$

В формуле (1.2.3) использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для цвета точек x , принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (1.2.2), где $k = 0, 1, \dots, d$.

Заметим, что при переходе (1.2.4) от векторов переклыдывания v_0, v_1, \dots, v_d к базису l_1, \dots, l_d решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (1.2.5)$$

В частности, из равенств (1.2.4) и (1.2.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \pmod{L}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (1.2.3) эквивалентно *сдвигу тора* $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L} \quad (1.2.6)$$

на вектор $\alpha' \pmod{L}$.

1.2.2 Перекладывающиеся параллелоэдры и их деформации.

Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные параллелепипеды

$$\bar{T}_m = \{\lambda_{k_1}v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d}v_{k_d}; \quad 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (1.2.7)$$

где k_1, \dots, k_d — дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.1.2), то объединение

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \dots \cup \bar{T}_d \quad (1.2.8)$$

параллелепипедов (1.2.7) образует *параллелоэдр* [19], [21] — многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \bar{T}[l] \quad (1.2.9)$$

с помощью параллельных переносов $\bar{T}[l] = \bar{T} + l$ на векторы l решетки L . Причем различные многогранники $\bar{T}[l]$ из (1.2.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.1.5).

Для $d = 2$ параллелоэдр \bar{T} из (1.2.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ — ромбододекаэдром Федорова [44], а для $d = 4$ — параллелоэдром Вороного [11].

По *i-алгоритму* из [19] вершины, ребра и грани параллелепипедов \bar{T}_m можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d$,

имеющее внутреннюю часть $T^{\text{int}} = (\bar{T})^{\text{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (1.2.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{l \in L} T[l] \quad (1.2.10)$$

в строгом смысле (1.1.5), т.е. в (1.2.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \emptyset$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (1.2.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$.

Исходя из i -алгоритма [19], можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2, \quad \dots, \quad v_0 + v_1 + \dots + v_{d-1} \in T_d. \quad (1.2.11)$$

Если дополнительно предположить выполненные условия (1.2.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ ставится в соответствие *параллелоэдр звезды*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d, \quad (1.2.12)$$

являющийся перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}_L^d с векторами перекладывания v_0, v_1, \dots, v_d в (1.2.3).

Приведенная конструкция развертки T не является жесткой. Параллельные $(d-1)$ -мерные грани параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d из (1.2.12) допускают малые деформации, при которых измененное множество остается перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}_L^d с прежними векторами перекладывания.

1.2.3 Вмещающее пространство.

Кроме тора \mathbb{T}_L^d , нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ $S' = S'_{\alpha'}$, полагая

$$\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \xrightarrow{S} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d : x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \quad (1.2.13)$$

Далее торы $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ будут использоваться, как *вмещающие пространства* для вложений различных торов \mathbb{T}_L^d с изменяющимися решетками L .

1.2.4 Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 1.2.1 \triangleright *Перекладывающаяся развертка T из (1.2.2) вкладывается*

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \quad (1.2.14)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является \mathcal{L} -различимым, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение*

$$T \xrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L} : x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \quad (1.2.15)$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (1.2.15) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \quad (1.2.16)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$.

2. Векторы перекладывания (1.2.3) имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathcal{L} \quad (1.2.17)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \dots$

3. Пусть

$$\text{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k); \ j = 1, \dots, m_k - 1\} \quad (1.2.18)$$

обозначает орбиту подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (1.2.16) будем полагать $\text{Orb}_k^+ \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$. Тогда по определению считается, что орбиты (1.2.18) удовлетворяют условию

$$\text{Orb}^+(T_k) \cap T = \emptyset \quad (1.2.19)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. \triangleleft

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (1.2.18) определить еще *полные орбиты*

$$\text{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k); \ j = 0, 1, \dots, m_k - 1\}. \quad (1.2.20)$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из (1.2.13) иррациональным, когда выполняется условие:

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ линейно независимы над колпцом } \mathbb{Z}. \quad (1.2.21)$$

Здесь α_k — координаты вектора α в некотором базисе полной решетки \mathcal{L} .

Теорема 1.2.1 Пусть развертка T вкладывается (1.2.14) в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α для сдвига $S = S_{\alpha}$ из (1.2.13) будет иррациональным (1.2.21). Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Множества из полных орбит $\text{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е.

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset \quad (1.2.22)$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. Имеет место разбиение тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d, \quad (1.2.23)$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

— орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\text{Orb}(T_k)$ из (1.2.20).

Доказательство приведено в [26]. \square

1.2.5 Индуцированные отображения и ядро разбиения.

Из теоремы 1.2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \rightarrow T$ из (1.2.6) является *индукцированным отображением* или иначе — отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре — для сдвига тора $S : \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \rightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ из (1.2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \quad (1.2.24)$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d \quad (1.2.25)$$

соответственно развертку T из (1.2.2), (1.2.12) и *индукцированное разбиение* (1.2.23) тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ разверткой T .

Множество T по отношению ко всему разбиению тора \mathcal{T} называется (ср. [16], [18]) *ядром* (*karyon*) разбиения \mathcal{T} . Чтобы указывать на такую связь между T и \mathcal{T} будем использовать обозначения

$$T = \text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T}). \quad (1.2.26)$$

Ядро (1.2.26) характеризуется следующим свойством:

ядро — это такое подмножество $\text{Kr} \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\text{Kr}}, \quad (1.2.27)$$

индукцированное сдвигом тора $S = S_{\alpha}$ из (1.2.13), эквивалентно перекладыванию $d + 1$ подмножеств из разбиения

$$\text{Kr} = \text{Kr}_0 \sqcup \text{Kr}_1 \sqcup \dots \sqcup \text{Kr}_d. \quad (1.2.28)$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (1.2.28) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$, а индуцированное отображение (1.2.27) изоморфно сдвигу этого тора.

1.2.6 Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 1.2.2 *Определенная в (1.2.12) развертка тора $T = T(v)$ вкладываетяется (1.2.14) в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d$ из (1.2.25) является разбиением тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$;

2) внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{m} - 1\} \quad (1.2.29)$$

порядка

$$\mathbf{m} = m_0 + m_1 + \dots + m_d. \quad (1.2.30)$$

Доказательство Первая часть теоремы вытекает из теоремы 1.2.1.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что из вложения $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ следует $T \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset$. Все точки орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ являются вершинами параллелепипедов из орбитного разбиения

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k),$$

составленного из параллелепипедов, входящих в орбиту $\text{Orb}^+(T_k)$. Отсюда и существования (1.2.25) разбиения тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d$ выводим $T \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset$.

Методом от противного докажем обратное утверждение. Пусть какой-то параллелепипед $T_k^j = S^j(T_k)$ с индексом $0 < j < n_k$ из разбиения \mathcal{T}_k пересекается $T_k^j \cap T \neq \emptyset$ с разверткой T . Предположим, что пересечение $T_k^j \cap T$ содержит внутреннюю точку развертки T . Тогда одна из вершин параллелепипеда T_k^j также попадает в T^{int} . Но в этом случае мы приходим к противоречию, поскольку при условии $0 < j < m_k$ указанная вершина будет содержаться в орбите $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Наконец, осталось рассмотреть случай

$$\bar{T}_k^j \cap \bar{T} \subset \partial \bar{T}.$$

Здесь через \bar{T}_k^j и \bar{T} мы обозначили замыкания T_k^j и T , а $\partial \bar{T}$ — объединение всех $(d-1)$ -мерных граней многогранника T .

Однако, не трудно видеть, что согласно определению (1.2.25) развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d$ при прикладывании к ней параллелепипедов $T_k^j = S^j(T_k)$ последние не пересекаются с выпуклым многогранником T . Следовательно, включение $\bar{T}_k^j \cap \bar{T} \subset \partial \bar{T}$ не может иметь место.

□

1.3 Производные разбиения тора

1.3.1 Производные вкладывающихся множеств векторов. Основная теорема.

Определение 1.3.1 Пусть $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ — звезда и $T = T(v)$ — отвечающая ей развертка (1.2.25) тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ с векторами перекладывания v_0, v_1, \dots, v_d . Если данная развертка T вкладывается $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно некоторого сдвига $S = S_{\alpha}$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v вкладывается

$$v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \tag{1.3.1}$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига S .

Наша цель — доказать следующую теорему о вложении.

Теорема 1.3.1 Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ вкладывается (1.3.1) в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига $S = S_{\alpha}$ с иррациональным (1.2.21) вектором α . Тогда любая ее σ -производная $v^{\sigma} = \{v_0^{\sigma}, v_1^{\sigma}, \dots, v_d^{\sigma}\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается

$$v^{\sigma} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \quad (1.3.2)$$

в тот же тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига S .

Доказательство вытекает из теоремы 1.3.2 частного вида, которая будет приведена ниже.

Чтобы сформулировать указанную теорему, нам потребуются несколько дополнительных разъяснений.

1.3.2 Инвариантность вложений звезд.

Операция вложения (1.3.1) звезд v инвариантна

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\text{em}} & \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \xrightarrow{\text{em}} & \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^d \end{array} \quad (1.3.3)$$

относительно невырожденных аффинных преобразований $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$. В диаграмме (1.3.3) нижнее вложение звезды $Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_d\}$ рассматривается относительно сдвига

$$S_{A\alpha} : \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^d \longrightarrow \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^d$$

тора $\mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^d = \mathbb{R}^d / A\mathcal{L}$, т.е. вектор сдвига α и решетка тора \mathcal{L} преобразуются тем же преобразованием A .

1.3.3 Приведенные звезды.

Согласно диаграмме (1.3.3) для любой невырожденной звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ и любого аффинного отображения $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ звезда $Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_d\}$ снова будет невырожденной и, следовательно, для нее существует $\{0, d\}$ -производная (см. обозначение (1.1.10))

$$\{Av_0, Av_1, \dots, Av_d\}^{\{0, d\}} = \{(Av_0)', (Av_1)', \dots, (Av_d)'\}. \quad (1.3.4)$$

Дополнительно предположим, что производная звезда (1.3.4) имеет векторы

$$(Av_k)' = Av_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, d-1 \quad (1.3.5)$$

и

$$(Av_d)' = Av_0 + Av_d.$$

По определению звезды векторы $v_1, \dots, v_d \in v$ линейно независимы. Поэтому можно выбрать аффинное отображение $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ с условием

$$Av_1 = e_1, \dots, Av_d = e_d.$$

Чтобы не усложнять обозначения (1.3.5), можем с самого начала считать исходную звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, содержащую единичные векторы

$$v_1 = e_1, \dots, v_d = e_d. \quad (1.3.6)$$

Пусть теперь $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ — невырожденная звезда, удовлетворяющая условию (1.3.6), и такая, что ее $\{0, d\}$ -производная

$$\{v_0, v_1, \dots, v_d\}^{\{0, d\}} = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_d\} \quad (1.3.7)$$

имеет векторы

$$v'_k = v_k \text{ для } k = 0, 1, \dots, d-1 \quad (1.3.8)$$

и

$$v'_d = v_0 + v_d.$$

Здесь в (1.3.7) главное ограничение на последний вектор $v'_d = v_0 + v_d$. Переставляя местами векторы v_1, \dots, v_d в исходном множестве векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, т.е. снова действуя на нее аффинным преобразованием $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, переставляющим местами указанные векторы, всегда можно добиться выполнения условия (1.3.8). Более того, с помощью перестановочных матриц $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ любую σ -производную звезду v^σ , где $\sigma \in \Sigma$, можно свести к рассмотрению $\{0, d\}$ -производных (1.3.7).

Учитывая, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена, условие (1.3.8) будет означать, что вектор $v_0 \in \mathbb{R}^d$ имеет в единичном базисе e_1, \dots, e_d координаты

$$v_0 = (x_1, \dots, x_d), \quad (1.3.9)$$

удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$-\infty < x_1 < 0, \dots, -\infty < x_{d-1} < 0, -1 < x_d < 0.$$

Если переставить местами x_1, \dots, x_{d-1} и воспользоваться условием иррациональности (1.2.21), то ограничения (1.3.9) можно несколько сузить:

$$v_0 = (x_1, \dots, x_d), \text{ где } -\infty < x_{d-1} < \dots < x_1 < 0, -1 < x_3 < 0. \quad (1.3.10)$$

Определение 1.3.2 Звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, удовлетворяющую условиям (1.3.6) и (1.3.9), назовем приведенной.

Обратно, если $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ — приведенная звезда (1.3.6) и (1.3.9), то она обладает свойствами:

- 1) множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является согласованным (см. определение 1.1.1);
- 2) для звезды v существует ее $\{0, d\}$ -производная $v^{\{0, d\}}$, имеющая вид (1.3.8).

Итак, из аффинной инвариантности (1.3.3) свойства вложимости $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ следует, что для доказательства приведенной ранее теоремы о вложении 1.3.1 достаточно рассмотреть лишь следующий ее частный случай.

Теорема 1.3.2 Пусть приведенная (1.3.6), (1.3.9) звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ вкладывается $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d = \mathbb{R}^d / \mathcal{L}$ для некоторой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ относительно сдвига $S = S_{\alpha}$ с иррациональным (1.2.21) вектором α . Тогда ее $\{0, d\}$ -производная существует, имеет вид

$$\{v_0, v_1, \dots, v_d\}^{\{0, d\}} = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_d\} = \{v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_0 + v_d\} \quad (1.3.11)$$

и также вкладывается

$$v' = v^{\{0, d\}} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \quad (1.3.12)$$

в том же торе $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига S .

Доказательство будет проводится по следующему плану. В п.п. 1.4, 1.5 содержится полное описание распределения точечных орбит $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ относительно разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$. Для такого описания в п. 5 используется метод полиэдральных гиперповерхностей, вложенных в разбиение \mathcal{T} . Техническая часть доказательства теоремы 1.3.2 содержится в п. 1.6.

1.4 Структура точечных орбит

1.4.1 Структура производной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$.

Рассмотрим перекладывание $S' : T \longrightarrow T$ развертки тора T , являющееся индуцированным отображением $S' = S|_T$ для сдвига тора $S : \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ из (1.2.13). Подействуем $(d+1)$ -кратным перекладыванием S' на точку $x_0 = 0$ из T^{int} . Получим следующую внутреннюю точку

$$S'^{d+1}(0) = x_{\mathbf{m}} \quad (1.4.1)$$

из T , где порядок \mathbf{m} был определен в (1.2.30). Она является первой точкой из орбиты

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') &= \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') \setminus \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \\ &= \{x_j = S^j(0); \mathbf{m} \leq j \leq \mathbf{m}' - 1\}, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

при этом

$$\mathbf{m}' = m'_0 + m'_1 + \dots + m'_d, \quad (1.4.3)$$

где

$$m'_k = m_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, d-1$$

и

$$m'_d = m_0 + m_d.$$

Из (1.4.3) следует формула связи

$$\mathbf{m}' = 2m_0 + m_1 + \dots + m_d = \mathbf{m} + m_0 \quad (1.4.4)$$

между производным \mathbf{m}' и исходным \mathbf{m} порядками.

Для орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ с номером \mathbf{m}' из (1.4.4), определенной в (1.2.29), имеет место следующее разбиение

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}'). \quad (1.4.5)$$

По критерию 2) из теоремы 1.2.2 для доказательства теоремы 1.3.2 нужно проверить, что выполняется равенство

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset \quad (1.4.6)$$

для производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ для производной звезды $v' = v^{\{0,d\}}$ была определена в (1.2.25). В силу разбиения (1.4.5), чтобы проверить (1.4.6), нужно доказать выполнимость двух условий:

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset, \quad T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset. \quad (1.4.7)$$

Это будет сделано в леммах 1.6.1–1.6.3.

1.4.2 Структура начальной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

В следующем предложении устанавливается важная связь между точками орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ и вершинами многогранников, входящих в разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$.

Предложение 1.4.1 *Обозначим через $V_{\mathcal{T}}$ множество всех вершин параллелепипедов $T_k^j = S^j(T_k)$ для $k = 0, 1, \dots, d$, из которых состоит разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$, определенное в (1.2.25). Тогда для начальной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ выполняется равенство*

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = V_{\mathcal{T}} \setminus \{x_0\}, \quad (1.4.8)$$

где $x_0 = 0$ — нулевая вершина в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$.

Доказательство. Из определения (1.2.25) разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ следует включение

$$V_{\mathcal{T}} \subset \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\}. \quad (1.4.9)$$

Вспоминая соглашение (1.2.11), проследим движение нулевой вершины $x_0 \in V_0$ под действием сдвига S . Имеем

$$\begin{aligned} V_0 &\ni x_0 & \xrightarrow{S} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0-1} & \in V_0^j \\ V_1 &\ni x_{m_0} & \xrightarrow{S} x_{m_0+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0+m_1-1} & \in V_1^j \\ V_2 &\ni x_{m_0+m_1} & \xrightarrow{S} x_{m_0+m_1+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0+m_1+m_2-1} & \in V_2^j \\ &\dots \\ V_d &\ni x_{m_0+m_1+\dots+m_{d-1}} & \xrightarrow{S} x_{m_0+m_1+\dots+m_{d-1}+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_d-1} & \in V_d^j, \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

где для вершин параллелограммов T_k использовали обозначения $V_k = V_{T_k}$ и $V_k^j = S^j(V_k)$. Из диаграммы (1.4.10) следует включение

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\} \subset V_{\mathcal{T}},$$

из которого и (1.4.9) выводим равенство (1.4.8).

□

1.4.3 Структура новой части орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$.

Запишем координаты x_k вектора $v_0 = (x_1, \dots, x_d)$ из (1.3.9) в виде

$$x_1 = -a_1 - \alpha_1, \dots, x_{d-1} = -a_{d-1} - \alpha_{d-1}, x_d = -\alpha_d, \quad (1.4.11)$$

где $a_1, \dots, a_{d-1} = 0, 1, 2, \dots$ и $0 < \alpha_k < 1$ для $k = 1, \dots, d$. Тогда орбиту $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (1.4.2) можно разложить на следующие последовательности:

$$\begin{aligned} T_{k_0} \ni x_{\mathbf{m}} &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} x_{\mathbf{m}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1} && \in T_{k_0}^j \\ T_{k_1} \ni x_{\mathbf{m}+m_{k_0}} &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+m_{k_1}-1} && \in T_{k_1}^j \\ &\dots && \dots \\ &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} && \\ T_{k_b} \ni x_{\mathbf{m}+b_m} &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} x_{\mathbf{m}+b_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+b_m+m_{k_b}-1} && \in T_{k_b}^j \\ &\dots && \dots \\ &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} && \\ T_0 \ni x_{\mathbf{m}+a_m} &\xrightarrow[S]{\downarrow S'} x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1} && \in T_0^j, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

где использованы сокращения

$$b_m = b_1 m_1 + \dots + b_{d-1} m_{d-1}, \quad a_m = a_1 m_1 + \dots + a_{d-1} m_{d-1}. \quad (1.4.13)$$

В диаграмме (1.4.12) строки имеют номера $b = 0, 1, \dots, a$, где $a = a_1 + \dots + a_{d-1}$. Элементы x_* строки с номером

$$b = b_1 + \dots + b_{d-1} = 0, 1, \dots, a_1 + \dots + a_{d-1}$$

принадлежат

$$x_{\mathbf{m}+b_m+j} \in T_{k_b}^j$$

соответствующему образу

$$T_{k_b}^j = S^j(T_{k_b}) \quad (1.4.14)$$

параллелепипеда T_{k_b} под действием отображения $S^j = \underbrace{S \circ \dots \circ S}_j$, где S — сдвиг

из (1.2.13) и степень $j = 0, 1, \dots, m_{k_b} - 1$. Здесь индексы k_b у параллелепипедов T_{k_b} принимают значения

$$\begin{array}{ll} k_b = 1, \dots, d-1 & \text{для } b = 0, 1, \dots, a-1, \\ k_b = 0 & \text{для } b = a, \end{array} \quad (1.4.15)$$

причем k_b принимает значение $1, \dots, d-1$ и 0 соответственно a_1, \dots, a_{d-1} и 1 раз.

Элементы x_* в строках диаграммы (1.4.12) преобразуются по правилу $x_* \mapsto S(x_*)$, а при переходе со строки на строку — правилу $x_* \mapsto S'(x_*)$, где S' — производный сдвиг (1.2.6) или, что то же самое, — индуцированное отображение (1.2.24).

Индекс i' из нижней строки диаграммы (1.4.12) равен наименьшему числу $i' = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющему в силу (1.4.11) условию

$$\mathbf{m} + a_m + i' \leq \mathbf{m}',$$

т.е. согласно (1.4.4) и (1.4.13) — неравенству

$$a_1 m_1 + \dots + a_{d-1} m_{d-1} + i' \leq m_0. \quad (1.4.16)$$

В свою очередь для орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (1.4.2) определим еще дополнительное разбиение

$$\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') \sqcup \text{Orb}_{T^-}^+(0, \mathbf{m}'). \quad (1.4.17)$$

Здесь обозначили

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') \cap T \subset T \quad (1.4.18)$$

и

$$\text{Orb}_{T^-}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') \setminus \text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}'). \quad (1.4.19)$$

Предложение 1.4.2 1. Под действием сдвига S точки орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ движутся согласно диаграмме (1.4.12).

2. Множество (1.4.18) состоит

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') = \{x_{\mathbf{m}}, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m}\} \quad (1.4.20)$$

из всех точек, расположенных в левой части диаграммы (1.4.12), где a_m определено в (1.4.13).

3. Множество (1.4.19) совпадает

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{T^-}^+(0, \mathbf{m}') &= \\ &= \{x_{\mathbf{m}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1}\} \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

с множеством всех точек из правой части диаграммы (1.4.12).

Доказательство. Разворотка тора $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ замкнута относительно производного сдвига S' . Поскольку $x_{\mathbf{m}} \in T$, то точки из правой части равенства (1.4.20) принадлежат развёртке T и, значит, содержатся в множестве $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ по определению (1.4.18).

В силу (1.2.11) и (1.3.6) имеем

$$x_{\mathbf{m}} = v_0 + v_1 + \dots + v_d = (x_1 + 1, \dots, x_d + 1),$$

где $x_d + 1 > 0$ в силу условия (1.3.9). Точки же (x, y, \dots, z) из параллелепипеда T_d имеют координату $z \leq 0$, поэтому $x_{\mathbf{m}} \notin T_d$.

Если $x_{\mathbf{m}}$ принадлежит одному из множеств T_1, \dots, T_{d-1} , то, до первого попадания в область T_0 , начальная точка $x_{\mathbf{m}}$ будет сдвигаться под действием производного сдвига S' на векторы $v_1 = e_1, \dots, v_{d-1} = e_{d-1}$. Следовательно, все ее образы $S'^j(x_{\mathbf{m}})$ снова принадлежат параллелепипедам T_1, \dots, T_{d-1} , что доказывает равенство (1.4.20).

Равенство (1.4.21) вытекает из существования разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$, определенного в (1.2.23) для вкладывающейся в тор (1.2.12) развёртки T .

□

1.5 Разбиение пространства и полиэдральная гиперповерхность

1.5.1 Индуцированное разбиение пространства.

Далее, чтобы избежать возникающих при малых размерностях d вырождений, будем предполагать выполнененным условие

$$d \geq 3. \quad (1.5.1)$$

Случай $d = 1$ рассматривается аналогично [113], а $d = 2$ полностью исследован в [?].

Напомним, что развертка тора $T = T(v)$ является параллелоэдром (1.2.8), составленным из $d+1$ параллелепипеда T_0, T_1, \dots, T_d . Она естественным образом вложена

$$T = T(v) \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{R}^d \quad (1.5.2)$$

в пространство \mathbb{R}^d и является ядром $T = \text{Kr}(\mathcal{T})$ разбиения

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\dots,d} \bigsqcup_{0 \leq j < m_k} S^j(T_k) \quad (1.5.3)$$

тора $\text{Tr}_{\mathcal{L}}^d$, где $S^j(T_k)$ — трансляционные копии параллелепипедов T_k под действием сдвига тора S из (1.2.13).

Тем самым разбиение (1.5.3) задает для всех многогранников

$$S^j(T_k) \triangleleft \mathcal{T}$$

их локальные окружения, т.е. — соседние многогранники $S^{j'}(T_{k'}) \triangleleft \mathcal{T}$, имеющие $(d-1)$ -мерную общую грань с $S^j(T_k)$. Здесь и далее значок \triangleleft будет означать вхождение фигуры в некоторое разбиение в качестве одного из его образующих элементов.

Используя так определенные локальные окружения и вложение (1.5.2), мы можем многогранники T_k из ядра $T = \text{Kr}(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^d$ окружать слоями соседними с ними многогранниками $T_{k'}$. Поскольку по условию $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ — разбиение тора, то в результате указанного процесса роста получится периодическое разбиение

$$\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{T}}(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\dots,d} \bigsqcup_{l \in \mathcal{L}_k} T_k[l] \quad (1.5.4)$$

пространства \mathbb{R}^d . Здесь \mathcal{L}_k — объединение решетки \mathcal{L} и конечного набора ее трансляционных копий $\mathcal{L} + w$, где векторы w определяются локальными окружениями из (1.5.3). Разбиение (1.5.4) назовем *индуктированным разбиением* пространства \mathbb{R}^d .

1.5.2 Полиэдральная поверхность.

Выделим из развертки тора $T = T(v)$ параллелепипеды T_0, T_1, \dots, T_{d-1} . Обозначим их совокупность через $T_{(d)} = T_{(d)}(v)$. Пусть $T_{kk'}$ обозначает общую $(d-1)$ -грань между соседними параллелепипедами T_k и $T_{k'}$. Тогда параллелепипеды из множества $T_{(d)} = T_{(d)}(v)$ имеют

$$C_d^2 = \frac{d(d-1)}{2}$$

общих граней.

Аналогично построению разбиения (1.5.4), будем послойно окружать многоугранники из $T_{(d)} = T_{(d)}(v)$ их соседними многогранниками, используя локальные окружения (1.5.3) только с гранями типа $T_{kk'}$. В результате получим подмножество

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(d)} = \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v) \lhd \widehat{\mathcal{T}} \quad (1.5.5)$$

из разбиения $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{T}}(v)$, содержащего только многогранники типа тех d многогранников, которые входят в множество $T_{(d)} = T_{(d)}(v)$, т.е. их трансляционные копии.

Зададим проекцию

$$\text{pr}_{\parallel e_d} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1}$$

параллельно вектору e_d и подействуем ей

$$\text{pr}_{\parallel e_d} : T_{(d)}(v) \xrightarrow{\sim} S_{(d)}(v) \quad (1.5.6)$$

на множество $T_{(d)}(v)$. По условию $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ — приведенная звезда (1.3.6) и (1.3.9), поэтому образ $S_{(d)}(v)$ в (1.5.6) состоит

$$S_{(d)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{d-1}$$

из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \text{pr}_{\parallel e_d} T_k$ без общих внутренних точек, причем P_0 — единичный $(d-1)$ -мерный куб. Это означает, что отображение (1.5.6) можно продолжить

$$\text{pr}_{\parallel e_d} : \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{(d)}(v) \quad (1.5.7)$$

в пространство \mathbb{R}^d на все множество (1.5.5), где $\mathcal{S}_{(d)}(v) = \text{pr}_{\parallel e_d} \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$.

Лемма 1.5.1 1. Множество $\mathcal{S}_{(d)}(v)$ из (1.5.7) состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов типа P_k для $k = 0, 1, \dots, d-1$ и образует разбиение пространства \mathbb{R}^{d-1} . Отображение (1.5.7) устанавливает взаимно однозначное соответствие между d -мерными параллелепипедами из $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$ и $(d-1)$ -мерными параллелепипедами из $\mathcal{S}_{(d)}(v)$.

2. Множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$ из (1.5.5) разделяет

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_-^d \cup \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v) \cup \mathbb{R}_+^d \quad (1.5.8)$$

пространство \mathbb{R}^d на два несвязанные друг с другом полупространства \mathbb{R}_{\pm}^d , где $\mathbb{R}_-^d \cup \mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^d \setminus \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$ и $\mathbb{R}_-^d \cap \mathbb{R}_+^d = \emptyset$, т.е. любые две точки из замыканий множеств $\overline{\mathbb{R}}_-^d$ и $\overline{\mathbb{R}}_+^d$ нельзя соединить непрерывной кривой, непересекающей множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}^{\text{int}}(v)$.

Доказательство вытекает из существования разбиения пространства (1.5.4) и биекций (1.5.6), (1.5.7). \square

Из леммы 1.5.1 следует, что подмножество (1.5.5) вложено

$$\text{em} : \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v) \lhd \widehat{\mathcal{T}}(v) \quad (1.5.9)$$

в разбиение пространства (1.5.4), состоит из многогранников T_k , входящих в разбиение $\widehat{\mathcal{T}}(v)$, и обладает свойствами поверхности без дыр. По этой причине будем называть $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$ *полиэдральной гиперповерхностью*.

1.5.3 Покрытие области T'_- .

Напомним, что согласно (1.5.6) образ $S_{(d)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{d-1}$ состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \text{pr}_{\parallel e_d} T_k$ без общих внутренних точек, где P_0 — единичный $(d-1)$ -мерный куб.

Разложим производную развертку тора $T' = T(v') = T'_0 \sqcup T'_1 \sqcup \dots \sqcup T'_d$ на части

$$T' = T'_{\text{new}} \sqcup T'_{\text{old}}. \quad (1.5.10)$$

Здесь $T'_{\text{old}} = T' \cap T$ — старая область из развертки T , а новая область $T'_{\text{new}} = T'_-$ имеет разбиение

$$T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{d-1,-}, \quad (1.5.11)$$

где $T'_{1,-}, \dots, T'_{d-1,-}$ — дальние от начала координат половины параллелепипедов T'_1, \dots, T'_{d-1} .

Для развертки $T'(v)$ рассмотрим ее проекцию

$$\text{pr}_{\parallel e_d} : T'(v) \longrightarrow S'_{(d)}(v) \quad (1.5.12)$$

в пространство \mathbb{R}^{d-1} . Образ $S'_{(d)}(v)$ можно представить в виде разбиения

$$S'_{(d)}(v) = S_{(d)}(v) \cup P'_-, \quad (1.5.13)$$

где

$$P'_- = P'_{1,-} \cup \dots \cup P'_{d-1,-}$$

— область из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P'_{k,-} = \text{pr}_{\parallel e_d} T'_{k,-}$, при этом $P'_{k,-}$ прилегает к параллелепипеду P_k .

Пусть

$$\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-} \supseteq P'_- \quad (1.5.14)$$

— покрытие области P'_- , образованное всеми параллелепипедами \tilde{P}_k из разбиения $\mathcal{S}_{(d)}(v)$ пространства \mathbb{R}^{d-1} , пересекающимися во внутренних точках с областью P'_- . Если какой-то параллелепипед \tilde{P}_k с номером $k = 1, \dots, d-1$ содержится в покрытии $\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-}$, то он порождает $(d-1)$ -полиэдральный диск

$$\mathcal{P} = \bigcup_{l'_1} P_1[l'_1] \cup \dots \cup \bigcup_{l'_{d-1}} P_{d-1}[l'_{d-1}] \quad (1.5.15)$$

параллелепипедов из $\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ типа P_1, \dots, P_{d-1} , прилегающих к \tilde{P}_k и друг к другу по общим $(d-2)$ -граням $P_{k'k''}$ параллелепипедов $P_{k'}$ и $P_{k''}$ с номерами $k', k'' = 1, \dots, d-1$.

Для покрытия $\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ из (1.5.14) имеет место следующее разбиение

$$\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}, \quad (1.5.16)$$

где множество

$$\mathcal{C} = \bigcup_{l'_0} P_0[l'_0]$$

состоит из $(d-1)$ -кубов типа P_0 . Здесь в (1.5.15) и (1.5.16) векторы l'_j являются $\text{pr}_{\parallel e_D}$ -проекциями векторов вида

$$l_j = v_0 - l_{j1}v_1 - \dots - l_{j(d-1)}v_{d-1} \quad (1.5.17)$$

с коэффициентами $l_{jk} = 0, 1, 2, \dots$, при этом $l_{01} + \dots + l_{0(d-1)} \geq 1$.

Для доказательства (1.5.17) зададим еще проекцию

$$\text{pr}_{\parallel e_d, \dots, e_2} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

параллельно векторам e_d, \dots, e_2 . Образ $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} P'_- = \text{pr}_{\parallel e_d, \dots, e_2} T'_-$ области (1.5.11) полностью лежит левее точки

$$\text{pr}_{\parallel e_d, \dots, e_2} v_0 + \text{pr}_{\parallel e_d, \dots, e_2} v_1 = x_1 + 1,$$

где x_1 — первая координата вектора v_0 согласно (1.3.9). Отсюда следует, что $l_{11} \leq 0$, а тогда по симметрии и остальные коэффициенты в (1.5.17) также нене- положительны. Куб $P_0[v'_0]$ не принадлежит области P'_- , поэтому случай $l_{01} = \dots = l_{0(d-1)} = 0$ исключается в (1.5.17).

Из леммы 1.5.1 следует, что $(d-1)$ -полиэдральное покрытие $\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ можно однозначно поднять в d -полиэдральную поверхность $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$ до множества

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{C}} \triangleleft \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v) \quad (1.5.18)$$

через проекцию

$$\text{pr}_{\parallel e_d} : \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} \longrightarrow \mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-}. \quad (1.5.19)$$

Лемма 1.5.2 Множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ из (1.5.18) является покрытием

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} \supset T'_- \quad (1.5.20)$$

объединения многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{d-1,-}$, определенных в (1.5.11).

Доказательство. Аналогично (1.5.6), рассмотрим две двумерные проекции

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} : T(v) &\longrightarrow S_{(1)}(v), \\ \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} : T'(v) &\longrightarrow S'_{(1)}(v). \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

Из условий (1.3.6) и (1.3.9) приведенности звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ следует, что образ $S_{(1)}(v)$ является шестиугольником, разбитым

$$S_{(1)}(v) = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_d$$

на прилегающие друг к другу единичный квадрат Q_0 и параллелограммы Q_1, Q_d , где $Q_k = \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} T_k$. Этот же образ можно представить в виде

$$S_{(1)}(v) = Q_k$$

шестиугольной проекции параллелоэдров T_k для $k \neq 0, 1, d$. К образу же $S'_{(1)}(v)$ из (1.5.21) добавляется

$$S'_{(1)}(v) = S_{(1)}(v) \cup Q'_- \quad (1.5.22)$$

с наложением пятиугольник

$$Q'_- = Q'_{1,-} \cup Q'_{k,-},$$

где $Q'_{1,-} = \text{pr}_{\parallel e_2} T'_{1,-}$, $Q'_{k,-} = \text{pr}_{\parallel e_2} T'_{k,-}$ для $k \neq 0, 1, d$.

Возвращаемся к определенному в (1.5.18) множеству $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{C}}$ из полиэдральной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)$. Рассмотрим его проекцию $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-}$. Из разложения (1.5.16), построения (1.5.19) множества $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ и вида (1.5.22) пятиугольника Q'_- следует включение

$$\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} \supseteq Q'_-, \quad (1.5.23)$$

так как в силу (1.3.6) и (1.3.9) проекции векторов l_j равны

$$\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} l_j = \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} v_0 - l_{j1} \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_2} v_1 = (x_1, x_d) - l_{j1}(1, 0), \quad (1.5.24)$$

где $x_1 < 0$, $-1 < x_d < 0$ и коэффициенты $l_{j1} = 0, 1, 2, \dots$ ввиду равенств (1.5.17). Покрытия множества Q'_- квадратом Q_0 и параллелограммом Q_1 очевидны, для остальных случаев снова рассматриваем проекции (1.5.21), отбрасывая векторы e_d и e_k для $k = 2, \dots, d-1$.

Из включений (1.5.14) и (1.5.23) вытекает, что множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ покрывает (1.5.20) объединение многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{d-1,-}$. \square

1.6 Доказательство теоремы о вложении

1.6.1 Точки орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Лемма 1.6.1 Пусть $T' = T(v')$ — развертка тора (1.2.25) для производной $v' = v^{\{0,d\}}$ приведенной звезды v и $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ — орбита (1.2.29) начальной точки $x_0 = 0$ относительно сдвига тора $S = S_\alpha$ из (1.2.13). Тогда имеет место равенство

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset. \quad (1.6.1)$$

Доказательство. В (1.5.10) производная развертка T' была разложена $T' = T'_{\text{new}} \sqcup T'_{\text{old}}$ на старую часть $T'_{\text{old}} = T' \cap T$ и новую $T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{d-1,-}$, состоящую из дальних от начала координат половин $T'_{1,-}, \dots, T'_{d-1,-}$ параллелипедов T'_1, \dots, T'_{d-1} .

Поскольку выполняется включение $T'_{\text{old}} \subset T$ и $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T^{\text{int}} = \emptyset$, то можем записать

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\text{int}}_{\text{old}} = \emptyset. \quad (1.6.2)$$

В силу предложения 1.4.1 и разбиения (1.5.11) для доказательства равенства

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\text{int}}_{\text{new}} = \emptyset \quad (1.6.3)$$

нужно проверить выполнимость равенства

$$V_T \cap T'^{\text{int}}_- = \emptyset. \quad (1.6.4)$$

Из леммы 1.5.2 следует, что в область T'^{int} могут попасть только те вершины из V_T , которые являются вершинами многогранников типа T_0, T_1, \dots, T_{d-1} из разбиения \mathcal{T} .

Чтобы убедиться в справедливости (1.6.4), нужно рассмотреть двумерные проекции $\text{pr}_{\|e_{d-1}, \dots, e_2} T$ и $\text{pr}_{\|e_{d-1}, \dots, e_2} T'$. Пятиугольная проекция $Q'_- = \text{pr}_{\|e_{d-1}, \dots, e_2} T'_-$ содержит пять вершин и одну внутреннюю точку — проекции вершин многогранника T'_- . Из рассуждений леммы 1.5.2 и условия $-1 < x_d < 0$ следует, что вершины квадратов $Q_0[l''_{0j}]$ и параллелограммов $Q_1[l''_{1j}]$, где $l''_{kj} = \text{pr}_{\|e_{d-1}, \dots, e_2} l_{kj}$, могут попадать только в указанные пять граничных вершин проекции Q'_- . Рассматривая аналогичные проекции, последовательно отбрасывая векторы e_d и e_k для $k = 2, \dots, d-1$, убеждаемся, что вершины остальных параллелограммов $Q_k[l''_{kj}]$ также могут попадать только в те же самые пять вершин соответствующих пятиугольников Q'_- . Отсюда получаем равенство (1.6.4), а значит, и (1.6.3).

Утверждение леммы 1.6.1 вытекает из равенств (1.5.10), (1.6.2) и (1.6.3). \square

1.6.2 Точки орбиты $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$.

Лемма 1.6.2 Пусть $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ — часть орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (1.4.2), содержащаяся в исходной развертке тора $T = T(v)$, где порядок $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + m_0$ был определен в (1.4.4). Тогда в условиях леммы 1.6.1 выполняется равенство

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') \cap T^{\text{int}} = \emptyset. \quad (1.6.5)$$

Доказательство. Из построения (1.2.25) производной развертки тора $T' = T(v')$ следует, что точки (x, y, \dots, z) из ее замыкания \bar{T}' имеют максимальную координату

$$z = z(v'_d) = x_d + 1 > 0. \quad (1.6.6)$$

Определенную в (1.4.1) точку $x_{\mathbf{m}} = (x, y, \dots, z)$ можно записать в виде

$$x_{\mathbf{m}} = (x, y, \dots, z) = v_0 + v_1 + \dots + v_d = v'_1 + \dots + v'_d = (x_1 + 1, \dots, x_d + 1). \quad (1.6.7)$$

Данная точка является вершиной многогранника \bar{T}' . Она характеризуется условием:

среди всех точек из \bar{T}' с d -координатой (1.6.6) точка $x_{\mathbf{m}}$ из (1.6.7) имеет наибольшее значение суммы первых $d - 1$ координат

$$x + y + \dots = x_1 + x_2 + \dots + 2.$$

Движение точки $x_{\mathbf{m}}$ по орбите $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ происходит согласно диаграмме (1.4.12) и сводится к сдвигам на векторы $v_1 = e_1, \dots, v_{d-1} = e_{d-1}$. Следовательно, при таком движении у образов точки $x_{\mathbf{m}}$ сумма первых $d - 1$ координат $x + y + \dots$ увеличивается каждый раз на 1.

Отсюда вытекает, что все образы x_* точки $x_{\mathbf{m}}$ из орбиты $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$, кроме самой начальной точки $x_{\mathbf{m}}$, не принадлежат многограннику \bar{T}' , что доказывает утверждение леммы (1.6.5).

□

1.6.3 Точки орбиты $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$.

Лемма 1.6.3 Пусть $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ — часть орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (1.4.17), дополняющая орбиту $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ из леммы 1.6.2. Тогда для этой части $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ снова справедливо равенство

$$\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}') \cap T'^{\text{int}} = \emptyset. \quad (1.6.8)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 1.6.2 следует, что точки x_* орбиты $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ содержатся в d -мерных кубах $T_0^j = S^j(T_0)$ или в параллелепипедах $T_k^j = S^j(T_k)$ с номерами $k = 1, \dots, d - 1$. Поэтому некоторая точка x_* может попасть в разветку T' , только если содержащий ее многогранник T_k^j пересекается с T' .

Поскольку нас в данном случае интересует лишь новая область $T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{d-1,-}$ из производной развертки тора T' , состоящая из $d - 1$ дальних от начала координат половин $T'_{1,-} \subset T'_-, \dots, T'_{d-1,-} \subset T'_{d-1}$ параллелепипедов T'_1, \dots, T'_{d-1} , то будем следить за попаданием точки

$$x_* \in T'_- \quad (1.6.9)$$

в указанную область T'_- .

Если $x_* \in T_k^j$ и выполняется условие (1.6.9), то по лемме 1.5.2 и (1.5.24) многогранник T_k^j будет содержаться

$$T_k^j \lhd \widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-} \quad (1.6.10)$$

в полиэдранной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(d)}(v)|_{P'_-}$ из (1.5.18) в качестве одного из образующих ее многогранников.

Пусть

$$x_{\mathbf{m}+b_1m_1+\dots+b_{d-1}m_{d-1}} \in T_{k_b} \quad (1.6.11)$$

— начальная точка из диаграммы (1.4.12), из которой получается сдвигами точка $x_* \in T_k^j$.

Случай I: $T_{k_b} = T_k$ для $k = 1, \dots, d-1$. Перейдем от многогранников T_k^j к их $\text{pr}_{\parallel e_d}$ -проекциям

$$P_k^j = \text{pr}_{\parallel e_d} T_k^j$$

— параллелепипедам, среди которых P_0^j — единичные $(d-1)$ -мерные кубы. Из (1.6.10) следует, что параллелепипеды P_1, \dots, P_{d-1} и P_k^j соединены цепью \mathcal{C}_{x_*} последовательно приложенных друг к другу кубов $P_0[l'_0]$ из разбиения $\mathcal{S}_{(d)}(v)|_{P'_-} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$, т.е.

$$P_0[l'_0] \cap P'_- \neq \emptyset. \quad (1.6.12)$$

Векторы l'_0 из (1.6.12) имеют вид

$$l'_0 = v'_0 - l_{j1}v'_1 - \dots - l_{j(d-1)}v'_{d-1} \quad (1.6.13)$$

с коэффициентами $l_{0k} = 0, 1, 2, \dots$, при этом $l_{01} + \dots + l_{0(d-1)} \geq 1$.

Данная цепь \mathcal{C}_{x_*} однозначно задает последовательность сдвигов на векторы

$$v'_0, -v'_{k_1}, -v'_{k_2}, \dots, \quad (1.6.14)$$

при этом $k_j = 1, \dots, d-1$ и $v'_1 = (1, \dots, 0), \dots, v'_{d-1} = (0, \dots, 1)$ — единичные векторы размерности $d-1$. Пусть в последовательности (1.6.14) вектор v'_k встречается c_k раз. Тогда для $c = (c_1, \dots, c_{d-1})$ точка

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_-, \quad (1.6.15)$$

где $x'_* = \text{pr}_{\parallel e_d} x_*$, имеет порядок

$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_{d-1} - c_{d-1})m_{d-1},$$

так как в силу (1.4.4) выполняется равенство

$$\begin{aligned} & (\mathbf{m} + b_1m_1 + \dots + b_{d-1}m_{d-1}) + (m_0 - c_1m_1 - \dots - c_{d-1}m_{d-1}) = \\ & = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_{d-1} - c_{d-1})m_{d-1}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$m(c) = c_1m_1 + \dots + c_{d-1}m_{d-1}.$$

Возможны три случая:

$$\begin{aligned} m(c) &< b_1 m_1 + \dots + b_{d-1} m_{d-1}, \\ m(c) &= b_1 m_1 + \dots + b_{d-1} m_{d-1}, \\ m(c) &> b_1 m_1 + \dots + b_{d-1} m_{d-1}. \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

В первом случае точка $x'_* = x'_{j(c)}$ из (1.6.15) имеет номер $j(c) > \mathbf{m}'$ и поэтому x_* не входит в орбиту $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$.

Во втором случае (1.6.16) точка

$$x'_* = x'_{\mathbf{m}'} \in P_-^{\text{int}} \quad (1.6.17)$$

— внутренняя точка из области P'_- . У нее будет максимальный номер $j(c) = \mathbf{m}'$, задающий границу для точек из орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}'(0, \mathbf{m}')$, и по определению точка x_* в нее не входит.

Чтобы рассмотреть третий случай из (1.6.16), выделим в пространстве \mathbb{R}^{d-1} бесконечный бруск P , параллельный вектору $v'_0 = (x_1, \dots, x_{d-1}) = \text{pr}_{\parallel e_d} v_0$ и имеющий сечение

$$\bar{T}_{v''_1, \dots, v''_{d-1}} = \text{pr}_{\parallel v'_0} (\text{pr}_{\parallel e_d} T_0) = \text{pr}_{\parallel v'_0} T_0^{d-1}, \quad (1.6.18)$$

где T_0^{d-1} — единичный $(d-1)$ -мерный куб, т.е. сечение (1.6.18) является замкнутым $(d-2)$ -мерным параллелепипедом

$$\bar{T}_{v''_1, \dots, v''_{d-1}} = \{\lambda_1 v''_1 + \dots + \lambda_{d-1} v''_{d-1}; \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1\},$$

натянутым на проекции единичных векторов $v''_1 = \text{pr}_{\parallel v'_0} v'_1, \dots, v''_{d-1} = \text{pr}_{\parallel v'_0} v'_{d-1}$. Бруск P включает в себя

$$S'_{(d)}(v) = S_{(d)}(v) \cup P'_- \subset P \quad (1.6.19)$$

все множество из (1.5.13).

Пусть точка

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_- \quad (1.6.20)$$

для $c = (c_1, \dots, c_{d-1})$, удовлетворяющему третьему условию из (1.6.16). Имеем

$$x'_{\mathbf{m}'} = x'_{j(c)} + v'_0 \quad (1.6.21)$$

и

$$\begin{aligned} x'_* = x'_{j(c)} &= x'_{\mathbf{m}} + (b_1 v'_1 + \dots + b_{d-1} v'_{d-1}) - (c_1 v'_1 + \dots + c_{d-1} v'_{d-1}) + v'_0 \\ &= x'_{\mathbf{m}'} + (b_1 v'_1 + \dots + b_{d-1} v'_{d-1}) - (c_1 v'_1 + \dots + c_{d-1} v'_{d-1}). \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Для точек $x = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ определим *уровень*

$$l(x) = m_1 x_1 + \dots + m_{d-1} x_{d-1}.$$

В силу равенства (1.6.22) записываем

$$\begin{aligned} l(x'_*) = l(x'_{j(c)}) &= l(x'_{\mathbf{m}'}) + l(b_1 v'_1 + \dots + b_{d-1} v'_{d-1}) - l(c_1 v'_1 + \dots + c_{d-1} v'_{d-1}) \\ &= l(x'_{\mathbf{m}'}) + (b_1 m_1 + \dots + b_{d-1} m_{d-1}) - (c_1 m_1 + \dots + c_{d-1} m_{d-1}). \end{aligned}$$

Поскольку по условию выполняется третье неравенство из (1.6.16), то

$$l(x'_*) = l(x'_{j(c)}) < l(x'_{\mathbf{m}'}) \quad (1.6.23)$$

и, значит, точка (1.6.20) лежит ниже гиперплоскости

$$m_1x_1 + \dots + m_{d-1}x_{d-1} = l(x'_{\mathbf{m}}), \quad (1.6.24)$$

проходящей через точку $x'_{\mathbf{m}'}$.

Используя равенство (1.6.22), представим точку $x'_* = x'_{j(c)}$ из (1.6.20) в виде разности

$$x'_{j(c)} = x'_{\mathbf{m}'} - \Delta_c \quad (1.6.25)$$

с вектором отклонения

$$\Delta_c = (c_1v'_1 + \dots + c_{d-1}v'_{d-1}) - (b_1v'_1 + \dots + b_{d-1}v'_{d-1}) = (c_1 - b_1, \dots, c_{d-1} - b_{d-1}),$$

имеющим целочисленные координаты. В силу неравенства (1.6.23) уровень вектора Δ_c удовлетворяет условию

$$l(\Delta_c) > 0. \quad (1.6.26)$$

Введем функцию $p(\Delta_c)$, равную -1 или 0 , если хотя бы две координаты вектора Δ_c имеют разные знаки или хотя бы одна координата нулевая, и равную 1 в остальных случаях. В зависимости от значения $p(\Delta_c)$ разберем три возможных случая. Не уменьшая общности, далее будем следить за первыми двумя координатами $(d-1)$ -мерного вектора Δ_c , при необходимости переставляя их местами.

Случай 1:

$$p(\Delta_c) < 0. \quad (1.6.27)$$

Действуя проекцией

$$\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

на множества из (1.6.19), перейдем к их двумерным проекциям

$$S'_{(d, \dots, 3)}(v) = S_{(d, \dots, 3)}(v) \cup P'^2_- \subset \mathbb{P}^2, \quad (1.6.28)$$

где $\mathbb{P}^2 = \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} \mathbb{P}$ — бесконечная полоса, проходящая через точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ параллельно вектору $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} v'_0 = (x_1, x_2)$, а $P'^2_- = \text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} P'_-$ — шестиугольник, разбитый на два параллелограмма.

В силу (1.6.17) точка $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}'}$ является внутренней для полосы \mathbb{P}^2 . Пусть для начала $\Delta_c = \pm(1, -1, \dots)$. Тогда точка $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ должна выйти за пределы полосы \mathbb{P}^2 , что противоречит условию (1.6.20). При других векторах вида $\Delta_c = (*, *, \dots)$ с условием (1.6.27) точка $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ тем более выходит из полосы \mathbb{P}^2 .

Случай 2:

$$p(\Delta_c) = 0. \quad (1.6.29)$$

Такой вектор Δ_c не может нулевым, т.к. иначе будет выполняться равенство из (1.6.16). Отсюда и условия (1.6.29) следует, что вектор Δ_c имеет как нулевые, так

и ненулевые координаты, причем вторые одного знака. Этот знак не может быть отрицательным. В противном случае нарушается неравенство (1.6.26) и точка $x'_{j(c)}$ поднимется выше гиперплоскости (1.6.24).

Поэтому вектор Δ_c имеет вид $\Delta_c = (1, 0, \dots)$. При таком Δ_c проекция $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ точки (1.6.25) попадает в крайнюю левую вершину $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}' - m_1}$, где $x'_{\mathbf{m}' - m_1} = \text{pr}_{\parallel e_d} x_{\mathbf{m}' - m_1}$, шестиугольника $P_-'^2$ из (1.6.28), т.е.

$$\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)} \notin P_-'^2 \text{ int} \quad (1.6.30)$$

и, значит, $x_{j(c)} \notin T'^{\text{int}}$. Если же первая координата у вектора Δ_c будет > 1 , то проекция $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ выйдет из полосы P^2 и снова будет выполняться (1.6.30).

Случай 3:

$$p(\Delta_c) > 0. \quad (1.6.31)$$

Из использованных в случае 2 рассуждений следует, что вектор Δ_c с условием (1.6.31) должен быть вида $\Delta_c = (1, 1, \dots)$. Теперь проекция $\text{pr}_{\parallel e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ попадает в крайнюю левую и нижнюю вершину $\text{pr}_{\parallel e_{d-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}' - m_1 - m_2}$ шестиугольника $P_-'^2$. Поэтому при условии (1.6.31) также будет выполняться свойство (1.6.30).

Итак, для случая $T_{k_b} = T_k$, где $k = 1, \dots, d-1$, лемма 1.6.3 доказана.

Случай II: $T_{k_b} = T_0$. Теперь цепь \mathcal{C}_{x_*} из (1.6.14) для $c = (c_1, \dots, c_{d-1})$ будет порождать точку

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_- \quad (1.6.32)$$

порядка

$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_k - c_k - 1)m_k + \dots + (b_{d-1} - c_{d-1})m_{d-1}, \quad (1.6.33)$$

если квадрат P_0^j прикладывается к последнему $(d-1)$ -мерному кубу из цепи \mathcal{C}_{x_*} по $(d-2)$ -мерной грани, ортогональной вектору v'_k . Обозначим

$$m(c) = c_1 m_1 + \dots + (c_k - 1)m_k + \dots + c_{d-1}m_{d-1} \quad (1.6.34)$$

в соответствии с тем, какое из условий в (1.6.33) выполняется. Далее следует рассмотреть три случая (1.6.16) по схеме (1.6.17) – (1.6.31), заменяя функцию $m(c)$ на модифицированную (1.6.34).

Таким образом, для случая $T_{k_b} = T_0$ лемма 1.6.3 также доказана, что вместе с предыдущим случаем полностью доказывает лемму 1.6.3.

□

1.6.4 Окончание доказательства теоремы 1.3.2.

В теореме 1.3.2 утверждается, что $\{0, d\}$ -производная звезда $v' = v^{\{0, d\}}$ вкладывается $v' \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ относительно сдвига S в предположении вложимости $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ исходной приведенной звезды v .

При переходе на язык перекладывающихся разверток $T = T(v)$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$ с векторами перекладывания v_0, v_1, \dots, v_d из звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ приведенное выше утверждение означает вложимость

$$T' \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d \quad (1.6.35)$$

производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ была определена в (1.2.25), при условии $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^d$.

По критерию 2) теоремы 1.2.2 вложимость (1.6.35) равносильна условию

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset, \quad (1.6.36)$$

где $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ — орбита (1.2.29) начальной точки $x_0 = 0$ порядка $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + m_0$ из (1.4.4). Условие же (1.6.36) посредством разбиений (1.4.5) и (1.4.17) сводится к проверке равенств (1.6.1), (1.6.5) и (1.6.8) из лемм 1.6.1 — 1.6.3, что и доказывает теорему 1.3.2.

□

1.7 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Индуцированные разбиения тора впервые появились в работе Ж. Рози [104]. Это были двумерные самоподобные разбиения с фрактальными границами. Понятие же определенного в (1.2.26) ядра $\text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T})$ разбиения \mathcal{T} и его роль были выявлены в [16]. В этой же работе было доказано, что составляющие разбиения Рози области являются множествами ограниченного остатка.

Для размерности $d = 1$ операции дифференцирования $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma$ из (1.1.9) эквивалентны возвратному отображению для цепных дробей (backward continued fraction map) [66], [113], а для $d = 2$ такие операции были определены в [24].

Интерес к индуцированным разбиениям $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ из (1.2.25) вызывается их связями с множествами ограниченного остатка [82], [105], [16], [19], [20], [75], [115], многомерными приближениями [23], [36], [77], [84], сбалансированными словами [96], [22], ростом квазикристаллов [18], [110], [114], и теорией сложности (complexity) [114].

Глава 2

Многомерные приближения алгебраических чисел

Рассматриваются приближения нуля на d -мерном торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ бесконечной последовательностью точек $x_j \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ для $j = 0, 1, 2, \dots$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — вектор с координатами $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ из алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ степени $d+1$ над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . С этой целью строится бесконечная последовательность выпуклых параллелоэдров $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^d$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ — разбивающих пространство \mathbb{R}^d многогранников — с определенными для них порядками $m^{(0)} < m^{(1)} < \dots < m^{(i)} < \dots$, где $m^{(i)}$ — натуральные числа. Доказывается, что последовательность параллелоэдров $T^{(i)}$ обладает следующими свойствами:

- 1) ни одна из точек x_j не попадает $x_j \notin T^{(i)}$ для $j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1$ в параллелоэдр $T^{(i)}$, первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка $x_j \in T^{(i)}$ для $j = m^{(i)}$;
- 2) для радиуса $r(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ с номером $i = ap+b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$, выполняется неравенство $r(T^{(i)}) \leq c \varrho(\mathbf{A})^a r(T^{(b)})$. Здесь p — некоторый период, определяемый вектором α , и $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус калибровочной матрицы \mathbf{A} , также определяемой α ;
- 3) площадь $s(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ находится по формуле $s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)})$, где определитель $|\det \mathbf{A}| < 1$.

Указанные выше свойства означают, что ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^d выделяют подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^d$.

2.1 Возвратные отображения

2.1.1 Базисный симплекс и его симметрии.

Возвратные отображения — это нормированные дифференцирования (1.1.9). Основной областью для нас будет замкнутый d -мерный симплекс $\Delta = \Delta_d$ с вершинами в точках $(0, \dots, 0), (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$ из пространства \mathbb{R}^d . Обозна-

ним через S_Δ группу его аффинных симметрий. Она сопряжена с группой метрических симметрий *правильного симплекса* $\Delta'_D \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с вершинами $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ из \mathbb{R}^{d+1} . Чтобы явным образом описать указанную связь, зададим вложение

$$\text{em} : \mathbb{R}^d \supset \Delta_d \xrightarrow{\sim} \Delta'_d \subset \mathbb{R}^{d+1} : \quad (2.1.1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto x' = (x'_1, \dots, x'_d, x'_{d+1}),$$

где $x'_i = x_i$ для $1 \leq i \leq d$ и $x'_{d+1} = 1 - x_1 - \dots - x_d$.

Симметрии правильного симплекса

$$\sigma : \Delta'_d \xrightarrow{\sim} \Delta'_d \quad (2.1.2)$$

задаются перестановками координат точек

$$x' \rightarrow \sigma x' = (x'_{\sigma(1)}, x'_{\sigma(2)}, \dots, x'_{\sigma(d+1)}), \quad (2.1.3)$$

где σ принадлежат группе перестановок S_{d+1} из $d+1$ элемента $1, \dots, d+1$. Симметрии (2.1.2) будут изометриями правильного симплекса Δ'_d .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Delta_d \ni x & \xrightarrow{\text{em}} & x' \in \Delta'_d \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \Delta_d \ni \sigma x & \xleftarrow{\text{pr}} & \sigma x' \in \Delta'_d \end{array} \quad (2.1.4)$$

Здесь pr обозначает *проекцию*

$$\text{pr} : \mathbb{R}^{d+1} \ni x' \rightarrow (x'_1, \dots, x'_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1.5)$$

а левая вертикальная стрелка в диаграмме (2.1.4) означает отображение, определяемое из условия коммутативности диаграммы равенством

$$\sigma x = \text{pr}(\sigma x'), \quad (2.1.6)$$

где $\sigma \in S_{d+1}$ и $x' = \text{em}(x)$. Используя диаграмму (2.1.4), можем отождествить

$$S_\Delta \xrightarrow{\sim} S_{d+1} : s = s_\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma \quad (2.1.7)$$

группу аффинных симметрий S_Δ симплекса Δ_d с группой перестановок S_{d+1} .

Отсюда вытекает, что группа симметрий S_Δ имеет порядок

$$\#S_\Delta = (d+1)! \quad (2.1.8)$$

и все симметрии $s = s_\sigma$ из S_Δ распадаются на два класса собственных и несобственных симметрий

$$\text{sign}(s) = \pm 1 \quad (2.1.9)$$

в зависимости от знака $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1} .

Согласно (2.1.6) и (2.1.1) в координатах $(x_1, \dots, x_d) \in \Delta_d$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1)$ симметрии $s = s_\sigma$ из S_Δ записываются следующим явным образом:

$$s_\sigma(x_1, \dots, x_d) = (\sigma x_1, \dots, \sigma x_d), \quad (2.1.10)$$

где

$$\sigma x_i = \begin{cases} x_{\sigma(i)}, & \text{если } \sigma(i) \leq d, \\ 1 - x_1 - \dots - x_d, & \text{если } \sigma(i) = d + 1. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

2.1.2 Разбиения базисного симплекса.

Выделим в симплексе $\Delta = \Delta_d$ открытые области

$$\Delta_k^{kl}, \quad \Delta_l^{kl} \subset \Delta \quad (2.1.12)$$

с целыми индексами $0 \leq k < l \leq d$. Замыкания областей $\overline{\Delta}_k^{kl}$, $\overline{\Delta}_l^{kl}$ разбивают симплекс

$$\Delta = \overline{\Delta}_k^{kl} \cup \overline{\Delta}_l^{kl} \quad (2.1.13)$$

и пересекаются $\overline{\Delta}_k^{kl} \cap \overline{\Delta}_l^{kl} = \mu^{kl}$ по *медианной гиперплоскости* μ^{kl} , проходящей через концы векторов $e_{kl} = \frac{1}{2}(e_k + e_l)$ и e_m для всех $0 \leq m \leq d$, $m \neq k, l$, где $e_0 = (0, \dots, 0)$. Нижние индексы в Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\Delta}_k^{kl}$ и $\overline{\Delta}_l^{kl}$.

Таким образом, области (2.1.12) представляют собою открытые полусимплексы, замыкание объединения которых

$$\Delta^{kl} = \Delta_k^{kl} \cup \Delta_l^{kl} \quad (2.1.14)$$

совпадает со всем симплексом Δ и при этом $\Delta_k^{kl} \cap \Delta_l^{kl} = \emptyset$.

2.1.3 Нормированные дифференцирования звезд.

Согласно условию (1.1.4) из критерия 1.1, каждая точка $x \in \Delta^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}$ с лучами

$$w_m = e_m - x, \quad (2.1.15)$$

выходящими из центра x в вершины симплекса Δ с соответствующими номерами $0, 1, \dots, d$.

При таком выборе центра существует производная звезда

$$w' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_d\}. \quad (2.1.16)$$

Если $x \in \Delta_k^{kl}$, то лучи в (2.1.16) имеют вид

$$w'_k = w_k, \quad w'_l = w_k + w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l; \quad (2.1.17)$$

если же $x \in \Delta_l^{kl}$, то — вид

$$w'_k = w_k + w_l, \quad w'_l = w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l. \quad (2.1.18)$$

Из условия $x \in \Delta^{kl}$ вытекает, что векторы

$$e'_1 = w'_1 - w'_0, \dots, \quad e'_d = v'_d - v'_0 \quad (2.1.19)$$

образуют базис пространства \mathbb{R}^d . Пусть A^{kl} — матрица перехода

$$e' = eA^{kl} \quad (2.1.20)$$

от базиса $\{e_1, \dots, e_d\}$ к базису $\{e'_1, \dots, e'_d\}$ из (2.1.19). В равенстве (2.1.20) слева указана строка $e' = (e'_1 \dots e'_d)$, а справа — произведение строки $e = (e_1 \dots e_d)$ на $(d \times d)$ -матрицу A^{kl} . Данная матрица имеет две специализации

$$A^{kl} = A_k^{kl} \quad \text{или} \quad A_l^{kl} \quad (2.1.21)$$

в зависимости от принадлежности x области Δ_k^{kl} или Δ_l^{kl} :

для $1 \leq k < l \leq d$ —

$$A_k^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ \ddots & 1_{kk} & 1 - x_k & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 1 - x_l & 0 \\ 0 & 0 & -x_d & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.22)$$

$$A_l^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ \ddots & 1 - x_k & 0_{kl} & 0 \\ 0 & 1 - x_l & 1_{ll} & 0 \\ 0 & -x_d & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.1.23)$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq d$ —

$$A_0^{0l} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 \\ \ddots & 1 - x_l & 0 \\ 0 & -x_d & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.24)$$

$$A_l^{0l} = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & x_2 & x_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ -1+x_l & -1+x_l & x_l & -1+x_l \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ x_D & & x_d & 1+x_d \end{pmatrix}. \quad (2.1.25)$$

В координатах формула перехода (2.1.20) примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \quad (2.1.26)$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через \mathcal{A}^{kl} . С помощью обратных матриц \mathcal{A}^{kl} можно для производной звезды w' из (2.1.16) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_d\} \quad (2.1.27)$$

с *центром* $x' = (x'_1, \dots, x'_d)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ \vdots \\ -w'_{0d} \end{pmatrix}, \quad (2.1.28)$$

где в правом столбце использованы координаты вектора $w'_0 = (w'_{01}, \dots, w'_{0d})$ из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_d\}$, определенной в (2.1.16). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным $w'_0 = w_0$, то в формуле (2.1.26) выбирается центр $x = (x_1, \dots, x_d) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w . Нормированная звезда \mathbf{w}' , как и w , имеет лучи

$$\mathbf{w}'_m = e_m - x' \quad (2.1.29)$$

для $0 \leq m \leq d$, выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины симплекса Δ . Определение (2.1.27) звезды \mathbf{w}' корректно, поскольку по определению (1.1.4) точка x' принадлежит внутренней области Δ^{int} треугольника Δ .

В явном виде координаты $(x'_1, \dots, x'_d) = \delta^{kl}(x_1, \dots, x_d)$ центра x' нормированной звезды \mathbf{w}' из (2.1.27) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

для $1 \leq k < l \leq d$ —

$$\begin{aligned} \delta_k^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{1-x_l}, \dots, \frac{x_k-x_l}{1-x_l}, \dots, \frac{x_d}{1-x_l} \right), \\ \delta_l^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{1-x_k}, \dots, \frac{x_l-x_k}{1-x_k}, \dots, \frac{x_d}{1-x_k} \right), \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

где элементы $\frac{x_k-x_l}{1-x_l}$ и $\frac{x_l-x_k}{1-x_k}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq d$ —

$$\begin{aligned} \delta_0^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{1-x_l}, \dots, \frac{x_d}{1-x_l} \right), \\ \delta_l^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_1+\dots+x_d}, \dots, \frac{x_1+\dots+2x_l+\dots+x_d-1}{x_1+\dots+x_d}, \dots, \frac{x_d}{x_1+\dots+x_d} \right), \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

где в последнем случае средний элемент стоит на l месте.

Преобразования (2.1.30), (2.1.31) представляют собою многомерный аналог одномерных возвратных отображений или *отображений Фарея* [66], [113].

2.1.4 Возвратные отображения.

Дробно-линейные преобразования (2.1.30), (2.1.31) задают

$$\Delta \xrightarrow{\delta^{kl}} \Delta : x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \quad (2.1.32)$$

$\frac{(d+1)d}{2}$ отображений δ^{kl} , нумеруемых индексами $0 \leq k < l \leq d$:

$$\delta^{kl}(x) = \begin{cases} \delta_k^{kl}(x), & \text{если } x \in \Delta_k^{kl}, \\ \delta_l^{kl}(x), & \text{если } x \in \Delta_l^{kl}, \end{cases} \quad (2.1.33)$$

где Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} — открытые области из базисного симплекса Δ , определенные в (2.1.12). Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\Delta^{kl} \subset \Delta$ из (2.1.14) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в симплексе Δ , исключая его границы и медианную гиперплоскость μ^{kl} , определенную в (2.1.13).

2.2 Дробно-линейные и проективные преобразования

2.2.1 Матрицы возвратных отображений.

На языке $(d+1, d+1)$ -матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,d+1} \\ & \dots & \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d+1} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (2.1.30), (2.1.31) удобно переписать в свернутом виде

$$M\langle x \rangle = \left(\frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda_{d+1}(M, x)}, \dots, \frac{\lambda_d(M, x)}{\lambda_{d+1}(M, x)} \right), \quad (2.2.1)$$

где

$$\lambda_i(M, x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{iD}x_d + a_{i,d+1} \quad (2.2.2)$$

— линейные формы. В данном случае — неоднородные формы, поскольку мы здесь неявно используем специализацию $x_{d+1} = 1$, которая будет объяснена далее в п. 4.5. Последнюю форму

$$\lambda(M, x) = \lambda_{d+1}(M, x) \quad (2.2.3)$$

из (2.2.2) назовем *фактором-автоморфности* отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$.

В матричной форме (2.2.1) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1 \langle M_2 \langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2) \langle x \rangle, \quad (2.2.4)$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначается произведение матриц M_1 и M_2 .

Поскольку $E_{d+1} \langle x \rangle = x$ для единичной матрицы E_{d+1} порядка $d+1$, то из свойства (2.2.4) следует, что для $x \mapsto x' = M \langle x \rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1} \langle x' \rangle. \quad (2.2.5)$$

Согласно определению (2.2.1), дробно-линейные преобразования (2.1.30), (2.1.31) имеют следующие матрицы:

для $0 < k < l \leq d$ —

$$\widehat{\delta}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & -1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.2.6)$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq d$ —

$$\widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2_{ll} & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

где $\mathbf{1} = (11\dots 1)$ обозначают *единичные строки* соответствующих длин. Все матрицы (2.2.6), (2.2.7) имеют целые коэффициенты и единичный определитель и, следовательно, они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

2.2.2 Обратные возвратные отображения.

Отображения δ_k^{kl} являются дважды накрывающими симплекс Δ , а их специализации δ_*^{kl} задают уже биекции

$$\delta_k^{kl} : \Delta_k^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\text{int}}, \quad \delta_l^{kl} : \Delta_l^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\text{int}}. \quad (2.2.8)$$

Поэтому для них существуют *обратные возвратные отображения*

$$\partial_k^{kl} : \Delta^{\text{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_k^{kl}, \quad \partial_l^{kl} : \Delta^{\text{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_l^{kl}. \quad (2.2.9)$$

Матрицами для отображений (2.2.9) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (2.2.6), (2.2.7):

для $0 < k < l \leq d$ —

$$\widehat{\partial}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.2.10)$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq d$ —

$$\widehat{\partial}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0_{ll} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ_*^{kl} имеют унимодулярные матрицы (2.2.6), (2.2.7). Поэтому матрицы (2.2.10), (2.2.11) обратных отображений $\widehat{\partial}_*^{kl}$ снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения $\widehat{\partial}_*^{kl}$ записутся в следующем виде:

для $1 \leq k < l \leq d$ —

$$\begin{aligned} \partial_k^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_l+1}, \dots, \frac{x_k+x_l}{x_l+1}, \dots, \frac{x_d}{x_l+1} \right), \\ \partial_l^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_k+1}, \dots, \frac{x_k+x_l}{x_k+1}, \dots, \frac{x_d}{x_k+1} \right), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где элементы $\frac{x_k+x_l}{x_l+1}$ и $\frac{x_k+x_l}{x_k+1}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq d$ —

$$\begin{aligned} \partial_0^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_l+1}, \dots, \frac{x_d}{x_l+1} \right), \\ \partial_l^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{s+2}, \dots, \frac{s-x_l+1}{s+2}, \dots, \frac{x_d}{s+2} \right), \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

где в последнем случае средний элемент $\frac{s-x_l+1}{s+2}$ стоит на l месте и $s = x_1 + \dots + x_d$.

2.2.3 Матрицы симметрий базисного симплекса.

Симметрии $s = s_\sigma$ из группы S_Δ базисного симплекса $\Delta = \Delta_d$, определяемые формулой (2.1.10), также можно представить в матричной форме (2.2.1). Для них $(d+1, d+1)$ -матрицами будут

$$\widehat{s} = \widehat{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & & \cdots & & \\ 0 & \dots & 1_{i,\sigma(i)} & \dots & 0 & 0_{i,d+1} \\ & & \ddots & & & \\ -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & 1_{j,d+1} \\ & & \cdots & & & \\ 0 & \dots & \cdots & \dots & 0 & 1_{d+1,d+1} \end{pmatrix}. \quad (2.2.14)$$

Здесь i -строка состоит из 0, кроме элемента $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $\sigma(i)$ месте в случае $\sigma(i) \leq d$. Если $\sigma(j) = d + 1$, то строка с номером $j \leq d$ принимает иной вид $(-1, \dots, -1, 1)$. Последняя $(d+1)$ -строка для всех $\sigma \in S_{d+1}$ имеет вид $(0, \dots, 0, 1)$.

Матрицы (2.2.14) симметрий симплекса Δ_d отличаются от матриц возвратных отображений (2.2.6), (2.2.7) нижней строкой $(0, \dots, 0, 1)$. Их определители вычисляются по формуле

$$\det(\hat{s}_\sigma) = \text{sign}(\sigma), \quad (2.2.15)$$

где справа указан знак $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1} . Поэтому все матрицы симметрий (2.2.14) принадлежат группе унимодулярных матриц $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Кроме самих матриц (2.2.14) нам потребуются еще их *однородные части* — верхние левые $(d \times d)$ -блоки:

$$\check{s} = \check{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & & \cdots & & \\ 0 & \dots & 1_{i,\sigma(i)} & \dots & 0_{i,d} & \\ & & \dots & & & \\ -1 & \dots & -1 & \dots & -1_{j,d} & \\ & & \dots & & & \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Матрицы (2.2.16) порождают группу $S_{\check{\Delta}}$ аффинных (однородных) симметрий центрированного симплекса $\check{\Delta} = \check{\Delta}_d$, получающегося сдвигом базисного симплекса $\Delta = \Delta_d$ на вектор $(-\frac{1}{d+1}, \dots, -\frac{1}{d+1})$. Следовательно, симплекс $\check{\Delta}$ имеет центр в начале координат $(0, \dots, 0)$ — неподвижной точке всех симметрий (2.2.16).

2.2.4 Полугруппа \mathcal{D} .

Определим *полугруппу* \mathcal{D}_δ преобразований базисного симплекса Δ , порожденную всеми возвратными отображениями δ^{kl} , где $0 \leq k < l \leq D$, а также определим *расширенную полугруппу* \mathcal{D} , добавляя к \mathcal{D}_δ все симметрии симплекса $s \in S_\Delta$. Каждое преобразование $\delta \in \mathcal{D}$ имеет свою *область определения* $\Delta(\delta) \subset \Delta$.

Пусть δ имеет разложение $\delta = \dots \delta^{kl} \dots s \dots$ и x — любая точка из области определения $\Delta(\delta)$. Тогда выбранная точка x однозначно задает *специализацию*

$$\delta_* = \delta_*(x) = \dots \delta_*^{kl} \dots s \dots \quad (2.2.17)$$

преобразования δ , где для каждого сомножителя δ^{kl} , входящего в разложение (2.2.17), указан нижний индекс $* = k$ или l . Поскольку индекс может принимать любое из двух указанных значений, то фиксированное преобразование δ может порождать 2^p различных *специализаций* δ_* , где p — количество сомножителей вида δ^{kl} из разложения (2.2.17). Любая из таких реализаций δ_* будет, в общем случае, иметь уже другую меньшую *область определения* $\Delta(\delta_*) \subsetneq \Delta(\delta)$ по сравнению с областью определения $\Delta(\delta)$ исходного преобразования δ .

Пусть, например, специализация (2.2.17) имеет вид $\delta_* = \delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}$. Тогда принадлежность точки x области определения данной реализации $\Delta(\delta_*)$ означает, что определены следующие точки:

$$x_1 = \delta_{k_1}^{k_1 l_1}(x), \quad x_2 = \delta_{l_2}^{k_2 l_2}(x_1),$$

т.е. $x \in \Delta(\delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \Delta_{k_1}^{k_1 l_1}$ и $x_1 \in \Delta(\delta_{l_2}^{k_2 l_2}) = \Delta_{l_2}^{k_2 l_2}$, где области Δ_*^{kl} были определены в (2.1.12). С помощью матриц (2.2.10), (2.2.11) обратных отображений $\widehat{\partial}_k^{kl}$ из (2.2.9) и дробно-линейных преобразований (2.2.1) область определения специализации δ_* можно записать в явном виде

$$\Delta(\delta_*) = \Delta(\delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \widehat{\partial}_{k_1}^{k_1 l_1} \langle \widehat{\partial}_{l_2}^{k_2 l_2} \langle \Delta^{\text{int}} \rangle \rangle. \quad (2.2.18)$$

По аналогии с (2.2.18), в общем случае специализации (2.2.17) область определения $\Delta(\delta_*)$ может быть представлена в виде

$$\Delta(\delta_*) = \dots \langle \widehat{s}^{-1} \langle \dots \widehat{\partial}_*^{kl} \langle \dots \langle \Delta^{\text{int}} \rangle \rangle \rangle \rangle, \quad (2.2.19)$$

где \widehat{s} — матрицы (2.2.14) симметрий s треугольника Δ .

2.2.5 Связь между дробно-линейными и проективными преобразованиями.

Пусть

$$\mathbb{P}^d = \{ \mu \cdot \widehat{x}; \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbb{R}^\times \}$$

— d -мерное проективное пространство над полем вещественных чисел \mathbb{R} . По определению оно состоит из классов коллинеарных векторов

$$\widetilde{x} = \{ \mu \cdot \widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}^\times \}. \quad (2.2.20)$$

Здесь через $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ обозначена коммутативная группа ненулевых вещественных чисел.

Любая матрица M из линейной группы $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ задает проективное преобразование

$$M : \quad \widetilde{x} \mapsto \widetilde{x}_M \quad (2.2.21)$$

пространства \mathbb{P}^d , где

$$\widetilde{x}_M = M\widetilde{x} = \{ \mu \cdot M\widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0 \}$$

и $M\widehat{x}$ обозначает произведение $(d+1, d+1)$ -матрицы M на матрицу-столбец

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}.$$

Проективная группа $\text{PGL}_{d+1}(\mathbb{R})$ преобразований получается из группы $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ ее факторизацией $\text{PGL}_{d+1}(\mathbb{R}) = \text{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times$.

Дробно-линейные преобразования (2.2.1) и проективные преобразования (2.2.21) пространства \mathbb{P}^d связаны между собою следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \ni x & \xrightarrow{M\langle \cdot \rangle} & x_M \in \mathbb{R}^d \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{P}^d \ni \tilde{x} & \xrightarrow{M} & \tilde{x}_M \in \mathbb{P}^d, \end{array} \quad (2.2.22)$$

где обозначили $x_M = M\langle x \rangle$, а вертикальные стрелки обозначают отображение

$$\sim: x \mapsto \tilde{x},$$

которое переводит точку $x = (x_1, \dots, x_d)$ в класс \tilde{x} из (2.2.20), содержащий элемент \hat{x} , представленный в виде столбца

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.23)$$

2.2.6 Иррациональные точки.

Аналогично определению (1.2.21) для векторов, точку $x = (x_1, \dots, x_d)$ из \mathbb{R}^d назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, \dots, x_d \text{ линейно независимы над колцом } \mathbb{Z}. \quad (2.2.24)$$

Лемма 2.2.1 *Если точка $x = (x_1, \dots, x_d)$ иррациональна (2.2.24) и матрица M принадлежит целочисленной унимодулярной группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, то*

- 1) для точки x определен ее образ $M\langle x \rangle$ относительно дробно-линейного отображения (2.2.1);
- 2) соответствующая точка $x' = M\langle x \rangle$ снова будет иррациональной.

Доказательство. 1. Используя для $x' = (x'_1, \dots, x'_d) = M\langle x \rangle$ запись (2.2.1), имеем

$$x'_1 = \frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda(M, x)}, \dots, x'_d = \frac{\lambda_D(M, x)}{\lambda(M, x)} \quad (2.2.25)$$

со знаменателем

$$\lambda(M, x) = \lambda_{d+1}(M, x) = a_{d+1,1}x_1 + \dots + a_{d+1,d}x_d + a_{d+1,d+1}, \quad (2.2.26)$$

равному фактору-автоморфности (2.2.3) отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$. Поскольку $x = (x_1, \dots, x_d)$ — иррациональная точка и матрица M имеет целочисленные коэффициенты a_{ij} , то $\lambda(M, x) \neq 0$ по определению (2.2.24), т.к. коэффициенты в (2.2.26) не могут все быть равными нулю. Таким образом, точка $x' = M\langle x \rangle$ существует.

2. Так как фактор-автоморфности $\lambda(M, x) \neq 0$, то условие линейно независимости x'_1, \dots, x'_d , 1 над \mathbb{Z} расширения чисел из (2.2.25) равносильно линейной независимости другой совокупности чисел

$$\lambda_1(M, x), \dots, \lambda_d(M, x), \lambda(M, x),$$

а это вытекает из равенств (2.2.2) и линейной независимости строк у матрицы $M \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. □

2.3 Периодические точки

2.3.1 Неподвижные точки и собственные значения.

Теорема 2.3.1 1. Пусть x является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} с областью определения $\Delta(\delta)$, т.е. выполняются условия

$$x \in \Delta(\delta) \tag{2.3.1}$$

и

$$\delta x = x. \tag{2.3.2}$$

Тогда имеет место матричное равенство

$$M\widehat{x} = \lambda\widehat{x} \tag{2.3.3}$$

для $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ с вещественным собственным значением $\lambda \neq 0$. Здесь

$$M = M_{\delta_*} = M_s \cdots M_2 M_1 \tag{2.3.4}$$

— матрица специализации $\delta_* = \delta_*(x)$ отображения δ , определяемой точкой x .

Доказательство. Из (2.3.1) и определений (2.1.32), (2.1.33), (2.2.1) следует равенство

$$M\langle x \rangle = x, \tag{2.3.5}$$

из которого вытекает матричное равенство (2.3.3) с собственным числом $\lambda = \lambda(M, x)$, равным фактору-автоморфности (2.2.26) отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$. В силу условия (2.3.1) имеем $\lambda(M, x) \neq 0$, что вместе с равенством (2.2.26) доказывает теорему. □

2.3.2 Степень неподвижной точки.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ — произвольная точка с координатами из \mathbb{R} . Обозначим через

$$F_x = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_d) \quad (2.3.6)$$

расширение поля рациональных чисел \mathbb{Q} добавлением к нему чисел x_1, \dots, x_d . Данное расширение состоит из всех чисел вида $\frac{f(x_1, \dots, x_d)}{g(x_1, \dots, x_d)}$, где f и g являются многочленами от d переменных с коэффициентами из поля \mathbb{Q} . Множество (2.3.6) также будет полем. Определим *степень* (над \mathbb{Q}) точки x равенством

$$\deg(x) = \deg F_x, \quad (2.3.7)$$

где справа в (2.3.7) указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x , рассматриваемого как векторное пространство на полем \mathbb{Q} . Если $\deg(x) = 1$, то, очевидно, точка x имеет координаты из \mathbb{Q} .

Теорема 2.3.2 *Пусть точка x будет иррациональной (2.2.24). Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} , то ее степень*

$$\deg(x) = d + 1. \quad (2.3.8)$$

Доказательство. По теореме 2.3.1 имеет место равенство

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.9)$$

где M — матрица из унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, x_1, \dots, x_d — координаты точки $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $\lambda \neq 0$.

Из определения (2.2.24) иррациональной точки следует $x \neq (0, \dots, 0)$, поэтому λ из (2.3.9) является корнем характеристического уравнения

$$\mathrm{Char}_M(\lambda) = \det(\lambda E_{d+1} - M) = 0 \quad (2.3.10)$$

степени $d + 1$ с целыми коэффициентами, а из равенства (2.3.10) следует, что x_1, \dots, x_d принадлежат полю $\mathbb{Q}(\lambda)$ степени

$$\deg \mathbb{Q}(\lambda) \leq d + 1. \quad (2.3.11)$$

С другой стороны, из равенства (2.3.9) для поля F_x из (2.3.6) вытекает включение

$$F_x \subseteq \mathbb{Q}(\lambda). \quad (2.3.12)$$

Далее, поскольку точка x иррациональная (2.2.24), то в силу определения (2.3.7) будет выполняться неравенство

$$\deg F_x \geq d + 1. \quad (2.3.13)$$

Теперь, сопоставляя (2.3.11) и (2.3.12), (2.3.13), выводим нужное равенство (2.3.8).

□

2.4 Преобразования и нормирования звезды

2.4.1 Общий случай.

Пусть дано некоторое отображение δ из полугруппы \mathcal{D} и точка x из области определения $\Delta(\delta)$ отображения δ .

Далее будем предполагать, что специализация δ_* , задаваемая точкой x , имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \quad (2.4.1)$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ — произвольные возвратные отображения (2.1.30), (2.1.31). В отличие от рассмотренного ранее случая (2.3.4) из теоремы 2.3.1, отображение (2.4.1) уже не содержит симметрий $\delta_i = s_i$ из группы S_Δ .

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)}. \end{array} \quad (2.4.2)$$

Здесь использовали обозначения:

$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ — начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)}$;

$\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ — звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., ...;

$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ — звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$.

Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (2.4.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \quad (2.4.3)$$

из p возвратных отображений δ_* . Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$ будут, согласно определению (2.1.27), нормированными звездами.

Нижняя строка диаграммы (2.4.2) содержит обычные (см. определение 1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$, где

$$v = v^{(0)} = \mathbf{w};$$

$v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ — производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., ...;

$v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ — производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$.

Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_p} = v^\sigma \quad (2.4.4)$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p$, ассоциированную с отображением δ_* из (2.4.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (2.4.2). Первая стрелка обозначает *тождественное отображение* id , т.е.

$$v = \text{id } \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Далее

$A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ — матрица (2.1.22)–(2.1.25), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;

$A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ — матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., ...;

последняя матрица

$$A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \cdots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)}) \quad (2.4.5)$$

определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p-1)}$.

Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)} : \mathbf{w}^{(i)} \rightsquigarrow v^{(i)} \quad (2.4.6)$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (2.4.2) для всех $i = 1, \dots, p$.

Лемма 2.4.1 *Диаграмма (2.4.2) является коммутативной.*

Доказательство. Коммутативность первого левого блока диаграммы (2.4.2) следует из определения матриц (2.1.22)–(2.1.25).

Чтобы доказать коммутативность первых двух левых блоков диаграммы (2.4.2), рассмотрим следующую коммутативную локальную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & w^{(2)} & \xleftarrow{A_2} & \mathbf{w}^{(2)} \\ \downarrow A_1 & & \downarrow A_1 & & \swarrow A_1 A_2 \\ v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & v^{(2)} & & \end{array} \quad (2.4.7)$$

где $w^{(2)} = \mathbf{w}^{(1)\sigma_2}$ — ненормированная звезда и A_i для $i = 1, 2$ — аффинные отображения с матрицами $A_*^{k_i l_i}(x^{(i-1)})$.

Коммутативность левого блока диаграммы (2.4.7) следует из аффинности отображения A_1 и того факта, что σ_2 -дифференцирования звезд $\mathbf{w}^{(1)}$ и $v^{(1)}$ сводится к сложению A_1 -эквивалентных пар векторов $\mathbf{w}_{k_2}^{(1)}, \mathbf{w}_{l_2}^{(1)} \in \mathbf{w}^{(1)}$ и $v_{k_2}^{(1)}, v_{l_2}^{(1)} \in v^{(1)}$.

Коммутативность же правого блока диаграммы (2.4.7) вытекает из аффинности отображения A_2 , которая снова следует из определения матриц (2.1.22)–(2.1.25), и определения наклонной стрелки как композиции отображений A_2 и A_1 в указанном порядке.

Теперь коммутативность второго блока диаграммы (2.4.2) выводим из коммутативности диаграммы (2.4.7).

Следующие блоки диаграммы (2.4.2) рассматриваются по той же самой схеме.

□

2.4.2 Периодический случай.

Предположим, что найдется такое $p > 0$, для которого нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (2.4.2) будет симметричной

$$\mathbf{w}^{(p)} = \check{s}\mathbf{w} \quad (2.4.8)$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно некоторого преобразования \check{s} из группы S_{Δ} аффинных однородных симметрий (2.2.16) базисного симплекса $\check{\Delta}$. В этом случае будем говорить, что звезда \mathbf{w} *периодична* относительно отображения δ из (2.4.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (2.4.4). Если $p > 0$ — минимальное число с условием (2.4.8), то p будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$.

Заметим, что однородные преобразования \check{s} из (2.2.16) действуют на векторы звезды \mathbf{w} , а преобразования s из группы S_{Δ} аффинных неоднородных симметрий (2.2.14) действуют на точки симплекса Δ . В формуле (2.4.8) звезда \mathbf{w} , рассматривается как совокупность $d + 1$ векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$.

Поскольку

$$v^{(p)} = A^{(p)} \mathbf{w}^{(p)} \quad (2.4.9)$$

по формуле (2.4.6), то с помощью равенства (2.4.8) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)} \mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)} \check{s} \mathbf{w}. \quad (2.4.10)$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A} v, \quad (2.4.11)$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)} \check{s}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $A_s^{(p)} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (2.4.11) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (2.4.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v . По этой причине назовем \mathbf{A} *калибровочной матрицей* периодической звезды v .

Далее мы хотим воспользоваться равенством (2.4.11) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\} \quad (2.4.12)$$

с периодом p , где

$$\xi_1 = \sigma_1, \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \dots, \quad \xi_p = \sigma_p \check{s}, \quad \xi_{p+1} = \sigma_1, \quad \dots \quad (2.4.13)$$

С помощью последовательности (2.4.12) определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для } n \geq 1, \quad (2.4.14)$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \dots$. Чтобы не вводить нового термина, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v .

Теорема 2.4.1 *Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из (2.4.4) с периодом p , и пусть \mathbf{A} — ее калибровочная матрица, определенная в (2.4.11). Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \quad (2.4.15)$$

если $i = at + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$.

Доказательство. Формула (2.4.15) выполняется для $i = 0, 1, \dots, p - 1$ по определению (2.4.14), а для $i = p$ — по формуле (2.4.11).

Далее рассуждаем по индукции. Пусть формула (2.4.15) выполняется для $j < i + 1$. По определению (2.4.14) и по формуле (2.4.15) имеем

$$v^{(i+1)} = (v^{(i)})^{\sigma_{i+1}} = (\mathbf{A}^a v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \quad (2.4.16)$$

Используя, доказанную в [?], формулу коммутирования

$$(Aw)^{\varsigma} = A(w^{\varsigma}) \quad (2.4.17)$$

аффинных отображений A и дифференцирований ς , из (2.4.16) получим

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a (v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \quad (2.4.18)$$

Сначала предположим, что $b \leq p - 2$. Тогда $i + 1 = at + (b + 1)$, где $b + 1 \leq p - 1$. Поэтому $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(b+1)}$, и из равенства (2.4.18) следует

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a v^{(b+1)} \quad (2.4.19)$$

— формула (2.4.15) для $i + 1$.

Пусть теперь $b = p - 1$ и, значит, $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(p)}$. Поэтому в силу формулы (2.4.11) можем записать $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = \mathbf{A}v$. Отсюда и равенства (2.4.18) выводим

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^{a+1} v. \quad (2.4.20)$$

В рассматриваемом случае будет выполняться равенство $i + 1 = (a + 1)p$ и, значит, согласно (2.4.20) формула (2.4.15) будет справедлива и для порядка $i + 1$, когда $i = ap + (p - 1)$.

□

2.5 Приближения на торе

2.5.1 Генерации вкладывающихся разверток.

По определению (1.3.1) и теореме 1.3.1 производные звезды $v^{(i)}$ из (2.4.14) вкладываются

$$v^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^d \quad (2.5.1)$$

в тор \mathbb{T}^d . По соглашению (1.2.25) это означает, что порождаемые ими развертки тора или иначе — параллелоэдры —

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}) \quad (2.5.2)$$

вкладываются в тор

$$T^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^d. \quad (2.5.3)$$

Из построения (2.4.14) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_d^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha \bmod \mathbb{Z}^d \quad (2.5.4)$$

для $k = 0, 1, \dots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \dots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — вектор сдвига $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^d из (1.2.9) и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.1.9). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + \dots + m_d^{(i)} \quad (2.5.5)$$

назовем *порядком* производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\text{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d; \quad j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1\}. \quad (2.5.6)$$

2.5.2 Спектральный радиус.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — собственные значения невырожденной комплексной $d \times d$ -матрицы A и

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\} \quad (2.5.7)$$

— ее *спектральный радиус*. В случае простого спектра, когда $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$, матрицу A можно представить в виде произведения

$$A = M J M^{-1} \quad (2.5.8)$$

диагональной матрицы $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{pmatrix}$ и некоторой невырожденной комплексной матрицы M . Введем в d -мерном комплексном векторном пространстве \mathbb{C}^d многогранную 1-метрику

$$|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_d|, \quad (2.5.9)$$

обладающую свойством

$$|Mx|_1 \leq d \|M\|_{\max} \cdot |x|_1, \quad (2.5.10)$$

где $M = (m_{ij})$ — произвольная комплексная $d \times d$ -матрица,

$$Mx = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad (2.5.11)$$

и

$$\|M\|_{\max} = \max_{i,j} |m_{ij}| \quad (2.5.12)$$

— max-норма матрицы M . Используя разложение (2.5.8) и неравенство (2.5.10) имеем

$$\begin{aligned} |Ax|_1 &= |M(JM^{-1}x)|_1 \leq d \|M\|_{\max} |J(M^{-1}x)|_1 \leq \\ &\leq d^2 \|M\|_{\max} \|J\|_{\max} |M^{-1}x|_1 \leq d^3 \|M\|_{\max} \|M^{-1}\|_{\max} \|J\|_{\max} |x|_1. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Так как $\|J\|_{\max} = \max_i |\lambda_i| = \varrho(A)$, то приходим к следующему неравенству

$$|Ax|_1 \leq c_1(M) \varrho(A) |x|_1 \quad (2.5.14)$$

с константой

$$c_1(M) = d^3 \|M\|_{\max} \|M^{-1}\|_{\max}.$$

Снова используя разложение (2.5.8) можем записать $A^n = MJ^nM^{-1}$, откуда выводим

$$\varrho(J^n) = \varrho(A)^n, \quad (2.5.15)$$

поскольку $\varrho(J^n) = \varrho(J)^n = \varrho(A)^n$. Теперь еще раз применяя схему (2.5.13), (2.5.14) и равенство (2.5.15) получаем общее неравенство

$$|A^n x|_1 \leq c_1(M) \varrho(A)^n |x|_1 \quad (2.5.16)$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \dots$. Неравенство (2.5.16) также переносится и на евклидову 2-метрику

$$|x|_2 = (\sum_{i=1}^d |x_i|^2)^{1/2}. \quad (2.5.17)$$

Повторяя рассуждения (2.5.13)–(2.5.16) и используя неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{d}} |x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_1, \quad (2.5.18)$$

можно получить аналог неравенства (2.5.16) для евклидовой метрики

$$|A^n x|_2 \leq c_2(M) \varrho(A)^n |x|_2 \quad (2.5.19)$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \dots$ с другой увеличенной константой $c_2(M) = \sqrt{d} c_1(M)$.

2.5.3 Радиусы и объемы производных параллелоэдров.

Применим доказанные формулы (2.5.16) и (2.5.19) к оценке метрических характеристик производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (2.5.2). В соответствии с метрикой $|x|_1$ и $|x|_2$ будем использовать два радиуса $r_1(T^{(i)})$ и $r_2(T^{(i)})$.

Сначала найдем радиус исходного параллелоэдра $T(v)$.

Лемма 2.5.1 *Если параллелоэр $T(v)$ порождается звездой $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, то его радиус $r_*(T(v))$ вычисляется по формуле*

$$r_*(T(v)) = \frac{1}{2} \max_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d} |\varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_d v_d|_* . \quad (2.5.20)$$

где $r_*(T(v))$ может быть любым из радиусов $r_1(T(v))$ или $r_2(T(v))$ в зависимости от выбранной метрики $|x|_* = |x|_1$ или $|x|_2$. Максимум в (2.5.20) вычисляется по всем наборам $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$, таким что $\varepsilon_i = \pm 1$, при этом количество отрицательных ε_i меняется в интервале $[1, \dots, \frac{d+1}{2}]$.

Доказательство. Из определения (1.2.8) следует, что параллелоэдр $T(v)$ имеет вершины

$$v_{k_1} + \dots + v_{k_i}, \quad (2.5.21)$$

где $0 \leq k_1 < \dots < k_i \leq d$ и $1 \leq i \leq d$. Поэтому его центром будет

$$c(T(v)) = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_d). \quad (2.5.22)$$

Радиус же параллелоэдра $r_*(T(v))$ равен максимальной длине векторов вида $w - c(T(v))$, где w пробегает все вершины (2.5.21). Отсюда выводим формулу (2.5.20). \square

Многогранник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}_{L^{(i)}}^d = \mathbb{R}^d / L^{(i)}$ для решетки $L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, \dots, l_d^{(i)}]$ с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, \dots, d$, где $v_k^{(i)}$ — лучи звезды $v^{(i)}$ из (2.5.1). Поэтому объем $\text{vol } T^{(i)}$ многогранника $T^{(i)}$ равна

$$\text{vol } (T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & \dots & l_{1d}^{(i)} \\ l_{21}^{(i)} & \dots & l_{2d}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{d1}^{(i)} & \dots & l_{dd}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \quad (2.5.23)$$

— объему фундаментальной области решетки $L^{(i)}$, где $l_{kl}^{(i)}$ — координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, \dots, d$.

Лемма 2.5.2 1. Если калибровочная матрица \mathbf{A} звезды v из (2.4.11) имеет различные собственные значения $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$, то для радиусов $r_*(T^{(i)}) = r_1(T^{(i)})$ или $r_2(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ выполняются следующие оценки

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M)\varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \quad (2.5.24)$$

для $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$. Здесь константы $c_*(M)$ равны $c_1(M)$ из (2.5.14) или $c_2(M) = \sqrt{d}c(M)_1$ и $\varrho(A)$ — спектральный радиус (2.5.7) матрицы \mathbf{A} .

2. Объем $\text{vol } T^{(i)}$ многогранника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{vol } T^{(b)}, \quad (2.5.25)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющей неравенствам

$$0 < |\det \mathbf{A}| < 1, \quad (2.5.26)$$

а объемы $\text{vol } T^{(b)}$ находятся по формуле (2.5.23).

Доказательство. По теореме 2.4.1 звезды $v^{(i)}$ и $v^{(b)}$ связаны равенством $v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}$ и, значит, порождаемые ими многогранники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ и $T^{(b)} = T(v^{(b)})$ аффинно подобны

$$T(v^{(i)}) = \mathbf{A}^a T(v^{(b)}). \quad (2.5.27)$$

Отсюда и (2.5.16), (2.5.19) следует неравенство (2.5.24). Формула (2.5.25) вытекает из подобия (2.5.27) и равенства (2.5.23).

Для доказательства же неравенств (2.5.26) достаточно заметить, что по построению (2.4.5), (2.4.11) калибровочной матрицы \mathbf{A} она состоит из сомножителей A_*^{kl} , имеющих соответственно определители

$$\det A_k^{kl} = 1 - x_l, \quad \det A_l^{kl} = 1 - x_k, \quad \det A_0^{0l} = 1 - x_l, \quad (2.5.28)$$

и

$$\det A_l^{0l} = x_1 + \dots + x_d. \quad (2.5.29)$$

Формулы (2.5.28) непосредственно вытекают из явного вида (2.1.22)–(2.1.24) матриц A_k^{kl} , A_l^{kl} и A_0^{0l} . Чтобы получить формулу (2.5.29), нужно воспользоваться равенством (2.1.25) и в матрице A_l^{0l} все ее строки прибавить к l -ой строке. Из (2.5.28) и (2.5.29) следует, что в любом случае имеют место неравенства

$$0 < |\det A_*^{kl}| < 1, \quad (2.5.30)$$

поскольку точка $x = (x_1, \dots, x_d)$ принадлежит внутренней области базисного симплекса $\Delta = \Delta_d$, что равносильно условиям

$$x_1 > 0, \dots, x_d > 0, \quad x_1 + \dots + x_d < 1. \quad (2.5.31)$$

Теперь неравенства (2.5.26) следуют из (2.5.30).

□

2.5.4 Порядковые матрицы.

Составим из порядков лучей (2.5.4) звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \quad (2.5.32)$$

и выясним, как она меняется под действием симметрий базисного симплекса $\Delta = \Delta_d$ и дифференцирований v^σ на звезду v .

Для этого поставим в соответствие любой перестановке σ элементов $0, 1, \dots, d$ ее *перестановочную матрицу*

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \dots & 1_{0,\sigma(0)} & \dots \\ \dots & 1_{1,\sigma(1)} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & 1_{d,\sigma(d)} & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.5.33)$$

с единицами $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $(i, \sigma(i))$ -местах. Если заменить 0 на $d + 1$, то получим перестановку (2.1.2), определяющую симметрию базисного симплекса $s = s_\sigma$ из группы S_Δ .

Дифференцированиям же δ_k^{kl} и δ_l^{kl} из (2.1.33) с произвольными индексами $0 \leq k < l \leq d$ поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \quad (2.5.34)$$

где $E = E_{d+1}$ — единичная матрица порядка $d + 1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i, j) -месте.

Матрицы M из (2.5.33) и (2.5.34) имеют целые коэффициенты и определители $\det M = \pm 1$, поэтому они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей $m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_D^\sigma$ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \quad (2.5.35)$$

Здесь, согласно определению производной (1.1.9), имеем

$$M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2}, \quad (2.5.36)$$

если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ — дифференцирование, где в качестве специализации * выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.1.9) выполняется; и

$$M^\sigma(v) = M^\sigma = S_\sigma \quad (2.5.37)$$

в случае преобразования симметрии $\sigma = s = s_\sigma$ звезды v , где S_σ — соответствующая матрица из (2.5.33).

Лемма 2.5.3 Пусть v — периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(t)}\check{s}$ из (2.4.11), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (2.4.14). Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, то

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \quad (2.5.38)$$

Здесь

$$\mathbf{M} = SM^{(t)} \quad (2.5.39)$$

с матрицей S из (2.5.33), соответствующей обратной симметрии для \check{s} , и

$$M^{(t)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \cdots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}), \quad (2.5.40)$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (2.5.36) специализации * определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.

Доказательство вытекает из теоремы 2.4.1 и определения (2.4.11) калибровочной матрицы \mathbf{A} , если учесть, что при переходе с верхней на нижнюю строку в диаграмме (2.4.2) меняется порядок преобразований. \square

Назовем \mathbf{M} *последковой матрицей* периодической звезды v , отвечающей калибровочной матрице \mathbf{A} .

2.5.5 Основная теорема.

Важность последовательности определенных ранее в (2.5.2) производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\text{Orb}_\alpha(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d; \quad j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2.5.41)$$

порождаемой сдвигом $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ из (1.2.13).

Ограничены параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^d выделяют из орбиты (2.5.41) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^d$.

Теорема 2.5.1 Пусть v — периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей \mathbf{A} из (2.4.11), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (2.4.14). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ орбиты (2.5.41) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (2.5.42)$$

в параллелоэдр $T^{(i)}$ из (2.5.2), где $m^{(i)}$ — порядок (2.5.5) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (2.5.38). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (2.5.43)$$

2. Для радиуса $r_*(T^{(i)}) = r_1(T^{(i)})$ или $r_2(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, выполняется следующее неравенство

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M)\varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \quad (2.5.44)$$

в случае, если у калибровочной матрицы \mathbf{A} собственные значения $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$. Для начальных номеров b радиусы $r_*(T^{(b)})$ в (2.5.44) вычисляются по формуле (2.5.20). Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус (2.5.7) калибровочной матрицы \mathbf{A} , и константы $c_*(M)$ определены в (2.5.16), (2.5.19).

3. Объем $\text{vol } T^{(i)}$ параллелоэдра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{vol } T^{(b)}, \quad (2.5.45)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и объемы $\text{vol } T^{(b)}$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p - 1$ вычисляются по формуле (2.5.23).

Доказательство. Утверждение 1 следует из теорем 1.2.2 и 1.3.1, а утверждения 2 и 3 доказаны в лемме 2.5.2. □

2.5.6 Минимальное свойство и ядерные нормы.

В теореме 2.5.1 доказано, что последовательность параллелоэдров $T^{(i)}$ обладает *свойством минимальности*, эквивалентному свойствам (2.5.42) и (2.5.43)). Свойство минимальности удобно сформулировать в терминах некоторых норм.

Выбрав на нормирующее тело выпуклый многогранник $T^{(i)}$ — параллелоэдр (2.5.2), зададим отвечающую ему $T^{(i)}$ -норму

$$\|\cdot\|^{(i)} = \|\cdot\|_{\alpha}^{(i)}, \quad (2.5.46)$$

зависящую от точки α , порядка производной i и являющуюся квазинормой. Так определенные $T^{(i)}$ -нормы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \|x\|^{(i)} &\geq 0, \\ \|x\|^{(i)} = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \\ \|ax\|^{(i)} &= a\|x\|^{(i)}, \quad a \geq 0, \\ \|x + y\|^{(i)} &\leq \|x\|^{(i)} + \|y\|^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

Первые три свойства в (2.5.47) очевидны, доказательство последнего свойства см., например, у Касселса ([35], стр. 141). Как видно из (2.5.47), $T^{(i)}$ -нормы не удовлетворяют свойству симметрии

$$\|-x\|^{(i)} \neq \|x\|^{(i)} \quad (2.5.48)$$

— это следствие того, что начало координат не находится в центре симметрии многогранников $T^{(i)}$, хотя сами они являются центрально симметричными.

Указанные многогранники $\text{Kr}^{(i)} = T^{(i)}$ являются ядрами (1.2.26) индуцированных разбиений d -мерного тора \mathbb{T}^d . Поэтому $\|\cdot\|^{(i)}$ будем также называть *ядерными нормами*. Хотя данный термин может иметь и другой смысл, в нашем контексте использование его не будет приводить к неоднозначности.

Записанное на языке $T^{(i)}$ -норм (2.5.46), свойство минимальности (2.5.42), (2.5.43) примет вид:

$$\|x_j\|^{(i)} \geq 1 \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1, \quad (2.5.49)$$

и

$$\|x_j\|^{(i)} < 1 \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (2.5.50)$$

Таким образом, согласно (2.5.49), (2.5.50) свойство минимальности ядер $\text{Kr}^{(i)} = T^{(i)}$ указывает на наилучшие приближения относительно $T^{(i)}$ -норм, или кратко — на *наилучшие ядерные приближения*.

Замечание 2.5.1 В главах 3 – 5 будет показано, как с точками x_j из (2.5.43) можно связать последовательность ядерных цепных дробей, представляющих собою один из возможных вариантов многомерных (d -мерных) обобщений обычных подходящих цепных дробей.

2.6 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Согласно (2.5.49), (2.5.50)) свойство минимальности (2.5.42), (2.5.43)) означает, что ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^d выделяют из орбиты (2.5.41) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^d$ относительно ядерной нормы (2.5.46) с нормирующим звездным телом $T^{(i)}$ конечного радиуса $r_*(T^{(i)}) < \infty$. Действительно, параллелоэдр $T^{(i)}$ является звездным телом [35], поскольку любой луч, выходящий из начала координат, пересекает границу $\partial T^{(i)}$ параллелоэдра $T^{(i)}$ в одной точке.

Следующие два свойства (2.5.44) и (2.5.45)) описывают метрические характеристики аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$. В частности, из них вытекают экспоненциальные сокращения размеров и объемов параллелоэдров

$$r_*(T^{(i)}) \rightarrow 0, \quad \text{vol } T^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \quad (2.6.51)$$

причем выполнение первого свойства из (2.6.51) требует дополнительного условия $\varrho(\mathbf{A}) < 1$ на спектральный радиус калибровочной матрицы \mathbf{A} . В противном случае возможен рост радиусов аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$ с одновременным сжатием их объемов.

В теореме 2.3.2 доказано, что существование периода $p > 0$ возможно только для векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ с координатами из некоторого алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ степени $d + 1$. Такое утверждение является многомерным обобщением первой части теоремы Лагранжа о периодичности разложений квадратичных иррациональностей в цепную дробь (см., например, [47]).

Используемый при доказательстве теореме 2.5.1 метод основан на дифференцировании звезд, вкладывающихся в тор [23], [24], и имеет своим источником разбиения Рози [104], [16].

Часть II

Ядерные разложения чисел Пизо

Глава 3

Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби

Методом дифференцирования индуцированных разбиений торов получены наилучшие периодические ядерные приближения для кубических иррациональностей относительно гексагональных норм — это основное геометрическое свойство ядерных приближений. Используя же двумерные возвратные отображения, удалось найти и количественные оценки данных приближений.

3.1 Тройные звезды и их производные

3.1.1 Тройные звезды.

Напомним некоторые определения из главы 1 для случая размерности $d = 2$. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ двух элементов $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ из множества индексов $\{0, 1, 2\}$. Пусть v_0, v_1, v_2 — произвольные векторы из \mathbb{R}^2 , $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ и $\sigma' = \{k_3\} = \{0, 1, 2\} \setminus \sigma$ — дополнительный к σ индекс. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные тройки векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$, где индексы лишь обозначают векторы.

Пусть любой вектор $v_k \neq 0$ из $\{v_0, v_1, v_2\}$ и $H_{\sigma'}$ обозначает прямую, проходящую через начало координат и имеющую направляющий вектор v_{k_3} . Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ назовем *звездой*, если для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат прямой $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полуплоскостях $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Как следствие из определения звезды вытекает линейная независимость любых двух векторов из тройки $v = \{v_0, v_1, v_3\}$.

3.1.2 Производные звезды.

Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ то множество векторов из (1.1.6), которое образует звезду. Если существуют множества векторов v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, т.е. для всех σ выполняется условие леммы 1.1.1, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ *невырождена*.

Таким образом, для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}, \quad (3.1.1)$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$ выбирается в согласии с (1.1.6), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для остальных $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (3.1.1) назовем σ -*производной* невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 в сочетании $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной (3.1.1) использовать еще и другое развернутое обозначение $v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}$. Согласно (1.1.11) для производных имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1, k_2\}} = v^{\{k_2, k_1\}}, \quad (3.1.2)$$

и поскольку в данном случае размерность $d = 2$, то по формуле (1.1.12) для невырожденной звезды v существуют

$$C_3^2 = 3 \quad (3.1.3)$$

ее производных звезд v^σ .

3.2 Индуцированные разбиения тора

3.2.1 Перекладывающиеся развертки тора.

Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, l_2]$ — полная решетка в \mathbb{R}^2 с базисом l_1, l_2 , т.е. векторы l_1, l_2 линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} , и пусть T — некоторое подмножество из \mathbb{R}^2 . Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^2 = \mathbb{R}^2/L$, если отображение $T \rightarrow \mathbb{T}_L^2 : x \mapsto x \bmod L$ — биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \quad (3.2.1)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)}$$

на векторы v_0, v_1, v_2 , связанные с базисом решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, 2. \quad (3.2.2)$$

Здесь использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для цвета точек x , принадлежащих подмножеству T_k , где $k = 0, 1, 2$. Заметим, что при переходе (3.2.2) от векторов

перекладывания v_0, v_1, v_2 к базису l_1, l_2 решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно для него ввести дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (3.2.3)$$

В частности, из равенств (3.2.2) и (3.2.3) вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha' \pmod{L}$ для всех $k = 0, 1, 2$. Поэтому перекладывание S' представляет собою сдвиг тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L} \quad (3.2.4)$$

на вектор $\alpha' \pmod{L}$.

3.2.2 Шестиугольная развертка тора.

Обозначим через T_{k_1, k_2} замкнутый параллелограмм, натянутый на векторы v_{k_1}, v_{k_2} . Определим для $m = 0, 1, 2$ параллелограммы T_m , имеющие те же внутренние части $T_m^{\text{int}} = T_{k,l}^{\text{int}}$, что и параллелограммы T_{k_1, k_2} , где m — дополнительный к $\{k_1, k_2\}$ индекс в $\{0, 1, 2\}$. Стороны и вершины параллелограммов T_{k_1, k_2} распределим между соответствующими параллелограммами T_m , так чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) каждому T_m принадлежали две смежные стороны и соединяющая их вершина;
- 2) получающееся при этом объединение $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ является разбиением — нестрогим разбиением (1.1.5) — множества T .

Для определенности положим, что

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2. \quad (3.2.5)$$

В результате получается *шестиугольник*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \quad (3.2.6)$$

с попарно равными и параллельными сторонами. Такой шестиугольник будет перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}_L^2 для решетки L с базисом $\{l_1, l_2\}$ и векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 в случае, если данная тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ образует звезду.

3.2.3 Вмещающее пространство.

Кроме тора \mathbb{T}_L^2 , нам потребуется еще один стандартный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ для *квадратной решетки* $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2\}$.

Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^2 на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из \mathbb{R}^2 , полагая

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{T}^2 : x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}. \quad (3.2.7)$$

Далее торы \mathbb{T}^2 будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов \mathbb{T}_L^2 с изменяющимися решетками L .

3.2.4 Вкладывающиеся в тор развертки.

Перекладывающаяся развертка T из (3.2.1) *вкладывается*

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2 \quad (3.2.8)$$

в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются условия (1.2.14)–(1.2.18). Из определения (3.2.8) следует, что подмножество $T \subset \mathbb{R}^2$ должно быть \mathbb{Z}^2 -различимым, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}^2}$, следует их равенство $x = y$.

Далее будем предполагать вектор сдвига α из (3.2.7) *иррациональным*, когда

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \alpha_2 \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (3.2.9)$$

При этом условии теорема 1.2.1 для размерности $d = 2$ примет следующий вид.

Теорема 3.2.1 *Пусть развертка T вкладывается (3.2.8) в тор \mathbb{T}^2 , развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α сдвига $S = S_\alpha$ из (3.2.7) будет иррациональным (3.2.9). Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. Множества из полных орбит $\text{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е. $S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset$ только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. Имеет место разбиение тора \mathbb{T}^2 :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2, \text{ где } \mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

— орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в орбиту $\text{Orb}(T_k)$ из (1.2.14).

□

3.2.5 Индуцированные отображения и ядро разбиения.

Из теоремы 3.2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \rightarrow T$ из (3.2.4) является *индукцированным отображением* в $T \subset \mathbb{T}^2$ для сдвига тора $S : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ из (3.2.7), что символически будем обозначать в виде равенства $S' = S|_T$. Обозначим соответственно

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2 \quad (3.2.10)$$

развертку T из (3.2.1) и *индукцированное разбиение* тора \mathbb{T}^2 , порожданное вкладывающейся в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ разверткой T . Множество T по отношению ко всему разбиению тора \mathcal{T} является *ядром (karyon)* разбиения \mathcal{T} . Чтобы указывать на такую связь между T и \mathcal{T} снова будем использовать обозначение

$$T = \text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T}). \quad (3.2.11)$$

Ядро Kr характеризуется следующим свойством: Kr — это такое подмножество $\text{Kr} \subset \mathbb{T}^2$, для которого отображение первого возвращения $S' = S|_{\text{Kr}}$, индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (3.2.7), эквивалентно перекладыванию трех подмножеств из разбиения

$$\text{Kr} = \text{Kr}_0 \sqcup \text{Kr}_1 \sqcup \text{Kr}_2.$$

Понятие ядра (3.2.11) является основным для всей рассматриваемой здесь конструкции. С помощью ядер $T = \text{Kr}$ будут построены наилучшие приближений для кубических иррациональностей; они же будут задавать ядерные T -нормы, используемые для получения количественных оценок скорости приближений.

3.2.6 Критерий вложимости шестиугольной развертки тора.

Пусть $T = T(v)$ будет некоторой разверткой (3.2.1), которая изначально не предполагается вложенной в тор \mathbb{T}^2 ; и пусть (см. соглашение (1.1.5))

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \quad (3.2.12)$$

— подмножество тора \mathbb{T}^2 , определенное по правилу из (3.2.10). Таким образом, в данном случае множество (3.2.12) не обязано быть разбиением тора \mathbb{T}^2 .

Для шестиугольной развертки тора критерий вложимости, сформулированный в теореме 1.2.2, принимает вид.

Теорема 3.2.2 *Развертка $T = T(v)$ вкладывается (3.2.8) в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) определенное в (3.2.12) множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ является разбиением тора \mathbb{T}^2 ;

2) внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}^2$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты

$$\text{Orb}'(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0); j = 1, 2, \dots, \mathbf{m} - 1\},$$

где $\mathbf{m} = m_0 + m_1 + m_2$ — порядок орбиты $\text{Orb}'(0, \mathbf{m})$.

□

3.2.7 Вложения в тор производных звезд.

Пусть $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ — звезда и $T = T(v)$ — отвечающая ей развертка (3.2.10) тора \mathbb{T}_L^2 с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 . Напомним, что звезда v вкладывается

$$v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2 \quad (3.2.13)$$

в тор \mathbb{T}^2 относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, если данная развертка $T = T(v)$ вкладывается $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор \mathbb{T}^2 относительно того же сдвига S .

Согласно теореме 1.3.1 вложение звезд (3.2.13) инвариантно относительно операций дифференцирования (3.1.1).

Теорема 3.2.3 *Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается (1.3.1) в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным (3.2.9) вектором α . Тогда ее любая σ -производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$v^\sigma \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$$

в тот же тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига S .

□

3.3 Возвратные отображения

3.3.1 Базисный треугольник.

Основной областью для нас будет *замкнутый треугольник* Δ с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Обозначим через S_Δ группу его аффинных симметрий (ангмоническая группа). Она сопряжена с группой метрических симметрий правильного треугольника и состоит из трех *аффинных поворотов* r_0, r_1, r_2 , соответствующих поворотам против часовой стрелки на $0, 120, 240$ градусов, и трех *осевых симметрий* h_0, h_1, h_2 относительно медиан μ_0, μ_1, μ_2 , проходящих через вершины $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $2 = (0, 1)$ соответственно. В координатах $(x_1, x_2) \in \Delta$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ симметрии из S_Δ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0(x_1, x_2) &= (x_1, x_2), & h_0(x_1, x_2) &= (x_2, x_1), \\ r_1(x_1, x_2) &= (-x_1 - x_2 + 1, x_1), & h_1(x_1, x_2) &= (x_1, -x_1 - x_2 + 1), \\ r_2(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1 - x_2 + 1), & h_2(x_1, x_2) &= (-x_1 - x_2 + 1, x_2). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

3.3.2 Разбиения треугольника.

Выделим в треугольнике Δ шесть *открытых областей* $\Delta_k^{kl}, \Delta_l^{kl} \subset \Delta$ с целыми индексами $0 \leq k < l \leq 2$. Замыкания областей $\overline{\Delta}_k^{kl}, \overline{\Delta}_l^{kl}$ разбивают треугольник $\Delta = \overline{\Delta}_k^{kl} \cup \overline{\Delta}_l^{kl}$ и пересекаются $\overline{\Delta}_k^{kl} \cap \overline{\Delta}_l^{kl} = \mu_m$ по медиане μ_m с номером m , дополняющим индексы $\{k, l\}$ до всего множества $\{0, 1, 2\}$. Нижние индексы в Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\Delta}_k^{kl}$ и $\overline{\Delta}_l^{kl}$. Таким образом, области $\Delta_k^{kl}, \Delta_l^{kl}$ представляют собою открытые треугольники, замыкание объединения которых

$$\Delta^{kl} = \Delta_k^{kl} \cup \Delta_l^{kl} \quad (3.3.2)$$

совпадает со всем треугольником Δ и при этом $\Delta_k^{kl} \cap \Delta_l^{kl} = \emptyset$.

3.3.3 Нормированные дифференцирования звезд.

Согласно условию (1.1.4) из критерия 1.1, каждая точка $x \in \Delta^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, w_2\}$ с лучами

$$w_0 = -x, \quad w_1 = e_1 - x, \quad w_2 = e_2 - x, \quad (3.3.3)$$

выходящими из центра x в вершины с соответствующими номерами 0, 1, 2. В этом случае существует производная звезда

$$w' = \{w'_0, w'_1, w'_2\}. \quad (3.3.4)$$

Если $x \in \Delta_k^{kl}$, то лучи в (3.3.4) имеют вид $w'_m = w_m, w'_k = w_k, w'_l = w_k + w_l$; если же $x \in \Delta_l^{kl}$, то — вид $w'_m = w_m, w'_k = w_k + w_l, w'_l = w_l$. Здесь мы использовали более удобное для дальнейшего обозначение для производной w' звезды w , вместо ранее введенного w^σ в (3.1.1); индекс m снова дополняет $\{k, l\}$ до всего множества индексов $\{0, 1, 2\}$.

Из условия $x \in \Delta^{kl}$ вытекает, что векторы $e'_1 = v'_1 - v'_0, e'_2 = v'_2 - v'_0$ образуют базис пространства \mathbb{R}^2 . Пусть A^{kl} — матрица перехода $e' = eA^{kl}$ от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$, где $e' = (e'_1 e'_2)$ — строка, eA^{kl} — произведение строки $e = (e_1 e_2)$ на 2×2 -матрицу A^{kl} . Данная матрица имеет две специализации

$$A^{kl} = A_k^{kl} \quad \text{или} \quad A_l^{kl}$$

в зависимости от принадлежности x области Δ_k^{kl} или Δ_l^{kl} :

$$\begin{aligned} A_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 1-x_1 \\ 0 & 1-x_2 \end{pmatrix}, & A_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1-x_1 & 0 \\ 1-x_2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1-x_1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{pmatrix}, & A_1^{01} &= \begin{pmatrix} x_1 & -1+x_1 \\ x_2 & 1+x_2 \end{pmatrix}, \\ A_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & 1-x_2 \end{pmatrix}, & A_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 \\ -1+x_2 & x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

В координатах формула перехода $e' = eA^{kl}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через \mathcal{A}^{kl} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{12} &= \frac{1}{1-x_2} \begin{pmatrix} 1-x_2 & -1+x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_2^{12} &= \frac{1}{1-x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1+x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_0^{01} &= \frac{1}{1-x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_1^{01} &= \frac{1}{x_1+x_2} \begin{pmatrix} 1+x_2 & 1-x_1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_0^{02} &= \frac{1}{1-x_2} \begin{pmatrix} 1-x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_2^{02} &= \frac{1}{x_1+x_2} \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ 1-x_2 & 1+x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

С помощью обратных матриц \mathcal{A}^{kl} можно для производной звезды w' из (3.3.4) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2\} \quad (3.3.8)$$

с центром $x' = (x'_1, x'_2)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ -w'_{02} \end{pmatrix},$$

где в правом столбце использованы координаты вектора $w'_0 = (w'_{01}, w'_{02})$ из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, w'_2\}$, определенной в (3.3.4). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным $w'_0 = w_0$, то в формуле (3.3.6) выбирается центр $x = (x_1, x_2) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w . Нормированная звезда \mathbf{w}' , как и w , имеет лучи

$$\mathbf{w}'_0 = -x', \quad \mathbf{w}'_1 = e_1 - x', \quad \mathbf{w}'_2 = e_2 - x', \quad (3.3.9)$$

выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины треугольника Δ . Определение (3.3.8) звезды \mathbf{w}' корректно, поскольку по определению (1.2.10) точка x' принадлежит внутренней области Δ^{int} треугольника Δ .

В явном виде координаты $(x'_1, x'_2) = \delta^{kl}(x_1, x_2)$ центра x' нормированной звезды \mathbf{w}' из (3.3.8) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

$$\begin{aligned} \delta_1^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1-x_2}{1-x_2}, \frac{x_2}{1-x_2} \right), & \delta_2^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1-x_1}, \frac{-x_1+x_2}{1-x_1} \right), \\ \delta_0^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1-x_1}, \frac{x_2}{1-x_1} \right), & \delta_1^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{2x_1+x_2-1}{x_1+x_2}, \frac{x_2}{x_1+x_2} \right), \\ \delta_0^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1-x_2}, \frac{x_2}{1-x_2} \right), & \delta_2^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_1+2x_2-1}{x_1+x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Преобразования (3.3.10) представляют собою двумерный аналог d -мерных возвратных отображений (2.1.30), (2.1.31).

3.3.4 Возвратные отображения.

Дробно-линейные преобразования (3.3.10) задают

$$\Delta \xrightarrow{\delta^{kl}} \Delta : \quad x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \quad (3.3.11)$$

три отображения δ^{kl} с индексами $0 \leq k < l \leq 2$: $\delta^{kl}(x) = \delta_k^{kl}(x)$, если $x \in \Delta_k^{kl}$, и $\delta^{kl}(x) = \delta_l^{kl}(x)$, если $x \in \Delta_l^{kl}$. Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\Delta^{kl} \subset \Delta$ из (3.3.2) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в треугольнике Δ , исключая его границы и медиану μ_m , проходящую через вершину с номером m из дополнения $\{0, 1, 2\} \setminus \{k, l\}$.

3.3.5 Матрицы возвратных отображений.

На языке (3×3) -матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.12)$$

дробно-линейные преобразования (3.3.10) записываются в виде

$$M\langle x \rangle = \left(\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}} \right) \quad (3.3.13)$$

для $x = (x_1, x_2)$. В матричной форме (3.3.13) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1\langle M_2\langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x \rangle. \quad (3.3.14)$$

Поскольку $E_3\langle x \rangle = x$ для единичной матрицы E_3 порядка 3, то из свойства (3.3.14) следует, что для $x' = M\langle x \rangle$ обратным отображением будет $x = M^{-1}\langle x' \rangle$.

Согласно определению (3.3.13), дробно-линейные преобразования (3.3.10) имеют следующие матрицы:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_1^{01} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Матрицы (3.3.15) принадлежат группе унимодулярных трехмерных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

3.3.6 Обратные возвратные отображения.

Отображения δ^{kl} являются дважды накрывающими, а их специализации δ_*^{kl} задают уже биекции

$$\delta_k^{kl} : \Delta_k^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\text{int}}, \quad \delta_l^{kl} : \Delta_l^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\text{int}}. \quad (3.3.16)$$

Поэтому для них существуют обратные возвратные отображения

$$\partial_k^{kl} : \Delta^{\text{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_k^{kl}, \quad \partial_l^{kl} : \Delta^{\text{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_l^{kl}. \quad (3.3.17)$$

Матрицами для отображений (3.3.17) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (3.3.15):

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\partial}_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\partial}_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\partial}_1^{01} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\partial}_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\partial}_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ_*^{kl} имеют унимодулярные матрицы (3.3.15). Поэтому матрицы (3.3.18) обратных отображений ∂_*^{kl} снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения ∂_*^{kl} записутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_1^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1+x_2}{x_2+1}, \frac{x_2}{x_2+1}\right), & \partial_2^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{x_1+1}, \frac{x_1+x_2}{x_1+1}\right), \\ \partial_0^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{x_1+1}, \frac{x_2}{x_1+1}\right), & \partial_1^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{-x_2+1}{-x_1-x_2+2}, \frac{x_2}{-x_1-x_2+2}\right), \\ \partial_0^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{x_2+1}, \frac{x_2}{x_2+1}\right), & \partial_2^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{-x_1-x_2+2}, \frac{-x_1+1}{-x_1-x_2+2}\right).\end{aligned}\quad (3.3.19)$$

3.3.7 Матрицы симметрий треугольника.

Симметрии треугольника (3.3.1) также можно представить в матричной форме (3.3.13). Для них матрицами будут: для *поворотов* —

$$\widehat{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.20)$$

для *осевых симметрий* —

$$\widehat{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.21)$$

Матрицы симметрий треугольника (3.3.20), (3.3.21) отличаются от матриц возвратных отображений (3.3.15) нижней строкой $(0\ 0\ 1)$. Матрицы поворотов имеют определитель $|\widehat{r}_k| = 1$, а осевых симметрий — $|\widehat{h}_k| = -1$, что отражает отличие собственных преобразований r_k от несобственных h_k . Кроме самих матриц (3.3.20), (3.3.21) нам потребуются еще их *однородные части* — верхние левые (2×2) -блоки:

$$\begin{aligned}\check{r}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \check{r}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \check{r}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \\ \check{h}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \check{h}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \check{h}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.3.22)$$

Матрицы (3.3.22) порождают группу $S_{\tilde{\Delta}}$ аффинных (однородных) симметрий треугольника $\tilde{\Delta}$, получающегося сдвигом треугольника Δ на вектор $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Следовательно, треугольник $\tilde{\Delta}$ имеет центр в начале координат $(0, 0)$ — неподвижной точке всех симметрий (3.3.22).

3.3.8 Иррациональные точки.

Аналогично определению (3.2.9) для векторов, точку $x = (x_1, x_2)$ из \mathbb{R}^2 назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, x_2 \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (3.3.23)$$

По лемме 2.2.1 дробно-линейные отображения сохраняют свойство точки быть иррациональной.

Лемма 3.3.1 *Если точка $x = (x_1, x_2)$ иррациональна (3.3.23) и матрица M принадлежит целочисленной унимодулярной группе $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, то*

- 1) *для точки x определен ее образ $M\langle x \rangle$ относительно дробно-линейного отображения (3.3.13);*
- 2) *соответствующая точка $x' = M\langle x \rangle$ снова будет иррациональной.*

□

3.4 Разложение в произведение элементарных возвратных матриц

3.4.1 Кубические единицы.

Пусть

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (3.4.1)$$

будет многочленом с коэффициентами a_i из кольца целых рациональных чисел \mathbb{Z} со свободным членом $a_0 = \pm 1$. Будем говорить, что $f(x)$ является Δ -многочленом, если $f(x)$ имеет вещественный корень $f(\theta) = 0$, удовлетворяющий условию

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta^{\mathrm{int}}, \quad (3.4.2)$$

где $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$. Если при этом θ — кубическая иррациональность, то скажем, что $f(x)$ — Δ_{irr} -многочлен, а точка α удовлетворяют Δ_{irr} -условию. Значит, в данном случае $f(x)$ будет многочленом, неприводимым над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Из Δ_{irr} -условия и ограничения на свободный член $a_0 = \pm 1$ многочлена (3.4.1) вытекает, что его корень θ является единицей вещественного кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$.

3.4.2 Возвратные матрицы для кубических единиц.

Каждому набору $a = (a_2, a_1, a_0)$ коэффициентов из (3.4.1) сопоставим матрицу

$$M(a) = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.3)$$

называемую *матрицей Фробениуса*. Так как $\det M(a) = -a_0 = \mp 1$, то $M(a)$ принадлежит группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Из определения (3.4.3) следует, что столбец

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы $M(a)$, т.е. выполняется матричное равенство

$$M(a)\widehat{\alpha} = \lambda\widehat{\alpha} \quad (3.4.4)$$

с собственным значением $\lambda = \theta$.

3.4.3 Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ полугруппу унимодулярных матриц из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, отвечающих преобразованиям δ из полугруппы \mathcal{D} . Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$ содержит группу \widehat{S}_Δ матриц, соответствующих аффинным симметриям S_Δ треугольника Δ . Если матрица M принадлежит полугруппе $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, то по определению она допускает разложение в конечное произведение симметрий $\widehat{s} \in \widehat{S}_\Delta$ и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl} \in \widehat{\mathcal{D}}$, определенных в (3.3.15). Произвольную матрицу M из полугруппы $\widehat{\mathcal{D}}$ также будем называть *возвратной*. Из определения \mathcal{D} следует, что такая матрица M будет унимодулярной.

Чтобы избежать длинных записей и сделать их более удобно читаемыми, воспользуемся следующими сокращениями:

$$\widehat{s} \rightarrow s, \quad (\widehat{\delta}_k^{kl})^n \rightarrow kl^n, \quad (\widehat{\delta}_l^{kl})^n \rightarrow lk^n \quad (3.4.5)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$ Например, разложение

$$M = \widehat{s} \cdot \widehat{\delta}_{k_1}^{k_1 l_1} \cdot (\widehat{\delta}_{l_2}^{k_2 l_2})^3$$

примет сокращенный вид

$$M = s \cdot k_1 l_1 \cdot l_2 k_2^3.$$

Среди разложений матриц $M(a)$ в произведение симметрий \widehat{s} и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl}$ можно выделить две *основные* серии. В предложениях 3.4.1 и 3.4.2 представлены указанные разложения матриц $M(a)$ для $\Delta_{\text{ирр-многочленов}} f(x)$ вида (3.4.1).

3.4.4 Серия $a_0 = -1$.

В предложении 3.4.1 представлена основная серия разложений матриц $M(a)$, соответствующая коэффициенту $a_0 = -1$. Другая серия с коэффициентом $a_0 = 1$ содержится в предложении 3.4.2.

Предложение 3.4.1 Пусть $a_0 = -1$. Тогда в обозначениях (3.4.5) матрицы $M(a)$ из (3.4.3) имеют следующие разложения:

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{01} \cdot 20 \cdot 02^{a_1-1} \cdot 01^{a_2-2} \quad \text{для } a_2 \geq 2, a_1 \geq 1; \quad (3.4.6)$$

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{21} \cdot 20 \cdot 02^{a_1-1} \quad \text{для } a_2 = 1, a_1 \geq 1; \quad (3.4.7)$$

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{20} \cdot 02^{|a_2|+1} \cdot \underline{21} \cdot 02^{a_1-|a_2|-2} \quad \text{для } a_2 \leq 0, a_1 \geq |a_2| + 2. \quad (3.4.8)$$

Замечание 3.4.1 В разложениях (3.4.6)–(3.4.8) подчеркиванием выделен остатов или фрейм разложения, сохраняющийся при всех изменениях параметров a_1, a_2 в заданных пределах.

Доказательство получается прямыми вычислениями с использованием формул

$$01^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 02^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

□

3.4.5 Серия $a_0 = 1$.

Для данного случая основная серия разложений матриц $M(a)$ аналогична основной серии разложений для $a_0 = -1$.

Предложение 3.4.2 Пусть $a_0 = 1$. Тогда для матриц $M(a)$ выполняются следующие разложения:

$$M(a) = h_0 \cdot \underline{20} \cdot 02^{a_2} \cdot \underline{21} \cdot 02^{|a_1|-a_2-2} \quad \text{для } a_2 \geq 1, a_1 \leq -a_2 - 3; \quad (3.4.9)$$

$$M(a) = h_0 \cdot \underline{01} \cdot 20 \cdot 02^{|a_1|-2} \cdot 01^{|a_2|-1} \quad \text{для } a_2 \leq -1, a_1 \leq -2. \quad (3.4.10)$$

□

3.5 Неподвижные точки возвратных матриц

3.5.1 Соответствие и специализации.

Выписанные ранее разложения матрицы $M(a)$ в виде произведения симметрии \widehat{s} и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl}$ задают соответствие

$$M(a) \longrightarrow \delta_s, \quad (3.5.1)$$

где отображение $\delta_s = s\delta$ принадлежит расширенной полугруппе \mathcal{D} и равно композиции симметрии s и некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$. Более того, соответствие (3.5.1) определяет также и специализацию δ_* второго отображения: δ равно произведению элементарных возвратных отображений δ^{kl} , а его специализация δ_* равна произведению специализаций δ_*^{kl} , определяемых элементарными возвратными матрицами $\widehat{\delta}_*^{kl}$, содержащимися в правой части разложений матрицы $M(a)$.

3.5.2 Неподвижные точки и собственные значения.

Теорема 3.5.1 1. Пусть x является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} с областью определения $\Delta(\delta)$, т.е. выполняются условия

$$x \in \Delta(\delta) \quad (3.5.2)$$

и

$$\delta x = x. \quad (3.5.3)$$

Тогда имеет место матричное равенство

$$M\widehat{x} = \lambda\widehat{x} \quad (3.5.4)$$

для $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ с вещественным собственным значением $\lambda \neq 0$. Здесь

$$M = M_{\delta_*} = M_s \cdots M_2 M_1 \quad (3.5.5)$$

— матрица специализации $\delta_* = \delta_*(x)$ отображения δ , определяемой точкой x .

2. Обратно, пусть задана фиксированная специализация δ_* отображения $\delta \in \mathcal{D}$, $M = M_{\delta_*}$ — матрица и $\Delta(\delta_*)$ — область определения специализации δ_* . Пусть, кроме того, имеет место равенство

$$M\widehat{x} = \lambda\widehat{x} \quad (3.5.6)$$

с вещественным $\lambda \neq 0$ для некоторого $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, где $x = (x_1, x_2)$ — иррациональная точка (3.3.23) и

$$x \in \Delta^{\text{int}}. \quad (3.5.7)$$

Тогда указанное x удовлетворяет условиям

$$x \in \Delta(\delta_*) \quad (3.5.8)$$

и

$$\delta_* x = x, \quad (3.5.9)$$

равносильным в данном случае тому, что x является неподвижной точкой $\delta x = x$ отображения δ .

Доказательство. Из (3.5.2) и определений (3.3.11), (3.3.13) следует равенство

$$M\langle x \rangle = x, \quad (3.5.10)$$

из которого вытекает матричное равенство (3.5.4) с $\lambda = \lambda(M, x)$, где

$$\lambda(M, x) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33} \quad (3.5.11)$$

— фактор-автоморфности отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$. В силу условия (3.5.2) имеем $\lambda(M, x) \neq 0$, что вместе с равенством (3.5.11) доказывает первую часть теоремы 3.5.1.

Докажем вторую часть. Пусть специализация δ_* имеет разложение

$$\delta_* = \delta_t \cdots \delta_2 \delta_1, \quad (3.5.12)$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_il_i}$ — какое-то возвратное отображение (3.3.10) или $\delta_i = s_i$ — какая-то симметрия из S_Δ . Тогда

$$M = M_{\delta_*} = \widehat{\delta}_t \cdots \widehat{\delta}_2 \widehat{\delta}_1 \quad (3.5.13)$$

будет матрицей специализации (3.5.12) отображения δ .

По условию теоремы имеем $\lambda(M, x) = \lambda \neq 0$. Поэтому определено значение $M\langle x \rangle$ и при этом выполняется равенство (3.5.10).

Используя представление (3.5.13) матрицы M , запишем его в виде

$$\widehat{\delta}_t \cdots \widehat{\delta}_2 \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle = x. \quad (3.5.14)$$

Воспользуемся иррациональностью точки x и покажем, что левую часть из (3.5.14) можно разложить в композицию

$$\widehat{\delta}_t \cdots \widehat{\delta}_2 \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle = \widehat{\delta}_t \langle \cdots \langle \widehat{\delta}_2 \langle \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle. \quad (3.5.15)$$

По лемме 3.3.1 существует образ $x^{(1)} = \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle$, т.к. матрица $\widehat{\delta}_1$ принадлежит группе $GL_3(\mathbb{R})$. Аналогично, существуют образы $x^{(2)} = \widehat{\delta}_2 \langle x^{(1)} \rangle, \dots, x^{(t)} = \widehat{\delta}_t \langle x^{(t-1)} \rangle$, поскольку на каждом шаге снова появляются иррациональные точки $x^{(2)}, \dots, x^{(t)}$ и все матрицы $\widehat{\delta}_2, \dots, \widehat{\delta}_t$ из группы $GL_3(\mathbb{R})$. Таким образом, правая часть из (3.5.15) имеет смысл, а тогда по формуле (3.3.14) выполняется и равенство (3.5.15).

Соединяя (3.5.14) и (3.5.15), можем записать

$$\widehat{\delta}_t \langle \cdots \langle \widehat{\delta}_2 \langle \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle = x. \quad (3.5.16)$$

Разложению $\widehat{\delta}_t \cdots \widehat{\delta}_2 \widehat{\delta}_1$ из (3.5.13) соответствует двойственное разложение

$$\widehat{\partial} = \widehat{\partial}_1 \widehat{\partial}_2 \cdots \widehat{\partial}_t, \quad (3.5.17)$$

где $\widehat{\partial}_i = \widehat{\delta}_*^{k_il_i}$ — матрица (3.3.15) или $\widehat{\partial}_i = \widehat{s}_i^{-1}$ — обратная матрица для матрицы (3.3.20), (3.3.21) симметрии s_i .

Имеем

$$\widehat{\partial}_t \langle \widehat{\delta}_t \langle \cdots \langle \widehat{\delta}_2 \langle \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle = \widehat{\partial}_t \langle x \rangle. \quad (3.5.18)$$

Теперь повторяя рассуждения, использованные для доказательства равенства (3.5.15), и соотношение $\widehat{\partial}_t \widehat{\delta}_t = E_3$, из (3.5.18) выводим равенство

$$\widehat{\delta}_{t-1} \langle \cdots \langle \widehat{\delta}_2 \langle \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle = \widehat{\partial}_t \langle x \rangle. \quad (3.5.19)$$

Поступая аналогично с матрицами $\widehat{\delta}_{t-1}, \dots, \widehat{\delta}_2, \widehat{\delta}_1$ и принимая каждый раз в расчет соотношения $\widehat{\partial}_i \widehat{\delta}_i = E_3$, получим

$$x = \widehat{\partial}_1 \langle \widehat{\partial}_2 \langle \cdots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle \quad (3.5.20)$$

или — иначе

$$x = \widehat{\partial}_1 \widehat{\partial}_2 \cdots \widehat{\partial}_t \langle x \rangle = \widehat{\partial} \langle x \rangle. \quad (3.5.21)$$

Равенство (3.5.21) есть не что иное, как представление для точки x , обратное представлению (3.5.14).

Покажем теперь, как из представления (3.5.20) для точки x вытекает включение $x \in \Delta(\delta_*)$ из (3.5.8). По определению (3.3.17) обратных отображений ∂_i выполняются включения

$$\widehat{\partial}_i \langle \Delta^{\text{int}} \rangle \subset \Delta^{\text{int}} \quad (3.5.22)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Из представления (3.5.20) следует, что точку x можно записать в виде

$$x = \widehat{\partial}_1 \langle x_{(1)} \rangle, \quad (3.5.23)$$

где $x_{(1)} = \widehat{\partial}_2 \langle \cdots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle \in \Delta^{\text{int}}$.

Пусть $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$. Тогда

$$\widehat{\partial}_1 \langle \Delta^{\text{int}} \rangle = \widehat{\partial}_*^{k_1 l_1} \langle \Delta^{\text{int}} \rangle = \Delta_*^{k_1 l_1}.$$

Отсюда и представления (3.5.23) выводим включение

$$x \in \Delta(\delta_*^{k_1 l_1}). \quad (3.5.24)$$

Если же $\delta_1 = s_1$ — симметрия из S_Δ , то

$$\widehat{\partial}_1 \langle \Delta^{\text{int}} \rangle = s_1^{-1} \langle \Delta^{\text{int}} \rangle = \Delta^{\text{int}},$$

и снова выполняется включение

$$x \in \Delta(s_1), \quad (3.5.25)$$

т.к. областью определения $\Delta(s)$ для любой симметрии $s \in S_\Delta$ является весь треугольник Δ . В любом случае из (3.5.24) и (3.5.25) следует, что x содержится в области определения

$$x \in \Delta(\delta_1) \quad (3.5.26)$$

специализации δ_1 .

Из представления $x_{(1)} = \widehat{\partial}_2 \langle \cdots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle$ следует, что точку $x_{(1)}$, в свою очередь, можно записать в виде

$$x_{(1)} = \widehat{\partial}_2 \langle x_{(2)} \rangle,$$

где $x_{(2)} = \widehat{\partial}_3 \langle \cdots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle \in \Delta^{\text{int}}$. По тем же соображениям, что и выше, имеем

$$x_{(1)} \in \Delta(\delta_2). \quad (3.5.27)$$

Повторяя несколько раз указанные процессы, наконец, получаем включение

$$x_{(t-1)} \in \Delta(\delta_t). \quad (3.5.28)$$

Теперь заметим, что $x^{(i)} = x_{(i)}$ для $i = 1, \dots, t$. Действительно, используя представление (3.5.20), последовательно получаем

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle = \widehat{\delta}_1 \langle \widehat{\partial}_1 \langle \widehat{\partial}_2 \langle \dots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle = \widehat{\delta}_2 \langle \dots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle = x_{(1)}, \\ x^{(2)} &= \widehat{\delta}_2 \langle x^{(1)} \rangle = \widehat{\delta}_2 \langle \widehat{\partial}_2 \langle \dots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle \rangle = \widehat{\delta}_3 \langle \dots \langle \widehat{\partial}_t \langle x \rangle \rangle \rangle = x_{(2)}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Поэтому в силу включений (3.5.26), (3.5.27) и (3.5.28) определены следующие точки

$$x^{(1)} = \widehat{\delta}_1 \langle x \rangle, \quad x^{(2)} = \widehat{\delta}_2 \langle x^{(1)} \rangle, \quad \dots, \quad x^{(t)} = \widehat{\delta}_t \langle x^{(t-1)} \rangle, \quad (3.5.29)$$

откуда заключаем, что точка x попадает в область определения $\Delta(\delta_*)$ специализации δ_* отображения δ (см. формулу (2.2.19)). Поэтому определен образ δ_*x точки x , что, применяя (3.5.14), доказывает нужное равенство $\delta_*x = x$ из (3.5.9). \square

Предложение 3.5.1 Пусть $f(x) = \Delta_{\text{irr}}\text{-многочлен}$ (3.4.1) с коэффициентами a_2, a_1, a_0 из предложений 3.4.1 и 3.4.2 (см. (3.4.6)–(3.4.10)) и α – точка из области Δ^{int} , определенная в (3.4.2). Кроме того, пусть $M(a)$ – возвратная матрица (3.4.3) с параметром $a = (a_2, a_1, a_0)$ и $\delta_s = s\delta$ – отвечающее ей отображение (3.5.1) из полугруппы \mathcal{D} . Тогда точка α удовлетворяет условиям:

$$\alpha \in \Delta(\delta_{s*}), \quad (3.5.30)$$

где $\Delta(\delta_{s*})$ – область определения специализации $\delta_{s*} = s\delta_*$ отображения δ_s , задаваемой соотношением (3.5.1), и

$$\delta_{s*}\alpha = \alpha, \quad (3.5.31)$$

т.е. точка α допускается специализацией δ_{s*} и является неподвижной точкой $\delta_s\alpha = \alpha$ отображения δ_s .

Доказательство. По условию точка α удовлетворяет Δ_{irr} -условию и по построению (3.4.3) матрицы $M(a)$ отвечающий точке α вектор-столбец $\widehat{\alpha}$ является (3.4.4) собственным $M(a)\widehat{\alpha} = \lambda\widehat{\alpha}$ для матрицы $M(a)$ с собственным значением $\lambda = \theta \neq 0$. Поэтому можно применить вторую часть теоремы 3.5.1, из которой вытекают оба утверждения (3.5.30) и (3.5.31). \square

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – произвольная точка с координатами из \mathbb{R} . Обозначим через $F_x = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ расширение, являющееся полем и состоящее из всех чисел вида $\frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$, где f и g – произвольные многочлены над \mathbb{Q} и $g(x_1, x_2) \neq 0$. Определим степень (над \mathbb{Q}) точки x равенством

$$\deg(x) = \deg F_x,$$

где $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ – степень поля F_x .

Как следствие из теоремы 2.3.2, вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.5.2 Пусть точка x будет иррациональной (3.3.23). Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} , то ее степень

$$\deg(x) = 3. \quad (3.5.32)$$

3.6 Дифференцирования и нормирования звезды

3.6.1 Коммутативная диаграмма.

Далее будем предполагать, что специализация δ_* , задаваемая точкой α , имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \quad (3.6.1)$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_il_i}$ — специализации, определяемые соотношением (3.5.1). Заметим, что отображение (3.6.1) не содержит симметрии s из группы S_Δ .

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} \end{array} \quad (3.6.2)$$

Здесь использовали обозначения: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ — начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)} = \alpha$; $\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ — звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., \dots ; $\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ — звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$. Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (3.6.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \quad (3.6.3)$$

из p возвратных отображений δ_* . Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$ будут, согласно определению (3.3.8), нормированными звездами. Нижняя строка диаграммы (3.6.2) содержит обычные (см. определение 1.1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$, где $v = v^{(0)} = \mathbf{w}$; $v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ — производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., \dots ; $v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ — производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$. Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_p} = v^\sigma \quad (3.6.4)$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p$, ассоциированную с отображением δ_* из (3.5.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (3.6.2). Первая стрелка обозначает тождественное отображение id , т.е. $v = \text{id } \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Далее, выпишем матрицы $A^{(p)}$:

$A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ — матрица (3.3.5), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;

$A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ — матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., \dots ;

последняя матрица

$$A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \cdots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)}) \quad (3.6.5)$$

определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p-1)}$. Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)} : \mathbf{w}^{(i)} \rightsquigarrow v^{(i)} \quad (3.6.6)$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (3.6.2) для всех $i = 1, \dots, p$.

Из леммы 2.4.1 следует

Лемма 3.6.1 *Диаграмма (3.6.2) является коммутативной.*

□

3.6.2 Периодические звезды.

Из предложения 3.5.1 следует, что нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (3.6.2) будет симметричной

$$\mathbf{w} = \check{s}\mathbf{w}^{(p)} \quad (3.6.7)$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно преобразования \check{s} из группы S_{Δ} аффинных однородных симметрий (3.3.22) треугольника Δ . В этом случае будем говорить, что звезда \mathbf{w} *периодична* относительно отображения δ_s из (3.5.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (3.6.4), при этом $p > 0$ будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$. Заметим, что однородные преобразования \check{s} из (3.3.22) действуют на векторы звезды \mathbf{w} , а преобразования s из группы S_{Δ} аффинных неоднородных симметрий (3.3.20), (3.3.21) действуют на точки треугольника Δ . В (3.6.7) звезда \mathbf{w} — это совокупность трех векторов \mathbf{w}_0 , \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 .

3.6.3 Калибровочная матрица.

Поскольку $v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)}$ по формуле (3.6.6), то с помощью равенства (3.6.7) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)}\check{s}^{-1}\mathbf{w}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A}v, \quad (3.6.8)$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{s}^{-1}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $\mathbf{A} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (3.6.8) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (3.6.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v . По этой причине \mathbf{A} называется *калибровочной матрицей* периодической звезды v . Далее мы хотим воспользоваться равенством (3.6.8) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную

периодическую комбинированную последовательность $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ с периодом p , где

$$\xi_1 = \sigma_1, \xi_2 = \sigma_2, \dots, \xi_p = \sigma_p \check{s}^{-1}, \xi_{p+1} = \sigma_1, \dots$$

С помощью последовательности ξ определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для } n \geq 1, \quad (3.6.9)$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \dots$

Из теоремы 2.4.1 следует ее частный случай.

Теорема 3.6.1 *Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из (3.6.4) с периодом p , и пусть \mathbf{A} — ее калибровочная матрица, определенная в (3.6.8). Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \quad (3.6.10)$$

если $i = at + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$.

□

3.7 Приближения на торе

3.7.1 Генерации вкладывающихся разверток.

По определению (3.2.13) и теореме 3.2.3 производные звезды $v^{(i)}$ из (3.6.9) вкладываются $v^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. По соглашению (3.2.10) это означает, что порождаемые ими ядра или шестиугольники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ вкладываются в тор

$$T^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2. \quad (3.7.1)$$

Из построения (3.6.9) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha^- \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \dots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь

$$\alpha^- = -\alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (3.7.2)$$

— вектор сдвига $S = S_{\alpha^-}$ тора \mathbb{T}^2 из (3.2.7) и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (3.1.1). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + m_2^{(i)} \quad (3.7.3)$$

назовем *порядком* производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\text{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \pmod{\mathbb{Z}^2}; \quad j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1\}. \quad (3.7.4)$$

3.7.2 Спектральный радиус.

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения невырожденной комплексной 2×2 -матрицы A и

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} \quad (3.7.5)$$

— ее спектральный радиус. Рассмотрим наиболее интересный случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Такую матрицу A можно представить в виде произведения $A = M J M^{-1}$ диагональной матрицы $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и некоторой невырожденной комплексной матрицы M . Согласно (2.5.16) и (2.5.19) для любой степени $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$|A^n x|_1 \leq c_1(M) \varrho(A)^n |x|_1 \quad (3.7.6)$$

и

$$|A^n x|_2 \leq c(M)_2 \varrho(A)^n |x|_2 \quad (3.7.7)$$

соответственно для ромбической 1-метрики $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$ и евклидовой 2-метрики $|x|_2 = (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{1/2}$ с константами

$$c_1(M) = 8 \|M\|_{\max} \|M^{-1}\|_{\max}, \quad c_2(M) = \sqrt{2} c_1(M), \quad (3.7.8)$$

где $\| * \|_{\max}$ обозначает тах-норму (2.5.12).

3.7.3 Радиусы и площади производных шестиугольников.

Применим доказанные формулы (3.7.6), (3.7.7) к оценке метрических характеристик производных шестиугольников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (3.7.1). Как обычно, радиус множества $T \subset \mathbb{R}^2$ равен минимальному из радиусов окружностей, содержащих в себе указанное множество. В соответствии с метрикой $|x|_1$ и $|x|_2$ будем использовать два радиуса $r_1(T^{(i)})$ и $r_2(T^{(i)})$.

Лемма 3.7.1 *Если шестиугольник $T(v)$ порождается звездой $v = \{v_0, v_1, v_2\}$, то его радиусы $r_*(T(v))$ вычисляются по формуле*

$$r_*(T(v)) = \frac{1}{2} \max\{|v_0 + v_1 - v_2|_*, |v_0 - v_1 + v_2|_*, |-v_0 + v_1 + v_2|_*\}, \quad (3.7.9)$$

где $r_*(T(v))$ может быть любым из радиусов $r_1(T(v))$ или $r_2(T(v))$ в зависимости от выбранной метрики $|x|_*$, равной $|x|_1$ или $|x|_2$.

Доказательство. Из определения (3.2.6) следует, что шестиугольник $T(v)$ имеет вершины $v_k, v_{k'} + v_{k''}$, где $k = 0, 1, 2$, $0 \leq k' < k'' \leq 2$. Поэтому его центром будет

$$c(T(v)) = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + v_2). \quad (3.7.10)$$

Радиус же шестиугольника $r_*(T(v))$ равен максимальной длине векторов $w - c(T(v))$, где w — вершины $T(v)$. Отсюда выводим (3.7.9). □

Шестиугольник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}_{L^{(i)}}^2 = \mathbb{R}^2/L^{(i)}$ для решетки $L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, l_2^{(i)}]$ с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, 2$, где $v_k^{(i)}$ — лучи звезды $v^{(i)}$. Поэтому площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ равна

$$s(T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & l_{12}^{(i)} \\ l_{21}^{(i)} & l_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \quad (3.7.11)$$

— площади фундаментальной области решетки $L^{(i)}$, где $l_{kl}^{(i)}$ — координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, 2$.

Лемма 3.7.2 1. Если собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ у калибровочной матрицы \mathbf{A} звезды v из (3.6.8), то для радиусов $r_*(T^{(i)}) = r_1(T^{(i)})$ или $r_2(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ выполняется следующая оценка

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M) \varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \quad (3.7.12)$$

для $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$. Здесь константы $c_*(M)$ определены в (3.7.8) и $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус (3.7.5) матрицы \mathbf{A} ;

2. Площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (3.7.13)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, а площадь $s(T^{(b)})$ находится по формуле (3.7.11).

Доказательство. По теореме 3.6.1 звезды $v^{(i)}$ и $v^{(b)}$ связаны равенством $v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}$ и, значит, порождаемые ими шестиугольники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ и $T^{(b)} = T(v^{(b)})$ аффинно подобны $T(v^{(i)}) = \mathbf{A}^a T(v^{(b)})$. Отсюда, (3.7.6) и (3.7.7) следует неравенство (3.7.12). Формула (3.7.13) вытекает из подобия и равенства (3.7.11). Для доказательства же неравенств $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$ достаточно заметить, что по построению (3.6.5), (3.6.8) калибровочной матрицы \mathbf{A} она состоит из сомножителей A_*^{kl} , имеющих определители $0 < |\det A_*^{kl}| < 1$ согласно (3.3.5).

□

3.7.4 Порядковые матрицы.

Составим из порядков лучей звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (3.7.14)$$

и определим матрицы, соответствующие симметриям (3.3.20), (3.3.21) базисного треугольника:

$$\begin{aligned} R_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

и — дробно-линейным преобразованиям или дифференцированиям (3.3.15):

$$\begin{aligned} D_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1^{01} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2^{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

Матрицы (3.7.15) и (3.7.16) принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей $m_0^\sigma, m_1^\sigma, m_2^\sigma$ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \quad (3.7.17)$$

Здесь, согласно определению производной (3.1.1), имеем $M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2}$, если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ — дифференцирование, где в качестве специализации * выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (3.1.1) выполняется; и $M^\sigma(v) = M^\sigma = S_k$ в случае преобразования симметрии $\sigma = s$ звезды v , где $S_k = R_k$ или H_k — соответствующая матрица из (3.7.15).

Применяя лемму 2.5.3 приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.7.3 Пусть v — периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{s}^{-1}$ из (3.6.8), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (3.6.9). Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, то

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \quad (3.7.18)$$

Здесь $\mathbf{M} = SM^{(p)}$ с матрицей S из (3.7.15), соответствующей обратной симметрии для \check{s} , и

$$M^{(p)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \cdots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}),$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (3.7.17) специализации * определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.

□

Назовем \mathbf{M} *порядковой матрицей* периодической звезды v , отвечающей калибровочной матрице \mathbf{A} .

3.7.5 Рекуррентные последовательности.

Рассмотрим векторную рекуррентную последовательность

$$\mathbf{f}^{i+1} = M\mathbf{f}^i \quad (3.7.19)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $M — 3 \times 3$ -матрица,

$$\mathbf{f}^i = \begin{pmatrix} f_0^i \\ f_1^i \\ f_2^i \end{pmatrix}$$

и \mathbf{f}^0 — некоторый фиксированный столбец. Из определения (3.7.19) следует формула

$$\mathbf{f}^i = M^i \mathbf{f}^0. \quad (3.7.20)$$

Наша цель — найти рекуррентную зависимость для скалярной последовательности

$$f^i = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^i, \quad (3.7.21)$$

где $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)$ — строка, т.е. $f^i = f_0^i + f_1^i + f_2^i$ определяются как суммы элементов столбцов \mathbf{f}^i .

Для матрицы M запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0. \quad (3.7.22)$$

По теореме Гамильтона-Кэли (см., например, [13]) M удовлетворяет матричному уравнению $M^3 - b_2M^2 - b_1M - b_0E = 0$. Перепишем его в виде равенства $M^3 = b_2M^2 + b_1M + b_0E$. Умножая его на столбец \mathbf{f}^i , получаем

$$M^3 \mathbf{f}^i = b_2M^2 \mathbf{f}^i + b_1M \mathbf{f}^i + b_0 \mathbf{f}^i. \quad (3.7.23)$$

Теперь применяя к равенству (3.7.23) формулу (3.7.20), приходим к новой рекуррентной формуле

$$\mathbf{f}^{i+3} = b_2 \mathbf{f}^{i+2} + b_1 \mathbf{f}^{i+1} + b_0 \mathbf{f}^i \quad (3.7.24)$$

для столбцов \mathbf{f}^i . После этого умножим обе части равенства (3.7.24) на строку $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)$ и воспользуемся равенством (3.7.21). Таким образом, приходим к следующему результату.

Предложение 3.7.1 *Если числа f^i для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены равенством (3.7.21), то они удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$f^{i+3} = b_2 f^{i+2} + b_1 f^{i+1} + b_0 f^i, \quad (3.7.25)$$

где b_2, b_1, b_0 — коэффициенты характеристического многочлена (3.7.22) и начальные условия

$$f^2 = \mathbf{1} \cdot M^2 \mathbf{f}^0, \quad f^1 = \mathbf{1} \cdot M \mathbf{f}^0, \quad f^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^0 \quad (3.7.26)$$

задаются фиксированным столбцом \mathbf{f}^0 из (3.7.19).

□

3.7.6 Основная теорема (общий случай).

Важность последовательности определенных ранее в (3.7.1) производных шестиугольников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ — ядер индуцированных разбиений (3.2.11) — для $i = 0, 1, 2, \dots$ объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\text{Orb}_{\alpha^-}(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^2; \quad j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.7.27)$$

порождаемой сдвигом $S = S_{\alpha^-}$ тора \mathbb{T}^2 из (3.2.7) на вектор α^- , определенный в (3.7.2). Ограниченные шестиугольниками $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^2 выделяют из орбиты (3.7.27) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^2$.

Теорема 3.7.1 В условиях предложений 3.4.1 и 3.4.2 пусть v — периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей \mathbf{A} из (3.6.8), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (3.6.9). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^2$ орбиты (3.7.27) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (3.7.28)$$

в шестиугольник $T^{(i)}$ из (3.7.1), где $m^{(i)}$ — порядок (3.7.3) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (3.7.18). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (3.7.29)$$

2. Для радиуса $r_*(T^{(i)}) = r_1(T^{(i)})$ или $r_2(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$, выполняется следующее неравенство

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M)\varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}), \quad (3.7.30)$$

если собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ у калибровочной матрицы \mathbf{A} звезды v . Для начальных номеров b радиусы $r_*(T^{(b)})$ в (3.7.30) вычисляются по формуле (3.7.9). Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус калибровочной матрицы \mathbf{A} , и константы $c_*(M)$ определены в (3.7.8).

3. Площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (3.7.31)$$

где определитель $\det \mathbf{A}$ удовлетворяет неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и площади $s(T^{(b)})$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (3.7.11).

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 2.5.1, а утверждения 2 и 3 доказаны в лемме 3.7.2. □

3.8 Двумерная ядерная аппроксимация

3.8.1 Возвратные матрицы для кубических единиц и рекуррентные последовательности.

Перепишем звезды $v^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$ из (3.6.9) в виде столбцов

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} v_0^{(i)} \\ v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix}.$$

По определению имеем

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ -\alpha + e_2 \end{pmatrix} \quad (3.8.1)$$

или по-другому —

$$v^{(0)} = v = -\alpha E_0 + e_1 E_1 + e_2 E_2, \quad (3.8.2)$$

где

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом α, e_1, e_2 в (3.8.2) рассматриваются как коэффициенты.

Пусть $i = ap + b$ с фиксированным $0 \leq b < p$. Определим следующие сдвиги: $\vec{j} \equiv j + b \pmod{p}$ и число \vec{j} выбирается из интервала $[1, \dots, p]$; для порядковой матрицы $\mathbf{M} = D_p \cdots D_1$ из (3.7.18) с множителями $D_j = D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)})$ и $D_p = S D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)})$ соответственно для $j < p$ и $j = p$ полагаем $\vec{\mathbf{M}} = \vec{D}_p \cdots \vec{D}_1$, где $\vec{D}_j = D_{\vec{j}}$. Тогда в этих обозначениях из диаграммы (3.6.2) будет следовать формула

$$v^{(i)} = \vec{\mathbf{M}}^a v^{(b)}, \quad (3.8.3)$$

где

$$v^{(b)} = -\alpha E_0^{(b)} + e_1 E_1^{(b)} + e_2 E_2^{(b)}, \quad (3.8.4)$$

а столбцы $E_i^{(b)}$ вычисляются по формуле

$$E_i^{(b)} = D_*^{k_b l_b} \cdots D_*^{k_1 l_1} E_i^{(0)} \quad \text{для } 0 \leq b < p.$$

Здесь полагаем $E_i^{(0)} = E_i$ и $D_*^{k_j l_j}$ — порядковые матрицы из леммы 3.7.3. Тогда из (3.8.3) и (3.8.4) получаем

$$v^{(i)} = -\alpha \vec{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)} + e_1 \vec{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)} + e_2 \vec{\mathbf{M}}^a E_2^{(b)}. \quad (3.8.5)$$

Вводя следующие обозначения

$$\mathbf{Q}^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)}, \quad \mathbf{R}_1^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)}, \quad \mathbf{R}_2^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_2^{(b)}, \quad (3.8.6)$$

перепишем равенство (3.8.5) в виде

$$v^{(i)} = -\alpha \mathbf{Q}^a + e_1 \mathbf{R}_1^a + e_2 \mathbf{R}_2^a. \quad (3.8.7)$$

Пусть $\mathbf{1} = (1 1 1)$ — строка из (3.7.21). Тогда по теореме 3.7.1

$$v_{\min}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} + v_2^{(i)} \quad (3.8.8)$$

будет *минимальным вектором* (3.7.29), который в силу (3.8.7) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min}^{(i)} = -\alpha Q^a + e_1 R_1^a + e_2 R_2^a \quad (3.8.9)$$

с коэффициентами $Q^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^a$, $R_1^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_1^a$, $R_2^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_2^a$.

Из (3.8.6), (3.8.9) и предложения 3.7.1 следует, что Q^a , R_1^a , R_2^a являются *рекуррентными последовательностями* от параметра a (напомним, что параметр b фиксирован):

$$\begin{aligned} Q^{a+3} &= b_2 Q^{a+2} + b_1 Q^{a+1} + b_0 Q^a, \\ R_k^{a+3} &= b_2 R_k^{a+2} + b_1 R_k^{a+1} + b_0 R_k^a \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

для $k = 1, 2$. Здесь b_2 , b_1 , b_0 — коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\overrightarrow{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы \mathbf{M} , определенного в (3.7.22). Для последовательностей Q^a и R_k^a будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} Q^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^0 = \mathbf{1} \cdot E_0^{(b)}, \quad Q^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^1 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_0^{(b)}, \quad Q^2 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^2 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^2 E_0^{(b)}, \\ R_k^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^0 = \mathbf{1} \cdot E_k^{(b)}, \quad R_k^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^1 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_k^{(b)}, \quad R_k^2 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^2 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^2 E_k^{(b)} \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

для $k = 1, 2$.

3.8.2 Основная теорема для кубических единиц.

Общая теорема о ядерной аппроксимации 3.7.1 в применении к кубическим единицам допускает следующую конкретизацию.

Теорема 3.8.1 1. Для $i = ap + b$ и любого $0 \leq b < p$ вектор

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a \alpha_1 + R_1^a, -Q^a \alpha_2 + R_2^a) \quad (3.8.12)$$

обладает *минимальным свойством*:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } Q^a \geq 1. \quad (3.8.13)$$

Это означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < Q^a \quad (3.8.14)$$

в ядро $T^{(i)}$ — шестиугольник из (3.7.1).

2. Площадь $s(T^{(i)})$ ядра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (3.8.15)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющей неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и площади $s(T^{(b)})$ для начальных номером $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (3.7.11).

3. Если у калибровочной матрицы \mathbf{A} собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$|Q^a \alpha_1 - R_1^a| + |Q^a \alpha_2 - R_2^a| \leq c_1^{(b)} \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (3.8.16)$$

где

$$c_1^{(b)} = c_1(\vec{M}) r_1(v_{\min}^{(b)}).$$

4. Коэффициенты Q^a, R_1^a, R_2^a из (3.8.12) образуют рекуррентные последовательности от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ с уравнением (3.8.10) и начальными условиями (3.8.11).

5. Если $b = 0$, то начальные условия рекуррентных последовательностей Q^a, R_1^a, R_2^a принимают вид:

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl}, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2}, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3}, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2, \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{3 \times 3}$ — порядковая матрица из (3.7.18) и $\mathbf{M}^2 = (m_{kl}^2)_{3 \times 3}$ — ее квадрат; длина же $r_s(v_{\min}^{(0)})$ минимального вектора (3.8.8), входящего в константу $c_s^{(0)} = c_s(\vec{M}) r_s(v_{\min}^{(0)})$ из неравенства (3.8.16), равна

$$r_s(v_{\min}^{(0)}) = |3\alpha_1 - 1| + |3\alpha_2 - 1|. \quad (3.8.18)$$

Доказательство. 1. Формула (3.8.12) для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ вытекает из равенства (3.8.9), его свойство минимальности (3.8.13), (3.8.14) — из теоремы 3.7.1.

2. Формула (3.8.15) для площади шестиугольника $s(T^{(i)})$ была ранее доказана в лемме 3.7.2.

3. В левых частях неравенств (3.8.16) записана длина для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ из (3.8.12) в 1-метрике $|x|_1$. Поэтому указанные неравенства получаются как следствие из неравенств (3.7.30), в которых радиусы $r_*(T^{(i)})$ и $r_*(T^{(b)})$ заменены длинами минимальных векторов $r_1(v_{\min}^{(i)})$ и $r_1(v_{\min}^{(b)})$.

4. Рекуррентность коэффициентов Q^a, R_1^a, R_2^a из (3.8.12) была ранее доказана в (3.8.10) и (3.8.11).

5. Явные начальные условия (3.8.17) для рекуррентных последовательностей Q^a, R_1^a, R_2^a в случае $b = 0$ также вычисляются по формулам (3.8.11). По определению (3.8.8) начальный минимальный вектор

$$v_{\min}^{(0)} = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} + v_2^{(0)} = v_0 + v_1 + v_2$$

равен сумме лучей исходной звезды $v^{(0)} = v = \{v_0, v_1, v_2\}$. Поскольку по определению $v_0 = -\alpha$, $v_1 = e_1 - \alpha$, $v_2 = e_2 - \alpha$, то $v_{\min}^{(0)} = (1 - 3\alpha_1, 1 - 3\alpha_2)$, откуда вытекает равенство (3.8.18). \square

Свойство минимальности (3.8.13), (3.8.14) указывает на *наилучшее ядерное приближение* (karyon approximation). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ наилучшим образом приближаются к $0 \bmod \mathbb{Z}^2$ относительно $T^{(i)}$ -норм или ядерных норм (2.5.46), в качестве выпуклых тел для которой выбраны шестиугольники $T^{(i)}$ — ядра индуцированных разбиений двумерного тора \mathbb{T}^2 . Данные шестиугольники $T^{(i)}$ согласованы с орбитой точек $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ для $j = 0, 1, 2, \dots$ и, следовательно, напрямую согласованы с интересующей нас точкой $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. По этой причине *двумерные подходящие дроби*

$$\frac{R^a}{Q^a} = \left(\frac{R_1^a}{Q^a}, \frac{R_2^a}{Q^a} \right) \quad \longrightarrow \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.8.19)$$

естественно назвать *ядерными цепными дробями*.

Неравенства (3.8.16) записаны в фиксированной ромбической норме $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$. Можно выбрать и любую другую норму, например — круговую евклидову $|x|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$. Как уже отмечалось во введении, фиксированные нормы удобны для количественных оценок скорости приближений, но в их терминах не удается описывать наилучшие приближения.

Замечание 3.8.1 Далее мы покажем, как неравенства (3.8.16) можно перенести на другие числа кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$, отличные от единиц. В качестве примера будет рассмотрена совместная аппроксимация для кубических корней $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$.

3.9 Числовые примеры

3.9.1 Кубическая единица Рози.

В качестве (3.4.1) выберем многочлен

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1, \quad (3.9.1)$$

неприводимый над \mathbb{Q} . Он имеет вещественный корень $\theta = 0.54\dots$ Поскольку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta^{\text{int}}$, где $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$, то $f(x)$ является Δ_{irr} -многочленом. Данное число θ , являющееся кубической единицей, ранее появлялось при построении двумерных квазипериодических разбиений Рози [104], [16].

Согласно (3.4.3) набору коэффициентов $a = (a_2, a_1, a_0) = (1, 1, -1)$ многочлена (3.9.1) отвечает унимодулярная матрица Фробениуса

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9.2)$$

с определителем $\det M(a) = 1$. Так как коэффициенты $a = (a_2, a_1, a_0)$ удовлетворяют условиям $a_0 = -1$, $a_2 = 1$ и $a_1 \geq 1$ из предложения 3.4.1, то в силу (3.4.7) матрица $M(a)$ имеет разложение

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{21} \cdot \underline{20},$$

которое, вспоминая соглашение (3.4.5), можем записать в развернутом виде через симметрию треугольника и элементарные возвратные отображения

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{r}_1 \cdot \widehat{\delta}_2^{12} \cdot \widehat{\delta}_2^{02}. \quad (3.9.3)$$

Поэтому по лемме 3.7.3 порядковая матрица \mathbf{M} , определенная в (3.7.18), будет равна

$$\mathbf{M} = R_1 \cdot D_2^{12} \cdot D_2^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9.4)$$

Для матрицы \mathbf{M} найдем ее характеристический многочлен $ch_{\mathbf{M}}(x) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0$ из (3.7.22). В силу (3.9.4) будем иметь

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = x^3 - x^2 - x - 1 \quad (3.9.5)$$

и, значит, коэффициенты у многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ соответственно равны $b_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 1$.

Фиксируем параметр $b = 0$. Тогда из теоремы 3.8.1 следует, что Q^a , R_1^a , R_2^a являются рекуррентными последовательностями с одним и тем же уравнением

$$\begin{aligned} Q^{a+3} &= Q^{a+2} + Q^{a+1} + Q^a, \\ R_k^{a+3} &= R_k^{a+2} + R_k^{a+1} + R_k^a \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

для $k = 1, 2$. Последовательности (3.9.6) называются *рекуррентными последовательностями Трибоначчи*.

Принимая во внимание формулу (3.9.4) для порядковой матрицы \mathbf{M} и затем вычисляя ее квадрат

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

по формулам (3.8.17) находим для рекуррентных последовательностей (3.9.6) начальные условия:

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl} = 5, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2 = 9, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2} = 1, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2 = 3, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3} = 3, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2 = 5. \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

Последовательности (3.9.6) с начальными условиями (3.9.7) вместе составляют единую рекуррентную последовательность

$$R_1^a, R_2^a, Q^a : \quad 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \dots \quad (3.9.8)$$

Здесь последовательность R_1^a начинается с первого элемента из (3.9.8), R_2^a — со второго, а Q^a — с третьего.

Замечание 3.9.1 Интересно отметить, что последовательности Трибоначчи (3.9.6), (3.9.8) можно считать двумерным обобщением последовательностей Фибоначчи, определяемых рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} Q^{a+2} &= Q^{a+1} + Q^a, \\ R^{a+2} &= R^{a+1} + R^a \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

и имеющих вид

$$R^a, Q^a : \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots \quad (3.9.10)$$

Калибровочная матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{r}_2$ из (3.6.8) с симметрией поворота $\check{r}_2 = \check{r}_1^{-1}$ имеет два комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Поэтому можно применить неравенство (3.8.16) из теоремы 3.7.1. После вычислений приходим к следующей совместной аппроксимации с экспоненциальной оценкой для вещественного корня θ :

$$\theta^3 + \theta^2 + \theta - 1 = 0,$$

и его квадрата θ^2 .

Если θ — вещественный корень многочлена (3.9.1), то выполняется следующее неравенство

$$|Q^a\theta^2 - R_1^a| + |Q^a\theta - R_2^a| \leq c_1^{(0)}\varrho(\mathbf{A})^a \quad (3.9.11)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$. В неравенстве (3.9.11) коэффициенты R_1^a, R_2^a, Q^a образуют рекуррентную последовательность (3.9.8), константа $c_1^{(0)} < 4$ определена в (3.8.16) и спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < \frac{3}{4}$.

3.9.2 Кубические корни.

На примере кубических корней $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ покажем, как используя предыдущий метод можно неравенства (3.8.16) перенести на другие числа кубического поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, отличные от единиц.

Сначала заменим корни $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ точкой $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с координатами

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{4} - 1, \quad \alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Выбранная точка α будет уже принадлежать треугольной области Δ^{int} . В рассматриваемом случае нам непосредственно не дан многочлен $f(x)$ из (3.9.1). Минуя его перейдем сразу к аналогичной (3.9.2) матрице

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.12)$$

Она является унимодулярной матрицей с определителем $\det M(a) = 1$ и обладает свойством (3.4.4), т.е. $M(a)\hat{\alpha} = \lambda\hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и собственное значение $\lambda = \alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1$. Теперь нужно проверить, что $M(a)$ будет возвратной матрицей, т.е. что она допускает разложение в произведение симметрии треугольника (3.3.20), (3.3.21) и элементарных возвратных матриц (3.3.15). Действительно, такое разложение существует

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{r}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{12} \cdot \hat{\delta}_2^{02} \cdot (\hat{\delta}_1^{12})^2. \quad (3.9.13)$$

Оно аналогично разложению (3.9.3) и отличается от него последним множителем $(\hat{\delta}_1^{12})^2$. Используя разложение (3.9.13) и применяя лемму 3.7.3, находим порядковую матрицу (3.7.18) :

$$\mathbf{M} = R_1 \cdot D_2^{12} \cdot D_2^{02} \cdot (D_1^{12})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9.14)$$

с характеристическим многочленом

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0$$

из (3.7.22), равным

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = \det \begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -3 & x-1 \end{pmatrix} = x^3 - 3x^2 - 3x - 1. \quad (3.9.15)$$

Поэтому коэффициенты у многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ соответственно равны $b_2 = 3$, $b_1 = 3$, $b_0 = 1$.

Снова ради простоты фиксируем параметр $b = 0$ и применим теорему 3.8.1 для нахождения рекуррентных последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a , теперь с силу (3.9.15) имеющих уравнение

$$\begin{aligned} Q^{a+3} &= 3Q^{a+2} + 3Q^{a+1} + Q^a, \\ R_k^{a+3} &= 3R_k^{a+2} + 3R_k^{a+1} + R_k^a \end{aligned} \quad (3.9.16)$$

для $k = 1, 2$. Чтобы определить начальные условия для последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a , нам потребуется знать квадрат порядковой матрицы

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}. \quad (3.9.17)$$

Используя (3.9.14) и (3.9.17), по формулам (3.8.17) находим для последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a начальные условия:

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl} = 11, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2 = 43, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2} = 7, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2 = 25, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3} = 3, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2 = 11. \end{aligned} \quad (3.9.18)$$

Теперь вернемся к интересующим нас корням $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$. Покажем, что имеют место следующие неравенства

$$|Q^a \sqrt[3]{4} - R_1'^a| + |Q^a \sqrt[3]{2} - R_2'^a| \leq c_1^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a \quad (3.9.19)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ с константой $c_1^{(0)} < 6$ и $\varrho(\mathbf{A}) < 0.51$. Здесь коэффициенты Q^a , $R_1'^a$, $R_2'^a$ для $a = 0, 1, 2, \dots$ являются рекуррентными последовательностями с уравнением (3.9.16) и начальными условиями:

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= 11, & Q^2 &= 43, \\ R_1'^0 &= 4, & R_1'^1 &= 18, & R_1'^2 &= 68, \\ R_2'^0 &= 4, & R_2'^1 &= 14, & R_2'^2 &= 54. \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

Действительно, по (3.6.8) убеждаемся, что калибровочная матрица $\mathbf{A} = A^{(p)} \check{r}_2$ снова имеет два комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и поэтому в теореме 3.7.1 нужно применить неравенство (3.8.16) с константой $c_1^{(0)} < 6$ и $\varrho(\mathbf{A}) < 0.51$, из которого будет следовать неравенство (3.9.19). Вспоминая, что по условию $\alpha_1 = \sqrt[3]{4} - 1$ и $\alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1$, можем неравенство (3.8.16) переписать в виде (3.9.19) с новыми коэффициентами Q^a , $R_1'^a = Q^a + R_1^a$ и $R_2'^a = Q^a + R_2^a$. Ясно, что эти коэффициенты снова образуют рекуррентные последовательности с уравнением (3.9.16), но уже с начальными условиями (3.9.20), получающихся из условий (3.9.18).

Замечание 3.9.2 Лагариас [86] обнаружил связь наилучших приближений с рекуррентными последовательностями. В нашем случае также появляются рекуррентные последовательности (3.8.10), (3.9.6), (3.9.16) как следствие теоремы 3.7.1, когда переходим от ядерных $T^{(i)}$ -норм (гексагональных норм), например, к ромбической норме $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$, естественно теряя свойство быть наилучшими приближениями. При указанном переходе исчезает "геометрия" наилучших приближений.

После того, как рекуррентные последовательности найдены, по ним можно оценить скорость приближения (3.8.16). Так, рассматриваемое здесь кубическое

поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ является комплексным, то его основная единица будет числом Пизо, поэтому из (3.9.16) и (3.9.20) вытекает оценка (3.9.19), но с большей константой $c_s^{(0)}$. Среди описанных в предложениях 3.4.1 и 3.4.2 полей $\mathbb{Q}(\theta)$ также содержатся вещественные кубические поля. Для них непосредственный переход от рекуррентных последовательностей к неравенствам (3.8.16) уже не будет столь очевидным. Переход же от теоремы 3.7.1 к неравенствам (3.8.16) продолжает работать и для вещественных полей.

Те же аргументы, что и выше, позволяют заменить оценку (3.9.19) неравенством

$$\left| \sqrt[3]{4} - \frac{R_1'^a}{Q^a} \right| + \left| \sqrt[3]{2} - \frac{R_2'^a}{Q^a} \right| \leq \frac{c}{Q^{a \frac{3}{2}}} \quad (3.9.21)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ с константой $c > 0$, независящей от a . Если использовать, скажем для числа $\sqrt[3]{2}$, разложение в обычную цепную дробь, то числители и знаменатели подходящих дробей будут вычисляться по рекуррентному соотношению второго порядка с переменными коэффициентами. Поскольку для кубических иррациональностей полные разложения в цепные дроби не известны, то на этом пути удается находить лишь конечный набор неравенств. Обрезая же двумерную аппроксимацию (3.9.21), можно получить одномерную аппроксимацию, например, для кубического корня $\sqrt[3]{2}$:

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{R_2'^a}{Q^a} \right| \leq \frac{c}{Q^{a \frac{3}{2}}}. \quad (3.9.22)$$

В нашем приближении (3.9.21) используется рекуррентное соотношение (3.9.16) более высокого третьего порядка, но уже с постоянными коэффициентами, что позволяет получать бесконечные сходящиеся последовательности приближений (3.9.22). Другим методом разложение в цепную дробь для $\sqrt[3]{2}$ было получено в [90] без оценки скорости приближения. Кроме того, интересно сравнить нашу оценку (3.9.22) с неравенством Бейкера [54]:

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{P}{Q} \right| > \frac{10^{-6}}{Q^3},$$

имеющим место для всех целых чисел P и Q .

3.10 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Доказательство того, что приближения в теореме 3.8.1 являются наилучшими относительно $T^{(i)}$ -норм (2.5.46), опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [26]. Для вывода же количественных оценок (3.8.16) используются многомерные возвратные отображения [26]. Ранее

одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [66], [113], а двумерные возвратные отображения — для проверки периодичности разложений кубических корней [71].

Перечислим некоторые работы, в которых непосредственно рассматриваются разложения кубических иррациональностей в цепные дроби: периодичность разложений с помощью алгоритма Якоби [50], [51], [49], [53], [67], [99]; наилучшие приближения в евклидовой метрике алгоритмом Якоби-Перрона [78], [71], [112] для корней многочленов $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ из (3.4.1) с коэффициентами $a_2 = 0$ и $a_0 = -1$; а также кубические иррациональности многочленов $f(x)$, имеющие свободный член $a_0 = -1$ и комплексные корни [84], [64], [65].

Глава 4

Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в многомерные цепные дроби

Методом дифференцирования индуцированных разбиений торов получены периодические наилучшие ядерные приближения для алгебраических иррациональностей относительно полиэдральных норм — это основное геометрическое свойство ядерных приближений. Используя же d -мерные возвратные отображения, удалось найти и количественные оценки данных приближений.

4.1 Возвратные матрицы

4.1.1 Единицы алгебраических полей.

Пусть

$$f_a(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \quad (4.1.1)$$

будет многочленом степени $d + 1 \geq 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ и со свободным членом $a_0 = -1$. Такие $f_a(x)$ являются Δ -многочленами. По определению (3.4.1), (3.4.2) это означает, что многочлен $f_a(x)$ имеет вещественный корень $f_a(\theta) = 0$ в интервале $0 < \theta < 1$, удовлетворяющий условию

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \Delta^{\text{int}}, \quad (4.1.2)$$

где

$$\alpha_1 = \theta^d, \quad \alpha_2 = \theta^{d-1}, \quad \dots, \quad \alpha_d = \theta^1. \quad (4.1.3)$$

Если при этом многочлен $f_a(x)$ окажется неприводимым над полем рациональных чисел \mathbb{Q} , то скажем, что $f_a(x)$ — Δ_{irr} -многочлен. Следовательно, в данном случае его корень θ будет алгебраической иррациональностью степени $d + 1$.

Из Δ_{irr} -условия и ограничения на свободный член $a_0 = -1$ многочлена (4.1.1) вытекает, что его корень θ является единицей нормы

$$N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = (-1)^d \quad (4.1.4)$$

вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}(\theta)$ над полем \mathbb{Q} степени $d + 1$.

4.1.2 Возвратные матрицы для алгебраических единиц.

Каждому набору $a = (a_d, \dots, a_1, a_0)$ коэффициентов из (4.1.1) сопоставим квадратную матрицу Фробениуса

$$M(a) = M(a_d, \dots, a_1, a_0) = \begin{pmatrix} -a_d & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

порядка $d + 1$. Так как $\det M(a) = (-1)^{d+1} a_0 = \pm 1$, то $M(a)$ принадлежит группе $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Из определения (4.1.5) следует, что столбец

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы $M(a)$, т.е. выполняется матричное равенство

$$M(a)\hat{\alpha} = \lambda\hat{\alpha} \quad (4.1.6)$$

с собственным значением $\lambda = \theta$.

4.1.3 Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ полугруппу унимодулярных матриц из $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, отвечающих преобразованиям δ из полу группы \mathcal{D} . Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$ содержит группу \widehat{S}_Δ матриц, соответствующих аффинным симметриям S_Δ d -мерного симплекса Δ . Если матрица M принадлежит полу группе $\widehat{\mathcal{D}} \subset \text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, то по определению она допускает разложение в конечное произведение симметрий $\widehat{s} \in \widehat{S}_\Delta$ и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl} \in \widehat{\mathcal{D}}$, определенных в (2.2.6), (2.2.7). Произвольную матрицу M из полу группы $\widehat{\mathcal{D}}$ также будем называть *возвратной*. Из определения полу группы \mathcal{D} следует, что такая матрица M будет обязательно унимодулярной. Чтобы избежать длинных записей и сделать их более удобно читаемыми, воспользуемся следующими сокращениями:

$$\widehat{s} \rightarrow s, \quad (\widehat{\delta}_k^{kl})^n \rightarrow kl^n, \quad (\widehat{\delta}_l^{kl})^n \rightarrow lk^n \quad (4.1.7)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$. Например, разложение

$$M = \widehat{s} \cdot \widehat{\delta}_{k_1}^{k_1 l_1} \cdot (\widehat{\delta}_{l_2}^{k_2 l_2})^3$$

примет сокращенный вид

$$M = s \cdot k_1 l_1 \cdot l_2 k_2^3.$$

4.1.4 Разложение в произведение элементарных возвратных матриц.

Наша цель — показать, что матрицы $M(a)$ из (4.1.5), соответствующие многочленам $f_a(x)$ из (4.1.1), будут возвратными, т.е. $M(a)$ содержатся в полугруппе $\widehat{\mathcal{D}}$.

Предложение 4.1.1 Пусть $M(a)$ — матрицы (4.1.5) с натуральными элементами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ для $i = 1, \dots, d$ и $a_0 = -1$. Тогда в обозначениях (4.1.7) матрицы $M(a)$ имеют следующие разложения:

$$M(a) = F \cdot V(a), \quad (4.1.8)$$

где

$$F = s_\sigma \cdot \underline{d, d-1} \cdot \dots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} \quad (4.1.9)$$

— остав (frame) разложения (4.1.8), а

$$V(a) = 01^{a_d-1} \cdot 02^{a_{d-1}-1} \cdot \dots \cdot 0d^{a_1-1} \quad (4.1.10)$$

— динамическая или переменная часть разложения (4.1.8). В правой части равенства (4.1.9) использованы сокращения $\underline{d, k} = \widehat{\delta}_d^{kd}$ и s_σ — симметрия (2.1.10) для циклической подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & d \\ d & 0 & \dots & d-1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 4.1.1 Множитель F в $M(a)$ назван оставом разложения (4.1.8), поскольку он сохраняется при изменениях параметров a_1, \dots, a_d .

Доказательство. В силу (2.2.6) записываем

$$\underline{d}l = \widehat{\delta}_d^{ld} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1}_l & E_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

для $0 < l < d$, где

$$\mathbf{1}_l = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— $2 \times (d-1)$ -матрица с единичным столбцом на l месте. Из (4.1.11) следует правило умножения

$$\widehat{\delta}_d^{ld} \cdot \widehat{\delta}_d^{l'd} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1}_l - \mathbf{1}_{l'} & E_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

и формула коммутативности

$$\widehat{\delta}_d^{ld} \cdot \widehat{\delta}_d^{l'd} = \widehat{\delta}_d^{l'd} \cdot \widehat{\delta}_d^{ld} \quad (4.1.13)$$

для любых $0 < l, l' < d$. Из (4.1.12) и (4.1.13) находим произведение

$$\underline{d, d-1} \cdot \underline{d, d-2} \cdot \dots \cdot \underline{d, 1} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1} & E_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.14)$$

с $2 \times (d-1)$ -матрицей $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. По определению (2.2.7) находим

$$\underline{d, 0} = \widehat{\delta}_d^{0d} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ \mathbf{1} & E'_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.15)$$

с блоком $E'_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Соединяя (4.1.14) с (4.1.15) получаем

$$\underline{d, d-1} \cdot \dots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ 0 & E'_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.16)$$

По определению симметрии

$$\widehat{s}_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.17)$$

имеют блоки

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где S_{11} и S_{22} — квадратные матрицы размеров $d-1$ и 2 соответственно. Пере-множая равенства (4.1.16) и (4.1.17) получаем для остава (4.1.9) равенство

$$F = \widehat{s}_1 \cdot \underline{d, d-1} \cdot \dots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.18)$$

Таким образом, остав F равен

$$M(1, \dots, 1, -1) = F \quad (4.1.19)$$

— матрице $M(a)$ из (4.1.5) с элементами $a_d = 1, \dots, a_1 = 1, a_0 = -1$.

Переходим к вычислению динамической $V(a)$ части (4.1.10) разложения (4.1.8). По определению имеем

$$\underline{0l} = \widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -1_l & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.20)$$

для $0 < l \leq d$, где $1_l = (0 \dots 1 \dots 0)$ — строка с единицей на l месте. Из (4.1.20) следует правило умножения

$$\widehat{\delta}_0^{0l} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l'} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -1_l - 1_{l'} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.21)$$

и формула коммутативности

$$\widehat{\delta}_0^{0l} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l'} = \widehat{\delta}_0^{0l'} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l} \quad (4.1.22)$$

для любых $0 < l, l' \leq d$. Из (4.1.21) и (4.1.22) находим произведение

$$\underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \dots \cdot \underline{0d}^{b_d} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.23)$$

— матрица со строкой $b = (b_1 b_2 \dots b_d)$. Используя (4.1.23) получаем матрицу

$$F \cdot \underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \dots \cdot \underline{0d}^{b_d} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.24)$$

с блоками

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -1 - b_1 & \dots & -1 - b_{d-1} & -1 - b_d \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = (0 \ \dots \ 0 \ 1), \quad M_{22} = (0),$$

где M_{11} — квадратная матрица размера d . Если принять во внимание равенство $F = M(1, \dots, 1, -1)$ и обозначение (4.1.5), то соотношение (4.1.24) можно переписать в виде рекуррентной формулы

$$M(1 + b_1, \dots, 1 + b_d, -1) = M(1, \dots, 1, -1) \cdot \underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \dots \cdot \underline{0d}^{b_d}. \quad (4.1.25)$$

Подставляя в нее $b_1 = a_d - 1$, $b_2 = a_{d-1} - 1, \dots$, $b_d = a_1 - 1$ и используя для произведения (4.1.23) обозначение (4.1.10), получаем нужное разложение (4.1.8). \square

4.2 Неподвижные точки возвратных матриц

4.2.1 Соответствие и специализации.

Выписанные ранее разложения матрицы $M(a)$ в виде произведения симметрии \widehat{s} и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl}$ задают соответствие

$$M(a) \longrightarrow \delta_s, \quad (4.2.1)$$

где отображение $\delta_s = s\delta$ принадлежит расширенной полугруппе \mathcal{D} и равно композиции симметрии s и некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$. Более того, соответствие (4.2.1) определяет также и специализацию δ_* второго отображения: δ равно произведению элементарных возвратных отображений δ^{kl} , а его специализация δ_* равна произведению специализаций δ_*^{kl} , определяемых элементарными возвратными матрицами $\widehat{\delta}^{kl}$, содержащимися в правой части разложений матрицы $M(a)$.

4.2.2 Неподвижные точки.

Предложение 4.2.1 Пусть $f(x) = \Delta_{\text{irr}}\text{-многочлен}$ (4.1.1) с коэффициентами a_d, \dots, a_1, a_0 из предложения 4.1.1 и α — точка из области Δ^{int} , определенная в (4.1.2). Кроме того, пусть $M(a)$ — возвратная матрица (4.1.5) с параметром $a = (a_d, \dots, a_1, a_0)$ и $\delta_s = s\delta$ — отвечающее ей отображение (4.2.1) из полугруппы \mathcal{D} . Тогда точка α удовлетворяет условиям:

$$\alpha \in \Delta(\delta_{s*}), \quad (4.2.2)$$

где $\Delta(\delta_{s*})$ — область определения специализации $\delta_{s*} = s\delta_*$ отображения δ_s , задаваемой соотношением (4.2.1), и

$$\delta_{s*}\alpha = \alpha, \quad (4.2.3)$$

т.е. точка α допускается специализацией δ_{s*} и является неподвижной точкой $\delta_s\alpha = \alpha$ отображения δ_s .

Доказательство. По условию точка α удовлетворяет Δ_{irr} -условию и по построению (4.1.5) матрицы $M(a)$ отвечающий точке α вектор-столбец $\widehat{\alpha}$ является (4.1.6) собственным $M(a)\widehat{\alpha} = \lambda\widehat{\alpha}$ для матрицы $M(a)$ с собственным значением $\lambda = \theta \neq 0$. Поэтому можно применить многомерный вариант второй части теоремы 3.5.1, из которой вытекают оба утверждения (4.2.2) и (4.2.3). \square

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ — произвольная точка с координатами из \mathbb{R} . Обозначим через $F_x = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_d)$ расширение поля рациональных чисел \mathbb{Q} добавлением к нему чисел x_1, \dots, x_d . Данное расширение состоит из всех чисел вида $\frac{f(x_1, \dots, x_d)}{g(x_1, \dots, x_d)}$, где f и g являются многочленами от d переменных с коэффициентами из поля \mathbb{Q} . Множество F_x также будет полем. Определим степень (над полем \mathbb{Q}) точки x равенством $\deg(x) = \deg F_x$, где $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ — степень поля F_x над \mathbb{Q} . Если $\deg(x) = 1$, то, очевидно, точка x имеет координаты из \mathbb{Q} . Из теоремы 2.3.2 следует

Теорема 4.2.1 Пусть точка x будет иррациональной (2.2.24). Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} , то ее степень $\deg(x) = d + 1$.

Замечание 4.2.1 Теорема 4.2.1 представляет собою многомерное обобщение теоремы Лагранжа на алгебраические иррациональности степени $d \geq 3$.

4.3 Порядковые и калибровочные матрицы

4.3.1 Порядковые матрицы для алгебраических единиц.

Воспользуемся формулой (2.5.39) и вычислим порядковую матрицу \mathbf{M} в явном виде через коэффициенты многочлена $f_a(x)$, определенного в (4.1.1).

По определению (2.5.34) для $0 \leq k \leq d - 1$

$$D_d^{kd} = E + E_{kd}, \quad \text{где} \quad E_{kd} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

— квадратная матрица порядка $(d + 1)$ с выделенной k -ой строкой. Принимая во внимание формулы умножения для матриц E_{kd} :

$$E_{kd} \cdot E_{k'd} = 0 \quad \text{для любых } 0 \leq k, k' \leq d - 1, \quad (4.3.2)$$

находим произведение

$$D_d^{d-1,d} \cdot \dots \cdot D_d^{1,d} \cdot D_d^{0,d} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.3)$$

где $E_{11} = E_d$ — единичная матрица порядка d и

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

— столбец высоты d .

По определению (2.5.33) для циклической подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & d \\ d & 0 & \dots & d-1 \end{pmatrix}$$

порядковая матрица S_σ имеет вид

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Поэтому из равенств (4.3.3) и (4.3.4) получаем

$$\mathbf{M}_f = S_\sigma \cdot D_d^{d-1,d} \cdot \dots \cdot D_d^{1,d} \cdot D_d^{0,d} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Здесь \mathbf{M}_f обозначает произведение матриц из (4.3.5), а блоки D_{ij} соответственно равны

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \\ D_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = (1). \end{aligned}$$

По определению (2.5.34) для $0 < l \leq d$ имеем

$$D_0^{0l} = E + E_{l0}, \quad \text{где} \quad E_{l0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

— квадратная матрица порядка $(d+1)$ с выделенной l -ой строкой. Для матриц E_{l0} и $E_{l'0}$ с любыми индексами $0 < l, l' \leq d$ также выполняется формула умножения $E_{l0} \cdot E_{l'0} = 0$, аналогичная формуле (4.3.2). Поэтому можем записать

$$(D_0^{0l})^{b_l} = E + b_l E_{l0} \quad (4.3.7)$$

с любым показателем $b_l = 0, 1, 2, \dots$. Применяя формулу (4.3.7), вычисляем произведение

$$\mathbf{M}_v(b) = (D_0^{01})^{b_1} \cdot (D_0^{02})^{b_2} \cdot \dots \cdot (D_0^{0d})^{b_d} = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

Здесь $\mathbf{M}_v(b)$ — произведение матриц из (4.3.7), зависящее от $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$, и

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$$

— соответствующий b столбец высоты d . Введем обозначение $\mathbf{M}(b) = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_v(b)$. Тогда в силу формул (4.3.5) и (4.3.8) произведение $\mathbf{M}(b)$ можно записать в явном виде

$$\mathbf{M}(b) = \begin{pmatrix} b_d & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ b_d + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ b_d + b_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & & & \\ b_d + b_{d-2} & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ b_d + b_{d-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.9)$$

Теорема 4.3.1 Порядковая матрица \mathbf{M} , определенная в (2.5.39) для периодической звезды v и отвечающая калибровочной матрице \mathbf{A} , допускает следующее представление

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_v(a) \quad (4.3.10)$$

через остов \mathbf{M}_f — постоянную матрицу (4.3.5) и

$$\mathbf{M}_v(a) = (D_0^{01})^{a_d-1} \cdot (D_0^{02})^{a_{d-1}-1} \cdot \dots \cdot (D_0^{0d})^{a_1-1} \quad (4.3.11)$$

— динамическую матрицу, зависящую от коэффициентов $a_i = 1, 2, 3, \dots$ многочлена $f_a(x)$ из (4.1.1). В явном виде порядковая матрица (4.3.10) записывает как

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 + a_d - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & & & \\ a_1 + a_3 - 2 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ a_1 + a_2 - 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.12)$$

Доказательство вытекает из формулы (2.5.39) для порядковой матрицы \mathbf{M} и равенства (4.3.9), если в нем сделать замену

$$b_1 = a_d - 1, \quad b_2 = a_{d-1} - 1, \quad b_d = a_1 - 1.$$

□

4.3.2 Калибровочные матрицы для алгебраических единиц.

Применим явную формулу (4.3.12) порядковой матрицы \mathbf{M} и вычислим через ее коэффициенты калибровочную матрицу \mathbf{A} , определенную в (2.4.11).

Если

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

— исходная звезда, то по определению (2.5.39) порядковой матрицы \mathbf{M} производная звезда

$$\hat{v}' = \hat{v}^{(p)} = \widehat{\mathbf{A}}\hat{v} = \begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_d \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

вычисляется по формуле

$$\hat{v}' = \mathbf{M}\hat{v}. \quad (4.3.14)$$

Согласно (2.4.2) исходная звезда \hat{v} имеет лучи

$$v_0 = -\alpha, \quad v_1 = e_1 - \alpha, \quad \dots, \quad v_d = e_d - \alpha \quad (4.3.15)$$

и ей отвечает ортонормированный репер

$$w_1 = v_1 - v_0 = e_1, \quad \dots, \quad w_d = v_d - v_0 = e_d.$$

Репер производной звезды \widehat{v}' запишем в следующем виде

$$\widehat{w}' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 - v'_0 \\ \vdots \\ v'_d - v'_0 \end{pmatrix} = W\widehat{v}' \quad (4.3.16)$$

с $d \times (d+1)$ -матрицей

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (4.3.16) значение \widehat{v}' из формулы (4.3.14) получаем представление

$$\widehat{w}' = W\mathbf{M}\widehat{v} \quad (4.3.17)$$

производного репера \widehat{w}' через исходную звезду \widehat{v} и порядковую матрицу \mathbf{M} .

Применим (4.3.15) и разобьем звезду \widehat{v} на единичные столбцы

$$\widehat{v} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha + e_d \end{pmatrix} = (-\alpha_1 e_1 E_0 + e_1 E_1) + \dots + (-\alpha_d e_d E_0 + e_d E_d). \quad (4.3.18)$$

Здесь использованы координаты у вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } i = 1, \dots, d \quad (4.3.19)$$

— столбцы высоты $d+1$, при этом в столбцах E_i единица стоит на i -ом месте и нумерация элементов в E_i начинается с 0.

После подстановки \widehat{v} из (4.3.18) в формулу (4.3.17) получим разложение производного репера

$$\widehat{w}' = e_1 \mathbf{A}^1 + \dots + e_d \mathbf{A}^d \quad (4.3.20)$$

на столбцы

$$\mathbf{A}^1 = W\mathbf{M}(-\alpha_1 E_0 + E_1), \quad \dots, \quad \mathbf{A}^d = W\mathbf{M}(-\alpha_d E_0 + E_d) \quad (4.3.21)$$

высоты d . Перепишем репер (4.3.20) в виде

$$\widehat{w}' = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (4.3.22)$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1 | \dots | \mathbf{A}^d) \quad (4.3.23)$$

из столбцов (4.3.21) и базисным столбцом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$. Тогда из равенства (4.3.22) будет следовать, что \mathbf{A} есть ни что иное, как калибровочная матрица (2.4.11).

Теорема 4.3.2 Пусть \mathbf{M} — порядковая матрица (2.5.39), отвечающая калибровочной матрице \mathbf{A} из (2.4.11), имеет коэффициенты

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & \dots & m_{0d} \\ m_{10} & m_{11} & \dots & m_{1d} \\ \dots & & & \\ m_{d0} & m_{d1} & \dots & m_{dd} \end{pmatrix} \quad (4.3.24)$$

и пусть

$$m_0 = \sum_{k=0}^d m_{0k}, \quad m_1 = \sum_{k=0}^d m_{1k}, \quad \dots, \quad m_d = \sum_{k=0}^d m_{dk} \quad (4.3.25)$$

— суммы ее строк. Тогда столбцы \mathbf{A}^j калибровочной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1 | \dots | \mathbf{A}^d)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} -(m_1 - m_0)\alpha_1 + (m_{11} - m_{01}) \\ -(m_2 - m_0)\alpha_1 + (m_{21} - m_{01}) \\ \dots \\ -(m_d - m_0)\alpha_1 + (m_{d1} - m_{01}) \end{pmatrix}$$

.....

$$\mathbf{A}^d = \begin{pmatrix} -(m_1 - m_0)\alpha_d + (m_{1d} - m_{0d}) \\ -(m_2 - m_0)\alpha_d + (m_{2d} - m_{0d}) \\ \dots \\ -(m_d - m_0)\alpha_d + (m_{dd} - m_{0d}) \end{pmatrix}. \quad (4.3.26)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие $(d+1) \times d$ -матрицы:

$$E_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

...

$$E_0^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.27)$$

С помощью матриц (4.3.27) калибровочную матрицу \mathbf{A} , используя определение (4.3.23) и (4.3.21), можно записать более компактно $\mathbf{A} = W\mathbf{M}\mathbf{V}$, где W — матрица из равенства (4.3.16) и

$$V = V_\alpha = (-\alpha_1 E_0^1 + E_1^1) + \dots + (-\alpha_d E_0^d + E_1^d)$$

— $(d+1) \times d$ -матрица. Отсюда и (4.3.24) следуют формулы (4.3.26) для столбцов \mathbf{A}^j калибровочной матрицы \mathbf{A} .

□

4.4 Рекуррентные последовательности

Здесь устанавливается связь между векторными и скалярными рекуррентными последовательностями. Пусть дана векторная рекуррентная последовательность

$$\mathbf{f}^{i+1} = M\mathbf{f}^i \quad (4.4.1)$$

с нумерацией $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь M — квадратная матрица порядка $d + 1$,

$$\mathbf{f}^i = \begin{pmatrix} f_0^i \\ f_1^i \\ \vdots \\ f_d^i \end{pmatrix}$$

и \mathbf{f}^0 — некоторый фиксированный столбец. Из определения (4.4.1) следует формула

$$\mathbf{f}^i = M^i \mathbf{f}^0. \quad (4.4.2)$$

Наша цель — используя (4.4.1) найти формулу рекуррентной зависимости для скалярной последовательности

$$f^i = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^i, \quad (4.4.3)$$

где $\mathbf{1} = (1 1 \dots 1)$ — строка длины $d + 1$, т.е.

$$f^i = f_0^i + f_1^i + \dots + f_d^i$$

определяются как суммы элементов столбцов \mathbf{f}^i .

Для матрицы M запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0. \quad (4.4.4)$$

По теореме Гамильтона-Кэли M удовлетворяет матричному уравнению

$$M^{d+1} - b_d M^d - \dots - b_1 M - b_0 E = 0. \quad (4.4.5)$$

Перепишем (4.4.5) в виде равенства

$$M^{d+1} = b_d M^d + \dots + b_1 M + b_0 E.$$

Умножая его на столбец \mathbf{f}^i , получаем равенство

$$M^{d+1} \mathbf{f}^i = b_d M^d \mathbf{f}^i + \dots + b_1 M \mathbf{f}^i + b_0 \mathbf{f}^i. \quad (4.4.6)$$

Теперь применяем к равенству (4.4.6) формулу (4.4.2) и приходим к новой рекуррентной формуле

$$\mathbf{f}^{i+d+1} = b_d \mathbf{f}^{i+d} + \dots + b_1 \mathbf{f}^{i+1} + b_0 \mathbf{f}^i \quad (4.4.7)$$

для столбцов \mathbf{f}^i . После этого умножим обе части равенства (4.4.7) на строку $\mathbf{1}$ и воспользуемся равенством (4.4.3). Таким образом, приходим к следующему результату.

Предложение 4.4.1 Если числа f^i для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены равенством (4.4.3), то они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f^{i+d+1} = b_d f^{i+d} + \dots + b_1 f^{i+1} + b_0 f^i, \quad (4.4.8)$$

где b_d, \dots, b_1, b_0 — коэффициенты характеристического многочлена (4.4.4) и начальные условия

$$f^d = \mathbf{1} \cdot M^d \mathbf{f}^0, \dots, f^1 = \mathbf{1} \cdot M \mathbf{f}^0, f^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^0 \quad (4.4.9)$$

задаются матрицей M и фиксированным столбцом \mathbf{f}^0 из (4.4.1).

□

4.5 Многомерная ядерная аппроксимация

4.5.1 Основная теорема (общий случай).

Важность последовательности определенных ранее в (2.5.2) производных многогранников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ — ядер индуцированных разбиений (1.2.26) — объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\text{Orb}_{\alpha^-}(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d; j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.5.1)$$

порождаемой сдвигом $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ на вектор $\alpha^- = -\alpha$. Ограниченные многогранниками $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^d выделяют из орбиты (4.5.1) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^d$.

Теорема 4.5.1 Пусть v — периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей \mathbf{A} из (2.4.11), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (2.4.14). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d$ орбиты (4.5.1) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (4.5.2)$$

в многогранник $T^{(i)}$ из (2.5.2), где $m^{(i)}$ — порядок (2.5.5) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (2.5.38). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (4.5.3)$$

2. Для радиуса $r_*(T^{(i)}) = r_1(T^{(i)})$ или $r_2(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, выполняется следующее неравенство

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M)\varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \quad (4.5.4)$$

в случае, если у калибровочной матрицы \mathbf{A} собственные значения $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$. Для начальных номеров b радиусы $r_*(T^{(b)})$ в (4.5.4) вычисляются по формуле (2.5.20). Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус (2.5.7) калибровочной матрицы \mathbf{A} , и константы $c_*(M)$ определены в (2.5.16), (2.5.19).

3. Объем $\text{vol } T^{(i)}$ многогранника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{vol } T^{(b)}, \quad (4.5.5)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и объемы $\text{vol } T^{(b)}$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (2.5.23).

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2.5.1 заменой вектора сдвига α на вектор $\alpha^- = -\alpha$.

□

4.5.2 Возвратные матрицы для алгебраических единиц и рекуррентные последовательности.

Перепишем звезды

$$v^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$$

из (2.4.14) в виде столбцов

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} v_0^{(i)} \\ v_1^{(i)} \\ \vdots \\ v_d^{(i)} \end{pmatrix}.$$

По определению имеем

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ \vdots \\ v_d^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha + e_d \end{pmatrix} \quad (4.5.6)$$

или по-другому —

$$v^{(0)} = v = -\alpha E_0 + e_1 E_1 + \dots + e_d E_d, \quad (4.5.7)$$

где E_i — столбцы (4.3.19). При этом векторы α, e_1, \dots, e_d в (4.5.7) рассматриваются как коэффициенты.

Пусть $i = ap + b$ с фиксированным $0 \leq b < p$. Определим следующие сдвиги:

$$\overrightarrow{j} \equiv j + b \pmod{p}$$

и число \overrightarrow{j} выбирается из интервала $[1, \dots, p]$; для порядковой матрицы $\mathbf{M} = D_p \cdots D_1$ из (2.5.39), (2.5.40) с множителями

$$D_j = D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}), \quad D_p = S D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)})$$

соответственно для $j < p$ и $j = p$ полагаем

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{D}_p \cdots \vec{D}_1,$$

где $\vec{D}_j = D_j^{\rightarrow}$. Тогда в этих обозначениях из диаграммы (2.4.2) будет следовать формула

$$v^{(i)} = \vec{\mathbf{M}}^a v^{(b)}, \quad (4.5.8)$$

аналогичная (2.4.15), при этом

$$v^{(b)} = -\alpha E_0^{(b)} + e_1 E_1^{(b)} + \dots + e_d E_d^{(b)}, \quad (4.5.9)$$

а столбцы $E_i^{(b)}$ вычисляются по формуле

$$E_i^{(b)} = D_*^{k_b l_b} \cdots D_*^{k_1 l_1} E_i^{(0)} \quad \text{для } 0 \leq b < p.$$

Здесь полагаем $E_i^{(0)} = E_i$ и $D_*^{k_j l_j}$ — порядковые матрицы из (2.5.40). Тогда из (4.5.8) и (4.5.9) получаем равенство

$$v^{(i)} = -\alpha \vec{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)} + e_1 \vec{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)} + \dots + e_d \vec{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}. \quad (4.5.10)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{Q}^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)}, \quad \mathbf{R}_1^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)}, \dots, \quad \mathbf{R}_d^a = \vec{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}, \quad (4.5.11)$$

перепишем равенство (4.5.10) в виде

$$v^{(i)} = -\alpha \mathbf{Q}^a + e_1 \mathbf{R}_1^a + \dots + e_d \mathbf{R}_d^a. \quad (4.5.12)$$

Пусть $\mathbf{1} = (1 1 \dots 1)$ — строка из (4.4.3). Тогда по теореме 4.5.1

$$v_{\min}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} + \dots + v_d^{(i)} \quad (4.5.13)$$

будет *минимальным вектором* (4.5.3), который в силу (4.5.12) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min}^{(i)} = -\alpha Q^a + e_1 R_1^a + \dots + e_d R_d^a \quad (4.5.14)$$

с коэффициентами $Q^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^a, R_1^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_1^a, \dots, R_d^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_d^a$.

Из (4.5.11), (4.5.14) и предложения 4.4.1 следует, что Q^a, R_1^a, \dots, R_d^a являются *рекуррентными последовательностями* от параметра a (напомним, что параметр b фиксирован):

$$\begin{aligned} Q^{a+d+1} &= b_d Q^{a+d} + \dots + b_1 Q^{a+1} + b_0 Q^a, \\ R_k^{a+d+1} &= b_d R_k^{a+d} + \dots + b_1 R_k^{a+1} + b_0 R_k^a \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

для $k = 1, \dots, d$. Здесь b_d, \dots, b_1, b_0 — коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\vec{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы \mathbf{M} , определенного в (4.4.4). Для последовательностей Q^a и R_k^a будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} Q^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^0 = \mathbf{1} \cdot E_0^{(b)}, \quad Q^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^1 = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}} E_0^{(b)}, \dots, \quad Q^d = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^d = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_0^{(b)}, \\ R_k^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^0 = \mathbf{1} \cdot E_k^{(b)}, \quad R_k^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^1 = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}} E_k^{(b)}, \dots, \quad R_d^k = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^d = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_k^{(b)} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

для $k = 1, \dots, d$.

4.5.3 Основная теорема для алгебраических единиц.

Общая теорема 4.5.1 о ядерной аппроксимации в применении к алгебраическим единицам допускает следующую конкретизацию.

Теорема 4.5.2 1. Для $i = ap + b$ и любого $0 \leq b < p$ вектор

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a \alpha_1 + R_1^a, \dots, -Q^a \alpha_d + R_d^a) \quad (4.5.17)$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \text{ с минимальным целым } Q^a \geq 1. \quad (4.5.18)$$

Свойство (4.5.18) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \text{ для всех } 1 \leq j < Q^a \quad (4.5.19)$$

в ядро $T^{(i)}$ — многогранник из (2.5.2).

2. Объем $\text{vol } T^{(i)}$ ядра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{vol } T^{(b)}, \quad (4.5.20)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и объемы $\text{vol } T^{(b)}$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (2.5.23).

3. В случае калибровочной матрицы \mathbf{A} с простым спектром $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$ имеют место неравенства:

$$|Q^a \alpha_1 - R_1^a| + \dots + |Q^a \alpha_d - R_d^a| \leq c_1^{(b)} \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (4.5.21)$$

где $c_1^{(b)} = c_1(\overrightarrow{M}) r_1(v_{\min}^{(b)})$ и $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус (2.5.7) матрицы \mathbf{A} .

4. Коэффициенты Q^a, R_1^a, \dots, R_d^a из (4.5.17) образуют рекуррентные последовательности от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ с уравнением (4.5.15) и начальными условиями (4.5.16).

5. Если $b = 0$, то начальные условия рекуррентных последовательностей Q^a, R_1^a, \dots, R_d^a принимают вид:

$$\begin{aligned} Q^0 &= d+1, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl}, \dots, & Q^d &= \sum_{k,l} m_{kl}^d, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k1}, \dots, & R_1^d &= \sum_k m_{k1}^d, \\ &\dots\dots\dots \\ R_d^0 &= 1, & R_d^1 &= \sum_k m_{kd}, \dots, & R_d^d &= \sum_k m_{kd}^d, \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{(d+1) \times (d+1)}$ — порядковая матрица из (2.5.39), имеющая нумерацию строк и столбцов $0, 1, \dots, d$, и $\mathbf{M}^i = (m_{kl}^i)_{(d+1) \times (d+1)}$ обозначает i -ую степень матрицы \mathbf{M} ; длина же $r_1(v_{\min}^{(0)})$ минимального вектора (4.5.13), входящая в константу $c_1^{(0)} = c_1(M) r_1(v_{\min}^{(0)})$ из неравенства (4.5.21), равна

$$r_1(v_{\min}^{(0)}) = |(d+1)\alpha_1 - 1| + \dots + |(d+1)\alpha_d - 1|. \quad (4.5.23)$$

Доказательство. 1. Формула (4.5.17) для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ вытекает из равенства (4.5.14), его свойство минимальности (4.5.18), (4.5.19) — из теоремы 4.5.1.

2. Формула (4.5.20) для объема многогранника $\text{vol } T^{(i)}$ была ранее доказана в лемме 2.5.2.

3. В левой части неравенства (4.5.21) записана длина для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ из (4.5.17) в 1-метрике (2.5.9). Поэтому указанные неравенства получаются как следствие из неравенства (4.5.4), в котором радиусы $r_*(T^{(i)})$ и $r_*(T^{(b)})$ заменены длинами минимальных векторов $r_1(v_{\min}^{(i)})$ и $r_1(v_{\min}^{(b)})$.

4. Рекуррентность коэффициентов Q^a, R_1^a, \dots, R_d^a из (4.5.17) была ранее доказана в (4.5.15) и (4.5.16).

5. Явные начальные условия (4.5.22) для рекуррентных последовательностей Q^a, R_1^a, \dots, R_d^a в случае $b = 0$ также вычисляются по формулам (4.5.16).

По определению (4.5.13) начальный минимальный вектор

$$v_{\min}^{(0)} = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} + \dots + v_d^{(0)} = v_0 + v_1 + \dots + v_d$$

равен сумме лучей исходной звезды $v^{(0)} = v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$. Поскольку по определению

$$v_0 = -\alpha, \quad v_1 = e_1 - \alpha, \quad \dots, \quad v_d = e_d - \alpha,$$

то минимальный вектор $v_{\min}^{(0)}$ будет иметь координаты

$$v_{\min}^{(0)} = (1 - (d+1)\alpha_1, \dots, 1 - (d+1)\alpha_d),$$

откуда вытекает равенство (4.5.23). □

Замечание 4.5.1 Свойство минимальности (4.5.18) указывает на наилучшее ядерное приближение (*karyon appproximation*). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ из (4.5.17) наилучшим образом приближаются к 0 mod \mathbb{Z}^d относительно $T^{(i)}$ -норм (ядерных норм), в качестве выпуклых тел для которой выбраны выпуклые многогранники $T^{(i)}$ — ядра индуцированных разбиений d -мерного тора \mathbb{T}^d . Даные многогранники $T^{(i)}$ согласованы с орбитой точек $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ для $j = 0, 1, 2, \dots, u$, следовательно, напрямую согласованы с интересующей нас точкой $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Принимая во внимание замечание 4.5.1, по аналогии с (3.8.19) *d -мерные подходящие дроби*

$$\frac{R^a}{Q^a} = \left(\frac{R_1^a}{Q^a}, \dots, \frac{R_d^a}{Q^a} \right) \longrightarrow \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad (4.5.24)$$

также можно назвать *ядерными цепными дробями*.

Еще раз отметим, что неравенство (4.5.21) записано в фиксированной 1-норме $|x|_1$. Такие нормы удобны для количественных оценок скорости приближений, но они не прослеживают наилучшие приближения.

4.6 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Ранее для размерности $d = 2$ отмечалась связь между минимальным свойством (3.8.13), (3.8.14) и наилучшими ядерными приближениями относительно $T^{(i)}$ -норм или ядерных норм (2.5.46). В теореме 4.5.2 такая связь (4.5.18), (4.5.19) установлена для случая произвольной размерности d . Снова доказательство опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [23], [24], [26]. Для вывода же количественных оценок (4.5.21) вместо двумерных используются многомерные возвратные отображения [26], [27].

Исследования разложений отдельных классов кубических иррациональностей содержатся в [49], [64], [65], [84], [112].

Основной областью, использованной в настоящей главе, является замкнутый d -мерный симплекс Δ_d . Для размерности $d = 2$ приближения иррациональностей через различные способы деления треугольника Δ_2 подробно исследованы в [52], [57], [62], [63], [100], [109], [106].

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка. В теореме 4.5.2 для вычисления подходящих дробей также применяются рекуррентные соотношения, но уже произвольного порядка $d + 1$. В многомерном случае такая связь наилучших приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [86] (см. также обзор [65]).

Глава 5

Ядерные разложения чисел Пизо в многомерные цепные дроби

Исследуются наилучшие приближения чисел Пизо многомерными цепными дробями. Рассматриваемые числа Пизо являются корнями многочленов с натуральными коэффициентами. Используя метод ядерных приближений, основанный на дифференцировании индуцированных разбиений торов, доказывается, что полученные приближения будут наилучшими относительно ядерной нормы. Кроме того, дополнительно применяя многомерные возвратные отображения, удается найти и количественные оценки данных приближений в терминах коэффициентов соответствующих многочленов. Подробно исследована аппроксимация чисел Литтлвуда-Пизо.

5.1 Числа и многочлены Пизо

5.1.1 Единицы алгебраических полей.

В настоящей главе будет продолжено рассмотрение Δ -многочленов

$$f_a(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \dots + a_1 x - 1 \quad (5.1.1)$$

степени $d+1 \geq 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$. Многочлены (5.1.1) имеют вещественный корень $f_a(\theta) = 0$ в интервале $0 < \theta < 1$, удовлетворяющий условию $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \Delta^{\text{int}}$, где

$$\alpha_1 = \theta^d, \quad \alpha_2 = \theta^{d-1}, \quad \dots, \quad \alpha_d = \theta^1 \quad (5.1.2)$$

и Δ — замкнутый d -мерный симплекс с вершинами в точках $(0, \dots, 0), (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$ из пространства \mathbb{R}^d . Снова будем предполагать, что $f_a(x)$ является Δ_{irr} -многочленом, т.е. неприводимым над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Следовательно, корень θ многочлена $f_a(x)$ будет алгебраической иррациональностью степени $d+1$. Из Δ_{irr} -условия и ограничения на свободный член $a_0 = -1$ многочлена (5.1.1) вытекает, что его корень θ является единицей нормы

$$N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = (-1)^d \quad (5.1.3)$$

вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}(\theta)$ над полем \mathbb{Q} степени $d + 1$.

5.1.2 Числа Пизо-Виджаярагхавана.

По отношению к многочлену (5.1.1) определим *инверсный многочлен*

$$f_a^*(x) = x^{d+1} - a_1 x^d + \dots - a_d x - 1, \quad (5.1.4)$$

связанный с $f_a(x)$ равенством

$$f_a^*(x) = -x^{d+1} f_a\left(\frac{1}{x}\right). \quad (5.1.5)$$

Из равенства (5.1.5) следует, что вещественное число $\theta^{-1} > 1$ будет корнем

$$f_a^*(\theta^{-1}) = 0$$

инверсного многочлена (5.1.4). Из определения (5.1.1) и (5.1.4) следует, что θ^{-1} является целым алгебраическим числом. Если при этом окажется, что у числа θ^{-1} все его сопряженные корни $\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_d^{-1}$, отличные от него самого, лежат внутри единичного круга

$$|\zeta_i^{-1}| < 1, \quad (5.1.6)$$

то θ^{-1} называется *числом Пизо-Виджаярагхавана* [34]. В литературе для таких чисел обычно встречается сокращенное название — *числа Пизо*. В этом случае сам инверсный многочлен $f_a^*(x)$ будем называть *многочленом Пизо*.

5.2 Калибровочный и инверсный многочлены

5.2.1 Порядковая и калибровочная матрицы.

Согласно теореме 4.3.1 многочлену $f_a(x)$ из (5.1.1) ставится в соответствие *порядковая матрица*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 + a_d - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & & & \\ a_1 + a_3 - 2 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ a_1 + a_2 - 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Это целочисленная квадратная матрица порядка $d + 1$. Условимся нумерацию строк и столбцов в матрице \mathbf{M} начинать с 0.

Кроме матрицы \mathbf{M} в теореме 4.3.1 была определена еще *калибровочная матрица* \mathbf{A} — это квадратная матрица порядка d . Используя для порядковой мат-

рицы \mathbf{M} формулу (5.2.1), матрицу \mathbf{A} можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_{d-1} & -\alpha_d \\ -a_d\alpha_1 + 1 & -a_d\alpha_2 & -a_d\alpha_{d-1} & -a_d\alpha_d \\ -a_{d-1}\alpha_1 & -a_{d-1}\alpha_2 + 1 & \dots & -a_{d-1}\alpha_{d-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_3\alpha_1 & -a_3\alpha_2 & -a_3\alpha_{d-1} & -a_3\alpha_d \\ -a_2\alpha_1 & -a_2\alpha_2 & -a_2\alpha_{d-1} + 1 & -a_2\alpha_d \end{pmatrix}. \quad (5.2.2)$$

5.2.2 Калибровочный многочлен.

Характеристический многочлен

$$ch_{\mathbf{A}}(x) = \det(xE_d - \mathbf{A}) = \\ = \det \begin{pmatrix} x + \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_{d-1} & \alpha_d \\ -1 + a_d\alpha_1 & x + a_d\alpha_2 & a_d\alpha_{d-1} & a_d\alpha_d \\ a_{d-1}\alpha_1 & -1 + a_{d-1}\alpha_2 & \dots & a_{d-1}\alpha_{d-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & x + a_3\alpha_{d-1} & a_3\alpha_d \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & -1 + a_2\alpha_{d-1} & x + a_2\alpha_d \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

калибровочной матрицы (5.2.2), где E_d — единичная матрица порядка d , называется *калибровочным многочленом*.

Лемма 5.2.1 *Определенный в (5.2.3) калибровочный многочлен*

$$ch_{\mathbf{A}}(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1x^1 + c_0 \quad (5.2.4)$$

имеет коэффициенты

$$c_{d-k} = \alpha_k + a_d\alpha_{k+1} + \dots + a_{k+1}\alpha_d \quad (5.2.5)$$

для $1 \leq k \leq d$. Здесь α_k определены в (5.1.2), при этом дополнительно полагаем $\alpha_k = 0$, если $k > d$.

Доказательство. Обозначим через $A(i_1, \dots, i_k)$ диагональные миноры матрицы $-\mathbf{A}$, стоящие на пересечении $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$ строк и столбцов. Из (5.2.2) следуют равенства

$$A(i_1, \dots, i_k) = 0, \quad (5.2.6)$$

если среди номеров i_1, \dots, i_k найдутся хотя бы два не рядом стоящих номера $i_{s+1} - i_s > 1$. Поэтому используя (5.2.3) можем записать

$$c_{d-k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} A(i_1, \dots, i_k) \quad (5.2.7)$$

с суммированием по *цепочкам* (i_1, \dots, i_k) , когда $i_{s+1} - i_s = 1$ для всех s в силу (5.2.6). Если ввести дополнительный коэффициент $a_{d+1} = 1$, то для диагональных миноров $A(i_1, \dots, i_k)$ из суммы (5.2.7) можно выписать единообразную формулу

$$A(i_1, \dots, i_k) = a_{d+k+1-i_k} \alpha_{i_k}. \quad (5.2.8)$$

Теперь из формул (5.2.7) и (5.2.8) вытекают нужные равенства (5.2.5). \square

Предложение 5.2.1 Калибровочный многочлен $ch_A(x)$ из (5.2.3) и инверсный многочлен $f_a^*(x)$ из (5.1.4) связаны между собою соотношением

$$f_a^*(x) = ch_A(x) \left(x - \frac{1}{\theta} \right), \quad (5.2.9)$$

где $0 < \theta < 1$ — корень исходного многочлена $f_a(x)$, определенного в (5.1.1).

Доказательство. Согласно (5.1.2) имеем $\alpha_1 = \theta^d, \alpha_2 = \theta^{d-1}, \dots, \alpha_d = \theta$. Так как $\alpha_d = \theta$ — корень многочлена $f_a(x)$, то

$$\frac{1}{\alpha_d} = \alpha_1 + a_d \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_d + a_1. \quad (5.2.10)$$

Подставляя $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\alpha_d}$ из (5.2.10) в правую часть (5.2.9) и используя формулы (5.2.5) для коэффициентов c_k характеристического многочлена $ch_A(x)$, получаем соотношение (5.2.9). \square

5.3 Характеристический многочлен порядковой матрицы

5.3.1 Характеристический многочлен.

Используя явный вид порядковой матрицы M , определенной в (5.2.1), можем выписать ее характеристический многочлен

$$ch_M(x) = \det(xE_{d+1} - M) = \\ = \det \begin{pmatrix} x - a_1 + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -a_1 & x & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & & & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & \dots & -1 & x & -1 \\ -a_2 - a_1 + 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & x - 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3.1)$$

5.3.2 Связь с инверсным многочленом.

Далее мы покажем, что в нашем случае характеристический многочлен порядковой матрицы (5.3.1) непосредственно связан с исходным многочленом $f_a(x)$.

Предложение 5.3.1 *Характеристический многочлен (5.3.1) равен*

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = f_a^*(x) \quad (5.3.2)$$

— инверсному многочлену (5.1.4).

Доказательство. Ввиду (5.1.4) для доказательства тождества (5.3.2) нужно проверить выполнение равенства

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = x^{d+1} - a_1x^d + \dots - a_dx - 1. \quad (5.3.3)$$

Разлагая определитель (5.3.1) по последнему столбцу, записываем

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = A_0 + A_1 + \dots + A_d. \quad (5.3.4)$$

Если для A_k доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_0 &= (-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + (-a_3 - a_1 + 2)x^{d-2} + \dots + (-a_d - a_1 + 2)x - a_1, \\ A_1 &= (-x + a_1 - 1)x^0, \\ &\dots \\ A_{d-1} &= (-x + a_1 - 1)x^{d-2}, \\ A_d &= x^{d+1} - (a_1 - 1)x^d + (-x + a_1 - 1)x^{d-1}, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

то из них будет следовать равенство (5.3.3).

Обозначим через M_k^d дополнительный минор в матрице из (5.3.1) для элемента последнего столбца с номером $k = 0, 1, \dots, d$. Минор

$$M_0^d = \det \left(\begin{array}{cccccc} -a_1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ -a_{d-1} - a_1 + 2 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ -a_2 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right) \quad (5.3.6)$$

разлагаем по последнему столбцу и тогда получаем переход

$$M_0^d = -(-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + M_0^{d-1} \quad (5.3.7)$$

к аналогичному минору M_0^{d-1} порядка $d - 2$. Для начального $d = 2$ непосредственно имеем формулу

$$M_0^2 = -[(-a_2 - a_1 + 2)x - a_1]. \quad (5.3.8)$$

Используя переход (5.3.7) и (5.3.8), по индукции получаем общую формулу

$$M_0^d = (-1)^{d-1} [(-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + (-a_3 - a_1 + 2)x^{d-2} + \dots + (-a_d - a_1 + 2)x - a_1]. \quad (5.3.9)$$

Для миноров M_i^d с номерами $i = 1, \dots, d-1$ формула (5.3.9) упрощается и принимает вид

$$M_i^d = (-1)^{d-1}(-x + a_1 - 1). \quad (5.3.10)$$

Действительно, например для минора M_1^d имеем

$$M_1^d = \det \begin{pmatrix} x - a_1 + 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ -a_2 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{d-1}(-x + a_1 - 1). \quad (5.3.11)$$

В случае минора M_d^d формула (5.3.10) несколько видоизменяется

$$M_d^d = \det \begin{pmatrix} x - a_1 + 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix} = (-x + a_1 - 1)x^{d-1}. \quad (5.3.12)$$

Наконец, собирая вместе формулы (5.3.9), (5.3.10) и (5.3.12), получаем требуемые равенства (5.3.5) для алгебраических дополнений A_k , из которых вместе с разложением (5.3.4) следует равенство (5.3.3) для характеристического многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$.

□

5.4 Дифференцирования звезд и торические ядерные разбиения

5.4.1 Периодические звезды.

Выберем в качестве *начальной звезды* $v^{(0)} = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, состоящую из векторов

$$v_0 = -\alpha, \quad v_1 = e_1 - \alpha, \quad \dots, \quad v_d = e_d - \alpha, \quad (5.4.1)$$

где α — вектор (5.1.2) и e_1, \dots, e_d — единичные векторы (1.1.13) из пространства \mathbb{R}^d .

Согласно теореме 3.6.1 со звездой (5.4.1) ассоциируется бесконечная последовательность дифференцирований $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ из Σ с *периодом*

$$p = a_1 + \dots + a_d, \quad (5.4.2)$$

где a_k — коэффициенты многочлена $f_a(x)$ из (5.1.1), а также соответствующая последовательность звезд

$$v^{(i)} = (((v^{(0)})^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_i} \quad (5.4.3)$$

с номерами $i = 0, 1, 2, \dots$. Последовательность звезд (5.4.3) обладает следующим свойством.

Теорема 5.4.1 *Если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$, $b = 0, \dots, p - 1$ и p — период (5.4.2), то для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}. \quad (5.4.4)$$

Здесь \mathbf{A} — калибровочная матрица, определенная в (5.2.2).

5.4.2 Ядерные разбиения.

По правилу (1.2.25) звездам $v^{(i)}$ из (5.4.4) поставим в соответствие ядра — развертки тора

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}), \quad (5.4.5)$$

в силу (1.3.2) вкладывающиеся

$$T^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^d \quad (5.4.6)$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, где \mathbb{Z}^d — кубическая d -мерная решетка. В свою очередь, так определенные развертки тора (5.4.5) порождают ядерные разбиения

$$\mathcal{T}^{(i)} = \mathcal{T}(v^{(i)}) = \mathcal{T}_0^{(i)} \sqcup \mathcal{T}_1^{(i)} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d^{(i)} \quad (5.4.7)$$

тора \mathbb{T}^d .

Замечание 5.4.1 *Именно вложения (5.4.6) и ядерные разбиения (5.4.7) являются основой для доказательства свойства (5.5.4)–(5.5.5) векторов $v_{\min}^{(i)}$ из (5.5.3) быть наилучшими приближениями нуля относительно $T^{(i)}$ -норм (ядерных норм).*

5.5 Основная теорема для алгебраических единиц

5.5.1 Рекуррентные последовательности.

Зададим последовательности $Q_a, R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} Q_{a+d+1} &= a_1 Q_{a+d} + \dots + a_d Q_{a+1} + Q_a, \\ R_{k,a+d+1} &= a_1 R_{k,a+d} + \dots + a_d R_{k,a+1} + R_{k,a} \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

для $k = 1, \dots, d$ и начальными условиями

$$\begin{aligned} Q_0 &= d + 1, & Q_1 &= \sum_{k,l} m_{kl}, \dots, & Q_d &= \sum_{k,l} m_{kl}^d, \\ R_{1,0} &= 1, & R_{1,1} &= \sum_k m_{k1}, \dots, & R_{1,d} &= \sum_k m_{k1}^d, \\ && \dots && & \\ R_{d,0} &= 1, & R_{d,1} &= \sum_k m_{kd}, \dots, & R_{d,d} &= \sum_k m_{kd}^d, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{(d+1) \times (d+1)}$ — порядковая матрица из (5.2.1), имеющая нумерацию строк и столбцов $0, 1, \dots, d$, и $\mathbf{M}^i = (m_{kl}^i)_{(d+1) \times (d+1)}$ обозначает i -ую степень матрицы \mathbf{M} .

5.5.2 Основная теорема.

Общая теорема 4.5.1 о ядерной аппроксимации в применении к алгебраическим единицам Пизо допускает следующую конкретизацию.

Теорема 5.5.1 Пусть $T^{(i)}$ — вкладыщающиеся в тор ядра (5.4.5) с номерами $i = ar$, где r — период (5.4.2), и пусть $Q_a, R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ — рекуррентные последовательности от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ с уравнением (5.5.1) и начальными условиями (5.5.2). Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для любого $i = ar$ вектор

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a \alpha_1 + R_{a,1}, \dots, -Q_a \alpha_d + R_{a,d}) \quad (5.5.3)$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \text{ с минимальным целым } Q_a \geq 1. \quad (5.5.4)$$

Свойство (5.5.4) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \text{ для всех } 1 \leq j < Q_a \quad (5.5.5)$$

в ядро $T^{(i)}$ — многогранник (5.4.5).

2. Объем $\text{vol } T^{(i)}$ ядра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{ vol } T^{(0)}, \quad (5.5.6)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель калибровочной матрицы \mathbf{A} из (5.2.2), удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$.

3. В случае, если многочлен $f_a(x)$ из (5.1.1) является $\Delta_{\text{ирр}}\text{-многочленом}$, а инверсный ему многочлен $f_a^*(x)$ из (5.1.4) будем многочленом Пизо, имеют место неравенства:

$$|Q_a \alpha_1 - R_{a,1}| + \dots + |Q_a \alpha_d - R_{a,d}| \leq c_1^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (5.5.7)$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < 1$, константа

$$c_1^{(0)} = c_1(\mathbf{A}) r_1(v_{\min}^{(0)}) \quad (5.5.8)$$

не зависит от a . Здесь $c_1(\mathbf{A})$ — константа, определенная в (5.6.5), и $r_1(v_{\min}^{(0)})$ — длина минимального вектора (5.5.3) в метрике $|x|_1$, равная

$$r_1(v_{\min}^{(0)}) = |(d+1)\alpha_1 - 1| + \dots + |(d+1)\alpha_d - 1|. \quad (5.5.9)$$

Доказательство. Новым, по сравнению с теоремой 4.5.1, является появление неравенства

$$\varrho(\mathbf{A}) < 1 \quad (5.5.10)$$

для спектрального радиуса

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\} \quad (5.5.11)$$

калибровочной матрицы \mathbf{A} , где $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — собственные значения матрицы \mathbf{A} . Для доказательства неравенства (5.5.7) требуется выполнение условия простоты спектра $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$, что обеспечивается условием на Δ_{irr} -многочлен $f_a(x)$ и равенством (5.2.9). Из равенства (5.2.9) также вытекает и неравенство (5.5.10), поскольку в данном случае инверсный многочлен $f_a^*(x)$ является многочленом Пизо.

□

5.6 Константы

В этом параграфе будут вычислены константы $c_1(\mathbf{A})$ и $c_1^{(0)} = c_1(\mathbf{A})r_1(v_{\min}^{(0)})$, упомянутые в (5.5.7) и (5.5.8).

5.6.1 Константа $c_1(\mathbf{A})$.

Константа $c_1(\mathbf{A})$ определяется из неравенства

$$|\mathbf{A}x|_1 \leq c_1(\mathbf{A})\varrho(\mathbf{A})|x|_1, \quad (5.6.1)$$

выполняющегося для всех $x \in \mathbb{R}^d$ с минимально возможным значением $c_1(\mathbf{A})$. В силу однородности метрики $|x|_1$ для константы $c_1(\mathbf{A})$ получаем равенство

$$c_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max_{|x|_1=1} |\mathbf{A}x|_1. \quad (5.6.2)$$

Множество $|x|_1 = 1$ представляет собою поверхность выпуклого центрально симметричного многогранника $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, состоящего из точек $|x|_1 \leq 1$ и имеющего центр в 0. Отсюда и аффинности отображения $x \mapsto \mathbf{A}x$ следует, что

$$\max_{|x|_1=1} |\mathbf{A}x|_1 = \max_{x \in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_1, \quad (5.6.3)$$

где $V(\mathcal{P})$ обозначает множество вершин многогранника \mathcal{P} . Теперь воспользуемся явным видом (5.2.2) калибровочной матрицы \mathbf{A} . Поскольку вершинами $V(\mathcal{P})$ являются точки

$$\pm v_k = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

с единицей на месте $k = 1, \dots, d$, то можем записать

$$\max_{x \in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_1 = \max\{1 + (d - 2)\theta^2, d\theta\}, \quad (5.6.4)$$

так как $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, \dots , $\alpha_d = \theta$ и $0 < \theta < 1$.

Лемма 5.6.1 Константа $c_1(\mathbf{A})$ в неравенстве (5.6.1) вычисляется по формуле

$$c_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max\{1 + (d - 2)\theta^2, d\theta\}, \quad (5.6.5)$$

где $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус калибровочной матрицы \mathbf{A} и $0 < \theta < 1$ — корень многочлена $f_a(x)$ из (5.1.1).

Доказательство вытекает из равенств (5.6.2)–(5.6.4). □

5.6.2 Константа $c_1^{(0)}$.

Лемма 5.6.2 Для константы

$$c_1^{(0)} = c_1(\mathbf{A})r_1(v_{\min}^{(0)}), \quad (5.6.6)$$

где $r_1(v_{\min}^{(0)})$ — радиус (5.5.9) нулевой звезды $v^{(0)}$, имеет место равенство

$$c_1^{(0)} = \frac{r_1(v_{\min}^{(0)})}{\varrho(\mathbf{A})} \max\{1 + (d - 2)\theta^2, d\theta\}. \quad (5.6.7)$$

Кроме того, для $c_1^{(0)}$ выполняется следующая грубая оценка

$$c_1^{(0)} \leq \frac{d(2d + 1)}{\varrho(\mathbf{A})}. \quad (5.6.8)$$

Доказательство. Равенство (5.6.7) следует из (5.6.5), а оценка (5.6.8) — из неравенств

$$\max\{1 + (d - 2)\theta^2, d\theta\} < d, \quad r_1(v_{\min}^{(0)}) \leq 2d + 1. \quad (5.6.9)$$

Первое неравенство в (5.6.9) получается из неравенства $\theta < 1$. Для доказательства второго разобьем сумму

$$r_1(v_{\min}^{(0)}) = |(d + 1)\alpha_1 - 1| + \dots + |(d + 1)\alpha_d - 1| = r_- + r_+$$

на две части r_- и r_+ , состоящие из слагаемых с $\alpha_i < \frac{1}{d+1}$ и $\alpha_i \geq \frac{1}{d+1}$ соответственно. Если учесть что $\alpha_i > 0$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_d < 1$, то будем иметь $r_- < d$ и $r_+ < d + 1$, откуда и вытекает второе неравенство из (5.6.9). □

5.7 Кубические числа Пизо

5.7.1 Комплексный случай.

При $d = 2$ многочлен $f_a(x)$ из (5.1.1) с вещественным корнем $0 < \theta < 1$ может иметь еще два комплексно сопряженных корня $\zeta, \bar{\zeta}$ — комплексный случай, или два вещественных корня $\zeta_2 \leq \zeta_1 < 0$ — вещественный случай.

Найдем условия на коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \dots$ многочлена $f_a(x)$, обеспечивающие существование двух комплексно сопряженных корней. Для этого достаточно потребовать выполнение неравенства

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x \leq 0$$

при всех $x \leq 0$, что равносильно неравенству

$$x^2 - a_2x + a_1 \geq 0$$

при всех $x \geq 0$ или условию

$$a_2^2 - 4a_1 \leq 0$$

на дискриминант последнего трехчлена. Таким образом, будем иметь комплексный случай, если выполнено условие

$$4a_1 \geq a_2^2. \quad (5.7.1)$$

Лемма 5.7.1 Пусть у многочлена $f_a(x)$ степени $d = 2$ из (5.1.1) коэффициенты удовлетворяют условию $4a_1 \geq a_2^2$, $0 < \theta < 1$ — вещественный корень многочлена $f_a(x)$, и пусть $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус калибровочной матрицы \mathbf{A} из (5.2.2). Тогда спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ вычисляется по формуле

$$\varrho(\mathbf{A}) = \theta^{1/2}, \quad (5.7.2)$$

где

$$\theta < \frac{1}{a_1}. \quad (5.7.3)$$

Следовательно, спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(\mathbf{A}) < \frac{1}{a_1^{1/2}}. \quad (5.7.4)$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 5.2.1. Согласно (5.2.9) характеристический многочлен калибровочной матрицы $ch_{\mathbf{A}}(x)$ делит инверсный многочлен $f_a^*(x)$ из (5.1.4), в силу равенства (5.1.5) и условия (5.7.1) имеющий корни $\zeta^{-1}, \bar{\zeta}^{-1}, \theta^{-1}$. Поэтому у характеристического многочлена $ch_{\mathbf{A}}(x)$ будут комплексные корни $\zeta^{-1}, \bar{\zeta}^{-1}$ и, значит,

$$\varrho(\mathbf{A}) = \frac{1}{|\zeta|} \quad (5.7.5)$$

по определению спектрального радиуса (5.5.11). Снова используя равенство (5.1.5), можем записать $|\zeta^{-1}|^2\theta^{-1} = 1$. Тогда получаем

$$\frac{1}{|\zeta|} = \theta^{1/2}. \quad (5.7.6)$$

Из равенств (5.7.5) и (5.7.6) вытекает формула (5.7.2). Далее, поскольку $0 < \theta < 1$ — корень многочлена $f_a(x)$, то из (5.1.1) следует неравенство $a_1\theta - 1 < 0$ или $\theta < \frac{1}{a_1}$. Отсюда и (5.7.6) получаем неравенство (5.7.4).

□

Теорема 5.7.1 *Пусть многочлен*

$$f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1 \quad (5.7.7)$$

имеет коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \dots$ с условием (5.7.1), $0 < \theta < 1$ — корень многочлена $f_a(x)$, и $\alpha_1 = \theta^2, \alpha_2 = \theta$. Пусть, кроме того, последовательность f_a для $a = 0, 1, 2, \dots$ задана рекуррентным уравнением

$$f_{a+3} = a_1 f_{a+2} + a_2 f_{a+1} + f_a \quad (5.7.8)$$

с начальными условиями

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 3, \quad (5.7.9)$$

и пусть

$$R_{1,a} = f_a, \quad R_{2,a} = f_{a+1}, \quad Q_a = f_{a+2}. \quad (5.7.10)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для всех $a = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leq 10 \cdot \theta^{(a-1)/2}, \quad (5.7.11)$$

где корень θ многочлена $f_a(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\theta < a_1^{-1/2}. \quad (5.7.12)$$

2. Кроме того, также выполняются неравенства

$$\left| \alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a} \right| + \left| \alpha_2 - \frac{R_{2,a}}{Q_a} \right| \leq \frac{c}{Q_a^{1+1/2}}, \quad (5.7.13)$$

где $c > 0$ — не зависящая от a константа.

Доказательство. По теореме 5.5.1 имеем неравенства

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leq c_1^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a \quad (5.7.14)$$

с константой $c_1^{(0)}$, в силу (5.6.8) удовлетворяющей неравенству

$$c_1^{(0)} \leq \frac{10}{\varrho(\mathbf{A})}, \quad (5.7.15)$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ вычисляется по формуле $\varrho(\mathbf{A}) = \theta^{1/2}$ и при этом $\theta < \frac{1}{a_1}$ согласно (5.7.2) и (5.7.3). Отсюда, (5.7.14) и (5.7.15) получаем первое утверждение теоремы (5.7.11), (5.7.12).

Согласно предложению 5.3.1 рекурсивная последовательность f_a из (5.7.8) имеет характеристическое уравнение $ch_{\mathbf{M}}(x) = f_a^*(x)$ с вещественным корнем $\theta^{-1} > 1$ и двумя комплексно сопряженными нулями $\zeta^{-1} \neq \bar{\zeta}^{-1}$ с модулем $|\zeta^{-1}| < 1$. Отсюда из (5.7.8) для последовательности f_a следует представление

$$f_a = \gamma \theta^{-a} + \varepsilon \zeta^{-a} + \bar{\varepsilon} \bar{\zeta}^{-a} \quad (5.7.16)$$

для всех $a = 1, 2, 3, \dots$, где вещественный коэффициент $\gamma > 0$. По условию теоремы $Q_a = f_{a+2}$. Поэтому из (5.7.11) и (5.7.16) вытекает неравенство (5.7.13). \square

5.7.2 Вещественный случай.

У кубического многочлена $f_a(x)$ из (5.7.7) подберем коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \dots$ так, чтобы он имел вещественные корни ζ_1 и ζ_2 , удовлетворяющие неравенствам

$$\zeta_2 < \zeta_1 < -1 - \Delta < 0 < \theta < 1. \quad (5.7.17)$$

Для этого достаточно наложить на многочлен $f_a(x)$ условия

$$f_a(-2) > 0, \quad f_a(-1 - \Delta) < 0, \quad (5.7.18)$$

где $0 < \Delta < 1$. Если ограничиться выбором $\Delta = 1/a_2$, то из неравенств

$$a_2 \leq a_1 \leq 2a_2 - 5 \quad (5.7.19)$$

будут следовать (5.7.18) и, значит, — неравенства (5.7.17).

Лемма 5.7.2 *Пусть у многочлена $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ коэффициенты удовлетворяют условию (5.7.19), и пусть $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус (5.5.11) калибровочной матрицы \mathbf{A} из (5.2.2). Тогда спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ удовлетворяет неравенству*

$$\varrho(\mathbf{A}) < 1 - \frac{1}{a_2 + 1}. \quad (5.7.20)$$

Доказательство. Из (5.7.17) и (5.7.18) следует $\varrho(\mathbf{A}) = |\zeta_1^{-1}| < (1 + 1/a_2)^{-1}$, что доказывает неравенство (5.7.20). \square

Теорема 5.7.2 *Пусть многочлен $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ имеет коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \dots$ с условием (5.7.19), и пусть последовательности $R_{1,a} = f_a, R_{2,a} = f_{a+1}, Q_a = f_{a+2}$ определены через рекуррентную последовательность (5.7.8). Тогда для всех $a = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства*

$$|Q_a \alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a \alpha_2 - R_{2,a}| \leq 10 \cdot \varrho(\mathbf{A})^{a-1}, \quad (5.7.21)$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(\mathbf{A}) < 1 - \frac{1}{a_2 + 1}. \quad (5.7.22)$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.5.1, неравенства (5.6.8) и леммы 5.7.2. \square

Замечание 5.7.1 Если сравнить оценки (5.7.11), (5.7.12) с новыми оценками (5.7.21), (5.7.22), то видим, что в вещественном случае наблюдается ослабление аппроксимационных свойств вкладывающихся в тор \mathbb{T}^d ядер $T^{(i)}$ из (5.4.5). Причина тому — гиперболическое вытягивание ядер-многогранников $T^{(i)}$ при бесконечном дифференцировании.

5.8 Числа Литтлвуда-Пизо

5.8.1 Многочлены Литтлвуда.

Среди многочленов (5.1.1) содержатся *многочлены Литтлвуда*, имеющие коэффициенты $a_i = \pm 1$. Мы будем рассматривать многочлены частного вида

$$f_a(x) = x^{d+1} + x^d + \dots + x - 1. \quad (5.8.1)$$

Известно, что инверсный (5.1.4) для $f_a(x)$ многочлен

$$f_a^*(x) = x^{d+1} - x^d - \dots - x - 1 \quad (5.8.2)$$

является многочленом Пизо (см., например, [98]). Он имеет вещественный корень

$$1 < \theta^{-1} < 2, \quad (5.8.3)$$

а остальные корни $\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_d^{-1}$ содержатся внутри единичного круга

$$|\zeta_i^{-1}| < 1. \quad (5.8.4)$$

Вещественные корни $\theta^{-1} > 1$ многочленов (5.8.2) называются *числами Литтлвуда-Пизо*. Они включают в себя для $d = 1$ золотое сечение

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots, \quad (5.8.5)$$

и для размерности $d = 2$ — кубическую иррациональность

$$\zeta = 1.839\dots, \quad (5.8.6)$$

на основе которой строятся разбиения Рози [104], [16].

5.8.2 Числа Фибоначчи и их многомерные обобщения.

При фиксированном $d = 1, 2, 3, \dots$ зададим последовательность f_a рекуррентным уравнением

$$f_{a+d+1} = f_{a+d} + \dots + f_{a+1} + f_a \quad (5.8.7)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ с начальными условиями

$$f_0 = 1, \dots, f_{d-1} = 1, f_d = d + 1. \quad (5.8.8)$$

Так, если $d = 1$, то получаем *числа Фибоначчи*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,$$

а для $d = 2$ — *числа Трибоначчи*

$$1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, \dots$$

Мы оставляем за ними прежнее название [104], [16], хотя ранее начальные условия выбирались другими $f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 4$.

Лемма 5.8.1 Выберем в качестве (5.1.1) многочлен Литтлвуда $f_a(x)$ из (5.8.1) степени $d \geq 2$. Пусть рекуррентные последовательности $Q_a, R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ порождаются рекуррентным уравнением (5.5.1) и имеют начальные условия (5.5.2). Тогда эти последовательности связаны с рекуррентной последовательностью f_a из (5.8.7), (5.8.8) равенствами

$$R_{1,a} = f_a, \dots, R_{d,a} = f_{a+d-1}, Q_a = f_{a+d} \quad (5.8.9)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Для многочлена Литтлвуда (5.8.1) порядковая матрица \mathbf{M} , определенная в (5.2.1), имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8.10)$$

Напомним, что это квадратная матрица порядка $d + 1$ с нумерацией строк и столбцов, начинающихся с 0. Если матрица $M = (\mathbf{m}_0 \mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_d)$ имеет столбцы \mathbf{m}_k длины $d + 1$, то умножение ее на порядковую матрицу (5.8.10) сводится

$$M\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_d \mathbf{m}_{d+1}) \quad (5.8.11)$$

к сдвигу столбцов матрицы M влево и замене последнего столбца \mathbf{m}_d суммой всех столбцов

$$\mathbf{m}_{d+1} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_d$$

исходной матрицы M .

Введем следующие обозначения:

\mathbf{M}_k^a — сумма элементов столбца с номером $k = 0, 1, \dots, d$ в матрице \mathbf{M}^a , возведенной в степень $a = 0, 1, 2, \dots$;

\mathbf{M}_{d+1}^a — сумма всех элементов матрицы \mathbf{M}^a .

По определению будет иметь

$$\mathbf{M}_{d+1}^a = \mathbf{M}_0^a + \mathbf{M}_1^a + \dots + \mathbf{M}_d^a \quad (5.8.12)$$

и, кроме того, из (5.8.11) и (5.8.12) следует формула

$$\mathbf{M}_k^{a+1} = \mathbf{M}_{k+1}^a \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, d. \quad (5.8.13)$$

Далее нам потребуется равенство

$$\mathbf{M}^{d+1} = \mathbf{M}^d + \dots + \mathbf{M} + E, \quad (5.8.14)$$

вытекающее из теоремы Гамильтона-Кэли и предложения 5.3.1. Здесь E обозначает единичную матрицу порядка $d + 1$.

Обозначим

$$Q_a = R_{d+1,a}. \quad (5.8.15)$$

Используя равенства (5.8.12)–(5.8.14), можем переписать определение (5.5.1)–(5.5.2) последовательностей $R_{k,a}$ в виде

$$R_{k,a} = \mathbf{M}_0^{a+k} \quad (5.8.16)$$

для $k = 1, \dots, d, d + 1$ и $a = 0, 1, \dots, d$. Применяя еще раз равенство (5.8.14), по индукции убеждаемся в справедливости формулы (5.8.16) для всех $a = 0, 1, 2, \dots$. Согласно (5.5.2) и (5.8.8) последовательности $R_{1,a}$ и f_a имеют одинаковые начальные условия. Отсюда и формулы (5.8.16) выводим равенства (5.8.9). \square

5.8.3 Спектральный радиус для чисел Литтлвуда-Пизо.

Приведем некоторые числовые данные относительно многочленов Литтлвуда $f_a(x)$, определенных в (5.8.1). В таблице (5.8.17) использованы следующие обозначения:

- $d + 1$ — степень многочлена Литтлвуда $f_a(x)$;
- $0 < \theta < 1$ — вещественный корень многочлена $f_a(x)$;
- $0 < \varrho(\mathbf{A}) < 1$ — спектральный радиус (5.5.11) калибровочной матрицы \mathbf{A} ;
- $\varepsilon = \ln \varrho(\mathbf{A}) / \ln \theta$ — степенной показатель, характеризующая порядок приближения;
- $\nu = 1/\varepsilon$, если $1/\varepsilon$ — целое число, в противном случае полагаем
- $\nu = [1/\varepsilon] + 1$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x .

В столбцах, соответствующих спектральному радиусу $\varrho(\mathbf{A})$ и ε , приведены числовые значения для $\varrho(\mathbf{A})$ и ε с округлением в большую и меньшую сторону соответственно.

Таблица.

d	θ	$\varrho(\mathbf{A})$	ε	ν	
2	0.54368901	0.73738	0.5	2	
3	0.51879006	0.81830	0.30555	4	
4	0.50866039	0.87105	0.20422	5	
5	0.50413829	0.90622	0.14377	7	
6	0.50201706	0.93028	0.10485	10	
7	0.50099418	0.94718	0.07850	13	
8	0.50049312	0.95932	0.06000	17	
9	0.50024546	0.96817	0.04670	22	
10	0.50012243	0.97473	0.03693	28	
11	0.50006113	0.97969	0.02960	34	
12	0.50003054	0.98349	0.02401	42	
13	0.50001527	0.98643	0.01971	51	
14	0.50000763	0.98874	0.01633	62	
15	0.50000382	0.99057	0.01366	74	
16	0.500000191	0.99203	0.01154	87	
17	0.50000095	0.99322	0.00981	102	
18	0.50000048	0.99418	0.00842	119	
19	0.50000024	0.99497	0.00727	138	
20	0.50000012	0.99563	0.00631	159	

(5.8.17)

5.8.4 Аппроксимация чисел Литтлвуда-Пизо.

Теорема 5.8.1 Пусть $\theta > 0$ – вещественный корень многочлена Литтлвуда $f_a(x)$ из (5.8.1) степени $d + 1 \geq 3$, $\alpha_1 = \theta^d, \dots, \alpha_d = \theta$, и пусть рекуррентные последовательности $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$, Q_a заданы равенствами (5.8.9). Тогда для всех $a = 1, 2, 3, \dots$ имеют место следующие неравенства:

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + \dots + |Q_a\alpha_d - R_{d,a}| \leq d(2d+1)\varrho(\mathbf{A})^{a-1}, \quad (5.8.18)$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < 1$; и

$$\left| \alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{R_{d,a}}{Q_a} \right| \leq \frac{c}{Q_a^{1+\varepsilon}} \quad (5.8.19)$$

с некоторыми степенным показателем $\varepsilon > 0$ и константой $c > 0$, зависящими только от d .

Значения спектрального радиуса $\varrho(\mathbf{A})$ и степенных показателей ε для $2 \leq d \leq 20$ приведены в таблице (5.8.17).

Доказательство. Как уже было сказано (5.8.2), θ^{-1} является числом Пизо. Поэтому неравенство (5.8.18) будет вытекать из теоремы 5.5.1, неравенства (5.6.8) и леммы 5.8.1. Повторяя те же рассуждения, что и в теореме 5.7.1, неравенство (5.8.19) сводим к неравенству (5.8.18). \square

Замечание 5.8.1 В таблице (5.8.17) содержатся еще значения для

$$\nu = [1/\varepsilon] + 1.$$

По определению они удовлетворяют неравенству $1/\nu \leq \varepsilon$. Поэтому неравенство (5.8.19) можно переписать в виде

$$\left| \alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{R_{d,a}}{Q_a} \right| \leq \frac{c}{Q_a^{1+1/\nu}} \quad (5.8.20)$$

с той же константой c , что и в (5.8.19). Для $2 \leq d \leq 20$ только в одном случае $d = 2$ оказалось

$$\nu = 1/\varepsilon$$

— это частный случай (5.7.13), когда совпадают $d = \nu = 2$. Для показателя ν в неравенстве (5.8.20) разность $\nu - d$ увеличивается с ростом d , что является следствием увеличения разброса значений модулей $|\zeta_i^{-1}|$ в неравенствах (5.8.4).

Замечание 5.8.2 Общая теорема 5.5.1 о приближениях алгебраических чисел вместе с приведенной теоремой 5.8.1 интересны тем, что содержат в явном виде оценки наилучших многомерных приближений (5.5.4), (5.5.5) для чисел Пизо произвольной степени $d + 1$.

5.9 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Доказательство того, что приближения (5.5.4), (5.5.5) являются наилучшими относительно $T^{(i)}$ -норм (2.5.46), опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [23], [24], [26].

Для вывода же из приближений (5.5.4), (5.5.5) количественных оценок в теоремах 5.7.1 и 5.8.1 используются многомерные возвратные отображения [26], [27].

Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [66], [113], а двумерные возвратные отображения — для проверки периодичности разложений кубических корней [71] и для приближений кубических иррациональностей [27]. Исследования разложений в многомерные цепные дроби отдельных классов чисел Пизо содержатся в [68], [98], [101] и, в частности, кубических иррациональностей в [49], [64], [65], [78], [84], [99], [112].

Глава 6

Унимодулярная инвариантность ядерных разложений алгебраических чисел в многомерные цепные дроби

Методом дифференцирования индуцированных разбиений торов для алгебраических иррациональностей получены периодические разложения в многомерные цепные дроби с наилучшим ядерным приближением относительно полиэдальных норм. Указанные иррациональности получены композицией обратных возвратных отображений и унимодулярных преобразований алгебраических единиц, разлагающихся в чисто периодическую цепную дробь. Артефактом такого расширения стали несколько инвариантов: рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей и скорость многомерной аппроксимации иррациональностей рациональными числами.

6.1 Расширение единиц алгебраических полей

Образовалась триада:

- 1) неподвижные точки $\alpha = \delta(\alpha)$ возвратных отображений δ из полугруппы \mathcal{D}_s ;
- 2) точки α с чисто периодическими разложениями в многомерные цепные дроби;
- 3) точки $\alpha = (\theta, \theta^2, \dots, \theta^d)$, координаты которых $\theta, \theta^2, \dots, \theta^d$ являются алгебраическими единицами степени $d + 1$.

Ключевым звеном в указанной триаде является полугруппа возвратных отображений \mathcal{D}_s , действующих на d -мерном единичном симплексе Δ_d с вершинами $(0, \dots, 0), (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$, и, таким образом, пара $(\mathcal{D}_s, \Delta_d)$ представляет собою некоторую динамическую систему. Так, например, если подействовать $\alpha' = \mathfrak{d}(\alpha)$ на точки α отображениями \mathfrak{d} из полугруппы обратных возвратных отображений \mathfrak{D}_s , то в теореме 6.3.1 доказано, что образы α' снова разлагаются,

но уже в просто периодические цепные дроби и при этом точки α' продолжают оставаться в симплексе Δ_d .

Чтобы выйти за границы симплекса Δ_d , в настоящей главе дополнительно вводится группа $G_0 \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ унимодулярных матриц $U_L = \begin{pmatrix} U & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и L — целочисленный столбец высоты d . Действие группы G_0 на точки x из пространства \mathbb{R}^d задается формулой $U_L x = Ux + L$ и любую иррациональную точку можно группой G_0 перевести в симплекс Δ_d . В теореме 6.4.1 доказывается, что за образами $\alpha'' = U_L \alpha'$ продолжает сохраняться свойство разложения в периодические цепные дроби.

В цепочке указанных выше преобразований

$$\Delta \ni \alpha \xrightarrow{\delta} \alpha' \xrightarrow{U_L} \alpha'' \in \mathbb{R}^d \quad (6.1.1)$$

важен порядок. Если исходить из фиксированной точки α , то как велико получается множество точек α'' в результате всех возможных преобразований (6.1.1). Будет показано, что частичный ответ могут дать связанные между собою инварианты

$$\deg(\alpha'') = \deg(\alpha), \quad \mathbb{Q}(\alpha'') = \mathbb{Q}(\alpha) \quad (6.1.2)$$

— степень точек и порождаемое ими алгебраическое поле. Отметим еще, что кроме величин (6.1.2), сохраняются: рекуррентные соотношения для числителей $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ и знаменателей Q_a подходящих дробей

$$\frac{R_a}{Q_a} = \left(\frac{R_{1,a}}{Q_a}, \dots, \frac{R_{d,a}}{Q_a} \right) \rightarrow \alpha''$$

и скорость приближения дробей $\frac{R_a}{Q_a}$ к точке α'' при $a \rightarrow +\infty$.

6.2 Стволовые точки

6.2.1 Циклические множества.

Определим *полугруппу* \mathcal{D} преобразований симплекса Δ , порожденную возратными отображениями δ_*^{kl} из (2.1.30) и (2.1.31), а также определим *расширенную полугруппу* \mathcal{D}_s , добавляя к \mathcal{D} все симметрии (2.1.10) симплекса $s \in S_\Delta$.

Пусть $\alpha \in \Delta$ — периодическая иррациональная точка относительно полугруппы \mathcal{D}_s , т.е.

$$\delta(\alpha) = \alpha, \quad (6.2.1)$$

где отображение $\delta = \delta_p \cdots \delta_1$, при этом $\delta_i = \delta_*^{kl}$ или s — одна из образующих полугруппы \mathcal{D}_s . Более подробно равенство (6.2.1) можно записать в виде цепочки отображений

$$\alpha = \alpha^{(0)} \xrightarrow{\delta_1} \alpha^{(1)} \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_p} \alpha^{(p)} = \alpha. \quad (6.2.2)$$

Множество

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{\alpha = \alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(p-1)}\} \quad (6.2.3)$$

назовем *стволом* точки α или кратко — α -*стволом* (trunk).

Используя отображения (6.2.2), составим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^{(0)} & \xrightarrow{\delta_1} & \alpha^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\delta_p} & \alpha^{(p)} = \alpha^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ v^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} = \mathbf{A}v^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ T^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_1} & T^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & T^{(p)} = \mathbf{A}T^{(0)}. \end{array} \quad (6.2.4)$$

Здесь $\sigma = \sigma_p \cdots \sigma_1$ — последовательность дифференцирований звезд $v^{(i)}$, соответствующих возвратным отображениям $\delta^{(i)}$.

6.2.2 Циклические сдвиги.

Для фиксированного $0 \leq t < p$ определим следующие *сдвиги*:

$\vec{\alpha}^{(i)} = \alpha^{(\vec{i})}$, где $\vec{i} \equiv i + t \pmod{p}$ и $0 \leq \vec{i} < p$;
 $\vec{\delta} = \vec{\delta}_p \cdots \vec{\delta}_1$, где $\vec{\delta}_k = \vec{\delta}_k$, $k \equiv k + t \pmod{p}$ и $1 \leq k \leq p$;
 $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_p \cdots \vec{\sigma}_1$, калибровочная $\vec{\mathbf{A}}$ и порядковая $\vec{\mathbf{M}}$ матрицы определяются аналогично $\vec{\delta}$.

Применяя введенные сдвиги, преобразуем диаграмму (6.2.4) к виду

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{\alpha}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\delta}_1} & \vec{\alpha}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\delta}_2} & \dots & \xrightarrow{\vec{\delta}_p} & \vec{\alpha}^{(p)} = \vec{\alpha}^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \vec{v}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_1} & \vec{v}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_2} & \dots & \xrightarrow{\vec{\sigma}_p} & \vec{v}^{(p)} = \vec{\mathbf{A}}\vec{v}^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \vec{T}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_1} & \vec{T}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_2} & \dots & \xrightarrow{\vec{\sigma}_p} & \vec{T}^{(p)} = \vec{\mathbf{A}}\vec{T}^{(0)}. \end{array} \quad (6.2.5)$$

Заметим, что по определению звезды $\vec{v}^{(0)}$ и развертка тора $\vec{T}^{(0)}$ являются теперь нормированными, т.е. приведенными к базису e_1, \dots, e_q . Они не совпадают со звездой $v^{(t)}$ и разверткой $T^{(0)}$ в диаграмме (6.2.4).

Пусть $i = ap$ и, значит, $b = 0$. Определим рекуррентные последовательности $\vec{Q}_a, \vec{R}_{1,a}, \dots, \vec{R}_{d,a}$ от параметра a через рекуррентное соотношение (4.5.15) и начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_0 &= \mathbf{1} \cdot E_0, & \vec{Q}_1 &= \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}E_0, \dots, & \vec{Q}_d &= \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_0, \\ \vec{R}_{k,0} &= \mathbf{1} \cdot E_k, & \vec{R}_{k,1} &= \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}E_k, \dots, & \vec{R}_{d,k} &= \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_k \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

для $k = 1, \dots, d$, где E_k — столбцы (4.3.19).

Теорема 6.2.1 1. Пусть $i = ap$, $0 \leq t < p$ и

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_d) = \delta_t \cdots \delta_1(\alpha) \quad (6.2.7)$$

— иррациональная стволовая точка (6.2.3). Тогда вектор

$$\vec{v}_{\min}^{(i)} = (-\vec{Q}_a \vec{\alpha}_1 + \vec{R}_{1,a}, \dots, -\vec{Q}_a \vec{\alpha}_d + \vec{R}_{d,a}), \quad (6.2.8)$$

где $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_d)$, обладает минимальным свойством:

$$\vec{v}_{\min}^{(i)} \in \vec{T}^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } \vec{Q}_a \geq 1. \quad (6.2.9)$$

Свойство (6.2.9) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j \vec{\alpha} \pmod{\mathbb{Z}^d}$ не попадает

$$x_j \notin \vec{T}^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < \vec{Q}_a \quad (6.2.10)$$

в ядро $\vec{T}^{(i)}$ — многогранник, соответствующий звезде $\vec{v}^{(i)}$ из диаграммы (6.2.4).

2. Объем $\text{vol } \vec{T}^{(i)}$ ядра $\vec{T}^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } \vec{T}^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{vol } \vec{T}^{(0)}, \quad (6.2.11)$$

где определитель $\det \mathbf{A}$ удовлетворяет неравенству $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и объем $\text{vol } \vec{T}^{(0)}$ вычисляется по формуле (2.5.23).

3. В случае калибровочной матрицы \mathbf{A} с простым спектром имеют место неравенства:

$$|\vec{Q}_a \vec{\alpha}_1 - \vec{R}_{1,a}| + \dots + |\vec{Q}_a \vec{\alpha}_d - \vec{R}_{d,a}| \leq \vec{c}_1^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a. \quad (6.2.12)$$

Здесь $\vec{c}_1^{(0)} = c_1(\vec{\mathbf{A}}) r_1(\vec{v}_{\min}^{(0)})$, где $\vec{v}_{\min}^{(0)}$ — минимальный вектор (6.2.8), и $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус (2.5.7) матрицы \mathbf{A} ; кроме того, \vec{Q}_a и $\vec{R}_{k,a}$ для $k = 1, \dots, d$ — рекуррентные последовательности (6.2.6).

Доказательство. Диаграмма (6.2.5) есть ничто иное, как диаграмма (6.2.4) с начальной периодической точкой $\vec{\alpha}^{(0)} = \vec{\alpha}$ из (6.2.7) вместо $\alpha^{(0)} = \alpha$. Совершая указанный переход видим, что порядковая \mathbf{M} и калибровочная \mathbf{A} матрицы заменяются матрицами $\vec{\mathbf{M}}$ и $\vec{\mathbf{A}}$ соответственно, при этом характеристические многочлены и определители остаются инвариантными

$$ch_{\vec{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x), \quad ch_{\vec{\mathbf{A}}}(x) = ch_{\mathbf{A}}(x), \quad \det \vec{\mathbf{A}} = \det \vec{\mathbf{A}}. \quad (6.2.13)$$

Поэтому доказываемая теорема является переформулировкой теоремы 4.5.2. \square

6.3 Первообразные точки

6.3.1 Ветви: \mathfrak{D}_s -множество.

Пусть \mathfrak{D}_s — полугруппа, порождающаяся обратными возвратными отображениями ∂_*^{kl} из (2.2.12), (2.2.13) и симметриями $s = s_\sigma$ симплекса Δ , определенными в (2.1.10).

Для периодической точки α определим множество ее *ветвей* (branches)

$$\mathfrak{D}_s \mathcal{O}(\alpha) = \{\partial_*^{kl} \alpha^{(i)}; \quad \partial_*^{kl} \in \mathfrak{d}, \alpha^{(i)} \in \mathcal{O}(\alpha)\}. \quad (6.3.1)$$

Поскольку

$$\alpha^{(i)} = \partial_{i+1} \cdots \partial_p \alpha^{(0)},$$

то множество ветвей (6.3.1) будет порождаться

$$\mathfrak{D}_s \mathcal{O}(\alpha) = \mathfrak{D}_s(\alpha) \quad (6.3.2)$$

образами одной точки $\alpha = \alpha^{(0)}$ относительно действия полугруппы \mathfrak{D}_s . Вместо точки $\alpha = \alpha^{(0)}$ можно выбирать любую другую точку $\alpha^{(i)}$ из α -ствола $\mathcal{O}(\alpha)$.

6.3.2 Расширенная диаграмма.

Пусть $\alpha = \alpha^{(0)} \in \Delta$ — периодическая иррациональная точка $\delta(\alpha) = \alpha$ из (6.2.1) относительно полугруппы \mathcal{D}_s . Рассмотрим для нее *первообразную точку*

$$\alpha^{(-t)} = \partial^{(t)} \alpha^{(0)} \quad (6.3.3)$$

из множества ветвей

$$\mathfrak{D}_s(\alpha) = \mathfrak{D}_s \mathcal{O}(\alpha),$$

где

$$\partial^{(t)} = \partial_t^{(t)} \cdots \partial_1^{(t)} \quad (6.3.4)$$

— произвольное отображение из полугруппы \mathfrak{D}_s . Первообразная точка (6.3.3) снова принадлежит симплексу Δ .

Расширим диаграмму (6.2.4) следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha^{(-t)} & \xrightarrow{\delta_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\delta_1^{(t)}} & \alpha^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \alpha^{(i)} \rightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ v^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & v_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & v_t^{(i)} \rightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ T^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & T_t^{(i)} \rightarrow \dots \end{array} \quad (6.3.5)$$

Здесь

$$\delta^{(t)} = \delta_1^{(t)} \cdots \delta_t^{(t)} \quad (6.3.6)$$

— отображение из полугруппы \mathcal{D}_s , обратное отображению $\partial^{(t)}$ из (6.3.4), и

$$\sigma^{(t)} = \sigma_1^{(t)} \cdots \sigma_t^{(t)} \quad (6.3.7)$$

— последовательность дифференцирований звезд $v^{(i)}$, соответствующих возвратным отображениям из (6.3.6), при этом начальная звезда $v^{(-t)}$ во второй строке диаграммы (6.3.5) является нормированной звездой. Звезды $v_t^{(i)}$ для $i \geq 0$ из диаграммы (6.3.5) и звезды $v^{(i)}$ из диаграммы (2.4.2) связаны между собою

$$v_t^{(i)} = A_t v^{(i)} \quad (6.3.8)$$

невырожденным аффинным преобразованием пространства $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ с матрицей

$$A_t = A_*^{k_t^{(t)} l_t^{(t)}}(x^{(-t)}) \cdots A_*^{k_1^{(t)} l_1^{(t)}}(x^{(-1)}). \quad (6.3.9)$$

Если какое-то отображение $\delta_j^{(t)}$, входящее в (6.3.6), окажется симметрией s , то соответствующий множитель в (6.3.9) заменяется на симметрию. Поэтому, применяя теорему 2.4.1 для $i = ap \geq 0$, получаем формулу

$$v_t^{(i)} = \mathbf{A}_t^a v_t^{(0)} \quad (6.3.10)$$

преобразования звезд $v_t^{(i)}$ из диаграммы (6.3.5) с новой калибровочной матрицей

$$\mathbf{A}_t = A_t \mathbf{A} A_t^{-1}, \quad (6.3.11)$$

подобной через аффинный изоморфизм (6.3.8) матрице \mathbf{A} . Аналогично (6.3.8) связаны между собою и развертки тора

$$T_t^{(i)} = A_t T^{(i)}, \quad (6.3.12)$$

соответствующие звездам $v_t^{(i)}$ и $v^{(i)}$.

6.3.3 Аппроксимация первообразных точек.

Следуя (4.5.6) разобьем звезду

$$\widehat{v}^{(-t)} = \begin{pmatrix} v_0^{(-t)} \\ v_1^{(-t)} \\ \vdots \\ v_d^{(-t)} \end{pmatrix}$$

на единичные столбцы

$$\widehat{v}^{(-t)} = \begin{pmatrix} -\alpha^{(-t)} \\ -\alpha^{(-t)} + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha^{(-t)} + e_d \end{pmatrix} = -\alpha^{(-t)} E_0^{(-t)} + e_1 E_1^{(-t)} + \dots + e_d E_d^{(-t)}, \quad (6.3.13)$$

где $E_i^{(-t)}$ — столбцы (4.3.19). Напомним, что в столбцах E_i единица стоит на i -ом месте и нумерация элементов в E_i начинается с 0.

Дифференцированием звезд $\sigma^{(t)}$ из (6.3.7) отвечает порядковая матрица

$$D^{(t)} = D_1^{(t)} \cdots D_t^{(t)},$$

переводящая

$$\widehat{v}_t^{(0)} = D^{(t)} \widehat{v}^{(-t)} \quad (6.3.14)$$

звезду $\widehat{v}^{(-t)}$ из (6.3.13) сразу в звезду $\widehat{v}_t^{(0)}$ из диаграммы (6.3.5). Подставляя (6.3.13) в равенство (6.3.14), имеем

$$\widehat{v}_t^{(0)} = -\alpha^{(-t)} D^{(t)} E_0^{(-t)} + e_1 D^{(t)} E_1^{(-t)} + \dots + e_d D^{(t)} E_d^{(-t)} \quad (6.3.15)$$

или, вводя обозначения

$$E_0^{(0)} = D^{(t)} E_0^{(-t)}, \quad E_1^{(0)} = D^{(t)} E_1^{(-t)}, \quad \dots, \quad E_d^{(0)} = D^{(t)} E_d^{(-t)} \quad (6.3.16)$$

можем равенство (6.3.15) записать в более кратком виде

$$\widehat{v}_t^{(0)} = -\alpha^{(-t)} E_0^{(0)} + e_1 E_1^{(0)} + \dots + e_d E_d^{(0)}. \quad (6.3.17)$$

Если $i = ap$, то по теореме 2.4.1 имеем

$$v_t^{(i)} = \mathbf{M}^a v_t^{(0)}, \quad (6.3.18)$$

поэтому в силу (6.3.17) можем записать

$$v_t^{(i)} = -\alpha^{(-t)} \mathbf{Q}_a^{(t)} + e_1 \mathbf{R}_{1,a}^{(t)} + \dots + e_d \mathbf{R}_{d,a}^{(t)}, \quad (6.3.19)$$

где

$$\mathbf{Q}_a^{(t)} = \mathbf{M}^a E_0^{(0)}, \quad \mathbf{R}_{1,a}^{(t)} = \mathbf{M}^a E_1^{(0)}, \dots, \quad \mathbf{R}_{d,a}^{(t)} = \mathbf{M}^a E_d^{(0)}. \quad (6.3.20)$$

Пусть $\mathbf{1} = (1 1 \dots 1)$ — строка длины $d+1$. Тогда по теореме 1.2.2 и теореме 1.3.1 сумма

$$v_{\min,t}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v_t^{(i)} = v_{t,0}^{(i)} + v_{t,1}^{(i)} + \dots + v_{t,d}^{(i)} \quad (6.3.21)$$

будет *минимальным вектором*, который в силу (6.3.19) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min,t}^{(i)} = -\alpha^{(-t)} Q_a^{(t)} + e_1 R_{1,a}^{(t)} + \dots + e_d R_{d,a}^{(t)} \quad (6.3.22)$$

с коэффициентами

$$Q_a^{(t)} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_a^{(t)}, \quad R_{1,a}^{(t)} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{1,a}^{(t)}, \quad \dots, \quad R_{d,a}^{(t)} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{d,a}^{(t)}.$$

Из предложения 4.4.1 следует, что $Q_a^{(t)}, R_{1,a}^{(t)}, \dots, R_{d,a}^{(t)}$ являются *рекуррентными и последовательностями* от параметра a :

$$\begin{aligned} Q_{a+d+1}^{(t)} &= b_d Q_{a+d}^{(t)} + \dots + b_1 Q_{a+1}^{(t)} + b_0 Q_a^{(t)}, \\ R_{k,a+d+1}^{(t)} &= b_d R_{k,a+d}^{(t)} + \dots + b_1 R_{k,a+1}^{(t)} + b_0 R_{k,a}^{(t)} \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

для $k = 1, \dots, d$. Здесь b_d, \dots, b_1, b_0 — коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы \mathbf{M} , определенного в (4.4.4).

Найдем начальные условия для последовательности $Q_a^{(t)}$. По (6.3.16), (6.3.20) и (6.3.22) имеем

$$Q_0^{(t)} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_0^{(t)} = \mathbf{1} \cdot E_0^{(0)} = \mathbf{1} \cdot D_0^{(t)} E_0^{(-t)}. \quad (6.3.24)$$

Продолжая по аналогии видим, что для последовательностей $Q_a^{(t)}$ и $R_{k,a}^{(t)}$ будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} Q_0^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot D_0^{(t)} E_0^{(-t)}, & Q_1^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{M} D_0^{(t)} E_0^{(-t)}, & \dots, & Q_d^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{M}^d D_0^{(t)} E_0^{(-t)}, \\ R_{k,0}^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot D_0^{(t)} E_k^{(-t)}, & R_{k,1}^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{M} D_0^{(t)} E_k^{(-t)}, & \dots, & R_{k,d}^{(t)} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{M}^d D_0^{(t)} E_k^{(-t)} \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

для $k = 1, \dots, d$.

Теорема 6.3.1 1. Для $i = ap$ и иррациональной точки $\alpha^{(-t)}$, принадлежащей множеству ветвей $\mathfrak{D}_s(\alpha)$ из (6.3.1), вектор

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a^{(t)} \alpha_1^{(-t)} + R_{1,a}^{(t)}, \dots, -Q_a^{(t)} \alpha_d^{(-t)} + R_{d,a}^{(t)}) \quad (6.3.26)$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T_t^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } Q_a^{(t)} \geq 1. \quad (6.3.27)$$

Свойство (6.3.27) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha^{(-t)} \pmod{\mathbb{Z}^d}$ не попадает

$$x_j \notin T_t^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < Q_a \quad (6.3.28)$$

в ядро $T_t^{(i)}$ — многогранник (6.3.12), соответствующий звезде $v_t^{(i)}$ из диаграммы (6.3.5).

2. Объем $\text{vol } T_t^{(i)}$ ядра $T_t^{(i)}$ находится по формуле

$$\text{vol } T_t^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \text{ vol } T_t^{(0)}, \quad (6.3.29)$$

где определяль $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$.

3. В случае калибровочной матрицы \mathbf{A} с простым спектром имеют место неравенства:

$$|Q_a^{(t)} \alpha_1^{(-t)} - R_{1,a}^{(t)}| + \dots + |Q_a^{(t)} \alpha_d^{(-t)} - R_{d,a}^{(t)}| \leq c_{1,t}^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a. \quad (6.3.30)$$

Здесь

$$c_{1,t}^{(0)} = c_1(\mathbf{A}_t) r_1(v_{\min,t}^{(0)}), \quad (6.3.31)$$

где \mathbf{A}_t — калибровочная матрица (6.3.11), $v_{\min,t}^{(0)}$ — минимальный вектор (6.3.22), $\varrho(\mathbf{A})$ — спектральный радиус (2.5.7) матрицы \mathbf{A} ; кроме того, $Q_a^{(t)}$ и $R_{k,a}^{(t)}$ для $k = 1, \dots, d$ — рекуррентные последовательности (6.3.23) с начальными условиями (6.3.25).

Доказательство. По построению все звезды $v^{(*)}$ и $v_t^{(*)}$ из диаграммы (6.3.5) вкладываются в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Применяя к точке $\alpha^{(-t)} \in \Delta$ теорему 1.3.1 о дифференцировании звезд и учитывая формулу (6.3.12), получаем первое утверждение.

При переходе (6.3.11) от старой калибровочной матрицы \mathbf{A} к новой \mathbf{A}_t характеристические многочлены и определители остаются инвариантными

$$ch_{\mathbf{A}_t}(x) = ch_{\mathbf{A}}(x), \quad \det \mathbf{A}_t = \det \mathbf{A}. \quad (6.3.32)$$

Поэтому формула (6.3.29) и третье утверждение вытекают из теоремы 4.5.2, диаграммы (6.3.5) и равенств (6.3.32). \square

6.4 Крона

6.4.1 Линейные унимодулярные преобразования.

Выделим в группе целочисленных унимодулярных матриц $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 подгруппу $G_0 = GL_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U_L = \begin{pmatrix} U & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.4.1)$$

где $U \in GL_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ — целочисленный столбец. Группа G_0 действует

на точки $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$ из \mathbb{R}^d по формуле

$$U_L \alpha = U\alpha + L. \quad (6.4.2)$$

Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства \mathbb{R}^d . Определим α -крону (сома), полагая

$$\mathcal{C}(\alpha) = G_0(\mathfrak{D}_s \mathcal{O}(\alpha)), \quad (6.4.3)$$

или в силу равенства (6.3.2) будем иметь

$$\mathcal{C}(\alpha) = G_0 \mathfrak{D}_s(\alpha). \quad (6.4.4)$$

Из определения (6.4.3) следует инвариантность

$$G_0 \cdot \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\alpha) \quad (6.4.5)$$

α -кроны $\mathcal{C}(\alpha)$ относительно действия группы G_0 .

6.4.2 Свойства кроны.

Имеют место следующие включения

$$\mathcal{O}(\alpha) \subset \mathfrak{D}_s(\alpha) \subset \Delta, \quad \mathcal{C}(\alpha) \subset \mathbb{R}^d. \quad (6.4.6)$$

Для любой точки \mathbf{a} из α -кроны $\mathcal{C}(\alpha)$ найдется такая матрица $U_L \in G_0$, что

$$\mathbf{a} = U_L \alpha^{(-t)}, \quad (6.4.7)$$

где точка $\alpha^{(-t)} = \partial_t \cdots \partial_1 \alpha \in \Delta$ принадлежит множеству α -ветвей $\mathfrak{d}(\alpha)$. Из представления (6.4.7), в частности, находим следующие *инварианты*:

$$\mathbb{Q}(\mathbf{a}) = \mathbb{Q}(\alpha), \quad \deg(\mathbf{a}) = \deg(\alpha). \quad (6.4.8)$$

6.4.3 Аппроксимация точек кроны.

По теореме 6.3.1 для $i = ap$ имеем неравенство

$$|Q_a^{(t)} \alpha_1^{(-t)} - R_{1,a}^{(t)}| + \dots + |Q_a^{(t)} \alpha_d^{(-t)} - R_{d,a}^{(t)}| \leq c_{1,t}^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a. \quad (6.4.9)$$

Здесь $c_{1,t}^{(0)} = c_1(\mathbf{A}_t) r_1(v_{\min,t}^{(0)})$ и \mathbf{A}_t — калибровочная матрица (6.3.11). Введем обозначение

$$v_{\min,t}^{(i)} = -Q_a^{(t)} \alpha^{(-t)} + R_a^{(t)}, \quad (6.4.10)$$

где

$$\alpha^{(-t)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(-t)} \\ \vdots \\ \alpha_d^{(-t)} \end{pmatrix}, \quad R_a^{(t)} = \begin{pmatrix} R_{1,a}^{(t)} \\ \vdots \\ R_{d,a}^{(t)} \end{pmatrix}. \quad (6.4.11)$$

Из (6.4.9) для вектора-столбца $v_{\min,t}^{(i)}$ следует неравенство

$$|v_{\min,t}^{(i)}|_1 \leq c_{1,t}^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a \quad (6.4.12)$$

в 1-метрике (2.5.9).

Используя представление (6.4.7) записываем

$$\alpha^{(-t)} = U_L^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.4.13)$$

где

$$U_L^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_d \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем

$$\alpha^{(-t)} = U^{-1} \mathbf{a} - U^{-1} L. \quad (6.4.14)$$

Подставляя (6.4.14) в (6.4.10) получаем

$$v_{\min,t}^{(i)} = U^{-1}w_{\min}^{(i)}, \quad (6.4.15)$$

где

$$w_{\min}^{(i)} = -Q_a^{(-t)}\alpha + (UR_a^{(-t)} + L). \quad (6.4.16)$$

Если обозначить

$$q_a = Q_a^{(-t)}, \quad r_a = UR_a^{(-t)} + L, \quad (6.4.17)$$

то (6.4.16) можем переписать в виде

$$w_{\min}^{(i)} = -q_a\alpha + r_a. \quad (6.4.18)$$

Согласно равенству (6.4.15)

$$w_{\min}^{(i)} = Uv_{\min,t}^{(i)}, \quad (6.4.19)$$

поэтому в 1-метрике $|\cdot|_1$ будет выполняться неравенство

$$|w_{\min}^{(i)}|_1 \leq c_1(U)|v_{\min,t}^{(i)}|_1. \quad (6.4.20)$$

Вспоминая неравенство (6.4.12), получаем оценку

$$|w_{\min}^{(i)}|_1 \leq c_{1,U}\varrho(\mathbf{A})^a \quad (6.4.21)$$

с константой $c_{1,U} = c_1(U)c_{1,t}^{(0)}$, где $c_1(U)$ и $c_{1,t}^{(0)}$ — константы (5.6.2) и (6.3.30). В силу (6.4.18) неравенство (6.4.21) можем записать более развернуто

$$|q_a\alpha_1 - r_{1,a}| + \dots + |q_a\alpha_d - r_{d,a}| \leq c_{1,U}\varrho(\mathbf{A})^a, \quad (6.4.22)$$

где q_a и $r_{k,a}$ для $k = 1, \dots, d$ — рекуррентные последовательности (6.4.17), имеющие рекуррентное соотношение такое же, как у $Q_a^{(t)}$, $R_{k,a}^{(t)}$ и, значит, как у последовательностей Q_a , $R_{k,a}$ для точки α . Что касается начальных условий, то у последовательности q_a они совпадают с условими для $Q_a^{(t)}$ из (6.3.20), а у дополнительной последовательности

$$r_a = \begin{pmatrix} r_{1,a} \\ \vdots \\ r_{d,a} \end{pmatrix}$$

по определению (6.4.17) будем иметь

$$r_0 = UR_0^{(t)} + L, \quad \dots, \quad r_d = UR_d^{(t)} + L. \quad (6.4.23)$$

Теперь расширим диаграмму (6.3.5) дополнительной строкой:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha^{(-t)} & \xrightarrow{\delta_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\delta_1^{(t)}} & \alpha^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \alpha^{(i)} & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ v^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & v_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & v_t^{(i)} & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ T^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & T_t^{(i)} & \rightarrow & \dots \\ \downarrow U & & & & \downarrow U & & & & \downarrow U & & \\ T_w^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_{t,U}^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & T_{t,U}^{(i)} & \rightarrow & \dots \end{array} \quad (6.4.24)$$

Здесь

$$T_{t,U}^{(i)} = UT_t^{(i)} \quad (6.4.25)$$

— унимодулярные образы многогранников $T_t^{(i)}$ из диаграммы (6.3.5), где $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ — матрица (6.4.1).

Теорема 6.4.1 1. Для $i = ap$ и любой иррациональной α — точки α -кроны $\mathcal{C}(\alpha)$ из (6.4.4) вектор

$$w_{\min}^{(i)} = (-q_a \alpha_1 + r_{1,a}, \dots, -q_a \alpha_d + r_{d,a}) \quad (6.4.26)$$

обладает минимальным свойством:

$$w_{\min}^{(i)} \in T_{t,U}^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } q_a \geq 1. \quad (6.4.27)$$

Свойство (6.4.27) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}$ не попадает

$$x_j \notin T_{t,U}^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < q_a \quad (6.4.28)$$

в ядро $T_{t,U}^{(i)}$ — многогранник (6.4.25).

2. Объем $\mathrm{vol} T_{t,U}^{(i)}$ ядра $T_{t,U}^{(i)}$ находится по формуле

$$\mathrm{vol} T_{t,U}^{(i)} = |\det \mathbf{A}|^a \mathrm{vol} T_t^{(0)}, \quad (6.4.29)$$

где $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$.

3. В случае калибровочной матрицы \mathbf{A} с простым спектром имеют место неравенства:

$$|q_a \alpha_1 - r_{1,a}| + \dots + |q_a \alpha_d - r_{d,a}| \leq c_{1,U} \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (6.4.30)$$

где $c_{1,U}$ — константа из (6.4.21) и $q_a, r_{k,a}$ для $k = 1, \dots, d$ — рекуррентные последовательности (6.4.17) с начальными условиями (6.3.25) и (6.4.23).

Доказательство. По условию (6.4.1) матрица $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, поэтому отображение

$$\mathbb{T}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^d : x \pmod{\mathbb{Z}^d} \mapsto Ux \pmod{\mathbb{Z}^d} \quad (6.4.31)$$

является автоморфизмом тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Применяя теорему 1.3.1 для точки $\alpha^{(-t)}$, из диаграммы (6.4.24) и (6.4.31) получаем первое утверждение. Формула (6.4.29) вытекает из теоремы 6.3.1, если заметить, что

$$\mathrm{vol} T_{t,U}^{(i)} = \mathrm{vol} UT_t^{(i)} = \mathrm{vol} T_t^{(i)}$$

по определению (6.4.25) многогранника $T_{t,U}^{(i)}$. Третье утверждение было ранее доказано в (6.4.22). □

Из теоремы 6.4.1 вытекает

Следствие 6.4.1 1. Рекуррентное соотношение для числителей и знаменателей подходящих дробей в (6.3.30) и (6.4.30) является инвариантом относительно произведения $G_0 \times \mathfrak{D}_s$ группы $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ и полугруппы \mathfrak{D}_s .

2. Все точки α из кроны $\mathcal{C}(\alpha)$, определенной в (6.4.3), имеют одну и ту же скорость приближения $\varrho(\mathbf{A})^a$ в неравенстве (6.4.30).

6.5 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Доказательство того, что приближения (6.3.30) являются наилучшими относительно $T^{(i)}$ -норм (2.5.46), опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [23], [24], [26]. Теорема 6.3.1 для приближений кубических иррациональностей была доказана в [27], а для иррациональностей произвольной степени в [28].

Полугруппа многомерных возвратных отображений \mathcal{D}_s была введена и изучена в [26], [27]. Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [66], [113], а двумерные возвратные отображения — для проверки периодичности разложений кубических корней [71] и для приближений кубических иррациональностей [27].

Часть III

Алгоритмы разложения в многомерные цепные дроби

Глава 7

Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби

Рассматривается симплекс-модульный алгоритм (\mathcal{SM} -алгоритм) разложения вещественных алгебраических чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные периодические цепные дроби. Основу предлагаемого алгоритма составляют:

- 1) минимальные рациональные симплексы \mathbf{s} , содержащие точку α ;
- 2) целочисленные унимодулярные матрицы Пизо P_α , для которых $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d, 1)$ — собственный вектор.

\mathcal{SM} -алгоритм относится к категории настраиваемых алгоритмов. Чтобы получить разложение в цепную дробь α , требуется знание хотя бы одной единицы Пизо из поля $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и предварительная настройка \mathcal{SM} -алгоритма на точку α . Данный алгоритм позволяет получать наилучшие приближения порядка $\frac{1}{Q_a^{1+\varepsilon}}$, где Q_a ($a = 0, 1, 2, \dots$) — знаменатели подходящих дробей и показатель $\varepsilon > 0$ зависит от настройки \mathcal{SM} -алгоритма.

7.1 Введение

7.1.1 Полные точки.

Точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор алгебраических действительных чисел чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ называются *полными*, если выполняется соотношение

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha). \quad (7.1.1)$$

Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$ обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ над полем рациональных чисел \mathbb{Q} и $\mathbb{Q}(\alpha)$ — поле, полученное расширением поля \mathbb{Q} добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Из определения, в частности, следует иррациональность точки α , т.е. линейная независимость $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ над кольцом целых рациональных чисел \mathbb{Z} .

Определим степень $\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ точки α над полем \mathbb{Q} . Если α — полная точка, то выполняется равенство

$$\deg \alpha = d + 1. \quad (7.1.2)$$

7.1.2 Матрицы Пизо.

В данной главе строятся унимодулярные матрицы P_α порядка $d + 1$, обладающие свойством

$$P_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.1.3)$$

где $\lambda > 1$ — некоторая единица Пизо поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. Это означает, что все ее сопряженные $\lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(d+1)}$, кроме $\lambda^{(1)} = \lambda$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda^{(2)}| < 1, \dots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$. Такие матрицы P_α называются матрицами Пизо.

7.1.3 Подходящие дроби и рекуррентные соотношения.

Пусть матрица Пизо P_α из (7.1.3) имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0.$$

Зададим бесконечную последовательность из рациональных точек

$$\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \quad (7.1.4)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$, координаты каждой из которых имеют один и тот же знаменатель Q_a , с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P_{a+d+1,i} &= b_d P_{a+d,i} + \dots + b_1 P_{a+1,i} + b_0 P_{a,i}, \\ Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \dots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

для $i = 1, \dots, d$ и $a = 0, 1, 2, \dots$

7.1.4 Основной результат.

В теореме 7.8.2 доказано, что можно так выбрать начальные условия в (7.1.5), при которых будет иметь место следующее утверждение.

Пусть точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ будет полной. Тогда для всех $a \geq l_\alpha$, где граница l_α зависит от α и начальных условий в (7.1.5), выполняется неравенство

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_{a,1}}{Q_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right| \leq \frac{c}{Q_a^{1+\varepsilon}} \quad (7.1.6)$$

с показателем

$$\varepsilon = \frac{\ln \lambda_{2,\max}}{\ln \lambda} > 0, \quad (7.1.7)$$

где

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\lambda^{(j)}|,$$

и константой c , не зависящей от a .

7.1.5 Алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.

Основу предлагаемого симплекс-модулярного алгоритма (\mathcal{SM} -алгоритма)

$$\mathcal{SM} : \frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \longrightarrow \alpha \text{ при } a \rightarrow +\infty \quad (7.1.8)$$

построения многомерных подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ из (7.1.4) составляют:

1) d -мерные минимальные рациональные симплексы \mathbf{s} , содержащие точку α ;

и

2) матрицы Пизо P_α , обладающие свойством (7.1.3).

Каждый такой симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \left(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i} \right)$, где $i = 0, 1, \dots, d$, со знаменателями $\mathbf{Q}_i > 0$, удовлетворяющими условиям

$$\text{НОД}(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1,$$

и обладает свойством минимальности: симплекс \mathbf{s} не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \quad (7.1.9)$$

никакой точки $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \left(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}} \right)$, координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где $\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d$.

Минимальные симплексы \mathbf{s} являются многомерным обобщением отрезков Фарея (см., например, [9]). Аналогично отрезкам Фарея симплексы \mathbf{s} имеют объем

$$\text{vol } \mathbf{s} = \frac{1}{d!} \left(\prod_{0 \leq i \leq d} \mathbf{Q}_i \right)^{-1}.$$

Используя свойство минимальности (7.1.9) в теореме 7.8.1 доказывается, что при специальном выборе начальных условий в (7.1.5) подходящие дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ становятся многомерными долями Фарея, дающими наилучшие приближения относительно некоторой многогранной нормы.

Что касается второй составляющей \mathcal{SM} -алгоритма (7.1.8) — матриц Пизо P_α из (7.1.3), то для их нахождения требуются некоторые факты из элементарной теории алгебраических числовых полей и в ситуации произвольной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ необходимо уметь вычислять полные системы основных единиц соответствующего поля $\mathbb{Q}(\alpha)$.

7.2 Унимодулярный базисный симплекс

7.2.1 Линейные унимодулярные преобразования.

Основной областью для нас будет замкнутый d -мерный единичный симплекс $\Delta_e = \Delta_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1) \quad (7.2.1)$$

из пространства \mathbb{R}^d .

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 подгруппу $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.2.2)$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ — произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из \mathbb{R}^d по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \quad (7.2.3)$$

где α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства \mathbb{R}^d .

7.2.2 Унимодулярный симплекс.

Предложение 7.2.1 *Если α — иррациональная точка (1.2.21), то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \Delta_U^d, \quad (7.2.4)$$

т.е. $\Delta_U^d = U\Delta_e^d$.

Доказательство. Выберем матрицу U' с блоком

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{d-1,d} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L' с последним элементом $l'_d = 0$. Имеем

$$U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + l'_1 \\ \alpha_2 + a'_{23}\alpha_3 + l'_2 \\ \dots \\ \alpha_{d-1} + a'_{d-1,2}\alpha_d + l'_{d-1} \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \quad (7.2.5)$$

Из иррациональности точки α следует, что пары чисел $\alpha_i, 1$ для всех $i = 2, \dots, d$ линейно независимы над \mathbb{Z} . Поэтому в (7.2.5) найдутся такие целые числа a'_{ij} и l'_i , что у точки

$$\alpha' = U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \end{pmatrix}$$

первые $d - 1$ координат попадут в интервал $(0, 1/d)$. Далее выбираем матрицу U'' с блоком

$$V'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a''_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L'' с элементами $l''_1 = 0, \dots, l''_{d-1} = 0$. Так как $\alpha'_d = \alpha_d$, то получаем

$$U''\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_{d-1} \\ u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha'_1, 1$ снова линейно независимы над \mathbb{Z} . Поэтому можно подобрать целые числа u''_{d1} и l''_d с условием $u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \in (0, 1/d)$ и, значит, точка $\alpha'' = U''\alpha'$ содержится

$$\alpha'' \in \Delta_e^d \quad (7.2.6)$$

в симплексе Δ_e^d . Остается заметить, что матрица $U = (U''U')^{-1}$ принадлежит подгруппе G_0 и для нее в силу (7.2.6) будет выполняться включение (7.2.4).

□

Симплекс Δ_U^d из (7.2.4) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки \mathbb{Z}^d .

7.3 Единицы алгебраических полей

7.3.1 Основные единицы.

Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \quad (7.3.1)$$

— алгебраическое расширение степени $d + 1 = r + 2c$ поля рациональных чисел \mathbb{Q} , где $r \geq 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [2]). Выберем в \mathbb{F} некоторую *полную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$, где $t = r + c - 1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими группы единиц \mathcal{E} , имеющей максимально возможный *ранг* t . Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \dots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|, \dots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \quad (7.3.2)$$

множества единиц \mathcal{E} в пространство \mathbb{R}^{t+1} , где $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(r)}$ — вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)}, \dots, \varepsilon^{(r+c)}$ — комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$. Отображение (7.3.2) будет вложением $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы \mathcal{E} в векторное пространство \mathbb{R}^{t+1} с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \quad (7.3.3)$$

7.3.2 Единицы Пизо.

Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \quad \text{и} \quad |\zeta^{(i)}| < 1 \quad \text{для остальных сопряжений } i > 1. \quad (7.3.4)$$

Обозначим через $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо ζ из группы \mathcal{E} . Из определения (7.3.4) следует замкнутость множества \mathcal{P} относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$. Поэтому множество \mathcal{P} образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (7.3.4).

Предложение 7.3.1 1. Если ранг $t \geq 1$, то группа единиц \mathcal{E} содержит единицу Пизо (7.3.4) и, значит, $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

2. Любая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень

$$\deg(\zeta) = d + 1. \quad (7.3.5)$$

Здесь степень $\deg(\zeta)$ числа ζ определяется равенством $\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta)$, где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем \mathbb{Q} .

Доказательство. 1. Из определения отображения (7.3.2) следует, что образ $x(\mathcal{E})$ группы единиц \mathcal{E} содержится в гиперплоскости

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{t+1}; \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \quad (7.3.6)$$

где $\mathbf{n} \cdot x$ — скалярное произведение x с вектором $\mathbf{n} = (1, \dots, 1)$ размерности $t+1$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot x(\varepsilon) &= \ln|\varepsilon^{(1)}| + \dots + \ln|\varepsilon^{(r)}| + 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}| + \dots + 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}| = \\ &= \ln(|\varepsilon^{(1)} \cdots \varepsilon^{(r)}| \cdot |\varepsilon^{(r+1)}|^2 \cdots |\varepsilon^{(r+c)}|^2) = \ln|\text{Norm}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\varepsilon)|,\end{aligned}$$

где $\text{Norm}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = \pm 1$ — норма единицы ε . Следовательно, выполняется условие

$$\mathbf{n} \cdot x(\varepsilon) = 0 \quad (7.3.7)$$

для всех единиц $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Поскольку $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ — вложение, то в силу свойства (7.3.7) множество единиц \mathcal{E} также вкладывается $x : \mathcal{E} \hookrightarrow P$ в гиперплоскость (7.3.6) и образует на ней ввиду сохранения операций (7.3.3) *полную решетку* [2]

$$x(\mathcal{E}) \subset P \quad (7.3.8)$$

размерности t с базисом $x(\varepsilon_1), \dots, x(\varepsilon_t)$ над кольцом \mathbb{Z} , также являющимся, но уже над полем \mathbb{R} , базисом t -мерного подпространства $P \subset \mathbb{R}^{t+1}$.

Выделим на гиперплоскости P бесконечный конус $\angle P \subset P$ с ребрами, имеющими направления $(1, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, 0, \dots, -1)$. Данный конус является открытым выпуклым и имеет размерность $\dim \angle P = t$. Следовательно, в силу полноты (7.3.8) решетки $x(\mathcal{E})$ будем иметь

$$x(\mathcal{E}) \cap \angle P \neq \emptyset. \quad (7.3.9)$$

Используя (7.3.9) можем найти такую единицу $\varepsilon \in \mathcal{E}$, чей образ $x(\varepsilon)$ принадлежит конусу $\angle P$. Тогда из определения конуса $\angle P$ и (7.3.4) следует, что данная ε будет единицей Пизо $\varepsilon = \zeta \in \mathcal{P}$. Таким образом, доказано $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

2. Если некоторая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень $\deg(\zeta) < d+1$, то она будет равна

$$\zeta = \zeta^{(i)} \quad (7.3.10)$$

одной из своих сопряженных $\zeta^{(i)}$ для $i > 1$. Но по определению (7.3.4) единиц Пизо равенство (7.3.10) не возможно, что доказывает второе утверждение (7.3.5). \square

7.4 Модульные матрицы Пизо

7.4.1 Модули.

Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ — единица Пизо (7.3.4). По предложению 7.3.1 ее степени $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ линейно независимы над \mathbb{Q} . Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \quad (7.4.1)$$

с полем (7.3.1) и *модулем*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \dots, \zeta^d] \quad (7.4.2)$$

над кольцом \mathbb{Z} будет полным, т.е. числа $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ образуют базис поля \mathbb{F} над \mathbb{Q} .

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : x \mapsto \zeta \cdot x. \quad (7.4.3)$$

Из определения (7.4.2) вытекает, что отображение (7.4.3) задает автоморфизм модуля \mathcal{M}_ζ . Поскольку $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ — базис модуля \mathcal{M}_ζ , то найдется квадратная целочисленная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \quad (7.4.4)$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.4.5)$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей представления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \dots, \zeta^d$.

7.4.2 Матрицы Фробениуса.

Выпишем для единицы ζ ее *минимальный многочлен*

$$f_\zeta(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0, \quad (7.4.6)$$

имеющий целые коэффициенты a_i . Его свободный член $a_0 = \pm 1$, так как он равен $a_0 = (-1)^{d+1} \text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)$, где норма единицы $\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \pm 1$. Многочлен $f_\zeta(x)$ имеет разложение

$$f_\zeta(x) = (x - \zeta^{(1)})(x - \zeta^{(2)}) \cdots (x - \zeta^{(d+1)}), \quad (7.4.7)$$

где корни $\zeta = \zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(i)}$ для $i > 1$ все различные и удовлетворяют условиям (7.3.4). Принимая во внимание (7.4.6), можем матрицу представления U_ζ из (7.4.4) записать в явном виде

$$U_\zeta = \begin{pmatrix} -a_d & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.4.8)$$

Матрица U_ζ принадлежит группе *унимодулярных матриц* $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ — целочисленных квадратных матриц порядка $d+1$ с определителем ± 1 . Построенная по многочлену $f_\zeta(x)$ из (7.4.6) матрица (7.4.8) называется *матрицей Фробениуса*. Такая матрица имеет характеристический многочлен

$$\text{ch}_\zeta(x) = f_\zeta(x). \quad (7.4.9)$$

7.4.3 Матрица перехода T .

Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d] \quad (7.4.10)$$

— произвольный полный модуль над кольцом \mathbb{Z} в поле \mathbb{F} . Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (7.4.10), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \quad (7.4.11)$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ — модулем (7.4.10) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ — расширением поля рациональных чисел \mathbb{Q} добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Из (7.4.1) и (7.4.10), в частности, следует иррациональность (1.2.21) точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, а из (7.4.11) — равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки α ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \quad (7.4.12)$$

над полем \mathbb{Q} . Если α — полная точка, то из (7.4.1) и (7.4.10) следует $\deg \alpha = d+1$. Далее, пусть T — *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T \widehat{\zeta} \quad (7.4.13)$$

от базиса полного модуля \mathcal{M}_ζ к базису модуля \mathcal{M}_α . Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю \mathcal{M}_α добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4.14)$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль \mathcal{M}_α также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

7.4.4 Модульные матрицы.

Воспользуемся (7.4.13) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (7.4.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1} \widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \quad (7.4.15)$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = T U_\zeta T^{-1}, \quad (7.4.16)$$

сопряженной унимодулярной матрице U_ζ . Для модуля \mathcal{M}_α из (7.4.10) матрицу, обладающую свойством (7.4.15), назовем *модульной матрицей*.

7.4.5 Унимодулярные модульные матрицы.

Уровень

$$l(T) = t \quad (7.4.17)$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ — целочисленная матрица.

Нам потребуется еще показатель $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t — это такое наименьшее натуральное число ν , для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \pmod{t}, \quad (7.4.18)$$

где $E = E_{d+1}$ — единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \pmod{t}$.

Проведем следующие вычисления с матрицей M_α из (7.4.16). В силу (7.4.18) последовательно находим

$$aM_\alpha^\nu \equiv TU_\zeta^\nu T^* \equiv TT^* = tE \equiv 0 \pmod{t},$$

т.е. $tM_\alpha^\nu = tM$, где M — целочисленная матрица. Поэтому матрица $M_\alpha^\nu = M$ целая и ее определитель по (7.4.16) равен

$$\det M_\alpha^\nu = \det(TU_\zeta^\nu T^{-1}) = \det(U_\zeta)^\nu = \pm 1.$$

Отсюда следует, что при такой степени ν матрица $U_\alpha = M_\alpha^\nu$ будет унимодулярной. Для нее будем использовать обозначение

$$P_\alpha = M_\alpha^\nu. \quad (7.4.19)$$

Предложение 7.4.1 Пусть \mathcal{M}_α — произвольный полныи модуль (7.4.10) из поля \mathbb{F} и P_α — унимодулярная матрица (7.4.19). Тогда имеет место равенство

$$P_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \quad (7.4.20)$$

где $\widehat{\alpha}$ — столбец (7.4.14) и $\lambda = \zeta^\nu > 1$ — единица Пизо (7.3.4).

Доказательство вытекает из (7.4.19), равенства (7.4.15) и условия, что $\zeta > 1$ — единица Пизо (7.3.4). \square

Матрицу P_α из (7.4.20) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко — *матрицей Пизо*.

7.5 Аппроксимация

7.5.1 Разложение модульной матрицы Пизо.

Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (7.4.14) и $\widehat{\zeta}$ из (7.4.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \quad (7.5.1)$$

— порядка $d + 1$. Матрица Z невырождена и в силу равенства (7.4.13) можем записать

$$A = TZ. \quad (7.5.2)$$

Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A -базис) в пространстве \mathbb{R}^{d+1} .

Пусть P_α — модульная матрица Пизо. Из (7.4.20) получаем

$$P_\alpha A = (\lambda^{(1)} \hat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)} \hat{\alpha}^{(d+1)}) = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \quad (7.5.3)$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$P_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \quad (7.5.4)$$

7.5.2 Линейные отображения модульной матрицей Пизо.

Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^d$ соответствующий ему столбец \hat{x} разложим

$$\hat{x} = Ax' \quad (7.5.5)$$

по A -базису, где $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{d+1} \end{pmatrix}$. Используя разложения (7.5.4) и (7.5.5), имеем

$$P_\alpha^a \hat{x} = A\Lambda^a A^{-1} \hat{x} = A\Lambda^a x' = A \begin{pmatrix} \lambda_1^a x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где обозначили $\lambda_j = \lambda^{(j)}$. Теперь умножая на матрицу A , окончательно получаем формулу

$$P_\alpha^a \hat{x} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^a \\ \vdots \\ \Lambda_d^a \\ \Lambda_{d+1}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \lambda_1^a x'_1 + \dots + \alpha_{1,d+1} \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \dots \\ \alpha_{d1} \lambda_1^a x'_1 + \dots + \alpha_{d,d+1} \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \lambda_1^a x'_1 + \dots + \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (7.5.6)$$

где Λ_i^a — линейные формы от $\lambda_1^a, \dots, \lambda_{d+1}^a$ и α_{ij} — коэффициенты матрицы $A = (\alpha_{ij})$. Из определения (7.5.1) следует

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \dots, \alpha_{d1} = \alpha_d \quad (7.5.7)$$

равны коэффициентам столбца $\hat{\alpha}$ из (7.4.14); и у матрицы A коэффициенты последней строки $\alpha_{d+1,j} = 1$ для всех $j = 1, \dots, d + 1$. Из последних равенств вытекает вид формы Λ_{d+1}^a .

7.5.3 Дробно-линейные преобразования.

Определим дробно-линейные преобразования в пространстве \mathbb{R}^d . Если $M = (a_{ij})$ — вещественная квадратная матрица порядка $d + 1$ и $x \in \mathbb{R}^d$, то полагаем

$$M\langle x \rangle = \left(\frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda_{d+1}(M, x)}, \dots, \frac{\lambda_d(M, x)}{\lambda_{d+1}(M, x)} \right), \quad (7.5.8)$$

где

$$\lambda_i(M, x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$$

— линейные неоднородные формы для $i = 1, \dots, d + 1$. Преобразования (7.5.8) обладают свойством ассоциативности

$$M_1\langle M_2\langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x \rangle, \quad (7.5.9)$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначено произведение матриц M_1 и M_2 . Поскольку $E_{d+1}\langle x \rangle = x$ для единичной матрицы E_{d+1} порядка $d + 1$, то из свойства (7.5.9) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x \rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x' \rangle. \quad (7.5.10)$$

Используя формулу (7.5.6) и определение (7.5.8), приходим к формуле

$$P_\alpha^a\langle x \rangle = \left(\frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a}, \dots, \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right). \quad (7.5.11)$$

7.5.4 Оценка расстояния.

Нас будет интересовать расстояние

$$|\alpha - P_\alpha^a\langle x \rangle|_1 = \left| \alpha_1 - \frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right| \quad (7.5.12)$$

в 1-метрике (2.5.9) между точкой

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad (7.5.13)$$

и точкой $P_\alpha^a\langle x \rangle$ из (7.5.11). Принимая во внимание (7.5.6) и (7.5.7), имеем

$$\begin{aligned} \left| \alpha_i - \frac{\Lambda_i^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right| &= \left| \alpha_i - \frac{\alpha_i \lambda_1^a x'_1 + \dots + \alpha_{i,d+1} \lambda_{d+1}^a x'_{d+1}}{\lambda_1^a x'_1 + \dots + \lambda_{d+1}^a x'_{d+1}} \right| \\ &= \left| \frac{(\alpha_i - \alpha_{i2}) \lambda_2^a x'_2 + \dots + (\alpha_i - \alpha_{i,d+1}) \lambda_{d+1}^a x'_{d+1}}{\lambda_1^a x'_1 + \dots + \lambda_{d+1}^a x'_{d+1}} \right| \\ &= \left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1} \right)^a c_{\alpha,x,i}(a). \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

Здесь использовали сокращение

$$c_{\alpha,x,i}(a) = \left| \frac{(\alpha_i - \alpha_{i2}) x'_2 + (\alpha_i - \alpha_{i,3}) \lambda_3''^a x'_3 + \dots + (\alpha_i - \alpha_{i,d+1}) \lambda_{d+1}''^a x'_{d+1}}{x'_1 + \lambda_2'^a x'_2 + \dots + \lambda_{d+1}'^a x'_{d+1}} \right|, \quad (7.5.15)$$

где обозначили $\lambda'_j = \lambda_j/\lambda_1$ для $j = 2, \dots, d+1$ и $\lambda''_j = \lambda_j/\lambda_2$ для $j = 3, \dots, d+1$.

Не уменьшая общности, будем предполагать $|\lambda_2| = \lambda_{2,\max}$, где

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\lambda_j| = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\lambda^{(j)}|. \quad (7.5.16)$$

При таком предположении выполняются неравенства $|\lambda''_j| \leq 1$.

Оценим сверху числитель y_i и снизу знаменатель z_i у дроби в (7.5.15). Для всех $i = 1, \dots, d+1$ имеет место общее неравенство

$$|y_i| \leq 2 |A|_{\max} |x'|_1, \quad (7.5.17)$$

где

$$|A|_{\max} = \max_{1 \leq i, j \leq d+1} |\alpha_{ij}| \quad (7.5.18)$$

— max-норма матрицы A . При оценке знаменателя z_i учтем, что

$$|\lambda'_j| \leq \lambda_{2,\max}/\lambda_1 < 1.$$

Поэтому

$$|\lambda'_2 x'_2 + \dots + \lambda'_{d+1} x'_{d+1}| \leq \left(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\right)^a |x'|_1. \quad (7.5.19)$$

Начиная с этого места, будем предполагать выполненным условие

$$x'_1 \neq 0. \quad (7.5.20)$$

Если степень a выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\left(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\right)^a |x'|_1 \leq \frac{1}{2} |x'_1|,$$

равносильное

$$a \geq \ln \frac{2|x'|_1}{|x'_1|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}, \quad (7.5.21)$$

то знаменатель z_i дроби в (7.5.15) будет удовлетворять неравенству

$$|z_i| \geq \frac{1}{2} |x'_1|. \quad (7.5.22)$$

Собирая вместе (7.5.15), (7.5.17) и (7.5.22) получаем оценку

$$c_{\alpha,x,i}(a) \leq 4 |A|_{\max} \frac{|x'|_1}{|x'_1|} \quad (7.5.23)$$

при выполнении условия (7.5.21).

Предложение 7.5.1 Пусть точка $x \in \mathbb{R}^d$ имеет первую координату $x'_1 \neq 0$ в A -базисе (7.5.5) и степень a удовлетворяет неравенству

$$a \geq l_\alpha(x), \quad (7.5.24)$$

где через $l_\alpha(x)$ обозначена правая часть неравенства (7.5.21). Тогда расстояние между точкой α из (7.5.13) и образом $P_\alpha^a \langle x \rangle$ точки x из (7.5.11) относительно дробно-линейного преобразования с модульной матрицей P изо P_α из (7.4.20) оценивается как

$$|\alpha - P_\alpha^a \langle x \rangle|_1 \leq c_{\alpha,x} \left(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1} \right)^a. \quad (7.5.25)$$

Здесь константа

$$c_{\alpha,x} = 4d |A|_{\max} \frac{|x'|_1}{|x'_1|} \quad (7.5.26)$$

не зависит от степени a и $\lambda_{2,\max}$ определено в (7.5.16).

Доказательство следует из формул (7.5.12), (7.5.14) и неравенства (7.5.23). \square

7.6 Минимальные симплексы

7.6.1 Минимальные рациональные симплексы.

Пусть открытый d -мерный симплекс s имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \left(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i} \right) \quad (7.6.1)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ с условием

$$\mathbf{Q}_i > 0, \quad \text{НОД}(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1. \quad (7.6.2)$$

Назовем s *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin s \quad (7.6.3)$$

никакой точки

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \left(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}} \right), \quad (7.6.4)$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где использовали обозначение

$$\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d. \quad (7.6.5)$$

Предложение 7.6.1 Следующие утверждения равносильны:

- 1) симплекс s минимальный;
- 2) матрица

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{d1} \\ \mathbf{P}_{0d} & \mathbf{P}_{1d} & \dots & \mathbf{P}_{dd} \\ \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_d \end{pmatrix} \quad (7.6.6)$$

унимодулярна;

3) симплекс \mathbf{s} имеет объем

$$\text{vol } \mathbf{s} = \frac{1}{d!} \left(\prod_{0 \leq i \leq d} \mathbf{Q}_i \right)^{-1}. \quad (7.6.7)$$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Множество

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} \quad (7.6.8)$$

из векторов \mathbf{v}_i с координатами из столбцов матрицы (7.6.6) образует целочисленный базис пространства \mathbb{R}^{d+1} и порождает некоторую полную подрешетку $\mathbf{L} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$. Кроме того, базис \mathbf{V} определяет бесконечный открытый конус $\angle \mathbf{V}$, состоящий из точек вида

$$x = x_0 \mathbf{v}_0 + x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_d \mathbf{v}_d, \quad (7.6.9)$$

где $x_i > 0$ — вещественные коэффициенты. Если базис (7.6.8) неунимодулярный, то индекс $[\mathbb{Z}^{d+1} : \mathbf{L}] \geq 2$ и замыкание \mathbf{F}^c фундаментальной области $\mathbf{F} \subset \angle \mathbf{V}$ решетки \mathbf{L} содержит целочисленную точку $\mathbf{x} = (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d, \mathbf{Q})$ с координатами $0 < x_i \leq 1$, хотя бы одна из которых $x_j < 1$. Поэтому

$$\mathbf{x} \in \angle \mathbf{V} \quad \text{и} \quad 0 < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}. \quad (7.6.10)$$

Зададим следующие проекции

$$\text{pr}_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.6.11)$$

и

$$\text{pr} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \end{pmatrix} \quad (7.6.12)$$

множества векторов $\mathbb{R}_*^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с координатой $x_{d+1} \neq 0$ соответственно на гиперплоскость \mathbb{R}_1^{d+1} и пространство \mathbb{R}^d . Имеем

$$\text{pr}_1 \angle \mathbf{V} = \mathbf{s}_1, \quad (7.6.13)$$

где \mathbf{s}_1 — симплекс на гиперплоскости \mathbb{R}_1^{d+1} с проекцией

$$\text{pr } \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}. \quad (7.6.14)$$

Из включения в (7.6.10) и равенств (7.6.13), (7.6.14) следует

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s}. \quad (7.6.15)$$

Включение (7.6.15) вместе с неравенством из (7.6.10) противоречит условию (7.6.3) минимальности симплекса \mathbf{s} .

2) \Rightarrow 1). Обратно, пусть

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \quad (7.6.16)$$

удовлетворяет условиям (7.6.2). Тогда $\mathbf{x} = (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d, \mathbf{Q})$ — целочисленная (примитивная) точка из конуса $\angle \mathbf{V}$. Унимодулярность матрицы \mathbf{S} из (7.6.6) означает унимодулярность базиса \mathbf{V} из (7.6.8). Из этого следует, что \mathbf{x} имеет разложение

$$\mathbf{x} = x_0 \mathbf{v}_0 + x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_d \mathbf{v}_d \quad (7.6.17)$$

относительно базиса \mathbf{V} с целыми коэффициентами $x_i \geq 1$. Отсюда получаем неравенство

$$\mathbf{Q} \geq \mathbf{Q}_{\max}. \quad (7.6.18)$$

Заметим — это пригодится нам в дальнейшем —, что равенство в (7.6.18) возможно только в случае

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \dots, \quad x_d = 1. \quad (7.6.19)$$

Из (7.6.16) и (7.6.18) следует 1).

2) \Rightarrow 3). Рассмотрим базис \mathbf{V} как симплекс, имеющий ребра из \mathbf{V} . Подействуем на этот симплекс проекцией (7.6.11). Получим

$$\text{pr}_1 \mathbf{V} = \mathbf{s}_1 \quad (7.6.20)$$

— симплекс (7.6.13) с объемом

$$\text{vol } \mathbf{s}_1 = \frac{1}{d!} \left(\prod_{0 \leq i \leq d} \mathbf{Q}_i \right)^{-1}. \quad (7.6.21)$$

Симплекс \mathbf{s}_1 имеет своим основанием симплекс \mathbf{s} и единичную высоту. Поэтому у данных симплексов равны их объемы

$$\text{vol } \mathbf{s}_1 = \text{vol } \mathbf{s}. \quad (7.6.22)$$

Из (7.6.21) и (7.6.22) выводим равенство (7.6.7).

3) \Rightarrow 2). Обращая рассуждения (7.6.20)–(7.6.22) убеждаемся, что параллелепипед с ребрами из \mathbf{V} имеет единичный объем, откуда вытекает унимодулярность матрицы \mathbf{S} из (7.6.6).

Эквивалентность утверждений 1), 2) и 3) доказана.

□

7.6.2 Точка Фарея.

Рассматриваемый здесь минимальный симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины (7.6.1). Следуя аналогии с отрезками Фарея [9], симметризуем данные вершины, используя операцию сложения Фарея для дробей. В результате получим точку Фарея, содержащуюся в симплексе \mathbf{s} .

Следствие 7.6.1 *Минимальный симплекс \mathbf{s} содержит*

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \quad (7.6.23)$$

единственную точку $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ со знаменателем $1 \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{Q}_{\max}$ и, значит, — единственную точку со знаменателем $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\max}$, где значение \mathbf{Q}_{\max} было определено в (7.6.5).

Доказательство. Пусть симплекс \mathbf{s} имеет вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$, где $i = 0, 1, \dots, d$, вида (7.6.1), (7.6.2). Определим сумму вершин

$$\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \hat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d}, \quad (7.6.24)$$

используя операцию *сложения Фарея* дробей

$$\frac{a}{b} \hat{+} \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}. \quad (7.6.25)$$

Точка $\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$, о которой идет речь в доказываемом следствии, определяется как сумма Фарея

$$\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}} = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \hat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d}. \quad (7.6.26)$$

Поэтому $\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ назовем *точкой Фарея*. Из (7.6.17) и (7.6.19) следует, что это единственная точка $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}$ со знаменателем $1 \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{Q}_{\max}$, содержащаяся в минимальном симплексе \mathbf{s} .

□

7.6.3 Унимодулярные преобразования симплексов.

Пусть $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ — унимодулярная матрица. Подействуем дробно-линейным преобразованием (7.5.8) с матрицей U на вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ для $i = 0, 1, \dots, d$ минимального симплекса \mathbf{s} . Для вычислений воспользуемся формулой коммутирования

$$U \left\langle \frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} \right\rangle = \mathrm{pr} U \mathbf{v}_i, \quad (7.6.27)$$

где pr — проекция (7.6.12) и \mathbf{v}_i — целочисленные векторы с координатами из столбцов матрицы (7.6.6), при этом проекции векторов $\mathrm{pr} U \mathbf{v}_i$ справа в (7.6.27) отождествляются с точками — концами этих векторов. Еще отождествим симплекс \mathbf{s} с его вершинами $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$. Тогда перенося равенство (7.6.27) на весь симплекс \mathbf{s} , можем записать

$$U \langle \mathbf{s} \rangle = \mathrm{pr} U \mathbf{V}. \quad (7.6.28)$$

Здесь \mathbf{V} обозначает целочисленный базис (7.6.8).

Предложение 7.6.2 Пусть \mathbf{s} — минимальный симплекс (7.6.1)–(7.6.3), имеющий вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ для $i = 0, 1, \dots, d$ и $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ — унимодулярная матрица. Далее, пусть для всех вершин выполняются условия

$$\lambda_{d+1}\left(U, \frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}\right) \neq 0, \quad (7.6.29)$$

где $\lambda_{d+1}(U, x)$ — линейная форма из (7.5.8). Тогда при указанных условиях симплекс $U\langle \mathbf{s} \rangle$ снова будет минимальным.

Доказательство. Поскольку \mathbf{s} является минимальным симплексом, то по условию 2) предложения 7.6.1 базис \mathbf{V} унимодулярный. Но тогда преобразованный базис $U\mathbf{V}$ также будет унимодулярным или, что равносильно, связанная с ним матрица $U\mathbf{S}$ из (7.6.6) унимодулярна. Поэтому элементы во всех ее столбцах являются взаимно простыми числами.

Пусть $(U\mathbf{V})_{\pm}$ — матрица, получающаяся из матрицы $U\mathbf{V}$ умножением ее столбцов на -1 , в которых нижние элементы отрицательны. Измененная указанным образом матрица $(U\mathbf{V})_{\pm}$ останется унимодулярной, но в силу неравенств (7.6.29) будет иметь положительную нижнюю строку. При этом формула связи (7.6.28) сохранится

$$U\langle \mathbf{s} \rangle = \mathrm{pr} (U\mathbf{V})_{\pm}. \quad (7.6.30)$$

Из формулы (7.6.30) следует выполнимость условий (7.6.2), и тогда по предложению 7.6.1 симплекс $U\langle \mathbf{s} \rangle$ является минимальным. \square

Унимодулярные матрицы $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, для которых выполняются условия (7.6.29) для всех вершин $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ симплекса \mathbf{s} назовем *допустимыми*.

7.7 Симплексы Пизо

7.7.1 Базисный симплекс.

Выберем в качестве \mathbf{s} *базисный симплекс*

$$\Delta = \Delta_U^d \quad (7.7.1)$$

из предложения 7.2.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = U e_i = \frac{P_i}{Q_i}, \quad (7.7.2)$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, d$. Векторы

$$v'_i = v_i - v_0 = V e_i \quad (7.7.3)$$

для $i = 1, \dots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (7.7.1) имеет объем

$$\mathrm{vol} \Delta = \frac{1}{d!}. \quad (7.7.4)$$

Из этого равенства и предложения 7.6.1 следует, что симплекс Δ будет минимальным.

7.7.2 Симплексы Пизо.

Подействуем на симплекс Δ дробно-линейным преобразованием $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$, где $a = 1, 2, 3, \dots$, с матрицей Пизо P_α из (7.4.20). Чтобы исследовать новый симплекс, воспользуемся формулой связи

$$P_\alpha^a \langle \Delta \rangle = \text{pr } P_\alpha^a V \quad (7.7.5)$$

из (7.6.28). Здесь $V = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$ обозначает целочисленный базис (7.6.8). Согласно (7.7.2) координаты векторов данного базиса образуют унимодулярную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}. \quad (7.7.6)$$

Поскольку матрица Пизо P_α унимодулярная, то матрица

$$P_\alpha^a S = \begin{pmatrix} P_{a,01} & P_{a,11} & \dots & P_{a,d1} \\ P_{a,0d} & P_{a,1d} & \dots & P_{a,dd} \\ Q_{a,0} & Q_{a,1} & \dots & Q_{a,d} \end{pmatrix} \quad (7.7.7)$$

также унимодулярная. Принимая во внимание формулу (7.5.6) и условие $Q_i = 1$, можем записать значения элементов нижней строки $Q_{a,i}$ матрицы $P_\alpha^a S$ в явном виде

$$Q_{a,i} = \lambda_1^a v'_{i1} + \dots + \lambda_{d+1}^a v'_{i,d+1}, \quad (7.7.8)$$

где v'_{ij} — координаты вектора \widehat{v}'_i из разложения

$$\widehat{v}_i = A \widehat{v}'_i \quad (7.7.9)$$

вектора \widehat{v}_i по A -базису из (7.5.1).

Покажем, что

$$Q_{a,i} \neq 0 \quad (7.7.10)$$

для всех $i = 0, 1, \dots, d$ и достаточно больших значений степени a . С этой целью докажем, что координаты

$$v'_{i1} \neq 0. \quad (7.7.11)$$

Предположим противное $v'_{i1} = 0$. Тогда из формулы (7.5.6) следует, что $P_\alpha^a \widehat{v}_i$ сходится

$$P_\alpha^a \widehat{v}_i \rightarrow 0 \quad (7.7.12)$$

к нулевому вектору при $a \rightarrow +\infty$. Поскольку векторы $P_\alpha^a \widehat{v}_i$ имеют целые координаты при любом a , то отсюда и (7.7.12) выводим $P_\alpha^a \widehat{v}_i = 0$ для некоторой степени a . Но матрица P_α невырождена, поэтому вектор \widehat{v}_i должен быть нулевым, что противоречит условию $\widehat{v}_i \neq 0$. Тем самым, неравенство (7.7.11) доказано.

Пусть степень a удовлетворяет неравенству

$$a \geq l_\alpha(v_i), \quad (7.7.13)$$

где

$$l_\alpha(v_i) = \ln \frac{2|v'_i|_s}{|v'_{i1}|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}.$$

Тогда в силу (7.7.8) и (7.7.11) (ср. (7.5.24)) для таких a будет иметь место неравенство (7.7.10) при фиксированном i . Если же степень a выбирать из условия

$$a \geq l_\alpha(\Delta), \quad (7.7.14)$$

где ввели новое обозначение

$$l_\alpha(\Delta) = \max_{0 \leq i \leq d} l_\alpha(v_i),$$

то неравенство (7.7.10) будет выполняться для всех $i = 0, 1, \dots, d$.

Предложение 7.7.1 Для степеней a , удовлетворяющих неравенству (7.7.14), симплексы $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ являются минимальными (7.6.3)–(7.6.5).

Доказательство. В нашем случае неравенства (7.7.10) эквивалентны неравенствам (7.6.29). Поэтому применение предложения 7.6.2 показывает, что симплекс $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ будет минимальным. \square

Назовем степени a , для которых выполняется условие (7.7.10), *допустимыми*, а отвечающие им $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ *симплексами Пизо*. Из предложения 7.7.1 следует, что если степень a удовлетворяет неравенству (7.7.14), то она является допустимой.

7.7.3 Рекуррентные последовательности.

Пусть

$$v_a = \frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \quad (7.7.15)$$

— одна из вершин $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$ симплекса $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$. Вершине (7.7.15) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \quad (7.7.16)$$

Из формулы связи (7.6.30) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = P_\alpha^a \mathbf{v}_0 \quad (7.7.17)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$, где v_0 — вершина базисного симплекса Δ , определенного в (7.7.1).

Предложение 7.7.2 Пусть матрица Пизо P_α имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0. \quad (7.7.18)$$

Тогда столбцы \mathbf{v}_a из (7.7.17) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \dots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \quad (7.7.19)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$. Начальные условия

$$\mathbf{v}_d = P_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_1 = P_\alpha \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \quad (7.7.20)$$

задаются матрицей Пизо P_α из (7.4.19) и столбцом \mathbf{v}_0 из (7.7.16).

Доказательство. По теореме Гамильтона-Кэли P_α удовлетворяет матричному уравнению

$$P_\alpha^{d+1} - b_d P_\alpha^d - \dots - b_1 P_\alpha - b_0 E = 0.$$

Перепишем его в виде

$$P_\alpha^{d+1} = b_d P_\alpha^d + \dots + b_1 P_\alpha + b_0 E.$$

Умножая данное равенство на столбец \mathbf{v}_a , получаем

$$P_\alpha^{d+1} \mathbf{v}_a = b_d P_\alpha^d \mathbf{v}_a + \dots + b_1 P_\alpha \mathbf{v}_a + b_0 \mathbf{v}_a. \quad (7.7.21)$$

Теперь применяя к равенству (7.7.21) формулу (7.7.17), приходим к рекуррентной формуле (7.7.19), (7.7.20).

□

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (7.6.25), то рекуррентное соотношение (7.7.19) можно применить

$$\frac{P_{a+d+1}}{Q_{a+d+1}} = \frac{b_d P_{a+d}}{b_d Q_{a+d}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 P_{a+1}}{b_1 Q_{a+1}} \hat{+} \frac{b_0 P_a}{b_0 Q_a} \quad (7.7.22)$$

непосредственно к рациональным вершинам $v_a = \frac{P_a}{Q_a}$ из (7.7.15). В этих терминах начальные условия (7.7.20) примут вид

$$v_d = \text{pr } P_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, v_1 = \text{pr } P_\alpha \mathbf{v}_0, v_0 = \text{pr } \mathbf{v}_0, \quad (7.7.23)$$

где pr обозначает проекцию (7.6.12).

7.8 Основные теоремы

Собранные вместе конструкции, изложенные в предыдущих параграфах, позволяют сформировать некоторый общий алгоритм

$$\mathcal{SM} : \alpha \approx \frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \quad (7.8.1)$$

разложения в многомерные цепные дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ из (7.7.15) полных точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ степени $\deg \alpha = d+1$, определенных в (7.4.10)–(7.4.12). Основными составляющими конструкции алгоритма (7.8.1) являются базовый симплекс Δ и модульные матрицы Пизо $P_\alpha = M'_\alpha$ из (7.4.19), в совокупности задающие геометрию приближений. Это побуждает назвать (7.8.1) *симплекс-модульным алгоритмом* или кратко — \mathcal{SM} -алгоритмом.

В этом разделе мы покажем, как применяя \mathcal{SM} -алгоритм можно получать приближения алгебраических иррациональностей α произвольной степени. Первый результат — чисто геометрический, касающийся наилучших приближений, второй — аналитический, содержащий оценки скорости данных приближений.

7.8.1 Геометрическая теорема.

Симплекс Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ имеет рациональные вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$. Согласно (7.6.26) данный симплекс содержит точку Фарея

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \hat{+} \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}. \quad (7.8.2)$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \dots$ также, как и вершины $\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ симплекса Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$, удовлетворяют

$$\frac{P_{a+d+1,\max}}{Q_{a+d+1,\max}} = \frac{b_d P_{a+d,\max}}{b_d Q_{a+d,\max}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 P_{a+1,\max}}{b_1 Q_{a+1,\max}} \hat{+} \frac{b_0 P_{a,\max}}{b_0 Q_{a,\max}} \quad (7.8.3)$$

— рекуррентному соотношению (7.7.22) с новыми начальными условиями

$$v_{d,\max} = \text{pr } P_\alpha^d \mathbf{v}_{\max}, \dots, v_{1,\max} = \text{pr } P_\alpha \mathbf{v}_{\max}, v_{0,\max} = \text{pr } \mathbf{v}_{\max}, \quad (7.8.4)$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством

$$\mathbf{v}_{\max} = \widehat{v}_0 + \widehat{v}_1 + \dots + \widehat{v}_d. \quad (7.8.5)$$

Здесь v_i обозначают вершины (7.7.2) базисного симплекса $\Delta = \Delta_U^d$ из (7.7.1), а \widehat{v}_i — соответствующие им векторы (7.4.14). В координатах вектор (7.8.5) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{\max} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.8.6)$$

Теорема 7.8.1 Если a — допустимая степень или, в частности, если $a \geq l_\alpha(\Delta)$, где $l_\alpha(\Delta)$ определено в (7.7.14), и $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ — отвечающий ей симплекс Пизо, то имеют место следующие утверждения.

1. Симплекс Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ обладает свойством минимальности (см. определение (7.6.3)–(7.6.5)):

$$\frac{P}{Q} \notin P_\alpha^a \langle \Delta \rangle, \quad (7.8.7)$$

если $1 \leq Q < Q_{a,\max}$; единственная точка

$$\frac{P}{Q} \in P_\alpha^a \langle \Delta \rangle \quad (7.8.8)$$

со знаменателем $Q = Q_{a,\max}$ есть точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$, определенная в (7.8.2).

2. Выполняется неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_1 \leq \max_{0 \leq i \leq d} \left| \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}} - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_1. \quad (7.8.9)$$

Доказательство. Свойства (7.8.7) и (7.8.8) вытекают из предложения 7.7.1 и следствия 7.6.1, а неравенство (7.8.9) — из свойств выпуклости и минимальности симплекса Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$. \square

7.8.2 Аналитическая теорема.

Теперь покажем, как используя результаты предложения 7.5.1 можно получать количественные оценки скорости приближений для расстояния $\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_1$ из (7.8.9).

Теорема 7.8.2 Пусть степень a удовлетворяет неравенству

$$a \geq l_{\alpha,\max}(\Delta). \quad (7.8.10)$$

Здесь

$$l_{\alpha,\max}(\Delta) = \max\{l_\alpha(v_{\max}), l_\alpha(\Delta)\}$$

в обозначениях (7.7.13) и (7.7.14); и

$$v'_{\max} = \begin{pmatrix} v'_{\max,1} \\ \vdots \\ v'_{\max,d+1} \end{pmatrix} \quad (7.8.11)$$

определяется из разложения $\hat{v}_{\max} = Av'_{\max}$ по A -базису (7.5.1), где $v_{\max} = \text{pr } \mathbf{v}_{\max}$ — проекция вектора (7.8.6); кроме того, $\lambda = \zeta^\nu > 1$, ζ — единица Пизо (7.3.4) и $0 < \lambda_{2,\max} < 1$ определено в (7.5.16). Тогда при этом условии:

- 1) существует симплекс Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$; и
- 2) имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_1 \leq c_{\alpha,\max} \varrho^a, \quad (7.8.12)$$

где

$$\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda} < 1 \quad (7.8.13)$$

и константа

$$c_{\alpha,\max} = 4d |A|_{\max} \frac{|v'_{\max}|_1}{|v'_{\max,1}|} \quad (7.8.14)$$

не зависит от степени a . Здесь $|A|_{\max}$ — max-норма (7.5.18) матрицы A .

Доказательство. Из предложения 7.7.1 и неравенства (7.8.10) вытекает существование симплекса Пизо $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$. Если же учесть, что

$$P_\alpha^a \langle v_{\max} \rangle = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}, \quad (7.8.15)$$

то из неравенства (7.8.10) и предложения 7.5.1 будет следовать неравенство (7.8.12).

Докажем (7.8.15). Используя (7.8.5) и (7.7.17) записываем

$$P_\alpha^a \langle v_{\max} \rangle = \text{pr } P_\alpha^a v_{\max} = \text{pr } (P_\alpha^a \hat{v}_0 + P_\alpha^a \hat{v}_1 + \dots + P_\alpha^a \hat{v}_d),$$

где правая часть, согласно (7.6.24), (7.6.12) и (7.8.2), равна

$$\text{pr } (\mathbf{v}_{a0} + \mathbf{v}_{a1} + \dots + \mathbf{v}_{ad}) = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \hat{v}_0 + \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \hat{v}_1 + \dots + \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}} \hat{v}_d = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}},$$

что и доказывает равенство (7.8.15). \square

7.9 Числовой пример

Покажем, как работает \mathcal{SM} -алгоритм из (7.8.1) на примере разложения в цепные дроби корней четвертой степени.

7.9.1 Выбор базового симплекса.

Пусть $d = 3$ и точка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ имеет координаты

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2} \approx 1.18, \quad \alpha_2 = \alpha_1^2 = \sqrt{2} \approx 1.41, \quad \alpha_3 = \alpha_1^3 = \sqrt[4]{8} \approx 1.68 \quad (7.9.1)$$

из алгебраического поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ степени $\deg F/\mathbb{Q} = d+1 = 4$. Отсюда следует, что α — полная точка (7.4.10) и, значит, к ней применим \mathcal{SM} -алгоритм.

Выберем матрицу

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она принадлежит группе $G_0 = \text{GL}_{4,0}(\mathbb{Z})$. Вспоминая формулу (7.2.3) и используя приближения (7.9.1) видим, что $U^{-1}\alpha \in \Delta$, и поэтому выполняется включение

$$\alpha \in \Delta_U^d, \quad (7.9.2)$$

где обратная матрица

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

снова принадлежит группе G_0 и $\Delta_U^d = U\Delta_e^d$ — базовый симплекс с вершинами

$$\begin{aligned} v_0 &= Ue_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_1 &= Ue_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= Ue_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, & v_3 &= Ue_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.9.3)$$

7.9.2 Единица Пизо поля F .

По алгоритму из предложения 7.3.1 находим единицу Пизо

$$\zeta = 1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{8} = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (7.9.4)$$

поля F . Для дальнейших вычислений вместо ζ удобнее работать с обратной единицей

$$\theta = \zeta^{-1} = \sqrt[4]{2} - 1. \quad (7.9.5)$$

Для начала находим для θ минимальный многочлен

$$f_\theta(x) = \text{Norm}_{F/\mathbb{Q}}(x - \theta) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1. \quad (7.9.6)$$

Теперь, чтобы определим матрицу U_θ с условием

$$U_\theta \hat{\theta} = \theta \cdot \hat{\theta}, \quad (7.9.7)$$

где

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \theta^3 \\ \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.9.8)$$

Из (7.9.6) получаем, что

$$U_\theta = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9.9)$$

причем данная матрица унимодулярна.

7.9.3 Матрица перехода T .

Теперь нужно найти матрицу перехода

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\theta} \quad (7.9.10)$$

от базиса $\widehat{\theta}$ к базису

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[4]{8} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.9.11)$$

Используя явный вид степеней

$$\theta = \sqrt[4]{2} - 1, \quad \theta^2 = -2\sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + 1, \quad \theta^3 = 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8} - 1,$$

легко находится обратная матрица перехода

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.9.12)$$

а затем по ней — сама матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.9.13)$$

Данная матрица имеет определитель $\det T = -1$, а значит, T — унимодулярная матрица и ее уровень (7.4.17) будет $l(T) = 1$.

7.9.4 Матрица Пизо P_α .

Подставляя $\widehat{\theta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (7.9.7), получаем матрицу $M_\alpha = TU_\theta^{-1}T^{-1}$ представления $M_\alpha\widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha}$ для умножения на единицу Пизо ζ . Поскольку матрица перехода T из (7.9.10) имеет уровень $l(T) = 1$, то показатель $\nu(U_\theta) = 1$. Следовательно, матрица M_α унимодулярная, и поэтому имеют место равенства

$$U_\alpha = M_\alpha = P_\alpha$$

согласно определению матрицы Пизо (7.4.19). Теперь используя (7.9.5), (7.9.9), (7.9.12) и (7.9.13), получаем нужную нам связь

$$P_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \quad (7.9.14)$$

между матрицей Пизо

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.9.15)$$

и единицей Пизо ζ из (7.9.4).

7.9.5 Рекуррентные последовательности.

Матрица Пизо P_α из (7.9.15) имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1. \quad (7.9.16)$$

Поэтому столбцы \mathbf{v}_a из (7.7.17) для вершин $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{ai}$ и точек Фарея $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{a,\max}$ у симплексов $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{v}_{a+4} = 4\mathbf{v}_{a+3} + 6\mathbf{v}_{a+2} + 4\mathbf{v}_{a+1} + \mathbf{v}_a \quad (7.9.17)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$

Начальные условия для вершин

$$v_{ai} = \frac{P_{ai}}{Q_{ai}} = \left(\frac{P_{ai,1}}{Q_{ai}}, \frac{P_{ai,2}}{Q_{ai}}, \frac{P_{ai,d}}{Q_{ai}} \right) \quad (7.9.18)$$

с номерами $i = 0, 1, 2, 3$ симплексов $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ для $a = 0, 1, 2, 3$ получаем по формуле (7.7.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{a0} &= \begin{pmatrix} P_{a0,1} \\ P_{a0,2} \\ P_{a0,3} \\ Q_{a0} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 6 & 31 & 164 \\ 1 & 7 & 37 & 195 \\ 2 & 8 & 44 & 232 \\ 1 & 5 & 26 & 138 \end{matrix} & \mathbf{v}_{a1} &= \begin{pmatrix} P_{a1,1} \\ P_{a1,2} \\ P_{a1,3} \\ Q_{a1} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 2 & 7 & 38 & 201 \\ 1 & 9 & 45 & 239 \\ 2 & 10 & 54 & 284 \\ 1 & 6 & 32 & 169 \end{matrix} \\ \mathbf{v}_{a2} &= \begin{pmatrix} P_{a2,1} \\ P_{a2,2} \\ P_{a2,3} \\ Q_{a2} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 7 & 37 & 195 \\ 2 & 8 & 44 & 232 \\ 2 & 10 & 52 & 276 \\ 1 & 6 & 31 & 164 \end{matrix} & \mathbf{v}_{a3} &= \begin{pmatrix} P_{a3,1} \\ P_{a3,2} \\ P_{a3,3} \\ Q_{a3} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 5 & 26 & 138 \\ 1 & 6 & 31 & 164 \\ 1 & 7 & 37 & 195 \\ 1 & 4 & 22 & 116 \end{matrix} \end{aligned} \quad (7.9.19)$$

Применяя формулу (7.8.2), из начальных условий для вершин (7.9.19) получаем начальные условия для точек Фарея

$$v_{a,\max} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \left(\frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}}, \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}}, \frac{P_{a,\max,d}}{Q_{a,\max}} \right) \quad (7.9.20)$$

для $a = 0, 1, 2, 3$:

$$\mathbf{v}_{a,\max} = \begin{pmatrix} P_{a,\max,1} \\ P_{a,\max,2} \\ P_{a,\max,3} \\ Q_{a,\max} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 5 & 25 & 132 & 698 \\ 5 & 30 & 157 & 830 \\ 7 & 35 & 187 & 987 \\ 4 & 21 & 111 & 587 \end{matrix} \quad (7.9.21)$$

7.9.6 Аппроксимация корней четвертой степени.

Пусть $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ для $a \geq l_\alpha(\Delta)$, где $l_\alpha(\Delta)$ определено в (7.7.14), — последовательность симплексов с вершинами v_{ai} из (7.9.18), определяемых рекуррентным соотношением (7.9.17) и начальными условиями (7.9.19). Кроме того, пусть $v_{a,\max}$

— точки Фарея, определяемые тем же рекуррентным соотношением (7.9.17) и начальными условиями (7.9.21). Тогда по теореме 7.8.1 такие симплексы $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ обладают свойством минимальности (7.6.3)–(7.6.5):

для каждого указанного a единственной точкой $\frac{P}{Q} \in P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ со знаменателем $1 \leq Q < Q_{a,\max}$ является точка Фарея

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \in P_\alpha^a \langle \Delta \rangle. \quad (7.9.22)$$

Численные расчеты в совокупности с теоремой 7.8.2 приводят к следующей оценке

$$\left| \sqrt[4]{2} - \frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}} \right| + \left| \sqrt{2} - \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}} \right| + \left| \sqrt[4]{8} - \frac{P_{a,\max,3}}{Q_{a,\max}} \right| \leq \varrho^a \quad (7.9.23)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$, где $\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda}$ удовлетворяет неравенствам $0 < \varrho < 0,13$; а также — к неравенству

$$\left| \sqrt[4]{2} - \frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}} \right| + \left| \sqrt{2} - \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}} \right| + \left| \sqrt[4]{8} - \frac{P_{a,\max,3}}{Q_{a,\max}} \right| \leq \frac{c}{Q_{a,\max}^{1+\varepsilon}} \quad (7.9.24)$$

с абсолютной константой $c < 3$ и показателем $\varepsilon = \frac{\ln \lambda_{2,\max}}{\ln \lambda} > 0,26$.

Неравенство (7.9.24) вытекает из оценки (7.9.23) и асимптотики для знаменателей

$$Q_{a,\max} \sim \lambda^a \quad \text{при } a \rightarrow +\infty. \quad (7.9.25)$$

Замечание 7.9.1 Неравенства вида (7.9.24) имеют особое значение, т.к. они показывают явным образом скорость приближения точки $\alpha = (\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8})$ подходящими дробями $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ из (7.9.22) в терминах их общих знаменателей $Q_{a,\max}$. Приближения (7.9.24) становятся нетриициальными только при условии $\varepsilon > 0$. Далее мы покажем, что при $d = 3$, как и в нашем случае, для показателей ε имеет место верхняя оценка $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$.

7.10 Параметры и настройка

СИМПЛЕКС-МОДУЛЬНОГО АЛГОРИТМА

7.10.1 Настройка \mathcal{SM} -алгоритма.

Рассматриваемый здесь \mathcal{SM} -алгоритм относится к категории гибких алгоритмов. Чтобы получить разложение в цепную дробь некоторой произвольной полной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, требуется предварительная *настройка* данного алгоритма на точку α . Это значит, что произвольным образом требуется выбрать:

- 1) базовый симплекс Δ , содержащий указанную точку α ;

2) а также некоторую единицу Пизо ζ в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(7.10.1)

Выбирая Δ мы задаем геометрию приближений для точки α — базовый аппроксимирующий симплекс, выбор же единицы Пизо ζ определяет скорость получающихся посредством \mathcal{SM} -алгоритма приближений подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right)$ ($a = 0, 1, 2, \dots$) к точке α .

После того, как произведена настройка (7.10.1), мы получаем

$$\mathcal{SM} \Rightarrow \mathcal{SM}_\alpha \quad (7.10.2)$$

— специализацию

$$\mathcal{SM}_\alpha := \mathcal{SM}(\Delta, \zeta)$$

для \mathcal{SM} -алгоритма. Специализация \mathcal{SM}_α — это уже жесткий алгоритм. Он применим только к точке настройки α .

Существует бесконечно много специализаций (7.10.2). Разные специализации позволяют получать различные скорости приближения точки α подходящими дробями $\frac{P_a}{Q_a}$. Ниже мы обсудим этот вопрос более подробно.

7.10.2 Выбор параметров настройки.

Что следует понимать под скоростью приближения, выясним на примере двух неравенств (7.9.23) и (7.9.24). Только во втором из них видна явная связь между знаменателями $Q_{a,\max}$ и величиной отклонения $c/Q_{a,\max}^{1+\varepsilon}$ подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ от точки α . Приближение нетривиально только, если выполняется условие

$$\varepsilon = \frac{\ln \lambda_{2,\max}}{\ln \lambda} > 0. \quad (7.10.3)$$

Таким образом, скорость приближения можно отождествить с величиной показателя (7.10.3). Чтобы установить связь показателя ε с единицей Пизо ζ , вспомним обозначения из предложения 7.4.1 и определение $\lambda_{2,\max}$ в (7.5.16). Из них видно, что (7.10.3) эквивалентно условию

$$\varepsilon = \frac{\ln \zeta_{2,\max}}{\ln \zeta} > 0, \quad (7.10.4)$$

налагаемому на выбор единицы Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ из (7.3.4). Здесь обозначили

$$\zeta_{2,\max} = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\zeta_j| = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\zeta^{(j)}|.$$

Отсюда и равенства для нормы $|\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)| = 1$ вытекает следующая верхняя граница

$$\varepsilon = \frac{\ln \zeta_{2,\max}}{\ln \zeta} \leq \frac{1}{d} \quad (7.10.5)$$

для показателя ε , где $d = \deg(\zeta) - 1$. Граница (7.10.5) всегда достигается в случае квадратичных и кубических иррациональностей α , если последние имеют мнимые сопряженные значения, т.е. в случае мнимых кубических полей.

Итак, мы видим, решающим фактором, определяющим качество настройки (7.10.1), является выбор единицы Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$. Выбор же базового симплекса Δ , согласно формуле (7.8.14), оказывает влияние только на величину постоянного множителя $c = c_{\alpha, \max}$.

Возвращаясь к оценке (7.9.24) заметим, что она была получена с помощью (7.9.4), (7.9.5) — единицы Пизо

$$\zeta = 1/(\sqrt[4]{2} - 1).$$

Такой выбор единицы позволил получить показатель

$$\varepsilon \approx 0,265 \approx 1/3.8$$

вместо максимально возможного

$$\varepsilon_{\max} = 1/d = 1/3.$$

Нахождение же наилучших единиц Пизо представляет собою отдельную задачу.

7.11 Многомерное обобщение теоремы Лагранжа

Здесь мы хотим указать на связь между \mathcal{SM} -алгоритмом (7.8.1) и многомерным обобщением теоремы Лагранжа о периодическом разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби. Начнем с необходимых для этого предварительных рассуждений.

7.11.1 Теорема Лагранжа: достаточное условие.

В главе 2 был построен алгоритм \mathcal{D} разложения алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби. Указанный алгоритм использует полугруппу d -мерных *возвратных отображений* \mathcal{D} . Отображения из \mathcal{D} представляют собою обобщение одномерного возвратного отображения или *отображения Фарея* $\delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, определяемого условиями

$$\delta(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{или} \quad \frac{2x-1}{x} \tag{7.11.1}$$

для $0 \leq x < \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} \leq x < 1$ соответственно. С помощью отображения δ осуществляется разложение вещественных чисел в обычные цепные дроби.

В главе 2 было доказано следующее утверждение (см. теорему 2.3.2).

Теорема 7.11.1 *Если точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ будет иррациональной и если при этом она является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы d -мерных возвратных отображений \mathcal{D} , то ее степень равна*

$$\deg(\alpha) = d + 1. \tag{7.11.2}$$

Приведенная выше теорема представляет собою обобщение первой части теоремы Лагранжа для алгебраических иррациональностей произвольной степени $d+1$, т.к. в данном случае неподвижность точки x влечет за собою периодичность разложения ее в d -мерную цепную дробь.

Теорема Лагранжа утверждает [47]:

вещественная иррациональность $\alpha = \alpha_1$ допускает периодическое разложение в цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной, т.е. имеет степень $\deg(\alpha) = 2$.

7.11.2 Теорема Лагранжа: необходимое условие.

Пусть

$$L_d = \overrightarrow{L}_d \wedge \overleftarrow{L}_d \quad (7.11.3)$$

обозначает некоторое d -мерное обобщение теоремы Лагранжа, где \overrightarrow{L}_d — достаточное условие:

если точка α допускает периодическое разложение в d -мерную цепную дробь, то она имеет степень $\deg(\alpha) = d+1$;

а \overleftarrow{L}_d — соответственно необходимое условие в L_d .

Используя алгоритм возвратных отображений \mathcal{D} , необходимое условие \overleftarrow{L}_2 было доказано в главе 3 (теорема 3.5.2) для некоторого трехпараметрического семейства кубических иррациональностей, точнее, — для точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$, где $0 < \theta < 1$ — вещественный корень многочлена

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (7.11.4)$$

с коэффициентами a_i из кольца \mathbb{Z} и со свободным членом $a_0 = \pm 1$. Такие числа θ являются единицами кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$.

Расширение условия \overleftarrow{L}_d на произвольную размерность осуществлено в теореме 4.2.1. В ней рассмотрено $(d+1)$ -параметрическое семейство алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}, \dots, \alpha_d = \theta$, где $0 < \theta < 1$ — вещественный корень многочлена

$$f(x) = x^{d+1} + a_dx^d + \dots + a_1x + a_0 \quad (7.11.5)$$

степени $d+1 \geq 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ и со свободным членом $a_0 = -1$.

Рассматриваемый в настоящей главе \mathcal{SM} -алгоритм *алгебраичный* — он допускает лишь алгебраические иррациональности α . Если точка α полная и, следовательно, иррациональная, то \mathcal{SM} -алгоритм позволяет строить последовательность *подходящих дробей*

$$\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right)$$

из (7.8.1), по теореме 7.8.2 сходящихся

$$\frac{P_a}{Q_a} \longrightarrow \alpha \quad \text{при } a \rightarrow +\infty$$

к выбранной точке α в метрике $|*|_1$. В данном случае *периодичность* подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ означает, что их числители P_a и знаменатели Q_a вычисляются по рекуррентному уравнению (7.7.19) с постоянными коэффициентами.

Таким образом, как прямое следствие из теорем 7.8.1 и 7.8.2 вытекает справедливость необходимого условия \overleftarrow{L}_d в (7.11.3) для \mathcal{SM} -алгоритма.

Теорема 7.11.2 *Если точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ полная (7.4.10)–(7.4.12) и, значит, имеет степень $\deg \alpha = d + 1$, то по \mathcal{SM} -алгоритму она разлагается в периодическую цепную дробь.*

□

Замечание 7.11.1 \mathcal{SM} -алгоритм представляет собою семейство алгоритмов

$$\mathcal{SM} = \{\mathcal{SM}(\Delta, \zeta); \Delta, \zeta \in \mathcal{S}_\alpha\}, \quad (7.11.6)$$

зависящих от определенной в (7.10.1) настройки \mathcal{S}_α на точку α . Доказанное в теореме 7.11.2 необходимое условие $\overleftarrow{L}_d \in L_d$ означает, что в случае $\deg \alpha = d + 1$ существует такая настройка $\Delta, \zeta \in \mathcal{S}_\alpha$, что по соответствующему алгоритму $\mathcal{SM}(\Delta, \zeta)$ точка α будет иметь периодическое разложение в цепную дробь.

Достаточное условие $\overrightarrow{L}_d \in L_d$ было доказано в теореме 2.3.2, которую вместе с теоремой 7.11.2 можно считать многомерным обобщением теоремы Лагранжа (7.11.3) в случае \mathcal{SM} -алгоритма.

7.12 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Два подхода: алгебраический и универсальный. Как уже отмечалось, рассмотренный \mathcal{SM} -алгоритм является алгебраическим. Он работает по следующей обобщенной схеме

$$\mathbf{v}_a = P^a \mathbf{v}_0, \quad (7.12.7)$$

где $P = P_\alpha$ — матрица Пизо из равенства (7.4.20) и \mathbf{v}_a — целочисленные столбцы высоты $d + 1$ и $a = 0, 1, 2, \dots$. Инициированные Эйлером [69] универсальные алгоритмы [80], [81], [103], [60], [61], [62], [3], [4], [42], [43], [71], [23], [26] действуют по иной схеме

$$\mathbf{v}_{a+1} = M_a \mathbf{v}_a. \quad (7.12.8)$$

Здесь M_a — целочисленные унимодулярные матрицы, выбор которых зависит от текущего столбца \mathbf{v}_a .

Матрица Пизо P в равенствах (7.12.7) также является унимодулярной. Ее выбор определяется аппроксимируемой точкой $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из (7.4.11). Благодаря тому, что α предполагается полной алгебраической точкой, появляется

возможность построения единой матрицы P , обладающей свойством: последовательность столбцов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ из (7.12.7) содержит в качестве своих элементов числители и знаменатели подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right)$ (7.7.15), сходящихся к α .

В универсальных алгоритмах (7.12.8) точка α может быть произвольной точкой с вещественными координатами. По этой причине в общем случае последовательность матриц M_0, M_1, M_2, \dots (7.12.8) будет непериодической. Если же взять алгебраическую точку α , то в некоторых случаях удается получить периодическую последовательность таких матриц. Несколько упрощая ситуацию можно сказать, что в этом случае матрица Пизо P из равенства (7.4.20) есть ничто иное, как произведение матриц M_a , образующих полный период. В настоящей главе показано, как можно вычислить матрицу Пизо P , не используя ее явного разложения в произведение матриц M_a .

Глава 8

Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел

Предлагается дальнейшее развитие симплекс-модульного алгоритма (\mathcal{SM} -алгоритма) разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби. С этой целью строятся локализованные матрицы Пизо, у которых модули всех собственных значений, меньшие единицы, попадают в интервал малой длины. Такие матрицы Пизо порождают цепные дроби с приближениями, сколь угодно близкими к оптимальным.

8.1 Введение

8.1.1 Симплекс-модулярный алгоритм.

В главе 7 был построен симплекс-модулярный алгоритм (\mathcal{SM} -алгоритм) разложения алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ в многомерные цепные дроби

$$\mathcal{SM} : \frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \rightarrow \alpha \text{ при } a \rightarrow +\infty, \quad (8.1.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Основу указанного алгоритма составляют: 1) d -мерные минимальные рациональные симплексы \mathbf{s} , содержащие точку α ; и 2) матрицы Пизо P_α , обладающие свойством

$$P_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.1.2)$$

где $\lambda > 1$ — некоторая единица Пизо поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. Это означает, что все ее сопряженные $\lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(d+1)}$, кроме $\lambda^{(1)} = \lambda$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda^{(2)}| < 1, \dots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$.

Минимальные симплексы \mathbf{s} являются многомерным обобщением отрезков Фарея. Каждый такой симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \left(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i} \right)$, где $i = 0, 1, \dots, d$, со знаменателями $\mathbf{Q}_i > 0$, удовлетворяющими условиям н.о.д. $(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1$, и обладает свойством минимальности: симплекс \mathbf{s} не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \quad (8.1.3)$$

никакой точки $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \left(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}} \right)$, координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где $\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d$. Используя свойство минимальности (8.1.3) было доказано, что подходящие дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ в (8.1.1) являются многомерными дробями Фарея, дающими наилучшие приближения для точки α относительно некоторой многогранной нормы.

Что касается второй составляющей \mathcal{SM} -алгоритма — матриц Пизо P_α из (8.1.2), то для их нахождения была указана общая схема, использующая системы основных единиц соответствующего поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. При этом предполагалось, что точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор алгебраических действительных чисел чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ являются полными. Последнее означает выполнение условия $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$. Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$ обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ над полем рациональных чисел \mathbb{Q} и $\mathbb{Q}(\alpha)$ — поле, полученное расширением поля \mathbb{Q} добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Из определения, в частности, следует иррациональность точки α , т.е. линейная независимость $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ над кольцом целых рациональных чисел \mathbb{Z} .

Числители и знаменатели подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ в \mathcal{SM} -алгоритме (8.1.1) вычисляются с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P_{a+d+1,i} &= b_d P_{a+d,i} + \dots + b_1 P_{a+1,i} + b_0 P_{a,i}, \\ Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \dots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

для $i = 1, \dots, d$ и $a = 0, 1, 2, \dots$, в котором $-b_d, \dots, -b_1, -b_0$ являются коэффициентами характеристического многочлена $ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha)$ с единичным старшим коэффициентом.

8.1.2 Основной результат.

В теореме 8.4.1 доказано, что можно так выбрать матрицу Пизо P_α в равенстве (8.1.2) и начальные условия в отвечающем данной матрице рекуррентном соотношении (8.1.4), при которых будет выполняться следующее утверждение.

Если α — полная точка степени $d+1$, то для любого фиксированного $\theta > 0$ существует матрица Пизо P_α , производящая последовательность подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right)$ в \mathcal{SM} -алгоритме (8.1.1) с приближением

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_{a,1}}{Q_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right| \leq \frac{c_{\alpha,\theta}}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (8.1.5)$$

для всех $a \geq a_{\alpha,\theta}$. Здесь константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a .

Алгебраические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, участвующие в приведенном выше неравенстве (8.1.5), относятся к классу *плохо приближающихся* чисел. Относительно них известен следующий результат (см., например, [34], гл. V-3).

Теорема 8.1.1 *Существует такая постоянная $c^* = c_\alpha^* > 0$, зависящая только от точки α , что выполняются неравенства*

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_1}{Q} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_d}{Q} \right| \geq \frac{c^*}{Q^{1+\frac{1}{d}}} \quad (8.1.6)$$

для любых целых чисел P_1, \dots, P_d и $Q > 0$.

Сравнение двух приведенных выше результатов показывает, что приближение (8.1.5) можно за счет выбора матриц Пизо P_α в (8.1.2) получать сколь угодно близкими к оптимальному (8.1.6). Однако, в этом месте требуется дополнительное уточнение. Основываясь на свойстве минимальности (8.1.3) симплексов s , в теореме 7.8.1 доказано, что при любом выборе матрицы Пизо P_α получаются наилучшие приближения относительно s -норм или *полиэдральных норм*, задаваемых симплексами s аналогично (2.5.46). В приведенном контексте приближениям вида (8.1.5) отвечают симплексы s , имеющие форму близкую к шару.

С стороны, применяя *принцип Дирихле*, можно также доказать двойственный к теореме 8.1.1 результат (см., например, [34], гл. I-5, [45] или [48], гл. II-1).

Теорема 8.1.2 *Для некоторой постоянной $0 < c_* < c^*$ неравенство*

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_1}{Q} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_d}{Q} \right| < \frac{c_*}{Q^{1+\frac{1}{d}}} \quad (8.1.7)$$

имеет бесконечно много целых решений P_1, \dots, P_d и $Q > 0$.

Если теперь сравнить (8.1.5) и (8.1.7), то можно сказать, что в теореме Дирихле утверждается существование целых решений P_1, \dots, P_d и $Q > 0$. В то время, как в (8.1.5), приведен способ конструктивного построения указанных решений, правда, ценой появления сколь угодно малой фиксированной добавки $\theta > 0$ в правой части неравенства (8.1.5).

8.2 Приведение векторов к каноническому виду

8.2.1 Унимодулярные матрицы.

Обозначим через $GL_t(\mathbb{Z})$ группу *унимодулярных* матриц, состоящую из целочисленных квадратных матриц U размерности t с определителем $\det U = \pm 1$.

Лемма 8.2.1 *Пусть дана произвольная строка $u = (*_1 \dots *_t)$ длины t с целыми рациональными коэффициентами. Если*

$$\text{n.o.d. } (*_1, \dots, *_t) = 1, \quad (8.2.1)$$

то строку и можно дополнить до унимодулярной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_t(\mathbb{Z}), \quad (8.2.2)$$

где $u_1 = u$.

Доказательство. Существует полная решетка

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}[u_1, u_2, \dots, u_t] \subseteq \mathbb{Z}^t, \quad (8.2.3)$$

для которой целочисленные векторы u_1, u_2, \dots, u_t линейно независимы над \mathbb{R} . В качестве фундаментальной области $\mathcal{F} \simeq \mathbb{R}^t / \mathcal{U}$ решетки \mathcal{U} выберем множество

$$\mathcal{F} = \{x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_t u_t; \quad 0 \leq x_i < 1\}. \quad (8.2.4)$$

Оно является параллелоэдром.

Пусть $f = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}]$ — индекс подрешетки \mathcal{U} в \mathbb{Z}^t . Как обычно, полагаем $\mathrm{vol} \mathbb{R}^t / \mathbb{Z}^t = 1$. При таком нормировании индекс f , объем фундаментальной области (8.2.4) и определитель матрицы (8.2.2) связаны соотношениями

$$f = \mathrm{vol} \mathcal{F} = |\det U|. \quad (8.2.5)$$

Поэтому выполняется равенство

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}^t, \quad \text{если } f = 1, \quad (8.2.6)$$

и тогда в этом случае, согласно соотношениям (8.2.5), матрица U из (8.2.2) будет унимодулярной. Предположим, что индекс $f > 1$. Далее мы покажем, как можно перестраивать базис u_1, u_2, \dots, u_t решетки (8.2.3) так, чтобы это приводило к уменьшению индекса f .

Если $f > 1$, то существует ненулевой вектор

$$v \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^t. \quad (8.2.7)$$

Целочисленный вектор v не может принадлежать ребру \mathbf{u}_1 параллелоэдра \mathcal{F} , направленному вдоль вектора u_1 , т.к. по условию (8.2.1) вектор u_1 является примитивным. Вектор $v \neq 0$ также не может принадлежать сразу всем ребрам \mathbf{u}_i , $i \neq 1$, параллелоэдра \mathcal{F} . Пусть v не принадлежит, например, ребру \mathbf{u}_i . Тогда от решетки \mathcal{U} перейдем к новой решетке

$$\mathcal{U}' = \mathbb{Z}[u'_1, u'_2, \dots, u'_t], \quad (8.2.8)$$

где $u'_i = v$ и $u'_j = u_j$ для остальных $j \neq i$. В силу (8.2.7) и (8.2.8) объемы $\mathrm{vol} \mathcal{F}' < \mathrm{vol} \mathcal{F}$ а тогда согласно (8.2.5) и индексы будут удовлетворять неравенству

$$f' = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}'] < f. \quad (8.2.9)$$

По указанному выше алгоритму продолжаем процесс

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{U}^{(k)},$$

заканчивающийся ввиду неравенства (8.2.9) на некотором шаге k , когда соответствующий индекс

$$f^{(k)} = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}^{(k)}] = 1. \quad (8.2.10)$$

Сопоставляя (8.2.10) с (8.2.6) и (8.2.5), приходим к равенствам $\mathcal{U}^{(k)} = \mathbb{Z}^t$ и $|\det U| = 1$, из которых следует, что отвечающая решетке $\mathcal{U}^{(k)}$ матрица

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_t^{(k)} \end{pmatrix}$$

будет унимодулярной. По построению у неё первая строка $u_1^{(k)} = u$, что доказывает лемму 8.2.1. \square

8.2.2 Ранг вектора и его каноническое представление.

Попробуем в смежном классе $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})\beta$ произвольного вектора $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ с вещественными координатами β_i найти канонического представителя.

Предположим, что координаты вектора β линейно зависимы

$$u'_1\beta'_1 + \dots + u'_t\beta'_t \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}} \quad (8.2.11)$$

над кольцом \mathbb{Z} , где $\beta'_i = \beta_i$ и коэффициенты u'_1, \dots, u'_t — целые взаимно простые числа, не все равные нулю. По лемме 8.2.1 найдется унимодулярная матрица $U' = \begin{pmatrix} u' \\ \vdots \end{pmatrix}$ из $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$ с первой строкой $u' = (u'_1 \dots u'_t)$. Из сравнения (8.2.11) следует

$$U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \beta''_2 \\ \vdots \\ \beta''_t \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (8.2.12)$$

Здесь вектор β' записан в виде столбца. Если координаты вектора $\beta'' = (\beta''_2, \dots, \beta''_t)$ снова окажутся линейно зависимы

$$u''_2\beta''_2 + \dots + u''_t\beta''_t \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}},$$

то выбираем матрицу вида $U'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u'' \\ 0 & \vdots \end{pmatrix}$ с блоком $\begin{pmatrix} u'' \\ \vdots \end{pmatrix}$ из группы $\mathrm{GL}_{t-1}(\mathbb{Z})$.

После умножения получаем сравнение

$$U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3''' \\ \vdots \\ \beta_t''' \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Продолжая рассуждение, приходим к следующему сравнению

$$U^{(t')} \dots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_{t'+1}^{(t'+1)} \\ \vdots \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad (8.2.13)$$

в котором координаты вектора $\beta^{(t'+1)} = (\beta_{t'+1}^{(t'+1)}, \dots, \beta_t^{(t'+1)})$ будут линейно независимы над \mathbb{Z} по $\pmod{\mathbb{Z}}$, или — к сравнению

$$U^{(t')} \dots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad (8.2.14)$$

где элемент $\beta_t^{(t'+1)}$ — некоторое рациональное число.

Определим *ранг* $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta$ вектора или точки $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ как ранг модуля

$$\mathbb{Z}_{\beta} = \mathbb{Z}[\beta_1, \dots, \beta_t, 1] \quad (8.2.15)$$

над кольцом \mathbb{Z} . Вектор или точку α назовем *иррациональными*, если выполняется условие:

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \alpha = t + 1 \quad (8.2.16)$$

или, что равносильно условию (1.2.21): числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом \mathbb{Z} .

Для вектора $\beta = \beta'$ из сравнений (8.2.13) и (8.2.14) следует

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta^{(t'+1)} = t - t' + 1 \quad (8.2.17)$$

в иррациональном случае (8.2.13) и соответственно —

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta^{(t'+1)} = 1 \quad (8.2.18)$$

в рациональном случае (8.2.14)

Предложение 8.2.1 Пусть ранг (8.2.15) вещественного вектора $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ равен

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = t' + 1, \quad (8.2.19)$$

где $0 \leq t' \leq t$. Тогда найдется такая матрица U из унимодулярной группы $\operatorname{GL}_t(\mathbb{Z})$, что выполняется сравнение

$$\beta \equiv U\gamma \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (8.2.20)$$

Здесь $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$ — столбец высоты t с блоком $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$, элементы которого линейно независимы над кольцом \mathbb{Z} по $\pmod{\mathbb{Z}}$ в случае $t' \geq 1$; и $\gamma' = (\gamma_1)$, где γ_1 — рациональное число, если $t' = 0$.

Доказательство вытекает из сравнений (8.2.13), (8.2.14) и равенств (8.2.17), (8.2.18). \square

Следствие 8.2.1 Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ — любой вещественный вектор и $\eta > 0$ — произвольное наперед заданное сколь угодно малое число. Тогда найдется такое натуральное число q , что будет выполняться неравенство

$$\|q\beta\|_1 = \|q\beta_1\| + \dots + \|q\beta_t\| \leq \eta, \quad (8.2.21)$$

где $\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \beta \geq 2$ и $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$ — столбец из (8.2.20). Так как

элементы блока $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$ линейно независимы над кольцом \mathbb{Z} по $\pmod{\mathbb{Z}}$, то

последовательность $\{q\gamma'\}$ для $q = 1, 2, 3, \dots$ всюду плотно распределена на торе $\mathbb{T}^{t'}$. Поэтому для любого $\eta' > 0$ найдется q с условием

$$\|q\gamma\|_1 = \|q\gamma'\|_1 = \|q\gamma_1\| + \dots + \|q\gamma_{t'}\| \leq \eta'. \quad (8.2.22)$$

Тогда найдется такая зависящая лишь от матрицы U граница $\eta'_U > 0$, что при выполнении условия $0 < \eta' < \eta'_U$ из (8.2.22) и сравнения (8.2.20) для β будет следовать оценка

$$\|q\beta\|_1 = \|U(q\gamma)\|_1 \leq c_U \|q\gamma\|_1 \leq c_U \eta' \quad (8.2.23)$$

с некоторой константой $c_U > 0$, зависящей только от U . Выбирая $\eta' = \min\{\eta/c_U, \eta'_U\}$, получаем неравенство (8.2.21).

Если $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = 1$, то согласно предложению 8.2.1 блок $\gamma' = (\gamma_1)$ является рациональным числом a/b . Можем считать $b \geq 1$. В данном случае выбираем $q = b$. В силу сравнения (8.2.20) имеем

$$\|q\beta\|_1 = \|U(q\gamma)\|_1 = 0$$

и сразу приходим к неравенству (8.2.21). □

Замечание 8.2.1 В следующей главе 9 будет построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби, применимый к векторам γ' с условием $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \gamma' = t' + 1$. Если воспользоваться неравенствами (8.2.22) и (8.2.23), то данный алгоритм можно использовать и для нахождения приближений в случае произвольных векторов β .

8.3 Единицы алгебраических полей

8.3.1 Локализованные единицы Пизо.

Из определения отображения (7.3.2) следует, что образ $\mathcal{L} = x(\mathcal{E})$ группы единиц \mathcal{E} содержится в гиперплоскости

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{t+1}; \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \quad (8.3.1)$$

где $\mathbf{n} \cdot x$ — скалярное произведение x с вектором $\mathbf{n} = (1, \dots, 1)$ размерности $t+1$. Подмножество $\mathcal{L} \subset P$ представляет собою *полную решетку* в пространстве (7.3.6) с \mathbb{Z} -базисом $x(\varepsilon_1), \dots, x(\varepsilon_t)$. Данное множество также образует базис в P , но уже относительно \mathbb{R} .

Вектор

$$\mathbf{d} = (d, \underbrace{-1, \dots, -1}_{r-1}, \underbrace{-2, \dots, -2}_c) \quad (8.3.2)$$

принадлежит гиперплоскости P . Поэтому он разложим

$$\mathbf{d} = \beta_1 x(\varepsilon_1) + \dots + \beta_t x(\varepsilon_t) \quad (8.3.3)$$

по базису решетки \mathcal{L} с некоторыми вещественными коэффициентами β_1, \dots, β_t . По следствию 8.2.1 для любого произвольного наперед заданного сколь угодно малого числа $\eta > 0$ найдутся такие целые числа $q \geq 1$ и p_1, \dots, p_t , что будет выполняться неравенство

$$|q\beta - p|_1 = |q\beta_1 - p_1| + \dots + |q\beta_t - p_t| \leq \eta \quad (8.3.4)$$

в 1-метрике $|x|_1$, определенной в (2.5.9).

Выберем единицу

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t}. \quad (8.3.5)$$

Для нее, согласно свойству (7.3.3), имеем

$$x(\zeta) = p_1 x(\varepsilon_1) + \dots + p_t x(\varepsilon_t). \quad (8.3.6)$$

Из (8.3.2) и (8.3.3) следует равенство

$$q\mathbf{d} = q\beta_1 x(\varepsilon_1) + \dots + q\beta_t x(\varepsilon_t),$$

из которого и (8.3.6) находим разность

$$q\mathbf{d} - x(\zeta) = (q\beta_1 - p_1)x(\varepsilon_1) + \dots + (q\beta_t - p_t)x(\varepsilon_t).$$

Запишем векторы

$$x(\varepsilon_i) = (x_1(\varepsilon_i), \dots, x_{t+1}(\varepsilon_i)) \quad (8.3.7)$$

в координатах пространства \mathbb{R}^{t+1} . Тогда разность векторов $q\mathbf{d} - x(\zeta)$ в силу (8.3.4) оценивается как

$$|q\mathbf{d} - x(\zeta)|_1 \leq \eta', \quad (8.3.8)$$

где справа обозначили $\eta' = \eta(t+1)\max_\varepsilon$ и

$$\max_\varepsilon = \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq t+1}} |x_j(\varepsilon_i)|. \quad (8.3.9)$$

Если ввести обозначение

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_{t+1}) = x(\zeta) - q\mathbf{d},$$

то для вектора $x(\zeta)$ получим представление

$$x(\zeta) = q\mathbf{d} + \varrho, \quad (8.3.10)$$

при этом координаты вектора ϱ по (8.3.8) удовлетворяют неравенствам

$$|\varrho_1| \leq \eta', \dots, |\varrho_t| \leq \eta'. \quad (8.3.11)$$

По определению (7.3.2) записываем

$$x(\zeta) = (\ln|\zeta^{(1)}|, \ln|\zeta^{(2)}|, \dots, \ln|\zeta^{(r)}|, 2\ln|\zeta^{(r+1)}|, \dots, 2\ln|\zeta^{(r+c)}|), \quad (8.3.12)$$

а по (8.3.2) имеем

$$q\mathbf{d} = (qd, -q, \dots, -q, -2q, \dots, -2q). \quad (8.3.13)$$

Поэтому сравнивая координаты данных векторов и используя (8.3.10) и (8.3.12), (8.3.13), приходим к следующим формулам

$$\ln \zeta = \ln|\zeta^{(1)}| = qd + \varrho_1 \quad (8.3.14)$$

и

$$\ln|\zeta^{(i)}| = -q + \varrho_i \quad \text{для остальных } i \geq 2. \quad (8.3.15)$$

Из приведенных формул, в частности, следует

$$\ln \zeta^{1/d} + \ln|\zeta^{(i)}| = \varrho'_i, \quad (8.3.16)$$

где

$$\varrho'_i = \varrho_1/d + \varrho_i. \quad (8.3.17)$$

Из (8.3.16) выводим связь между ζ и ее сопряженными $\zeta^{(i)}$:

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d} \exp(\varrho'_i) \quad (8.3.18)$$

для всех $i \geq 2$. Здесь для показателя ϱ'_i , согласно (8.3.17) и (8.3.11), выполняется оценка

$$|\varrho'_i| \leq 2\eta'. \quad (8.3.19)$$

Перепишем равенство (8.3.18) в более удобной форме

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta_i}, \quad (8.3.20)$$

где $i \geq 2$ и $\theta_i = \varrho'_i / \ln \zeta$.

Предложение 8.3.1 Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ — некоторая полная система основных единиц вещественного алгебраического поля \mathbb{F} из (7.3.1) степени $d+1$, ζ — единица (8.3.5), зависящая от $\eta > 0$, и $\zeta^{(i)}$ — ее сопряженные. Тогда существует такая константа $\eta_\varepsilon > 0$, зависящая от выбора системы единиц ε , что выполняются следующие свойства:

1) если параметр η принадлежит интервалу

$$0 < \eta < \eta_\varepsilon, \quad (8.3.21)$$

то ζ является единицей Пизо (7.3.4);

2) сопряженные $\zeta^{(i)}$, где $\zeta = \zeta^{(1)}$, связаны соотношением

$$\max_{2 \leq i \leq t} |\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta} \quad (8.3.22)$$

с показателем

$$0 < \theta \leq c_\varepsilon \eta, \quad (8.3.23)$$

где константа $c_\varepsilon > 0$ не зависит от выбора параметра η из (8.3.21).

Доказательство. Удобно начать с доказательства второго утверждения. Принимая во внимание (8.3.19) и (8.3.20), в качестве показателя θ в равенстве (8.3.22) выберем

$$\theta = \max_{2 \leq i \leq t+1} \theta_i = \frac{1}{\ln \zeta} \max_{2 \leq i \leq t+1} \varrho'_i. \quad (8.3.24)$$

Из (8.3.8) и (8.3.9) получаем неравенства

$$\max_{2 \leq i \leq t+1} \varrho'_i \leq 2\eta' \leq 2\eta(t+1) \max_\varepsilon.$$

Поэтому $\theta \leq c_\varepsilon \eta$, где

$$c_\varepsilon = \frac{2}{\ln \zeta} (t+1) \max_\varepsilon, \quad (8.3.25)$$

что доказывает правое неравенство в (8.3.23).

Для доказательства левого неравенства воспользуемся нормой

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \zeta^{(1)} \cdots \zeta^{(r)} \cdot |\zeta^{(r+1)}|^2 \cdots |\zeta^{(r+c)}|^2 = \pm 1. \quad (8.3.26)$$

Оценивая величину $|\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)|$ с помощью формулы (8.3.22), получаем

$$1 = |\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)| \leq \zeta (\zeta^{-1/d+\theta})^{r-1+2c} = \zeta (\zeta^{-1/d+\theta})^d = \zeta^{d\theta},$$

откуда следует неравенство неравенства $\theta > 0$.

Осталось проверить, что ζ является единицей Пизо. Если параметр $\eta > 0$ выбирать меньше некоторой границы $\eta_\varepsilon > 0$, то из формул (8.3.14) и (8.3.15) будут вытекать неравенства $\ln \zeta = \ln |\zeta^{(1)}| > 0$ и $\ln |\zeta^{(i)}| < 0$ для $2 \leq i \leq t + 1$, из которых, в свою очередь, будет следовать, что ζ удовлетворяет всем условиям в определении (7.3.4) единиц Пизо.

□

Числа $\zeta = \zeta_\eta > 1$, отвечающие параметру η из интервала (8.3.21) будем называть *локализованными единицами Пизо*. Их основное свойство состоит в том, что модули всех сопряженных $\zeta^{(i)}$ содержатся в некоторой окрестности

$$\zeta^{-1/d} - \delta_\eta \leq |\zeta^{(i)}| \leq \zeta^{-1/d} + \delta_\eta \quad (8.3.27)$$

для $2 \leq i \leq t + 1$, где величина отклонения $\delta_\eta \downarrow 0$, если $\eta \rightarrow 0$. Свойство локализации (8.3.27) единиц Пизо ζ вытекает из представления (8.3.10) и неравенств (8.3.11). Данное свойство эквивалентно малому относительному разбросу сопряженных единиц $\zeta^{(i)}$ для всех $2 \leq i \leq t + 1$.

Замечание 8.3.1 Используя симплекс-ядерный алгоритм, который будет подробно изложен в главе 9, можно в явном виде строить указанные выше локализованные единицы Пизо $\zeta = \zeta_\eta$, о которых шла речь в теореме 8.3.1 и которые обладают свойством (8.3.27). Чтобы применить симплекс-ядерный алгоритм, необходимо знать некоторую полную систему единиц $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$.

8.3.2 Модульная матрица Пизо.

Согласно предложению 7.4.1 существует определенная в (7.4.20) модульная матрица Пизо P_α или кратко — матрица Пизо, обладающая свойством

$$P_\alpha \hat{\alpha} = \lambda \cdot \hat{\alpha}, \quad (8.3.28)$$

где $\hat{\alpha}$ — столбец (7.4.14) и

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \quad (8.3.29)$$

— единица Пизо (7.3.4).

Если ζ является локализованной единицей Пизо (8.3.27), то P_α будем также называть *локализованной матрицей Пизо*.

8.4 Диофантыя экспонента

8.4.1 Асимптотические разложения для знаменателей.

В данном параграфе будет показано, как можно переписать неравенства (7.8.12) непосредственно в терминах знаменателей подходящих дробей $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$. Для этого нам потребуется один асимптотический результат о $Q_{a,\max}$.

Лемма 8.4.1 Пусть $Q_{a,\max}$ — знаменатели точек Фарея $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ из (7.8.2). Для них выполняется асимптотическое разложение

$$Q_{a,\max} = \kappa \lambda^a + \mathcal{O}(\lambda_{2,\max}^a) \quad (8.4.1)$$

при $a \rightarrow +\infty$. Здесь $\lambda > 1$ — единица Пизо (8.3.29), значение $\lambda_{2,\max}$, удовлетворяющее неравенству $|\lambda_{2,\max}| < 1$, определено в (7.5.16) и коэффициент $\kappa > 0$ не зависит от a .

Доказательство. Из формулы (7.7.8) следуют асимптотические равенства

$$Q_{a,i} = \kappa_i \lambda^a + \mathcal{O}(\lambda_{2,\max}^a) \quad (8.4.2)$$

для всех $i = 0, 1, \dots, d$, где $|\lambda_{2,\max}| < 1$ согласно (7.5.16) и предложению 7.4.1. По определению точек Фарея (7.8.2) имеем

$$Q_{a,\max} = Q_{a,1} + \dots + Q_{a,d}. \quad (8.4.3)$$

Поэтому складывая все равенства (8.4.2), получаем асимптотическое разложение (8.4.1) с коэффициентом

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_d. \quad (8.4.4)$$

Покажем, что $\kappa > 0$. Данное неравенство будет вытекать из уже доказанного разложения (8.4.1), если будет известно, что

$$Q_{a,\max} \rightarrow +\infty \quad \text{при } a \rightarrow +\infty. \quad (8.4.5)$$

По (8.3.28) столбец $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным $P_\alpha \hat{\alpha} = \lambda \cdot \hat{\alpha}$ для матрицы

Пизо P_α из (7.4.20) с собственным значением $\lambda > 1$. С другой стороны, ввиду (7.7.16) существует связь

$$\mathbf{v}_{a,i} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_{a,i} \end{pmatrix} = P_\alpha^a \mathbf{v}_{0,i}$$

чисел $Q_{a,i}$ с матрицей P_α . Отсюда заключаем, что $Q_{a,i} \rightarrow +\infty$ при $a \rightarrow +\infty$; и тогда из (8.4.3) будет следовать (8.4.5).

□

8.4.2 Основная теорема.

Асимптотическое разложение (8.4.1) в совокупности с предложением 8.3.1, содержащим формулу о собственных значениях единиц Пизо, позволяют оценку (7.8.12) представить непосредственно в терминах знаменателей $Q_{a,\max}$ подходящих дробей $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$.

Теорема 8.4.1 В условиях теоремы 7.8.2 для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая локализованная матрица Пизо P_α из (8.3.28), что выполняются неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_1 \leq \frac{c}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (8.4.6)$$

для всех $a \geq a_{\alpha,\theta}$. Здесь константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a .

Доказательство. По определению (8.3.29) имеем $\lambda = \zeta^\nu$. Поэтому, используя (7.5.16) и предложение 8.3.1, находим значение

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leq i \leq t} |\lambda^{(i)}| = \lambda^{-1/d+\theta} \quad (8.4.7)$$

с показателем $0 < \theta \leq c_\varepsilon \eta$. Применяя лемму 8.4.1 и (8.4.7), выводим неравенство

$$\varrho^a = \frac{\lambda_{2,\max}^a}{\lambda^a} \leq \frac{c'}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (8.4.8)$$

с некоторой константой $c' > 0$ для всех достаточно больших $a \geq a_{\alpha,\theta}$, где ϱ было определено в (7.8.13). Теперь оценка (8.4.6) вытекает из теоремы 7.8.2 и неравенства (8.4.8).

□

8.4.3 Диофанты экспонента алгебраических точек.

Диофантову экспоненту для вещественной точки $\alpha \in \mathbb{R}^d$ определим как supremum показателей Θ , для которых неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_a}{q_a} \right| \leq \frac{1}{q_a^{1+\Theta}} \quad (8.4.9)$$

имеет бесконечно много решений $p_a \in \mathbb{Z}^d$ и $q_a = 1, 2, 3, \dots$

Следствие 8.4.1 Для вещественной полной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ степени $\deg(\alpha) = d + 1$ диофанты экспонента Θ из (8.4.9) равна

$$\Theta = \frac{1}{d}. \quad (8.4.10)$$

Доказательство. Неравенство

$$\Theta \leq \frac{1}{d} \quad (8.4.11)$$

хорошо известно (см., например, [34], гл. V-3). С другой стороны, оценка снизу

$$\Theta \geq \frac{1}{d} - \theta, \quad (8.4.12)$$

где $\theta > 0$ — любое фиксированное число, получается из теоремы 8.4.1. Теперь равенство (8.4.10) вытекает из неравенств (8.4.11) и (8.4.12).

□

Замечание 8.4.1 Метод локализованных матриц Пизо (8.3.28), (8.3.29) позволяет получать приближения (8.4.6) с показателем

$$\theta = 0 \quad (8.4.13)$$

только для алгебраических полей ранга один (см. подробности [2]):

- 1) вещественных квадратичных полей;
- 2) кубических полей с комплексным сопряжением.

Это как раз те вещественные алгебраические поля, у которых группы единиц \mathcal{E} порождаются одним элементом.

8.5 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Минимальные симплексы \mathbf{s} являются многомерным обобщением отрезков Фарея. Двумерный случай исследован в [52], [57], [62] [63], [100], [106] и для произвольной размерности представлен в [73], [109], [31].

В [30] было доказано существование матриц Пизо P_α из (8.3.28), позволяющих получать приближения вида (8.4.6) с показателем $\theta < 1/d$. После того, как был разработан общий симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных чисел в многомерные цепные дроби [31], появилась возможность строить матрицы Пизо P_α с любым наперед заданным параметром η . Это позволило для алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ произвольной степени $d + 1$ получать приближения (8.4.6) с любым фиксированным $\theta > 0$. В неравенствах (8.1.6) данный показатель $\theta = 0$. Симплекс-модулярным алгоритмом получить такое значение возможно только для полей вещественных квадратичных и кубических комплексных.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка [47]. Для вычисления подходящих дробей в неравенствах (8.4.6) также применяются рекуррентные соотношения (8.1.4), но уже произвольного порядка $d + 1$. В многомерном случае такая связь приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [86] (см. также обзоры [65], [97]).

Глава 9

Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби

Рассматривается симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби. В основе предлагаемого алгоритма лежит $(d+1)$ -мерное суперпространство \mathbf{S} с вложенными в него гиперплоскостями — ядерной \mathbf{K} и Фарея \mathbf{F} . Аппроксимация чисел α цепными дробями осуществляется на гиперплоскости \mathbf{F} , а степень приближения контролируется на гиперплоскости \mathbf{K} . Показано, как выбрать локальную $\wp(r)$ -стратегию построения подходящих дробей со свободной целевой функцией $\wp(r)$ на гиперплоскости \mathbf{K} .

9.1 Введение

В главе 7 был построен симплекс-модульный алгоритм разложения вещественных алгебраических чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные периодические цепные дроби. Основу данного алгоритма составляют:

- 1) минимальные рациональные симплексы \mathbf{s} , содержащие точку α ;
- 2) целочисленные унимодулярные матрицы Пизо P_α , для которых $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d, 1)$ — собственный вектор.

Симплекс-модульный алгоритм относится к категории свободных алгоритмов. Чтобы получить разложение в цепную дробь, требуется предварительная настройка этого алгоритма на точку α . Если координаты точки α порождают алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ степени $d+1$, то указанный алгоритм позволяет получать приближения α подходящими цепными дробями с показателем, отличающимся от наилучшего $\frac{1}{d}$ на сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, зависящего от настройки алгоритма.

В настоящей главе предлагается универсальный симплекс-ядерный алгоритм, применимый к точкам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с любыми вещественными координатами. Хотя во избежание вырождений, рассматривается только случай иррациональных точек α , когда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом целых

рациональных чисел \mathbb{Z} .

Симплекс-ядерный алгоритм работает по следующей схеме. Выбирается целевая функция $\wp(r)$. Данная функция и точка α определяют некоторую \wp -стратегию построения бесконечной монотонной последовательности

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \supset \mathbf{s}_1 \supset \dots \supset \mathbf{s}_n \supset \dots \ni \alpha, \quad (9.1.1)$$

состоящей из d -мерных открытых симплексов \mathbf{s}_n с рациональными вершинами. Симплексы (9.1.1) обладают *свойством минимальности*:

1) любая рациональная точка $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q} \right)$ не попадает

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}_n \quad (9.1.2)$$

в симплекс \mathbf{s}_n , если ее общий знаменатель $1 \leq Q < \mathbf{Q}_n$, где \mathbf{Q}_n — знаменатель точки Фарея

$$\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n} = \left(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n} \right) \quad (9.1.3)$$

симплекса \mathbf{s}_n , равной сумме Фарея всех его вершин;

2) единственной точкой $\frac{P}{Q}$ со знаменателем $Q = \mathbf{Q}_n$, содержащейся в симплексе

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}_n, \quad (9.1.4)$$

является точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$.

Из включения $\alpha \in \mathbf{s}_n$ и свойства минимальности (9.1.2)–(9.1.4) следует, что точка Фарея $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$ дает *наилучшее приближение* для иррациональной точки α относительно *симплексальной* \mathbf{s}_n -нормы

$$\|\cdot\|^{s_n} = \|\cdot\|_\alpha^{s_n}, \quad (9.1.5)$$

для которой в качестве нормирующего тела выбран симплекс \mathbf{s}_n . Это означает, что $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$ — единственная рациональная точка в \mathbf{s}_n со знаменателем, не превосходящим \mathbf{Q}_n ; или если записать в терминах \mathbf{s}_n -нормы (9.1.5), то свойство минимальности симплекса \mathbf{s}_n примет вид:

1) если $1 \leq Q < \mathbf{Q}_n$, то

$$\left\| \frac{P}{Q} - \alpha \right\|^{s_n} \geq 1; \quad (9.1.6)$$

2) если же $Q = \mathbf{Q}_n$ и

$$\left\| \frac{P}{Q} - \alpha \right\|^{s_n} < 1, \quad (9.1.7)$$

то дробь $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q} \right)$ есть точка Фарея $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$.

В этом состоит геометрический смысл минимальности симплексов \mathbf{s}_n в последовательности (9.1.1).

В теореме 9.8.1 доказана следующая оценка

$$\left| \alpha_1 - \frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n} \right| \leq \frac{c}{\mathbf{Q}_n^{1+\eta'}}, \quad (9.1.8)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь константа c и нижняя граница $n_{\eta'}$ для n определяются выбором показателя $\eta' < \eta(\alpha, \varphi)$, где $\eta(\alpha, \varphi)$ — диофантина экспонента, зависящая от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и целевой функции $\varphi(r)$. Диофантина экспонента (φ -экспонента) определяется равенством

$$\eta(\alpha, \varphi) = \sup_{n' \geq 0} \inf_{n \geq n'} \frac{-\ln \varphi(r_n)}{\ln \mathbf{Q}_n},$$

где r_n — ядра индуцированных разбиений торов \mathbb{T}^d , соответствующие симплексам \mathbf{s}_n из (9.1.1). Отсюда и (9.1.4) проистекает название для рассматриваемого здесь симплекс-ядерного алгоритма.

Приближение (9.1.8) нетривиально, если выполняется неравенство $\eta' > 0$. Данное требование можно удовлетворить только в случае, когда диофантина экспонента $\eta(\alpha, \varphi) > 0$ — это основное требование, которое необходимо выполнить при выборе целевой функции $\varphi(r)$.

9.2 Симплексы и суперсимплексы

9.2.1 Унимодулярные симплексы.

Фиксируем открытый d -мерный единичный симплекс

$$\Delta_e = \Delta_e^d \quad (9.2.1)$$

с вершинами в точках $e_0 = (0, \dots, 0)$, $e_1 = (1, \dots, 0)$, \dots , $e_d = (0, \dots, 1)$ из пространства \mathbb{R}^d и рассмотрим все образы

$$\Delta_U^d = U \Delta_e^d \quad (9.2.2)$$

симплекса (9.2.1) под действием преобразований U из группы $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$, определенной в (7.2.2). Если α — иррациональная точка (1.2.21), то согласно предложению 7.2.1 существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение

$$\alpha \in \Delta_U^d. \quad (9.2.3)$$

Симплекс Δ_U^d из (9.2.2) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис d -мерной кубической решетки \mathbb{Z}^d .

Условимся и далее под терминами *унимодулярный базис* и *унимодулярная матрица* понимать базис решетки \mathbb{Z}^d , матрицу с целыми коэффициентами и определителем ± 1 .

9.2.2 Базисный симплекс.

Для базисного симплекса из (9.2.2), удовлетворяющего условию (9.2.3), введем сокращение

$$\Delta = \Delta_U^d. \quad (9.2.4)$$

Из определения (9.2.1), (9.2.2) следует, что симплекс Δ имеет целочисленные вершины

$$v_i = U e_i = \frac{P_i}{Q_i}, \quad (9.2.5)$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, d$. Векторы

$$v'_i = v_i - v_0 = V e_i \quad (9.2.6)$$

для $i = 1, \dots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (9.2.4) имеет объем

$$\mathrm{vol} \Delta = \frac{1}{d!}. \quad (9.2.7)$$

9.2.3 Суперсимплекс.

Определим следующий *суперсимплекс*

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_U^d \subset \mathbb{R}^{d+1}. \quad (9.2.8)$$

Он имеет $d + 2$ вершины: $d + 1$ целочисленную вершину

$$\widehat{v}_i = \widehat{U} e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.2.9)$$

с индексами $i = 0, 1, \dots, d$ и еще одну вершину в начале координат $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$. Из (9.2.6) и (9.2.9) следует, что векторы

$$\widehat{v}'_i = \widehat{v}_i - 0$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ образуют унимодулярный базис и поэтому $(d + 1)$ -мерный суперсимплекс (9.2.8) имеет объем

$$\mathrm{vol} \widehat{\Delta} = \frac{1}{(d + 1)!}. \quad (9.2.10)$$

Далее выходящие из начала координат векторы и их концы будем отождествлять.

9.3 Дифференцирования центрированных унимодулярных базисов

9.3.1 Центрированный унимодулярный базис.

Как уже было сказано, множество ребер

$$\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\} \quad (9.3.1)$$

суперсимплекса $\widehat{\Delta}$ из (9.2.8) образуют унимодулярный базис в пространстве \mathbb{R}^{d+1} . Базисный симплекс Δ из (9.2.4) является гранью суперсимплекса $\widehat{\Delta}$ и Δ содержит в качестве внутренней точку α . Такой $\widehat{\Delta}$ назовем *центрированным унимодулярным суперсимплексом* или кратко — *CU-суперсимплексом*.

Ему отвечает *центрированный унимодулярный базис* \widehat{V} из (9.3.1) (*CU-базис*), центрированный лучом $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$. Последнее означает, что внутренняя область конуса $\mathbb{R}_+ \widehat{V}$ содержит луч $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$.

9.3.2 Пространства.

Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d \quad (9.3.2)$$

— *суперпространство и ядерное пространство* (*karyon space*), вложенное

$$\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S} \quad (9.3.3)$$

в \mathbf{S} как гиперплоскость

$$\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{K}\} \quad (9.3.4)$$

— *ядерная гиперплоскость*.

9.3.3 Проекции.

Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \xrightarrow{\text{pr}_0} \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\kappa_0} \mathbf{K}, \quad (9.3.5)$$

где

$$\text{pr}_0 : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1 - \alpha_1 x_{d+1}, \dots, x_d - \alpha_d x_{d+1}, 0) \quad (9.3.6)$$

— параллельная проекция вдоль вектора

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (9.3.7)$$

и

$$\kappa_0 : (x_1, \dots, x_d, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \quad (9.3.8)$$

— изоморфизм. Обозначим через

$$\kappa = \kappa_0 \circ \text{pr}_0 \quad (9.3.9)$$

композицию отображений (9.3.6) и (9.3.8).

9.3.4 Центрированные унимодулярные базисы и звезды.

Пусть \widehat{V} — центрированный унимодулярный базис (CU -базис), определенный в (9.3.1). Его проекция (9.3.9)

$$\kappa : \widehat{V} \rightarrow r \quad (9.3.10)$$

представляет собою множество $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$, состоящее из векторов

$$r_i = \kappa(\widehat{v}_i) = v_i - \alpha \quad (9.3.11)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ в ядерном пространстве \mathbf{K} из (9.3.2), (9.3.3).

Предложение 9.3.1 *Если α — иррациональная точка (1.2.21) и \widehat{V} — центрированный унимодулярный базис (9.3.1), то множество векторов r из (9.3.10) образует невырожденную звезду (см. определение 1.1.3).*

Доказательство. 1. Сначала проверим, что множество векторов r образует звезду. Отображение (9.3.10) — параллельная проекция вдоль вектора $\widehat{\alpha}$ из (9.3.7) — переводит луч $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$ в $0 \in \mathbf{K}$ и внутренняя область конуса $\mathbb{R}_+ \widehat{V}$ содержит данный луч. Поэтому 0 является внутренней точкой

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(r) \quad (9.3.12)$$

симплекса $\Delta^{\text{int}}(r)$ с вершинами в концах векторов r_i из множества r . По критерию (1.1.4) из включения (9.3.12) выводим, что множество векторов r будет звездой.

Как следствие, отсюда следует, что отображение (9.3.10) задает биекцию между векторами CU -базиса \widehat{V} и лучами звезды r .

2. Доказательство невырожденности звезды r проведем от противного. Предположим, что звезда $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$ из (9.3.10) вырождена. Не уменьшая общности можем считать, что сумма лучей $r_{01} = r_0 + r_1$ принадлежит гиперплоскости в \mathbb{R}^d , натянутой на векторы r_2, \dots, r_d . Тогда из определения проекции (9.3.10) и (9.3.11) будет вытекать принадлежность вектора $\widehat{v}_{01} = \widehat{v}_0 + \widehat{v}_1$ гиперплоскости, проходящей через векторы $\widehat{\alpha}, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_d$.

По определению (9.3.1) векторы $\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d$ линейно независимы, поэтому линейно независимы и векторы $\widehat{v}_{01}, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_d$. Значит, указанные векторы порождают гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} и из предыдущего следует, что она содержит вектор $\widehat{\alpha}$, т.е.

$$\widehat{\alpha} = \lambda_{01} \widehat{v}_{01} + \lambda_2 \widehat{v}_2 + \dots + \lambda_d \widehat{v}_d, \quad (9.3.13)$$

где векторы \widehat{v}_* имеют целые рациональные координаты. Из (9.3.7) и (9.3.13) выводим линейное соотношение между коэффициентами

$$\lambda_{01} + \lambda_2 + \dots + \lambda_d = 1.$$

Отсюда и (9.3.13) получаем представление

$$\widehat{\alpha} = \lambda_2 \widehat{v}'_2 + \dots + \lambda_d \widehat{v}'_d + \widehat{v}_{01}, \quad (9.3.14)$$

где

$$\widehat{v}'_2 = \widehat{v}_2 - \widehat{v}_{01}, \dots, \widehat{v}'_d = \widehat{v}_d - \widehat{v}_{01}.$$

Перепишем его в матричном виде

$$\widehat{\alpha} = \mathcal{V} \cdot \widehat{\lambda}. \quad (9.3.15)$$

Здесь \mathcal{V} — целочисленная матрица из $d+1$ строк и d столбцов, состоящих из векторов $\widehat{v}'_2, \dots, \widehat{v}'_d, \widehat{v}_{01}$ в (9.3.14), и

$$\widehat{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

— столбец коэффициентов из (9.3.14). Линейная система

$$x \cdot \mathcal{V} = 0 \quad (9.3.16)$$

из d уравнений с $d+1$ переменной $x = (x_1 \dots x_d x_0)$ имеет ненулевое целочисленное решение. Умножим строку x на $\widehat{\alpha}$ из равенства (9.3.15). Тогда в силу (9.3.16) получим соотношение $x \cdot \widehat{\alpha} = 0$ или в развернутом виде —

$$x_1 \alpha_1 + \dots + x_d \alpha_d + x_0 = 0 \quad (9.3.17)$$

с целыми коэффициентами x_i , неравными тождественно нулю. Полученное соотношение (9.3.17) противоречит условию иррациональности (1.2.21) точки α . \square

9.3.5 Дифференцирования центрированных базисов.

Как уже отмечалось, отображение (9.3.10) задает биекцию между векторами CU -базиса \widehat{V} и лучами звезды r . Поскольку оно является линейным отображением, то с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{V} & \xrightarrow{\kappa} & r \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \widehat{V}^\sigma & \xrightarrow{\kappa} & r^\sigma \end{array} \quad (9.3.18)$$

можно перенести операции дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ звезд (1.1.9) на дифференцирования CU -базисов \widehat{V} .

Выясним геометрический смысл дифференцирований CU -базисов \widehat{V} . Пусть σ' — дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} , содержащую векторы $\widehat{v}_{k'_j} \in \widehat{V}$ с индексами k'_j из σ' и луч $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор \widehat{v}_{k_1} и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\widehat{V} \xrightarrow{\sigma} \widehat{V}^\sigma \quad (9.3.19)$$

сводится к замене вектора \widehat{v}_{k_2} на сумму $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$.

Предложение 9.3.2 *Если α — иррациональная точка (1.2.21), то для любого $\sigma \in \Sigma$ производное множество векторов \widehat{V}^σ , определенное в (9.3.18) и (9.3.19), снова образует CU -базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.*

Доказательство. Из определения преобразования (9.3.19) следует, что множество векторов \widehat{V}^σ остается унимодулярным базисом в \mathbb{R}^{d+1} .

Согласно предложению 9.3.1 звезда r из (9.3.10) невырождена и, значит, для нее существует производная звезда r^σ в диаграмме (9.3.18). Она обладает свойством

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(r^\sigma),$$

из которого следует, что луч $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$ принадлежит внутренней области конуса $\mathbb{R}_+\widehat{V}^\sigma$. Таким образом, множество векторов \widehat{V}^σ является центрированным унимодулярным базисом с лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. □

Определенный в (9.3.19) CU -базис \widehat{V}^σ назовем σ -производным базисом.

Используя предложения 9.3.1 и 9.3.2, приходим к следующему утверждению.

Предложение 9.3.3 1. *Если α — иррациональная точка (1.2.21), то любой центрированный унимодулярный базис \widehat{V} , центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$, является бесконечно дифференцируемым.*

2. При том же условии на α звезда $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$ из (9.3.10) также будет бесконечно дифференцируемой.

Доказательство. 1. Первое утверждение получается, как прямое следствие из предложения 9.3.2.

2. Пусть \widehat{V} — произвольный CU -базис (9.3.1) и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ — любая бесконечная последовательность дифференцирований из Σ . Рассмотрим бесконечную

коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{V} & \xrightarrow{\kappa} & r \\
 \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_1 \\
 \widehat{V}^{\sigma_1} & \xrightarrow{\kappa} & r^{\sigma_1} \\
 \downarrow \sigma_2 & & \downarrow \sigma_2 \\
 \widehat{V}^{\sigma_1\sigma_2} & \xrightarrow{\kappa} & r^{\sigma_1\sigma_2} \\
 \downarrow \sigma_3 & & \downarrow \sigma_3 \\
 \vdots & \xrightarrow{\kappa} & \vdots
 \end{array} \tag{9.3.20}$$

Из доказанных предложений 9.3.1 и 9.3.2 следует, что каждый последующий уровень в диаграмме (9.3.20) определяется предыдущим. Из первого утверждения с помощью предложения 9.3.1 и диаграммы (9.3.20) индукцией по $i = 1, 2, 3, \dots$ выводим существование производных звезд $r^{\sigma_1}, r^{\sigma_1\sigma_2}, r^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, \dots$

□

Замечание 9.3.1 Первоначально бесконечно дифференцируемость звезд $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$ была доказана в [23] для размерности $d = 2$.

9.4 Пространства Фарея

9.4.1 Пространство и гиперплоскость Фарея.

Выделим в суперпространстве \mathbf{S} из (9.3.2) единичную гиперплоскость

$$\mathbf{F}_1 = \widehat{\mathbf{F}} = \{\widehat{x} = (x, 1) : x \in \mathbf{F}\} \subset \mathbf{S}, \tag{9.4.1}$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbb{R}^d. \tag{9.4.2}$$

Назовем \mathbf{F}_1 гиперплоскостью Фарея, а \mathbf{F} — пространством Фарея.

Зададим проекции

$$\mathbf{S}_+ \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F}. \tag{9.4.3}$$

Здесь

$$\mathbf{S}_+ = \{(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S} : x_{d+1} > 0\} \tag{9.4.4}$$

обозначает верхнее суперпространство,

$$\text{pr}_1 : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}}, 1\right) \tag{9.4.5}$$

— центральную проекцию на гиперплоскость Фарея \mathbf{F}_1 с центром в $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$ и

$$\varphi_1 : (x_1, \dots, x_d, 1) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \tag{9.4.6}$$

— изоморфизм. Далее, обозначим через

$$\varphi = \varphi_1 \circ \text{pr}_1 \tag{9.4.7}$$

композицию отображений (9.4.5) и (9.4.6).

9.4.2 Сумма Фарея точек.

Данные нами названия для множеств \mathbf{F} и \mathbf{F}_1 объясняет следующее утверждение.

Предложение 9.4.1 *При отображении*

$$\varphi : \mathbf{S}_+ \longrightarrow \mathbf{F} \quad (9.4.8)$$

имеет место согласование операций

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \widehat{+} \varphi(y), \quad (9.4.9)$$

где справа

$$\left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}} \right) \widehat{+} \left(\frac{y_1}{y_{d+1}}, \dots, \frac{y_d}{y_{d+1}} \right) = \left(\frac{x_1+y_1}{x_{d+1}+y_{d+1}}, \dots, \frac{x_d+y_d}{x_{d+1}+y_{d+1}} \right) \quad (9.4.10)$$

— сумма Фарея точек.

Доказательство. Из (9.4.4) следует, что суперпространство \mathbf{S} замкнуто относительно операции сложения $x + y$. Формула (9.4.9) вытекает непосредственно из определения отображений (9.4.3)–(9.4.7) и операции сложения Фарея (9.4.10). \square

9.5 Дифференцирования центрированных симплексов

9.5.1 Центрированные унимодулярные симплексы.

Пусть

$$\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$$

— произвольный центрированный унимодулярный базис, центрированный лучом $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$. Подействуем на него

$$\mathbf{S} \supset \widehat{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{s} \subset \mathbf{F} \quad (9.5.1)$$

проекцией φ из (9.4.8). Образом будет симплекс

$$\mathbf{s} = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}, \quad (9.5.2)$$

имеющий рациональные вершины

$$v_i = \varphi(\widehat{v}_i) = \frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (9.5.3)$$

с индексами $i = 0, 1, \dots, d$.

Замечание 9.5.1 1. Чтобы не усложнять обозначения, мы отождествляем симплекс \mathbf{s} с множеством его вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

2. В определении (9.5.3) вершины v_i получаются, как образы концов базисных векторов \widehat{v}_i .

По определению CU -базиса \widehat{V} луч $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$ принадлежит внутренней области конуса $\mathbb{R}_+ \widehat{V}$. Отсюда и (9.4.7) следует, что точка

$$\alpha = \varphi(\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}) = \varphi(\widehat{\alpha}) \quad (9.5.4)$$

будет внутренней точкой симплекса $\mathbf{s} \subset \mathbf{F}$. Назовем \mathbf{s} *центрированным точкой α симплексом*.

9.5.2 Дифференцирования симплексов.

Используя коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{V} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \widehat{V}^\sigma & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s}^\sigma, \end{array} \quad (9.5.5)$$

перенесем операции дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ центрированных унимодулярных базисов \widehat{V} на дифференцирования центрированных симплексов (9.5.2).

Геометрический смысл дифференцирований симплексов \mathbf{s} состоит в следующем. Пусть $\sigma = \{k_1, k_2\}$ и σ' — дополнительное сочетание. Обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^d , проходящую через вершины $v_{k'_j}$ симплекса \mathbf{s} с индексами k'_j из σ' и точку α . Если для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вершина v_{k_1} и сумма вершин $v_{k_1} \widehat{+} v_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\mathcal{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^\sigma \quad (9.5.6)$$

симплекса \mathbf{s} сводится к замене вершины v_{k_2} на сумму вершин $v_{k_1} \widehat{+} v_{k_2}$. В противном случае вершина v_{k_1} заменяется на сумму $v_{k_1} \widehat{+} v_{k_2}$.

Из (9.5.5) и (9.5.6) следует, что новая вершина $v_{k_1} \widehat{+} v_{k_2}$ лежит на ребре, соединяющим вершины v_{k_1} и v_{k_2} .

9.6 Минимальные симплексы

9.6.1 Минимальные рациональные симплексы.

Пусть открытый d -мерный симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (9.6.1)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$, удовлетворяющие условию

$$Q_i > 0, \quad \text{НОД}(P_{i1}, \dots, P_{id}, Q_i) = 1. \quad (9.6.2)$$

Назовем \mathbf{s} *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s} \quad (9.6.3)$$

никакой точки

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q} \right), \quad (9.6.4)$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq Q < Q_{\max}$, где использовали обозначение

$$Q_{\max} = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d. \quad (9.6.5)$$

В предложении 7.6.1 приведены некоторые свойства, равносильные свойству быть минимальным симплексом. Из данного предложения также вытекает

Теорема 9.6.1 *Пусть α — иррациональная точка (1.2.21) и \mathbf{s} — любой центрированный точкой α симплекс из диаграммы (9.5.5) с рациональными вершинами (9.5.3). Тогда такой симплекс \mathbf{s} является минимальным.*

Доказательство. По условию (9.5.5) симплекс \mathbf{s} получается, как проекция $\mathbf{s} = \varphi(\widehat{V})$ некоторого центрированного унимодулярного базиса $\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$, состоящего из векторов с целыми координатами

$$\widehat{v}_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{v}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \widehat{v}_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix}. \quad (9.6.6)$$

Составленная из координат (9.6.6) матрица

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \quad (9.6.7)$$

размера $d + 1$ унимодулярна. Применяя утверждение 2) из предложения 7.6.1, убеждаемся, что \mathbf{s} — минимальный симплекс.

□

9.6.2 Производные центрированных минимальных симплексов.

Теорема 9.6.2 *Пусть α — иррациональная точка (1.2.21) и \mathbf{s} — центрированный точкой α минимальный симплекс из диаграммы (9.5.5). Тогда для любого $\sigma \in \Sigma$ при дифференцировании $\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^\sigma$, определенного в (9.5.6), \mathbf{s} переходит снова в минимальный симплекс \mathbf{s}^σ , центрированный точкой α .*

Доказательство. Минимальность производного симплекса \mathbf{s}^σ вытекает из предложения 9.3.2 и коммутативной диаграммы (9.5.5). Что касается принадлежности точки α внутренности симплекса \mathbf{s}^σ , то она следует из того же предложения 9.3.2 и равенства (9.5.4). \square

Предложение 9.6.1 Пусть α — иррациональная точка и \mathbf{s} — центрированным точкой α симплекс из диаграммы (9.5.5). Тогда симплекс \mathbf{s} бесконечно дифференцируемый (9.5.6).

Доказательство вытекает из предложения 9.3.3 и теоремы 9.6.2. \square

9.7 Аппроксимация

9.7.1 Связь между ядерном пространством и пространством Фарея.

Между ядерном пространством \mathbf{K} и пространством Фарея \mathbf{F} существует следующая связь.

Лемма 9.7.1 Пусть точка $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$ принадлежит верхнему суперпространству \mathbf{S}_+ из (9.4.4), $x = x^\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ — ее образ относительно отображения (9.4.7), а $x^\kappa = \kappa(\mathbf{x})$ — образ относительно отображения (9.3.9). Тогда имеет место равенство

$$|x - \alpha|_1 = \frac{|x^\kappa|_1}{x_{d+1}}, \quad (9.7.1)$$

где $|\cdot|_1$ обозначает многогранную 1-метрику (2.5.9).

Доказательство. Пусть размерность $d = 1$. В этом случае согласно определениям отображений (9.3.9) и (9.4.7) выполняется пропорция

$$\frac{|x - \alpha|}{|x^\kappa|} = \frac{1}{x_{d+1}}. \quad (9.7.2)$$

Тогда в силу линейности указанных отображений для произвольной размерности d по отдельным координатам также будут выполняться пропорции (9.7.2). Перепишем их в виде равенств

$$|x_1 - \alpha_1| = \frac{|x_1^\kappa|}{x_{d+1}}, \dots, |x_d - \alpha_d| = \frac{|x_d^\kappa|}{x_{d+1}}.$$

Сложение данных равенств, с учетом определения s -метрики (2.5.9), приводит к нужному равенству (9.7.1). \square

9.7.2 Бесконечные итерации дифференцирований.

Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \quad (9.7.3)$$

— множество всех бесконечных последовательностей

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}, \quad (9.7.4)$$

состоящих из произвольных сочетаний σ_i из Σ ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \quad (9.7.5)$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ , при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \emptyset$. Используя определение производной симплекса (9.5.6), индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ определим $[\sigma]_n$ -*производные*

$$\mathbf{s}^{[\sigma]_n} = (\mathbf{s}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n}, \quad (9.7.6)$$

центрированного точкой α симплекса \mathbf{s} , где условимся $\mathbf{s}^{[\sigma]_0} = \mathbf{s}$ для $n = 0$.

Если α — иррациональная точка, то в силу предложения 9.6.1 симплекс \mathbf{s} будет $[\sigma]_n$ -*дифференцируемым* для всех значений $n = 0, 1, 2, \dots$ при любом выборе последовательности σ из множества (9.7.3).

Обозначим через

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} & P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} & P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} & Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (9.7.7)$$

матрицы $[\sigma]_n$ -производных симплексов $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, определяемых по правилу (9.6.1) и (9.6.7).

Лемма 9.7.2 *Если α — иррациональная точка (1.2.21), то при любом выборе последовательности $\sigma \in \Xi$ симплексы $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (9.7.6) образуют монотонную последовательность*

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{[\sigma]_0} \supset \mathbf{s}^{[\sigma]_1} \supset \dots \supset \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \supset \dots \ni \alpha. \quad (9.7.8)$$

Указанные симплексы имеют объемы $\text{vol } \mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, вычисляемые по формуле

$$\text{vol } \mathbf{s}^{[\sigma]_n} = \frac{1}{d!} \left(\prod_{0 \leq i \leq d} Q_i^{[\sigma]_n} \right)^{-1} \quad (9.7.9)$$

и обладающие свойством

$$\text{vol } \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow +\infty. \quad (9.7.10)$$

Доказательство. Свойство (9.7.8) вытекает из определения операции дифференцирования симплексов.

Формула (9.7.9) — это формула (7.6.7), примененная к симплексам $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, являющимися минимальными симплексами по теореме 9.6.2. Свойство (9.7.10) вытекает из формулы (9.7.9) следующего свойства знаменателей вершин симплексов

$$Q_0^{[\sigma]_n} + Q_1^{[\sigma]_n} + \dots + Q_d^{[\sigma]_n} \longrightarrow +\infty \quad \text{при } n \longrightarrow +\infty. \quad (9.7.11)$$

□

9.7.3 Радиус производных звезд и симплексов.

Пусть $[\sigma]_n$ -производные $r^{[\sigma]_n}$ звезды r состоят из лучей

$$r^{[\sigma]_n} = \{r_0^{[\sigma]_n}, r_1^{[\sigma]_n}, \dots, r_d^{[\sigma]_n}\}, \quad (9.7.12)$$

и пусть $\Delta(r^{[\sigma]_n})$ — симплекс звезды $r^{[\sigma]_n}$, имеющий вершины в концах лучей из (9.7.12). Размер звезды $r^{[\sigma]_n}$ и отвечающих им симплексов $\Delta(r^{[\sigma]_n})$ будем контролировать с помощью радиуса звезды и симплекса

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(r^{[\sigma]_n}) = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) = \max_{0 \leq i \leq d} |r_i^{[\sigma]_n}|_1, \quad (9.7.13)$$

равного максимальной длине лучей звезды $r^{[\sigma]_n}$ или радиусу минимальной сферы с центром в точке 0, содержащей звезду $r^{[\sigma]_n}$ и симплекс $\Delta(r^{[\sigma]_n})$.

9.7.4 Углы между векторами CU -базисов произвольного порядка n .

Для базиса (9.3.1) по правилу (9.6.1) и (9.6.7) определим $[\sigma]_n$ -производные базисы

$$\widehat{V}^{[\sigma]_n} = \{\widehat{v}_0^{[\sigma]_n}, \widehat{v}_1^{[\sigma]_n}, \dots, \widehat{v}_d^{[\sigma]_n}\} \quad (9.7.14)$$

порядка n , состоящие из целочисленных векторов

$$\widehat{v}_0^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}, \quad \widehat{v}_1^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{1d}^{[\sigma]_n} \\ Q_1^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \widehat{v}_d^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}. \quad (9.7.15)$$

Обозначим через

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} & P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} & P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} & Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (9.7.16)$$

матрицы $[\sigma]_n$ -производных суперсимплексов $\widehat{\Delta}^{[\sigma]_n}$, где столбцы в (9.7.16) — это координаты вершин суперсимплекса. Будем говорить, что базис $\widehat{V} = \widehat{V}^{[\sigma]_0}$ и суперсимплекс $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{[\sigma]_0}$ имеют *нулевые порядки*.

Заметим, что все производные базисы $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ остаются центрированными одним и тем же исходным лучом $\mathbb{R}_+ \widehat{\alpha}$.

Из (9.7.16) следует, что $[\sigma]_n$ -производный симплекс $s^{[\sigma]_n}$ из (9.7.6) имеет рациональные вершины

$$v_i^{[\sigma]_n} = \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right) \quad (9.7.17)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$.

Пусть радиус $[\sigma]_n$ -производной $r^{[\sigma]_n}$ звезды r обладает свойством

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (9.7.18)$$

Здесь $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n}))$ обозначает радиус (9.7.13) звезды $r^{[\sigma]_n}$.

Лемма 9.7.3 *Обозначим через φ_i^n и φ_{ij}^n углы между векторами $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$, $\widehat{\alpha}$ и векторами $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$, $\widehat{v}_j^{[\sigma]_n}$ из (9.7.14) соответственно. Тогда если выполнено условие (9.7.18), то координаты $Q_i^{[\sigma]_n}$ из (9.7.15) удовлетворяют свойству*

$$Q_i^{[\sigma]_n} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (9.7.19)$$

и углы

$$\varphi_i^n \rightarrow 0, \quad \varphi_{ij}^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (9.7.20)$$

для всех i, j .

Доказательство. Свойство (9.7.19) непосредственно вытекает из определения производных звезд (1.1.9), так как из условия (9.7.18) будет следовать, что при дифференцированиях $r^{[\sigma]_n}$ звезды r каждый из ее лучей подвергается замене бесконечное число раз при $n = 0, 1, 2, \dots$; и в таком случае порядок луча увеличивается как минимум на единицу.

Для доказательства (9.7.20) достаточно проверить, что

$$|v_i^{[\sigma]_n} - \alpha|_1 \rightarrow 0, \quad |v_i^{[\sigma]_n} - v_j^{[\sigma]_n}|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (9.7.21)$$

Ясно, что второе свойство в (9.7.21) вытекает из первого. Чтобы его вывести, применим лемму 9.7.1 и получим равенство

$$\left| v_i^{[\sigma]_n} - \alpha \right|_1 = \frac{|r_i^{[\sigma]_n}|_1}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \quad (9.7.22)$$

где $v_i^{[\sigma]_n} = \varphi(\widehat{v}_i^{[\sigma]_n})$ — образ вектора $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$ относительно отображения (9.4.7) и $r_i^{[\sigma]_n} = \kappa(\widehat{v}_i^{[\sigma]_n})$ — образ относительно отображения (9.3.9), являющийся лучом звезды $r^{[\sigma]_n}$. Теперь первое свойство в (9.7.21) будет следовать из равенства (9.7.22), условия (9.7.18) и доказанного свойства (9.7.19).

□

9.7.5 Точки Фарея производных симплексов.

Пусть $[\sigma]_n$ -производный симплекс $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (9.7.6) имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_1^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_d^{[\sigma]_n}} \right) \quad (9.7.23)$$

для $i = 0, 1, \dots, d$. Определим для симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ его *точку Фарея*

$$\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} = \frac{P_0^{[\sigma]_n}}{Q_0^{[\sigma]_n}} \hat{+} \frac{P_1^{[\sigma]_n}}{Q_1^{[\sigma]_n}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_d^{[\sigma]_n}}{Q_d^{[\sigma]_n}}. \quad (9.7.24)$$

9.7.6 Основная теорема об аппроксимации.

Теорема 9.7.1 Пусть α — иррациональная точка (1.2.21), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ — произвольная бесконечная последовательность (9.7.4) сочетаний σ_i из множества Σ и $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ — соответствующие производные симплексы (9.7.6). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Симплексы $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ обладают свойством минимальности:

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}^{[\sigma]_n}, \quad (9.7.25)$$

если $1 \leq Q < Q_{\max}^{[\sigma]_n}$; единственная точка

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \quad (9.7.26)$$

со знаменателем $Q = Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ есть точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$, определенная в (9.7.24).

2. Имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \quad (9.7.27)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Здесь $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n}))$ обозначает радиус $[\sigma]_n$ -производной $r^{[\sigma]_n}$ звезды r , определенный в (9.7.13).

Доказательство. Свойство (9.7.25) следует из теорем 9.6.1 и 9.6.2, а включение (9.7.26) — из определения (9.7.24) точки Фарея $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$. Неравенства (9.7.27) вытекают из включения (9.7.26) и леммы 9.7.1. □

Описанный в теореме 9.8.1 способ приближения многомерных иррациональностей α называется *симплекс-ядерным алгоритмом* или кратко — *SK-алгоритмом*.

Замечание 9.7.1 Согласно (9.7.10) при любом выборе бесконечной последовательности производных σ из (9.7.4) отвечающие им симплексы $s^{[\sigma]_n}$ будут обладать свойством $\text{vol } s^{[\sigma]_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Неравенства (9.7.27) будут нетривиальны только в случае, когда

$$\varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (9.7.28)$$

Описанию того, как можно обеспечить выполнение свойства (9.7.28), посвящен следующий раздел.

9.8 Локальные стратегии

9.8.1 Целевая функция.

Из неравенств (9.7.27) видно, что приближение иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ подходящими дробями $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ — точками Фарея из (9.7.24) зависит от величины радиуса $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}$ производной звезды $r^{[\sigma]_n}$.

В свою очередь, сами производные звезды $r^{[\sigma]_n}$ определяются бесконечной последовательностью производных (9.7.4) из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Чтобы как-то упорядочить выбор производных σ_n из Σ , входящих в последовательность σ , можно, например, ввести целевую функцию $\wp(r) \geq 0$, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\wp(r) \geq \wp(r'), \quad \text{если } \Delta(r) \supset \Delta(r'), \quad (9.8.1)$$

где r, r' — две произвольные звезды и $\Delta(r), \Delta(r')$ — отвечающие им симплексы;

$$\varrho_{\max}(r) \leq c \wp(r) \quad (9.8.2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от звезды r .

Если целевая функция $\wp(r) \geq 0$ уже задана, то ее можно будет использовать для формирования стратегии выбора производных $\sigma_n \in \Sigma$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, применяя индукцию по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\wp(r^{[\sigma]_n}) = \min_{\sigma'_n \in \Sigma} \wp(r^{[\sigma']_n}), \quad (9.8.3)$$

где через

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \quad \text{и} \quad [\sigma']_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n\}$$

обозначены отрезки длины n . Определенную в (9.8.3) стратегию будем называть \wp -стратегией, явно указывая на ее зависимость от целевой функции $\wp(r)$ из (9.8.1), (9.8.2).

9.8.2 Диофантовы экспоненты.

Из неравенств (9.7.27) и (9.8.2) следует, что выбранная \wp -стратегия применительно к данной точке α срабатывает, если

$$\wp(r^{[\sigma]_n}) \rightarrow 0 \quad (9.8.4)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Если же попытаться как-то количественно оценить \wp -стратегию, то с этой целью можно использовать, например, *диофантову экспоненту*, точнее — \wp -экспоненту

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) = \sup_{n' \geq 0} \inf_{n \geq n'} \frac{-\ln \wp(r^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}}. \quad (9.8.5)$$

Роль диофантовой экспоненты (9.8.5) видна из следующего утверждения.

Теорема 9.8.1 Пусть выполняются условия теоремы 9.7.1, целевая функция $\wp(r)$ удовлетворяет свойствам (9.8.1), (9.8.2) и по \wp -стратегии (9.8.3) построена бесконечная последовательность производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Кроме того, пусть η' — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\eta' < \eta$, где $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ — диофантова экспонента (9.8.5). Тогда справедлива оценка

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \quad (9.8.6)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь c — константа из неравенства (9.8.2) и нижняя граница $n_{\eta'}$ для n определяется выбором показателя η' и зависит от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и целевой функции $\wp(r)$.

Доказательство непосредственно следует из неравенства (9.7.27) в теореме 9.7.1 и определения (9.8.5) диофантовой экспоненты η . \square

Замечание 9.8.1 Доказанное неравенство (9.8.6) нетривиально только, если выполняется неравенство $\eta' > 0$. Данное требование можно удовлетворить только в случае, когда диофантова экспонента

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) > 0. \quad (9.8.7)$$

Таким образом, подбирая целевую функцию $\wp(r)$ в (9.8.1), (9.8.2) необходимо следить за ограничением (9.8.7). При этом, если для двух таких функций $\wp(r)$ и $\wp'(r)$ будет иметь место неравенство $\eta(\alpha, \wp) > \eta(\alpha, \wp')$, то целевая функция $\wp(r)$ будет, естественно, более предпочтительней, чем $\wp'(r)$.

9.8.3 Многошаговые стратегии.

Определенную в (9.8.3) \wp -стратегию, естественно назвать одношаговой. Если возникнет задача увеличения значения диофантовой экспоненты (9.8.7) и, значит, увеличения скорости приближения в неравенстве (9.8.6), то для этого можно попытаться искать другую целевую функцию $\wp'(r)$ или, не меняя исходную функцию $\wp(r)$, применить многошаговую стратегию:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma_{n+1} \in \Sigma,} \quad & \wp(r^{[\sigma]_{n+\omega-1}}) \\ \dots \\ \min_{\sigma_{n+\omega-1} \in \Sigma,} \quad & \wp(r^{[\sigma]_{n+\omega-1}}), \end{aligned} \quad (9.8.8)$$

где через

$$[\sigma]_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\}$$

и

$$[\sigma']_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\}$$

обозначены отрезки длины $n+\omega-1$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$. Если отрезок $[\sigma]_{n-1}$ уже построен, то следующий отрезок $[\sigma]_n$ находится по правилу (9.8.8). Определенную таким образом стратегию будем называть ω -шаговой стратегией с оценочной функцией $\varphi(r)$ или кратко — φ^ω -стратегией. Стратегия из (9.8.3) — это одношаговая φ^1 -стратегия.

Замечание 9.8.2 Все определяемые таким образом стратегии относятся к классу локальных, когда каждый шаг определяется по возможным результатам конечного отрезка следующих за ним шагов.

9.9 Числовые примеры

9.9.1 Степень точки.

Определим степень $\deg \alpha$ произвольной вещественной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из \mathbb{R}^d равенством (ср. (7.4.12))

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}], \quad (9.9.1)$$

где $\mathbb{Q}(\alpha)$ — поле, полученное расширением поля рациональных чисел \mathbb{Q} добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ и $\deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ обозначает степень расширения $\mathbb{Q}(\alpha)$ над полем \mathbb{Q} .

По определению (9.9.1) точка α будет алгебраической, если ее степень

$$\deg \alpha < +\infty. \quad (9.9.2)$$

Ясно, что алгебраическая точка α имеет алгебраические координаты и обратно. Напомним, что алгебраическая точка α является полной, если выполняется соотношение

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha). \quad (9.9.3)$$

Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$ обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ над полем \mathbb{Q} . Если α — полная точка, то ее степень (9.9.1) равна

$$\deg \alpha = d + 1. \quad (9.9.4)$$

9.9.2 Локальные и урезанные диофантовы экспоненты.

Определенная в (9.8.5) диофантова экспонента $\eta = \eta(\alpha, \varphi)$ имеет в большей степени чисто теоретическое значение. При работе с числовыми данными удобнее опираться на локальные φ -экспоненты

$$\eta_n = \eta_n(\alpha, \varphi) = \frac{-\ln \varphi(r^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \quad (9.9.5)$$

с индексами $n = 1, 2, 3, \dots$. Кроме локальных экспонент, мы будем также использовать *урезанные* \wp -экспоненты

$$\eta_{N,Q} = \eta_{N,Q}(\alpha, \wp) = \min_{\substack{n \leq N, \\ Q_{\max}^{[\sigma]_n} \geq Q}} \eta_n(\alpha, \wp). \quad (9.9.6)$$

9.9.3 Трансцендентные числа.

При рассмотрении числовых примеров ограничимся случаем размерности $d = 2$. Здесь и далее в качестве целевой функции $\wp(r)$ выберем

$$\wp(r) = |r_0|_1 + |r_1|_1 + |r_2|_1 \quad (9.9.7)$$

— сумму длин лучей звезды $r = \{r_0, r_1, r_2\}$ в ромбической 1-метрике (2.5.9). Функция (9.9.7) удовлетворяет требованиям (9.8.1) и (9.8.2). Для такой функции константа $c = 1$ в неравенстве (9.8.2).

Числовые примеры начнем с точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, имеющих трансцендентные координаты α_1, α_2 . Степень (9.9.1) таких точек α равна

$$\deg \alpha = +\infty. \quad (9.9.8)$$

В качестве трансцендентных точек выбраны $\alpha = (\pi, \pi^2)$ и $\alpha = (e, e^2)$, где $e = 2.718\dots$ — основание натурального логарифма. На рис. 9.1 и рис. 9.2 по горизонтальной оси отложены значения последовательных итераций $1 \leq n \leq 10^2$, а по вертикальной — соответствующие значения локальных экспонент $\eta_n = \eta_n(\alpha, \wp)$ из (9.9.5) с ограничением на знаменатели

$$Q_{\max}^{[\sigma]_n} \geq 10^3 \quad (9.9.9)$$

подходящих двумерных дробей $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ в неравенствах (9.7.27) и (9.8.6). Условие (9.9.9) введено для начальной стабилизации процесса приближения

$$\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \rightarrow \alpha \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

подходящими дробями точек α .

Напомним разложения чисел π и e в обычные цепные дроби:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, \mathbf{292}, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, \dots] \quad (9.9.10)$$

и

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots]. \quad (9.9.11)$$

Сопоставляя графики на рис. 9.1 и рис. 9.2 с разложениями в цепные дроби (9.9.10) и (9.9.11), наблюдаем заметную корреляцию между пиками на графиках и встречающимися большими неполными частными в разложениях чисел π и e .

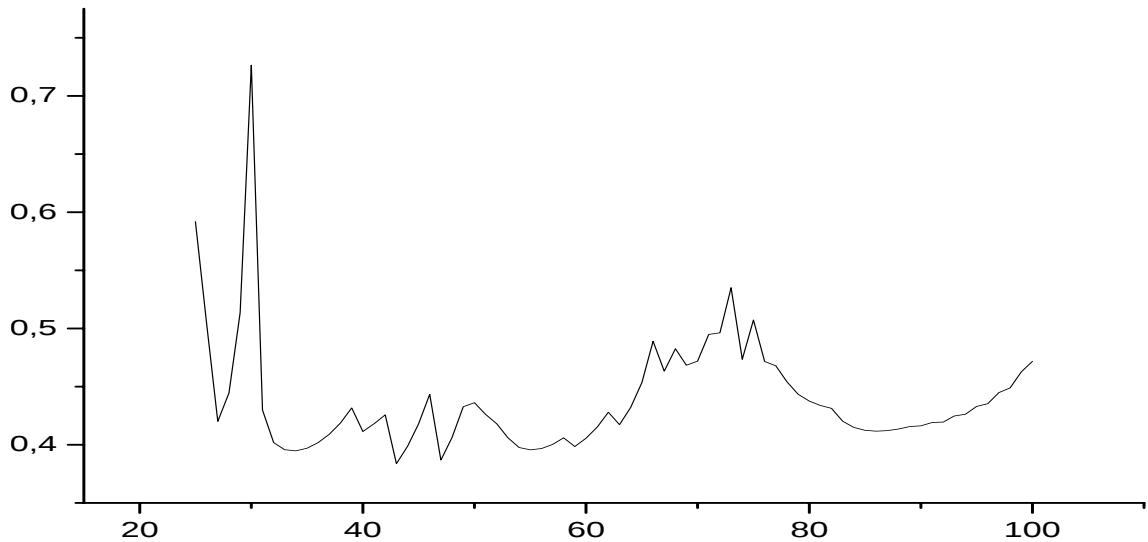


Рис. 9.1. График локальных φ -экспонент η_n
для трансцендентной точки $\alpha = (\pi, \pi^2)$ степени $\deg \alpha = +\infty$.

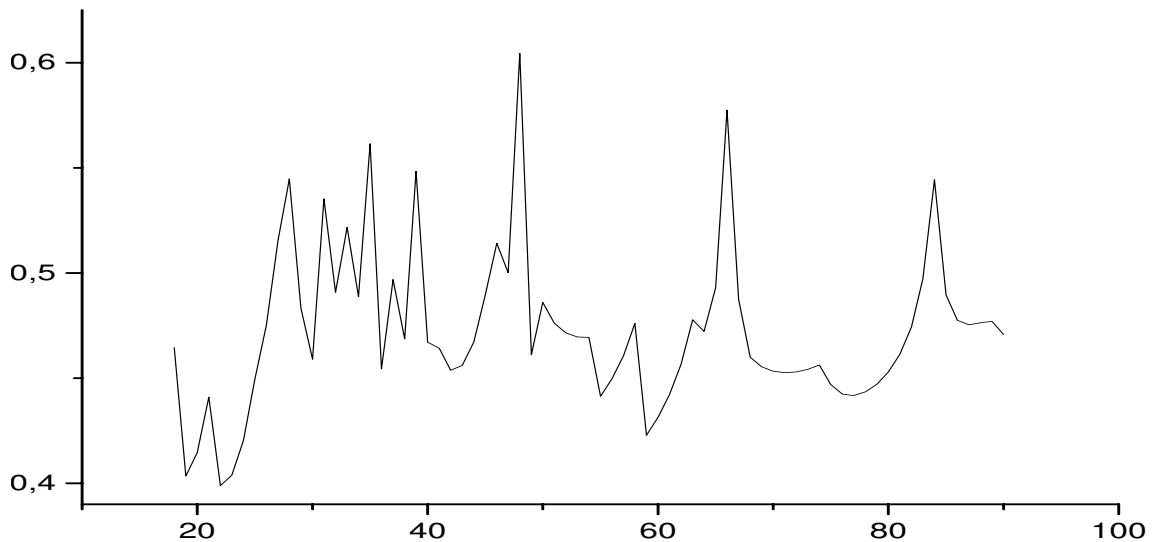


Рис. 9.2. График локальных φ -экспонент η_n
для трансцендентной точки $\alpha = (e, e^2)$ степени $\deg \alpha = +\infty$.

9.9.4 Биквадратичные иррациональности

В качестве следующей точки возьмем $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. По сравнению с трансцендентными точками $\alpha = (\pi, \pi^2)$ и $\alpha = (e, e^2)$, ее координаты $\alpha_1 = \sqrt{2}$ и $\alpha_2 = \sqrt{3}$

являются алгебраическими иррациональностями наименьшей степени 2. В отличие от (9.9.8), данная точка α имеет степень

$$\deg((\sqrt{2}, \sqrt{3})) = \deg \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q} = 4. \quad (9.9.12)$$

Квадратичные иррациональности $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ раскладываются в следующие периодические цепные дроби:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}] = [1; 2, 2, 2, \dots], \quad \sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}] = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]. \quad (9.9.13)$$

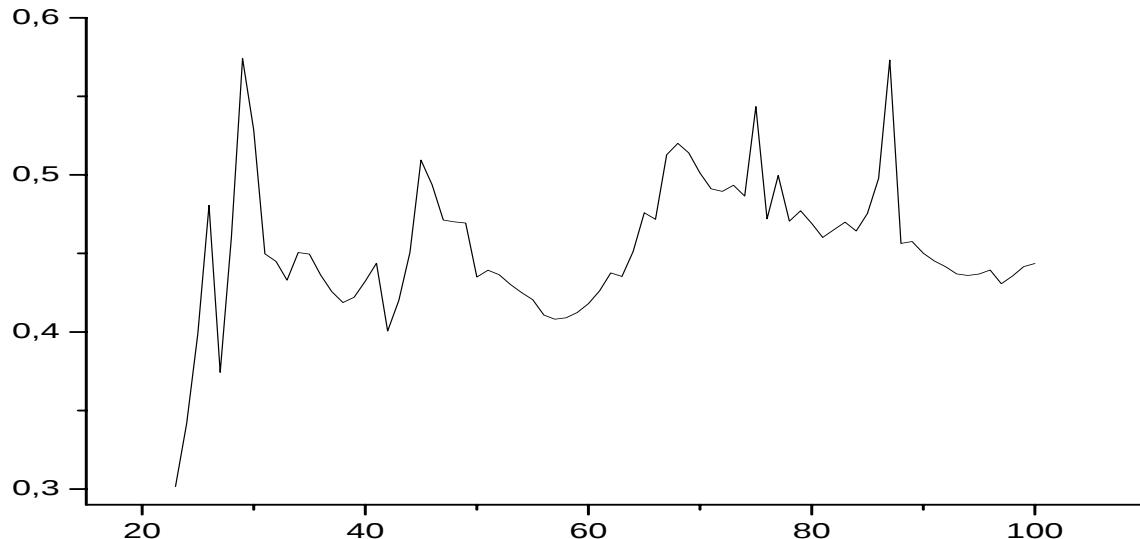


Рис. 9.3. График локальных φ -экспонент η_n
для неполной биквадратичной точки $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ степени $\deg \alpha = 4$.

Снова сопоставляя график на рис. 9.3 с разложениями в одномерные цепные дроби (9.9.13) видим, что корреляция между пиками на этом графике и неполными частными в разложениях чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ отсутствует. Теперь существование пиков связано с разложением пары чисел $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ в двумерную цепную дробь — это эффект, наблюдаемый в общем случае при переходе от одномерных к двумерным цепным дробям.

9.9.5 Кубические иррациональности.

Все приведенные выше точки не являются полными (см. определение (9.9.3)). Напротив, точка $\alpha = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ полная, и поэтому в силу (7.4.12) и (9.9.4) ее степень будет равна

$$\deg((\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})) = \deg \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q} = 3.$$

Кубическая иррациональность $\sqrt[3]{2}$ разлагается в непериодическую цепную дробь

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 2, 3, 24, \dots]. \quad (9.9.14)$$

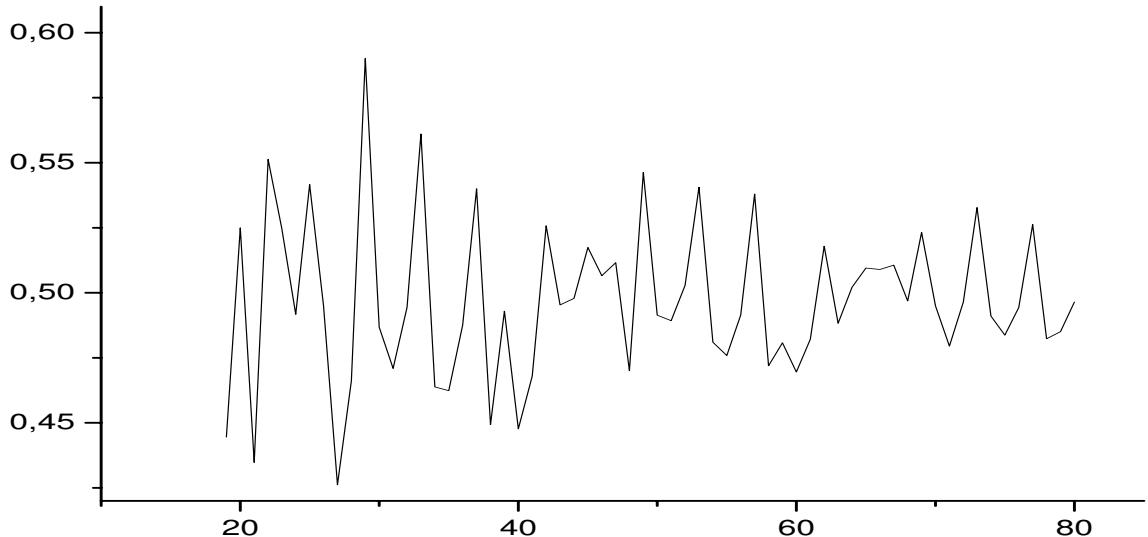


Рис. 9.4. График локальных φ -экспонент η_n для полной точки $\alpha = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ степени $\deg \alpha = 3$.

Сравним график на рис. 9.4 с разложением в цепную дробь (9.9.14). Для полной точки $\alpha = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, как и для предыдущей точки $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, пики также не связаны напрямую с неполными частными в разложении (9.9.14).

9.9.6 Сравнение различных экспонент.

Проанализируем, как работает симплекс-ядерный алгоритм по одношаговой φ -стратегии (9.8.3), если в качестве целевой функции выбрать функцию $\varphi(r)$, определенную в (9.9.7). Для этого сравним полученные значения локальных экспонент $\eta_n(\alpha, \varphi)$ из (9.9.5) для трансцендентных точек $\alpha = (\pi, \pi^2)$, $\alpha = (e, e^2)$, биквадратичной $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ и кубической $\alpha = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

Итерации проведены в пределах $1 \leq n \leq 10^2$. Для стабилизации процесса приближения было введено начальное ограничение на знаменатели $Q_n \geq 10^3$ подходящих дробей $\frac{P_n}{Q_n}$ в (9.8.6). В таблице 9.1 приведены значения локальных φ -экспонент $\eta_n(\alpha, \varphi)$, где в верхней строке таблицы `min`, `max` и `mid` соответственно обозначают наименьшее, наибольшее и среднее значения $\eta_n(\alpha, \varphi)$ для $1 \leq n \leq 10^2$.

Таблица 9.1. Минимальные, средние и максимальные значения локальных \wp -экспонент $\eta_n(\alpha, \wp)$ для $1 \leq n \leq 10^2$ и $Q_n \geq 10^3$.

	min	mid	max
(π, π^2)	0.383	0.439	0.726
(e, e^2)	0.398	0.472	0.605
$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$	0.301	0.454	0.574
$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$	0.426	0.497	0.591

Использование локальных \wp -экспонент $\eta_n(\alpha, \wp)$ допускает в неравенствах (9.8.6) в качестве показателя η' выбирать $\eta' = \min$ из таблицы 9.1. Свое наименьшее значение $\min = 0.301$ принимает для биквадратичной $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Значит, для любой из четырех указанных выше точек α имеет место неравенство

$$\eta' > 0.3. \quad (9.9.15)$$

Отдельного комментария требует кубическая точка $\alpha = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, для которой поле $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ имеет степень $d + 1 = 3$. Из таблицы 9.1 видно, что для нее

$$\eta_n(\alpha, \wp) \geq 0.426. \quad (9.9.16)$$

В следующих главах будет рассмотрен симплекс-модульный алгоритм, применимый к алгебраическим числам. С помощью данного алгоритма удается экспоненту в (9.9.16) увеличить до величины 0.5. Известно [48], что это — наилучшее значение для таких иррациональностей α .

9.9.7 Последовательность кубических корней.

От локальных диофантовых экспонент перейдем к рассмотрению поведения диофантовых экспонент для последовательности полных кубических точек $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где a пробегает натуральные числа, не являющиеся полными кубами.

На графике рис. 9.5 по горизонтальной оси отложены значения $2 \leq a \leq 10^3$, а по вертикальной — соответствующие значения урезанных диофантовых экспонент $\eta_{N,Q} = \eta_{N,Q}(\alpha, \wp)$ из (9.9.6) с параметрами $N = 10^2$ и $Q = 10^3$ и целевой функцией \wp из (9.9.7).

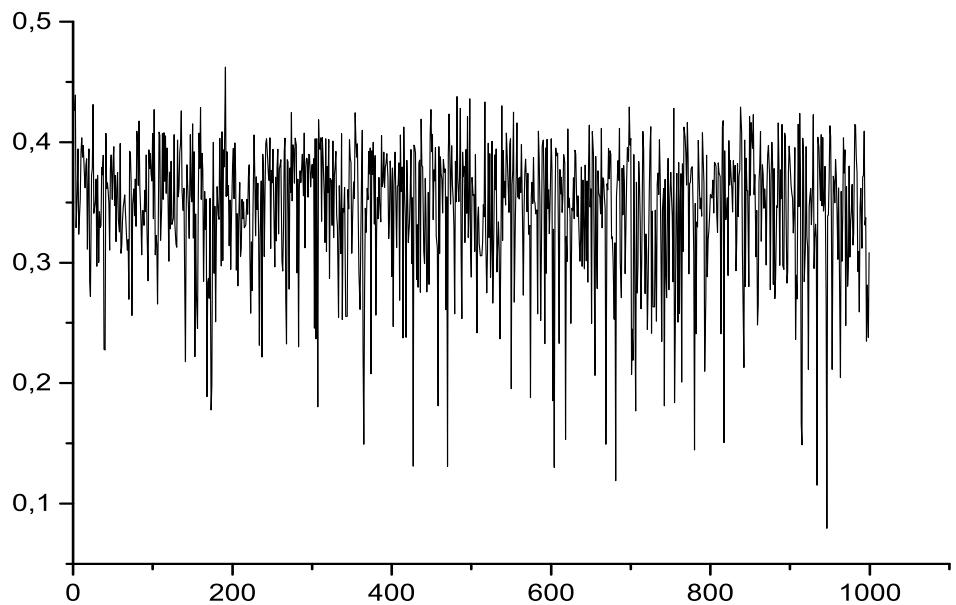


Рис. 9.5. График урезанных φ -экспонент $\eta_{N,Q}$
с параметрами $N = 10^2$ и $Q = 10^3$.

Ниже приведены наибольшее, среднее и наименьшее значения φ -экспонент $\eta_{N,Q}$:

$$\max \approx 0.462, \quad \text{mid} \approx 0.344, \quad \min \approx 0.079, \quad (9.9.17)$$

а таблицах 9.2 и 9.3 указаны $2 \leq a \leq 10^3$ соответственно с большими $\eta_{N,Q} > 0.43$ и малыми значениями $\eta_{N,Q} < 0.15$ урезанных φ -экспонент.

Таблица 9.2. Урезанные φ -экспоненты $\eta_{N,Q} > 0.43$.

a	3	25	191	482	498	517	538
$\eta_{N,Q}$	0.439	0.431	0.462	0.437	0.435	0.433	0.430

Таблица 9.3. Урезанные φ -экспоненты $\eta_{N,Q} < 0.15$.

a	365	427	470	604	669	681	780	915	934	946
$\eta_{N,Q}$	0.149	0.131	0.131	0.130	0.149	0.119	0.144	0.148	0.115	0.079

Предложение 9.9.1 Пусть по φ -стратегии (9.8.3) с оценочной функцией $\varphi(r)$ из (9.9.7) построена бесконечная последовательность производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$; $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где $2 \leq a \leq 10^3$ пробегает натуральные числа, не являющиеся кубами; и пусть $\eta_{N,Q} = \eta_{N,Q}(\alpha, \varphi)$ — урезанная φ -экспонента для соответствующего a с параметрами $N = 10^2$ и $Q = 10^3$ (см. рис. 9.5). Тогда справедлива оценка

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{1}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta_{N,Q}}} \quad (9.9.18)$$

для всех $n \leq N$ при условии на знаменатели $Q_{\max}^{[\sigma]_n} \geq Q$ подходящих дробей $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$, вычисляемых с помощью последовательности производных σ .

Доказательство следует из теоремы 9.8.1 и определения (9.9.6) урезанной φ -экспоненты $\eta_{N,Q}$. \square

Из графика на рис. 9.5 видно, что урезанные φ -экспоненты

$$\eta_{N,Q} > 0 \quad \text{для всех } 2 \leq a \leq 10^3. \quad (9.9.19)$$

Поэтому в силу (9.9.19) аппроксимационная оценка (9.9.18) нетривиальна для указанных a . Из всех $\eta_{N,Q}$ выделяется наименьшее значение

$$\eta_{N,Q} \approx 0.079 \quad \text{для точки } \alpha = (\sqrt[3]{946}, \sqrt[3]{946^2}). \quad (9.9.20)$$

Экспоненту (9.9.20) можно увеличить, если в (9.9.6) выбрать большим значение параметра Q или применить многошаговую стратегию (9.8.8).

9.10 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Для двумерных приближений операция *триангуляции Фарея* или *сети Фарея* в разных вариантах использовалась в [52], [57], [62] [63], [100], [106]. Существует несколько многомерных обобщений (см., например, [73], [109]). Одно из них представляет собою *алгоритм Монкемайера* [95], [74], позволяющий по индукции разбивать некоторый начальный единичный симплекс на более мелкие составляющие симплексы.

Рассматриваемый в настоящей главе метод основан на другой идеи: он использует дифференцирования ядер r_n индуцированных разбиений торов \mathbb{T}^d , соответствующих симплексам \mathbf{s}_n в последовательности (9.1.1). Ядра r_n , представляющие собою d -мерные параллелограммы, подробно исследованных в [23] в случае

размерности $d = 2$ и в [26] для произвольного d . Язык ядер r_n позволяет посредством выбора целевой функции $\varphi(r)$ следить за скоростью приближений (9.1.8) подходящих дробей $\frac{P_n}{Q_n}$ к точке α , т.е. настраивать целевую функцию $\varphi(r)$ на конкретную точку α . Применение индуцированных торических разбиений к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [23], [26] и [27].

Глава 10

Дробно-линейная инвариантность симплекс-ядерного алгоритма

Доказывается инвариантность симплекс-ядерного алгоритма разложения вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби относительно дробно-линейных преобразований $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ с матрицами U , принадлежащими унимодулярной группе $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$. Для преобразованных наборов чисел α' найдены подходящие цепные дроби с наилучшими приближениями к α' .

10.1 Введение

Цель настоящей главы — исследовать, насколько симплекс-ядерный алгоритм (9.1.1) инвариантен относительно дробно-линейных преобразований

$$\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle \quad (10.1.1)$$

базовых точек α с матрицами U , принадлежащими унимодулярной группе $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$.

В теореме 10.5.2 доказывается существование такого натурального числа n_{α, U, η^*} , для которого оценка скорости приближения (9.1.8) принимает вид

$$\left| \alpha'_1 - \frac{\mathbf{P}'_{n1}}{\mathbf{Q}'_n} \right| + \dots + \left| \alpha'_d - \frac{\mathbf{P}'_{nd}}{\mathbf{Q}'_n} \right| \leq \frac{c'}{|\mathbf{Q}'_n|^{1+\eta^*}} \quad (10.1.2)$$

для всех $n \geq n_{\alpha, U, \eta^*}$. При этом подходящие дроби $\left(\frac{\mathbf{P}'_{n1}}{\mathbf{Q}'_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}'_{nd}}{\mathbf{Q}'_n} \right)$ в (10.1.2) преобразуются

$$\left(\frac{\mathbf{P}'_{n1}}{\mathbf{Q}'_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}'_{nd}}{\mathbf{Q}'_n} \right) = U \left\langle \left(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n} \right) \right\rangle \quad (10.1.3)$$

по тому же правилу (10.1.1), что базисная точка α ; $c' = c \cdot c_{\alpha, U}$, где c — константа из неравенства (9.1.8) и множитель $c_{\alpha, U} > 0$ зависит только от точки α и выбора унимодулярной матрицы U в (10.1.1).

Более того, отметим (см. теорему 10.5.1), что получаемые таким образом приближения (10.1.3) остаются наилучшими для новой точки α' , но уже относительно других симплициальных \mathbf{s}'_n -норм, для которых в качестве выпуклых тел выбираются преобразованные симплексы $\mathbf{s}'_n = U\langle \mathbf{s}_n \rangle$, также обладающие стягивающим свойством (9.1.1) и свойством минимальности (9.1.2)–(9.1.4).

10.2 Системы линейных форм

10.2.1 Приведенные системы линейных форм.

Рассмотрим систему линейных форм

$$f_i(x) = f_{i1}x_1 + \dots + f_{id}x_d + f_{i0}x_0 \quad (10.2.1)$$

для $i = 1, \dots, d$ с произвольными вещественными коэффициентами f_{ij} . Каждую из форм можно записать в матричном виде

$$f_i(x) = f_i \cdot x = (f_{i1} \dots f_{id} f_{i0}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_0 \end{pmatrix}. \quad (10.2.2)$$

Также в матричном виде можно представить

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} = F \cdot x \quad (10.2.3)$$

всю совокупность линейных форм (10.2.1), (10.2.2), где

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} & f_{10} \\ \vdots & & & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} & f_{d0} \end{pmatrix} \quad (10.2.4)$$

— *матрица системы форм* (10.2.3), имеющая размеры $d \times (d + 1)$.

Будем говорить, что матрица F из (10.2.4) и соответственно система линейных форм $F(x)$ из (10.2.3) имеют *максимальный d -ранг* или кратко — *максимальный ранг*, если все миноры матрицы F размера d отличны от нуля. В этом случае матрица F раскладывается в произведение

$$F = AF_\alpha \quad (10.2.5)$$

$(d \times d)$ -матрицы

$$A = - \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} \\ \vdots & & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} \end{pmatrix} \quad (10.2.6)$$

и приведенной матрицы

$$F_\alpha = (-E | \alpha) = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & -1 & \dots \\ 0 & \dots & -1 & \alpha_d \end{pmatrix} \quad (10.2.7)$$

со столбцом

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = A^{-1} F_0 = A^{-1} \begin{pmatrix} f_{10} \\ \vdots \\ f_{d0} \end{pmatrix}. \quad (10.2.8)$$

Если F — матрица максимального d -ранга, то для (10.2.6) существует обратная матрица A^{-1} .

Для матрицы (10.2.7) система линейных форм (10.2.3) принимает *приведенный вид*

$$F_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_0 & -x_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_d x_0 & \dots & -x_d \end{pmatrix}. \quad (10.2.9)$$

10.2.2 Связь между системами линейных форм.

Из (10.2.5) следует, что системы линейных форм (10.2.3) и (10.2.9) связаны между собою соотношениями

$$F(x) = AF_\alpha(x), \quad F_\alpha(x) = A^{-1}F(x). \quad (10.2.10)$$

В пространстве \mathbb{R}^d введем 1-метрику $|y|_1$ (см. (2.5.9)), а на множестве матриц $M = (m_{ij})$ — соответственно 1-норму

$$\|M\|_1 = \sum_{ij} |m_{ij}|. \quad (10.2.11)$$

Предложение 10.2.1 Для любых $x = (x_1, \dots, x_d, x_0)$ из \mathbb{R}^{d+1} выполняются неравенства

$$|F(x)|_1 \leq \|A\|_1 |F_\alpha(x)|_1 \quad (10.2.12)$$

и

$$|F_\alpha(x)|_1 \leq \|A^{-1}\|_1 |F(x)|_1 \quad (10.2.13)$$

между значениями систем линейных форм (10.2.3) и (10.2.9), где A — матрица (10.2.6).

Доказательство вытекает из соотношений (10.2.10) и неравенства

$$|My|_1 \leq \|M\|_1 |y|_1. \quad (10.2.14)$$

□

10.2.3 Условия на линейные формы.

Пусть столбец α из (10.2.8) и соответствующая точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ являются иррациональными (1.2.21). Если точка $x = (x_1, \dots, x_d, x_0)$ выбрана из \mathbb{R}^{d+1} , то ее **-иррациональность* будет означать, что

$$\text{числа } x_0, x_1, \dots, x_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (10.2.15)$$

Далее будем предполагать, что система линейных форм (10.2.3) удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\text{система линейных форм } F(x) \text{ имеет максимальный } d\text{-ранг}, \quad (10.2.16)$$

$$\text{столбец } \alpha = A^{-1}F_0 \text{ иррациональный.}$$

10.3 Дробно-линейные преобразования

10.3.1 Вектор системы линейных форм.

Системе линейных форм $F(x)$ из (10.2.3) поставим в соответствие

$$\epsilon : F(x) \rightarrow F_e \quad (10.3.1)$$

$(d+1)$ -мерный вектор системы

$$F_e = \det \begin{pmatrix} F \\ e \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} & f_{10} \\ \vdots & & & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} & f_{d0} \\ e_1 & \dots & e_d & e_0 \end{pmatrix}, \quad (10.3.2)$$

где $e = (e_1 \dots e_d e_0)$ — строка, составленная из единичных векторов

$$e_1 = (1, \dots, 0, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1, 0), e_0 = (0, \dots, 0, 1)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} . Вектор приведенных систем $F_\alpha(x)$ из (10.2.9) равен

$$F_{\alpha,e} = \det \begin{pmatrix} F_\alpha \\ e \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d + 1 e_0. \quad (10.3.3)$$

Воспользуемся соотношением (10.2.5) и вычислим вектор F_e произвольной системы линейных форм $F(x)$. Записываем

$$F_e = \det \begin{pmatrix} AF_\alpha \\ e \end{pmatrix} = \det \left(\left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} F_\alpha \\ e \end{pmatrix} \right), \quad (10.3.4)$$

и поэтому имеем

$$F_e = |A| F_{\alpha,e}, \quad (10.3.5)$$

где использовали сокращение $|A| = \det A$.

10.3.2 Унимодулярные преобразования.

Выберем произвольную матрицу U из группы унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В системе линейных форм (10.2.3) произведя замену переменных

$$F(Ux) = F \cdot Ux = FU \cdot x = FU(x),$$

приходим к обратимому преобразованию самих систем линейных форм

$$U : F(x) \rightsquigarrow FU(x). \quad (10.3.6)$$

Найдем для преобразованной системы $FU(x)$ ее вектор (10.3.2). Для этого воспользуемся следующей цепочкой равенств

$$FU_e = \det \begin{pmatrix} FU \\ e \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} F \\ eU^{-1} \end{pmatrix} \cdot U \right). \quad (10.3.7)$$

Откуда получаем формулу

$$FU_e = |U| F_{e'}, \quad (10.3.8)$$

где справа появился новый базис

$$e' = (e'_1 \dots e'_d e'_0) = eU^{-1}. \quad (10.3.9)$$

Используя равенства (10.3.5) и (10.3.3), имеем

$$F_{e'} = |A| F_{\alpha, e'} = |A| (\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_d e'_d + 1e'_0). \quad (10.3.10)$$

Выражение в скобках перепишем в виде произведения

$$\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_d e'_d + 1e'_0 = e' \cdot \hat{\alpha} \quad (10.3.11)$$

строки $e' = (e'_1 \dots e'_d e'_0)$ и столбца

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.3.12)$$

Подставляя $e' = eU^{-1}$ в правую часть равенства (10.3.11), получаем равенство

$$\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_d e'_d + 1e'_0 = e \cdot \hat{\alpha}' \quad (10.3.13)$$

со столбцом

$$\hat{\alpha}' = U^{-1} \hat{\alpha}. \quad (10.3.14)$$

Собирая вместе равенства (10.3.10)–(10.3.13), приходим к формуле

$$F_{e'} = |A| e \cdot \hat{\alpha}'. \quad (10.3.15)$$

10.3.3 Дробно-линейные преобразования.

Пусть

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1d} & m_{10} \\ & \ddots & & \\ m_{d1} & \dots & m_{dd} & m_{d0} \\ m_{01} & \dots & m_{0d} & m_{00} \end{pmatrix} \quad (10.3.16)$$

— вещественная $(d+1, d+1)$ -матрица и $y = (y_1, \dots, y_d)$ из пространства \mathbb{R}^d . Определим дробно-линейное преобразование

$$M\langle y \rangle = \left(\frac{\lambda_1(M, y)}{\lambda_0(M, y)}, \dots, \frac{\lambda_d(M, y)}{\lambda_0(M, y)} \right), \quad (10.3.17)$$

где

$$\lambda_i(M, y) = m_{i1}y_1 + \dots + m_{id}y_d + m_{i0} \quad (10.3.18)$$

— неоднородные линейные формы для $i = 0, 1, \dots, d$. Форма $\lambda_0(M, y)$ называется *фактором автоморфности* дробно-линейного преобразования (10.3.17). При этом предполагается, что $\lambda_0(M, y) \neq 0$.

В терминах линейных форм (10.3.18) равенство (10.3.14) запишется в виде

$$\widehat{\alpha}' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \\ \alpha'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(U^{-1}, \alpha) \\ \vdots \\ \lambda_d(U^{-1}, \alpha) \\ \lambda_0(U^{-1}, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (10.3.19)$$

Отсюда получаем

$$\widehat{\alpha}' = \lambda_0(U^{-1}, \alpha) \widehat{U^{-1}\langle \alpha \rangle}, \quad (10.3.20)$$

а из (10.3.15) и (10.3.8) соответственно

$$F_{e'} = |A| \lambda_0(U^{-1}, \alpha) F_{U^{-1}\langle \alpha \rangle, e} \quad (10.3.21)$$

и

$$FU_e = |U| |A| \lambda_0(U^{-1}, \alpha) F_{U^{-1}\langle \alpha \rangle, e}. \quad (10.3.22)$$

Выберем в качестве матрицы F сразу приведенную матрицу $F = F_\alpha$. Согласно (10.2.5) в этом случае $A = E$ — единичная матрица и формула (10.3.22) примет более простой вид

$$F_\alpha U_e = |U| \lambda_0(U^{-1}, \alpha) F_{U^{-1}\langle \alpha \rangle, e}. \quad (10.3.23)$$

10.3.4 Биекция: системы линейных форм (матрицы) — векторы.

Введем следующие обозначения для классов

$$(\widehat{\alpha}) = \mathbb{R}^\times \cdot \widehat{\alpha}, \quad (F) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) F, \quad (10.3.24)$$

где $\mathbb{R}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ — множество ненулевых вещественных чисел.

Предложение 10.3.1 *Отображение (см. (10.3.1))*

$$\epsilon : F \mapsto \epsilon F = F_e \quad (10.3.25)$$

задает биекцию

$$\epsilon : (F) \xrightarrow{\sim} (\hat{\alpha}) \quad (10.3.26)$$

между классами матриц F максимального d -ранга и классами подобных $(d+1)$ -мерных векторов $\hat{\alpha}$ с ненулевыми координатами.

Доказательство. Из равенства (10.3.5) следует, что отображение (10.3.26) определено корректно. Покажем, что оно инъективно. Пусть

$$F = AF_\alpha \quad \text{и} \quad F' = A'F_{\alpha'}$$

— представители из двух классов имеют подобные образы

$$\epsilon F = |A| \hat{\alpha}, \quad \epsilon F' = |A'| \hat{\alpha}', \quad (10.3.27)$$

т.е. $\hat{\alpha}' = \lambda \hat{\alpha}$. Отсюда следует $\lambda = 1$. Значит, $\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}$ и тогда $\alpha' = \alpha$.

Чтобы проверить сюръективность отображения (10.3.26), заметим, что в силу (10.3.3) для любого вектора $\hat{\alpha}$ справедливо равенство $\epsilon F_\alpha = \hat{\alpha}$. \square

Участвующую в формулах (10.3.22) и (10.3.23) матрицу U разобьем на блоки

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{pmatrix}. \quad (10.3.28)$$

Блок U_1 имеет размеры $d \times d$, соседние с ним U_2 и U_3 — соответственно строка и столбец длины d , а U_4 — число.

Предложение 10.3.2 *Пусть система линейных форм $F(x)$ удовлетворяет условиям (10.2.16) и F_α — приведенная матрица (10.2.7). Тогда для произвольной матрицы U из группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ выполняются формулы*

$$FU = ABF_{U^{-1}(\alpha)}, \quad F_\alpha U = BF_{U^{-1}(\alpha)}. \quad (10.3.29)$$

Здесь A — матрица (10.2.6),

$$B = U_1 - \alpha U_2 \quad (10.3.30)$$

— матрица с определителем

$$|B| = |U| \lambda_0(U^{-1}, \alpha), \quad (10.3.31)$$

где U_1, U_2 — блоки (10.3.28) матрицы U и $\lambda_0(U^{-1}, \alpha)$ — фактор автоморфности (10.3.18).

Доказательство. Сравним две матрицы $F_\alpha U$ и $F_{U^{-1}(\alpha)}$. Ввиду формулы (10.3.23) они имеют один и тот же образ $\epsilon F_\alpha U = \epsilon F_{U^{-1}(\alpha)}$ относительно отображения (10.3.26). Поэтому по предложению 10.3.1 указанные матрицы связаны вторым соотношением из (10.3.29), в котором B — некоторая матрица из группы $GL_d(\mathbb{R})$. Из него непосредственно следует первое соотношение из (10.3.29), если учесть равенство $F = AF_\alpha$ из (10.2.10).

Принимая во внимание вид (10.2.7) приведенной матрицы F_α и разбиение (10.3.28), последовательно находим

$$F_\alpha U = (-E \alpha)U = (-U_1 + \alpha U_2 \mid -U_3 + \alpha U_4). \quad (10.3.32)$$

С другой стороны, произведение матриц справа в (10.3.29) равно

$$BF_{U^{-1}(\alpha)} = (-B \mid BU^{-1}(\alpha)). \quad (10.3.33)$$

Сравнивая (10.3.32) с (10.3.33), находим явный вид (10.3.30) матрицы B и еще одно дополнительное равенство

$$BU^{-1}(\alpha) = -U_3 + \alpha U_4. \quad (10.3.34)$$

Осталось вычислить определитель матрицы B . Согласно формуле (10.3.29) имеем

$$F_\alpha U_e = (BF_{U^{-1}(\alpha)})_e = |B| F_{U^{-1}(\alpha)}, e. \quad (10.3.35)$$

Отсюда и равенства (10.3.23) получаем для определителя формулу (10.3.31). \square

Замечание 10.3.1 В ходе доказательства предложения 10.3.2 было получено равенство (10.3.34). Если в него подставить явное выражение (10.3.30) матрицы B , то придет к матричному представлению

$$U^{-1}(\alpha) = (U_1 - \alpha U_2)^{-1}(-U_3 + \alpha U_4) \quad (10.3.36)$$

для дробно-линейного преобразования (10.3.17).

10.4 Дробно-линейные преобразования симплексов и точек Фарея

10.4.1 Точка и ее дробно-линейный образ.

Во второй формуле из (10.3.29) заменим U на обратную матрицу U^{-1} . Получим

$$F_\alpha U^{-1} = B_{U^{-1}} F_{U(\alpha)}, \quad (10.4.1)$$

где

$$B_{U^{-1}} = U_1^{-1} - \alpha U_2^{-1}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} U_1^{-1} & U_3^{-1} \\ U_2^{-1} & U_4^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10.4.2)$$

Предположим, что точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ являются иррациональной (1.2.21). Тогда по формуле (10.3.31) будем иметь

$$|B_{U^{-1}}| = |U^{-1}| \lambda_0(U, \alpha) \neq 0 \quad (10.4.3)$$

и, значит, для $B_{U^{-1}}$ существует обратная матрица $B_{U^{-1}}^{-1}$.

Лемма 10.4.1 *Пусть*

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \end{pmatrix} = U\langle\alpha\rangle, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \\ x'_0 \end{pmatrix} = Ux. \quad (10.4.4)$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\alpha'_1 x'_0 - x'_1| + \dots + |\alpha'_d x'_0 - x'_d| \leq c_{\alpha, U} (|\alpha_1 x_0 - x_1| + \dots + |\alpha_d x_0 - x_d|) \quad (10.4.5)$$

с константой

$$c_{\alpha, U} = \|B_{U^{-1}}^{-1}\|_1. \quad (10.4.6)$$

Доказательство. Перепишем (10.4.1) в виде равенства

$$F_{U\langle\alpha\rangle} U = B_{U^{-1}}^{-1} F_\alpha. \quad (10.4.7)$$

Если данное равенство умножить на столбец x и воспользоваться обозначениями (10.4.4), то получим тождество

$$F_{\alpha'} x' = B_{U^{-1}}^{-1} F_\alpha x. \quad (10.4.8)$$

Теперь неравенство (10.4.5) вытекает из (10.4.8) и общего неравенства (10.2.14).

□

10.4.2 Коммутативная диаграмма.

Пусть $\mathbb{R}_{\text{irr}}^d$ и $\mathbb{R}_{\text{irr}}^{d+1}$ обозначают соответствующие подмножества из пространств \mathbb{R}^d и \mathbb{R}^{d+1} , состоящее из иррациональных (1.2.21) и $*$ -иррациональных точек (10.2.15); и пусть

$$\mathbb{R}_{\text{irr}}^{d+1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}_{\text{irr}}^d : x \mapsto \underline{x} = \varphi x \quad (10.4.9)$$

— проекция (9.4.7). Здесь обозначили

$$x = (x_1, \dots, x_d, x_0) \quad \text{и} \quad \underline{x} = (x_1/x_0, \dots, x_d/x_0).$$

Лемма 10.4.2 *Пусть U — произвольная унимодулярная матрица из группы $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ и $U\langle\rangle$ — дробно-линейное преобразование (10.3.17) с матрицей U . Тогда в обозначениях (10.4.9) имеет место следующая коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\text{irr}}^{d+1} & \xrightarrow{U} & \mathbb{R}_{\text{irr}}^{d+1} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}_{\text{irr}}^d & \xrightarrow{U\langle\rangle} & \mathbb{R}_{\text{irr}}^d; \end{array} \quad (10.4.10)$$

или кратко —

$$\varphi(Ux) = U\langle\varphi x\rangle. \quad (10.4.11)$$

Доказательство. Введем дополнительное обозначение

$$Ux = \begin{pmatrix} u_1x \\ \vdots \\ u_dx \\ u_0x \end{pmatrix}, \quad (10.4.12)$$

где u_1, \dots, u_d, u_0 — строки матрицы U , и, значит, $x \mapsto u_i x$ — линейные формы. В этих терминах левую часть в (10.4.11) можем записать в виде

$$\varphi(Ux) = \varphi\left(\begin{pmatrix} u_1x \\ \vdots \\ u_dx \\ u_0x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{u_1x}{u_0x} \\ \vdots \\ \frac{u_dx}{u_0x} \end{pmatrix}. \quad (10.4.13)$$

Теперь вычислим правую часть в (10.4.11). Вспоминая (10.3.17), находим

$$U\langle \varphi x \rangle = U\left\langle \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \vdots \\ \frac{x_d}{x_0} \end{pmatrix} \right\rangle = U\langle \underline{x} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(U, \underline{x})}{\lambda_0(U, \underline{x})} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_d(U, \underline{x})}{\lambda_0(U, \underline{x})} \end{pmatrix}. \quad (10.4.14)$$

Так как в силу (10.3.17) и (10.4.12) выполняются тождества

$$\frac{\lambda_i(U, \underline{x})}{\lambda_0(U, \underline{x})} = \frac{x_0 \cdot \lambda_i(U, \underline{x})}{x_0 \cdot \lambda_0(U, \underline{x})} = \frac{u_i x}{u_0 x}, \quad (10.4.15)$$

то из (10.4.13)–(10.4.15) выводим коммутационное соотношение (10.4.11). \square

10.4.3 Унимодулярные преобразования векторов Фарея.

Обозначим через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\max,1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{\max,d}^{[\sigma]_n} \\ Q_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (10.4.16)$$

вектор Фарея для CU -базиса $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ из (9.7.14). Из теоремы 9.7.1 следуют неравенства

$$\left| Q_{\max}^{[\sigma]_n} \alpha - P_{\max}^{[\sigma]_n} \right|_1 \leq \varrho_{\max}^{[\sigma]_n} \quad (10.4.17)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Сделаем унимодулярную замену

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_{\max,1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P'_{\max,d}^{[\sigma]_n} \\ Q'_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} P_{\max,1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{\max,d}^{[\sigma]_n} \\ Q_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (10.4.18)$$

для векторов Фарея (10.4.16). Тогда из неравенств (10.4.5) и (10.4.17) получаем следующую лемму об аппроксимации преобразованной точки α' .

Лемма 10.4.3 *Имеет место оценка*

$$\left| \alpha'_1 Q'^{[\sigma]_n}_{\max} - P'^{[\sigma]_n}_{\max,1} \right| + \dots + \left| \alpha'_d Q'^{[\sigma]_n}_{\max} - P'^{[\sigma]_n}_{\max,d} \right| \leq c_{\alpha,U} \varrho_{\max}^{[\sigma]_n} \quad (10.4.19)$$

для точки α' из (10.4.4).

□

Убедимся, что полученная оценка (10.4.19) приближений для точки α' нетривиальна. Для этого необходимо знать порядок роста множителей $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$.

Лемма 10.4.4 *Для иррациональной (1.2.21) точки α числа $Q'^{[\sigma]_n}_{\max} > 0$ и $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$, определенные в (9.7.24) и (10.4.18), имеют один и тот же порядок роста*

$$|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}| \asymp Q'^{[\sigma]_n}_{\max} \rightarrow +\infty \quad (10.4.20)$$

при $n \rightarrow +\infty$, т.е. отношения $(|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|/Q'^{[\sigma]_n}_{\max})^{\pm 1}$ ограничены для достаточно больших значений n .

Доказательство. Для вектора $\hat{\alpha}$ из (10.3.12) рассмотрим его образ

$$\hat{\alpha}_U = U\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{U,1} \\ \vdots \\ \alpha_{U,d} \\ \alpha_{U,0} \end{pmatrix} \quad (10.4.21)$$

относительно унимодулярного преобразования U . Из условия иррациональности точки α следует, что преобразованный вектор имеет координаты

$$\alpha_{U,i} \neq 0. \quad (10.4.22)$$

Далее ради определенности сначала будем предполагать выполненным условие

$$\alpha_{U,0} > 0. \quad (10.4.23)$$

Также рассмотрим преобразование

$$\widehat{V}_U^{[\sigma]_n} = U \widehat{V}^{[\sigma]_n} = \{\widehat{v}_{U,0}^{[\sigma]_n}, \widehat{v}_{U,1}^{[\sigma]_n}, \dots, \widehat{v}_{U,d}^{[\sigma]_n}\} \quad (10.4.24)$$

базисов $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ из (9.7.14). Обозначим через $\varphi_{U,i}^n$ углы между векторами $\widehat{v}_{U,i}^{[\sigma]_n}$, $\hat{\alpha}_U$. Из леммы 9.7.3 будет следовать

$$\varphi_{U,i}^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (10.4.25)$$

для всех i . Но тогда из (10.4.25) выводим, что углы φ_{\max}^n между векторами Фарея

$$\widehat{v}_{\max}^{[\sigma]_n} = \widehat{v}_0^{[\sigma]_n} + \widehat{v}_1^{[\sigma]_n} + \dots + \widehat{v}_d^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{\max,1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{\max,d}^{[\sigma]_n} \\ Q_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (10.4.26)$$

и вектором $\widehat{\alpha}$, а также углы $\varphi_{\max,U}^n$ между преобразованными векторами Фарея

$$\widehat{v}_{\max,U}^{[\sigma]_n} = \widehat{v}_{U,0}^{[\sigma]_n} + \widehat{v}_{U,1}^{[\sigma]_n} + \dots + \widehat{v}_{U,d}^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P'_{\max,1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P'_{\max,d}^{[\sigma]_n} \\ Q'_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (10.4.27)$$

и вектором $\widehat{\alpha}_U$ также обладают свойством

$$\varphi_{\max}^n \rightarrow 0, \quad \varphi_{\max,U}^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (10.4.28)$$

Последнее равенство в (10.4.27) следует из определений (9.7.23), (9.7.24). В силу (9.7.19) имеем

$$Q_{\max}^{[\sigma]_n} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (10.4.29)$$

Поскольку

$$\widehat{v}_{\max,U}^{[\sigma]_n} = U \widehat{v}_{\max}^{[\sigma]_n}, \quad (10.4.30)$$

то из (10.4.23), (10.4.28)–(10.4.30) получаем эквивалентность

$$Q'_{\max}^{[\sigma]_n} \asymp Q_{\max}^{[\sigma]_n} \quad (10.4.31)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Противоположный случай

$$\alpha_{U,0} < 0 \quad (10.4.32)$$

приводит к эквивалентности (10.4.20).

□

10.5 Основные теоремы

В этом разделе мы покажем, как изменяются теоремы 9.7.1 и 9.8.1 при дробно-линейном преобразовании иррациональной точки α .

Теорема 10.5.1 Пусть α — иррациональная точка (1.2.21), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ — произвольная бесконечная последовательность сочетаний σ_i из множества Σ и $s^{[\sigma]_n}$ — соответствующие производные симплексы (9.7.6). Кроме того, пусть радиус $[\sigma]_n$ -производной $r^{[\sigma]_n}$ звезды r , определенный в (9.7.13), обладает свойством (9.7.18). Тогда найдется такой номер $n_{\alpha,U} \geq 0$, зависящий от точки α и матрицы U , что будут иметь место следующие утверждения.

1. Существуют симплексы

$$\mathbf{s}'^{[\sigma]_n} = U \langle \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \rangle \quad (10.5.1)$$

для $n \geq n_{\alpha,U}$; при этом точка

$$\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U \langle \alpha \rangle = \left(\frac{\alpha_{U,1}}{\alpha_{U,0}}, \dots, \frac{\alpha_{U,d}}{\alpha_{U,0}} \right) \quad (10.5.2)$$

является внутренней для симплексов $\mathbf{s}'^{[\sigma]_n}$, обладающих свойством минимальности (см. определение (9.6.3)–(9.6.5)):

$$\frac{P'}{Q'} \notin \mathbf{s}'^{[\sigma]_n}, \quad (10.5.3)$$

если $1 \leq |Q|' < |Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|$; единственная точка

$$\frac{P'}{Q'} \in \mathbf{s}'^{[\sigma]_n} \quad (10.5.4)$$

со знаменателем $Q' = Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$ есть точка Фарея $\frac{P'}{Q'} = \frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}$, определяемая по формуле

$$\frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}} = U \left\langle \frac{P^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q^{[\sigma]_n}_{\max}} \right\rangle, \quad (10.5.5)$$

где $\frac{P^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q^{[\sigma]_n}_{\max}}$ — подходящие дроби из неравенства (9.7.27).

2. Выполняются неравенства

$$\left| \alpha' - \frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}} \right|_1 \leq c_{\alpha,U} \frac{\varrho^{[\sigma]_n}_{\max}}{|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|} \quad (10.5.6)$$

для всех $n \geq n_{\alpha,U}$. Здесь $c_{\alpha,U}$ — константа из (10.4.5) не зависит от n и знаменатели

$$|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}| \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (10.5.7)$$

Доказательство. Существование симплексов $\mathbf{s}'^{[\sigma]_n}$, их связь (10.5.1) с симплексами $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ и формула (10.5.2) следуют из коммутативной диаграммы (10.4.10) и леммы 10.4.4. Формула (10.5.5) получается из равенства (10.4.27) и формулы для дробно-линейного преобразования (10.3.17), а свойство минимальности (10.5.3), (10.5.4) — из теоремы 9.7.1. Второе утверждение теоремы вытекает из неравенств (10.4.19) и леммы 10.4.4.

□

Замечание 10.5.1 Напомним, чтобы приближения (10.5.6) были нетривиальны, необходимо выполнение условия (10.5.7) для знаменателей $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$ подходящих дробей $\frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}$.

Теорема 10.5.2 В условиях теорем 9.8.1 и 10.5.1 справедлива оценка

$$\left| \alpha' - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c'}{|Q_{\max}^{[\sigma]_n}|^{1+\eta^*}} \quad (10.5.8)$$

для всех $n \geq n_{\alpha,U,\eta^*}$. Здесь η^* — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\eta^* < \eta$, где $\eta = \eta(\alpha, \varphi)$ — диофантина экспонента (9.8.5); $c' = c \cdot c_{\alpha,U}$, где c — константа из неравенства (9.8.2) и $c_{\alpha,U}$ из (10.5.6); нижняя граница n_{α,U,η^*} для n определяется выбором показателя η^* и зависит от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, унимодулярной матрицы U и целевой функции $\varphi(r)$.

Доказательство следует из теорем 9.8.1, 10.5.1 и эквивалентности (10.4.20). \square

Относительно доказанных теорем необходимы следующие поясняющие комментарии.

Замечание 10.5.2 Сравнивая теоремы 9.7.1, 9.8.1 с их аналогами — теоремами 10.5.1, 10.5.2 — видим, что оценки приближений (9.7.27), (9.8.6) остаются инвариантными (10.5.6), (10.5.8) с точностью до постоянного множителя $c_{\alpha,U}$ из (10.4.6) при дробно-линейном преобразовании (10.5.2) аппроксимируемой точки α .

Замечание 10.5.3 Формула $c_{\alpha,U} = \|B_{U^{-1}}^{-1}\|_1$ с разъяснениями (10.4.2), (10.4.3) показывают, что главным фактором, влияющим на величину $c_{\alpha,U}$, является фактор-автоморфности

$$\lambda_0(U, \alpha) = u_0 \cdot \hat{\alpha} = u_{01}\alpha_1 + \dots + u_{0d}\alpha_d + u_{00}, \quad (10.5.9)$$

где u_0 — нижняя строка унимодулярной матрицы U . Величина $c_{\alpha,U}$ обратно пропорциональна значению линейной формы (10.5.9) и, значит, гиперплоскость $\lambda_0(U, x) = 0$ будет критической при выборе α и U . Ограничивааясь в данной главе иррациональными точками α мы, тем самым, гарантировали выполнение условия $\lambda_0(U, \alpha) \neq 0$. В других обозначениях фактор-автоморфности (10.5.9) также можно записать в виде $\lambda_0(U, \alpha) = \alpha_{U,0}$. Поэтому принимая во внимание (10.4.23), (10.4.32) убеждаемся в том, что знак $\text{sign } \lambda_0(U, \alpha) = \pm 1$ совпадает со знаком знаменателей $Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ в неравенствах (10.5.6), (10.5.8) для всех достаточно больших значений n .

10.6 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Симплекс-ядерный алгоритм основан на индуцированных торических разбиениях, первое применение которых к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [23], [26].

Все рациональные вершины симплексов s_n имеют тот же порядок приближения к точке α , что и точки Фарея $\frac{P_n}{Q_n}$ из (9.1.3), но только последние являются наилучшими приближениями. Для двумерных приближений операция сложения Фарея точек в разных вариантах использовалась в [52], [57], [62] [63], [100], [106]. Одномерный случай обычных дробей Фарея см., например, [9].

Объединение этих двух подходов: индуцированных разбиений и сумм Фарея — было осуществлено в работе [31].

Глава 11

Дробно-линейная инвариантность симплекс-модульного алгоритма разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби

Доказывается инвариантность симплекс-модульного алгоритма разложения вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби относительно дробно-линейных преобразований $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ с матрицами U , принадлежащими унимодулярной группе $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$. Показано, что для цепных дробей преобразованных наборов чисел α' сохраняется рекуррентное соотношение и порядок приближения к α' .

11.1 Введение

В главе 8 было доказано, что точки Фарея $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{\mathbf{P}_{a+d+1}}{\mathbf{Q}_{a+d+1}} = \frac{b_d \mathbf{P}_{a+d}}{b_d \mathbf{Q}_{a+d}} \widehat{+} \dots \widehat{+} \frac{b_1 \mathbf{P}_{a+1}}{b_1 \mathbf{Q}_{a+1}} \widehat{+} \frac{b_0 \mathbf{P}_a}{b_0 \mathbf{Q}_a} \quad (11.1.1)$$

где $\widehat{+}$ обозначает сумму Фарея и b_i — коэффициенты характеристического многочлена

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0$$

матрицы Пизо P_α из равенства (7.4.20). Кроме того, было доказано следующее утверждение.

Для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая матрица P_α — локализованная матрица Пизо, что выполняются неравенства

$$\left| \alpha_1 - \frac{\mathbf{P}_{a1}}{\mathbf{Q}_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{\mathbf{P}_{ad}}{\mathbf{Q}_a} \right| \leq \frac{c}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (11.1.2)$$

для всех $a \geq a_{\alpha,\theta}$. Здесь

$$\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} = \left(\frac{\mathbf{P}_{a1}}{\mathbf{Q}_a}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{ad}}{\mathbf{Q}_a} \right)$$

— подходящие цепные дроби к точке $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a .

Алгебраические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, участвующие в приведенном выше неравенстве (11.1.2), относятся к классу плохо приближающихся чисел. Из нижних оценки для диофантовой экспоненты $\geq 1 + \frac{1}{d}$ (см. неравенство (8.4.11)) следует, что приближения (11.1.2) можно за счет выбора локализованных матриц Пизо \mathbf{P}_α получать сколь угодно близкими к оптимальным.

Однако, в этом месте требуется уточнение. Свойство минимальности, которым обладают симплексы \mathbf{s}^a , означает, что при любом выборе матрицы Пизо \mathbf{P}_α в (7.4.20) всегда получаются наилучшие приближения относительно симплициальных \mathbf{s}^a -норм (9.1.5), задаваемых аналогично (2.5.46). В приведенном контексте приближениям вида (11.1.2) отвечают симплексы \mathbf{s}'^a , имеющие близкую к шаровой форму.

Цель настоящей главы — доказать инвариантность \mathcal{SM} -алгоритма (7.1.8) относительно дробно-линейных преобразований

$$\alpha \mapsto U\langle \alpha \rangle \tag{11.1.3}$$

относительно унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В теореме 11.4.1 доказано:

при преобразовании

$$U\langle \cdot \rangle : \alpha \mapsto \alpha', \quad \mathbf{s}^a \mapsto \mathbf{s}'^a, \quad \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} \mapsto \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} \tag{11.1.4}$$

с любой матрицей $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ симплексы \mathbf{s}'^a сохраняют свойство монотонности (9.1.1) и свойство минимальности (9.1.2), (9.1.4) или в терминах \mathbf{s}'^a -норм (9.1.6), (9.1.7). Точки Фарея $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (7.8.3) со своими начальными условиями; и при этом выполняются неравенства

$$\left| \alpha'_1 - \frac{\mathbf{P}'_{a1}}{\mathbf{Q}'_a} \right| + \dots + \left| \alpha'_d - \frac{\mathbf{P}'_{ad}}{\mathbf{Q}'_a} \right| \leq \frac{c'}{\mathbf{Q}'_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{11.1.5}$$

для всех $a \geq a_{\alpha,\theta,U}$. Здесь знаменатели

$$|\mathbf{Q}'_a| \rightarrow +\infty \text{ при } a \rightarrow +\infty; \tag{11.1.6}$$

константы $a_{\alpha,\theta,U} > 0$ и $c' = c'_{\alpha,\theta,U} > 0$ не зависят от a .

11.2 Единицы алгебраических полей

11.2.1 Локализованные единицы Пизо.

Из предложения 8.3.1 можно вывести следующее

Следствие 11.2.1 Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ — некоторая фундаментальная система единиц вещественного алгебраического поля \mathbb{F} из (7.3.1) степени $d+1$,

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t} \quad (11.2.1)$$

— произвольная единица; и пусть $\zeta^{(i)}$ — сопряженные единицы ζ . Тогда для любого фиксированного $\theta > 0$ найдутся такие целыми показателями p_1, \dots, p_t в (11.2.1), что будут выполняться следующие свойства:

- 1) число ζ является единицей Пизо (7.3.4);
- 2) модули всех ее сопряженных $\zeta^{(i)}$ содержатся в некоторой окрестности

$$\zeta^{-1/d-\theta} \leq |\zeta^{(i)}| \leq \zeta^{-1/d+\theta} \quad (11.2.2)$$

для $2 \leq i \leq t+1$.

3) если поле \mathbb{F} является вещественным квадратичным или комплексным кубическим, т.е. имеющим комплексное сопряжение, то в неравенствах (11.2.2) можно положить $\theta = 0$.

□

Единицы $\zeta > 1$, удовлетворяющие условию (11.2.2), будем называть локализованными единицами Пизо.

11.3 Дробно-линейные преобразования и точки Фарея

11.3.1 Рекуррентные последовательности.

Пусть U — произвольная матрица из унимодулярной группы матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. С помощью дробно-линейного отображения (7.5.8) действуем данной матрицей

$$v'_a = \frac{P'_a}{Q'_a} = \left(\frac{P'_{a,1}}{Q'_{a,1}}, \dots, \frac{P'_{a,d}}{Q'_{a,d}} \right) = U \langle v_a \rangle \quad (11.3.1)$$

на вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ (см. (7.7.15)) симплекса

$$\mathbf{s}^a = P_\alpha^a \langle \Delta \rangle. \quad (11.3.2)$$

Вершине (11.3.1) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}'_a = \begin{pmatrix} P'_{a1} \\ \vdots \\ P'_{ad} \\ Q'_a \end{pmatrix} = U \mathbf{v}_a = U \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \quad (11.3.3)$$

Обозначим через

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{v}_{a+d} \dots \mathbf{v}_{a+1} \mathbf{v}_a) \quad (11.3.4)$$

квадратную матрицу порядка $d + 1$, составленную из столбцов (7.7.16). Тогда рекуррентное соотношение (7.7.19) можно переписать в матричном виде

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = \mathbf{V}_a \mathbf{b} \quad (11.3.5)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ со столбцом

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_d \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (11.3.6)$$

а начальные условия —

$$\mathbf{V}_0 = (\mathbf{v}_d \dots \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0) = (P_\alpha^d \mathbf{v}_0 \dots P_\alpha^1 \mathbf{v}_0 P_\alpha^0 \mathbf{v}_0), \quad (11.3.7)$$

где столбец \mathbf{v}_0 задан в (7.7.16). В силу (11.3.6) и (11.3.5) имеем

$$\mathbf{v}'_{a+d+1} = \mathbf{V}'_a \mathbf{b}, \quad (11.3.8)$$

где

$$\mathbf{V}'_a = (\mathbf{v}'_{a+d} \dots \mathbf{v}'_{a+1} \mathbf{v}'_a) = U \mathbf{V}_a = (U \mathbf{v}_{a+d} \dots U \mathbf{v}_{a+1} U \mathbf{v}_a) \quad (11.3.9)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$

Предложение 11.3.1 Столбцы \mathbf{v}'_a из (11.3.6) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{v}'_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}'_{a+d} + \dots + b_1 \mathbf{v}'_{a+1} + b_0 \mathbf{v}'_a \quad (11.3.10)$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ с теми же самыми коэффициентами, что и в соотношении (7.7.19), с начальными условиями

$$\mathbf{v}'_d = U P_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}'_1 = U P_\alpha \mathbf{v}_0, \mathbf{v}'_0 = U \mathbf{v}_0 \quad (11.3.11)$$

определенными унимодулярной матрицей U , матрицей Пизо P_α из (7.4.20) и столбцом \mathbf{v}_0 из (7.7.16).

Доказательство. Поскольку в силу (11.3.9) имеем

$$\mathbf{V}'_0 = (\mathbf{v}'_d \dots \mathbf{v}'_1 \mathbf{v}'_0) = (U \mathbf{v}_d \dots U \mathbf{v}_1 U \mathbf{v}_0) \quad (11.3.12)$$

то предложение вытекает из (11.3.8), (7.7.20) и (11.3.12). \square

Рациональные вершины (7.7.15) и (11.3.1) связаны между собою дробно-линейным преобразованием

$$\frac{P'_a}{Q'_a} = U \left\langle \frac{P_a}{Q_a} \right\rangle. \quad (11.3.13)$$

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (7.6.25), то рекуррентное соотношение (11.3.10) можно применить

$$\frac{P'_{a+d+1}}{Q'_{a+d+1}} = \frac{b_d P'_{a+d}}{b_d Q'_{a+d}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 P'_{a+1}}{b_1 Q'_{a+1}} \hat{+} \frac{b_0 P'_a}{b_0 Q'_a} \quad (11.3.14)$$

непосредственно к рациональным вершинам $v'_a = \frac{P'_a}{Q'_a}$ из (11.3.1). В этих терминах начальные условия (11.3.11) примут вид

$$v'_d = \text{pr } UP_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, v'_1 = \text{pr } UP_\alpha \mathbf{v}_0, v'_0 = \text{pr } U \mathbf{v}_0, \quad (11.3.15)$$

где pr обозначает проекцию (7.6.12).

11.3.2 Точки Фарея.

Симплекс Пизо $UP_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ имеет рациональные вершины $v'_{ai} = \frac{P'_{a,i}}{Q'_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$. Согласно (7.6.26) данный симплекс содержит точку Фарея

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = \frac{P'_{a,0}}{Q'_{a,0}} \hat{+} \frac{P'_{a,1}}{Q'_{a,1}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P'_{a,d}}{Q'_{a,d}}, \quad (11.3.16)$$

имеющую координаты

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = \left(\frac{\mathbf{P}'_{a1}}{\mathbf{Q}'_a}, \dots, \frac{\mathbf{P}'_{ad}}{\mathbf{Q}'_a} \right). \quad (11.3.17)$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \dots$

также, как и вершины $\frac{P'_{a,i}}{Q'_{a,i}}$ симплекса Пизо $UP_\alpha^a \langle \Delta \rangle$, удовлетворяют

$$\frac{\mathbf{P}'_{a+d+1}}{\mathbf{Q}'_{a+d+1}} = \frac{b_d \mathbf{P}'_{a+d}}{b_d \mathbf{Q}'_{a+d}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 \mathbf{P}'_{a+1}}{b_1 \mathbf{Q}'_{a+1}} \hat{+} \frac{b_0 \mathbf{P}'_a}{b_0 \mathbf{Q}'_a} \quad (11.3.18)$$

— рекуррентному соотношению (11.3.14) с новыми начальными условиями

$$v'_{d,\max} = \text{pr } UP_\alpha^d \mathbf{v}_{\max}, \dots, v'_{1,\max} = \text{pr } UP_\alpha \mathbf{v}_{\max}, v'_{0,\max} = \text{pr } U \mathbf{v}_{\max}, \quad (11.3.19)$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством (7.8.5) и в координатах записывается в виде (7.8.6). Перепишем начальные условия (11.3.19) в однородном с рекуррентным соотношением (11.3.18) виде

$$\frac{\mathbf{P}'_d}{\mathbf{Q}'_d} = \text{pr } UP_\alpha^d \mathbf{v}_{\max}, \dots, \frac{\mathbf{P}'_1}{\mathbf{Q}'_1} = \text{pr } UP_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \frac{\mathbf{P}'_0}{\mathbf{Q}'_0} = \text{pr } U \mathbf{v}_{\max}. \quad (11.3.20)$$

11.4 Основная теорема

Покажем, как изменится теорема 8.4.1 придробно-линейном преобразовании $\alpha \mapsto U \langle \alpha \rangle$ иррациональной точки α .

Теорема 11.4.1 Пусть α — полная точка степени $\deg(\alpha) = d + 1$; и пусть рациональные числа $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ для $a = 0, 1, 2, \dots$ заданы рекуррентным соотношением (11.3.18) и начальными условиями (11.3.20). Тогда найдется такой номер $a_{\alpha,\zeta,U} \geq 0$, зависящий от точки α , единицы Пизо ζ из (11.2.1) и матрицы U из унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, что будут иметь место следующие утверждения.

1. Существуют симплексы Пизо

$$\mathbf{s}'^a = U \langle \mathbf{s}^a \rangle = UP_\alpha^a \langle \Delta \rangle \quad (11.4.1)$$

— образы симплексов \mathbf{s}^a из (11.3.2) для $a \geq a_{\alpha,\zeta,U}$; при этом точка

$$\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U \langle \alpha \rangle = \left(\frac{\alpha_{U,1}}{\alpha_{U,0}}, \dots, \frac{\alpha_{U,d}}{\alpha_{U,0}} \right) \quad (11.4.2)$$

является внутренней для симплексов \mathbf{s}'^a , обладающих свойством минимальности (см. определение (7.6.3)–(7.6.5)):

$$\frac{P'}{Q'} \notin \mathbf{s}'^a, \quad (11.4.3)$$

если $1 \leq |Q'| < |Q'_{a,\max}|$; единственная точка

$$\frac{P'}{Q'} \in \mathbf{s}'^a \quad (11.4.4)$$

со знаменателем $Q' = \mathbf{Q}'_a$ есть точка Фарея $\frac{P'}{Q'} = \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$, определяемая по формуле

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = U \left\langle \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} \right\rangle, \quad (11.4.5)$$

где $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ — подходящие дроби из неравенств (7.8.12).

2. Для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая локализованная матрица Пизо P_α из предложения 7.4.1, что выполняются неравенства

$$\left| \alpha' - \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} \right|_1 \leq \frac{c'}{|Q'|^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (11.4.6)$$

для всех $a \geq a_{\alpha,\theta,U}$. Здесь знаменатели

$$|\mathbf{Q}'_a| \rightarrow +\infty \quad \text{при } a \rightarrow +\infty; \quad (11.4.7)$$

константы $a_{\alpha,\theta,U} > 0$ и $c' = c'_{\alpha,\theta,U} > 0$ не зависят от a .

Доказательство. По теореме 7.8.1 если α — полная точка степени $\deg(\alpha) = d + 1$ и $a \geq l_\alpha(\Delta)$, то существует симплекс Пизо $\mathbf{s}^a = P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ и он обладает свойством минимальности (7.8.7), (7.8.8). Принимая во внимание, что точка α иррациональная (1.2.21) и выполняется неравенство (8.4.6), можем применить

теорему 10.5.1. По этой теореме найдется такой номер $a_{\alpha,U} \geq 0$, зависящий от точки α и матрицы U , что для $a \geq a_{\alpha,U}$ будет существовать симплекс $\mathbf{s}'^a = U\langle \mathbf{s}^a \rangle$ с минимальным свойством (11.4.3), (11.4.4) для преобразованной точки α' из (11.4.2). На этом пути получаем первую часть теоремы, выбирая $a_{\alpha,\zeta,U} = \max\{l_\alpha(\Delta), a_{\alpha,U}\}$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Воспользуемся неравенством

$$\left| \alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} \right|_1 \leq \frac{c}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (11.4.8)$$

из теоремы 8.4.1 для всех $a \geq a_{\alpha,\theta}$. Из (11.4.8) и леммы 10.4.3 следует оценка

$$\left| \alpha' - \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} \right|_1 \leq \frac{c'}{\mathbf{Q}'_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (11.4.9)$$

для точки α' из (11.4.2) с другой константой c' , также не зависящей от a . Чтобы перейти от (11.4.9) к неравенству (11.4.6), применим лемму 10.4.4, где доказана эквивалентность

$$|\mathbf{Q}'_a| \asymp \mathbf{Q}_a \rightarrow +\infty \quad (11.4.10)$$

при $a \rightarrow +\infty$, т.е. отношения $(|\mathbf{Q}'_a|/\mathbf{Q}_a)^{\pm 1}$ ограничены для достаточно больших значений a . Сопоставляя (11.4.9) с (11.4.10), получаем неравенство (11.4.6), а свойство (11.4.11) будет вытекать снова из эквивалентности (11.4.10) и асимптотики (8.4.1).

□

Заметим, что приближения (11.4.6) нетривиальны только при выполнении условия

$$|\mathbf{Q}'_a| \rightarrow +\infty \quad \text{при } a \rightarrow +\infty \quad (11.4.11)$$

для знаменателей \mathbf{Q}'_a аппроксимирующих точку α' подходящих дробей $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$.

11.5 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ

Как уже отмечалось, минимальные симплексы \mathbf{s}^a являются многомерным обобщением отрезков Фарея [95], [74], [26].

В [30] было доказано существование матриц Пизо \mathbf{P}_α из (7.4.20), позволяющих получать приближения вида (8.4.6) с показателем $\theta < 1/d$. После того, как был разработан общий симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных чисел в многомерные цепные дроби [31], появилась возможность строить матрицы Пизо \mathbf{P}_α с любым наперед заданным параметром $\theta > 0$.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка [47]. Аналогичная связь существует и для

многомерных цепных дробей [86], [109]. Для вычисления подходящих дробей в неравенствах (11.1.5) также применяются рекуррентные соотношения (11.3.18), но теперь они получаются из локализованных матриц Пизо P_α .

Литература

- [1] Арнольд, В. И. Цепные дроби / В. И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2002. – 40 с.
- [2] Боревич, З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. – М.: Физматлит, 1985. – 504 с.
- [3] Брюно, А. Д. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта / А. Д. Брюно, В. И. Парусников // Мат. заметки. – 1994. – Т. 56, № 4. – С. 9–27.
- [4] Брюно, А. Д. Сравнение разных обобщений цепных дробей / А. Д. Брюно, В. И. Парусников // Мат. заметки. – 1997. – Т. 61, № 3. – С. 339–348.
- [5] Брюно, А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби / А. Д. Брюно // Чебышевский сб. – 2015. – Т. 16, вып. 2. – С. 35–65.
- [6] Брюно, А. Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений / А. Д. Брюно. – М.: // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 1. – 20 с.
- [7] Брюно, А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби / А. Д. Брюно. – М.: // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2017. – № 46. – 28 с.
- [8] Быковский, В. А. Сравнение разных обобщений цепных дробей / В. А. Быковский // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, № 1. – С. 30–37.
- [9] Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1972. – 180 с.
- [10] Вороной, Г.Ф. Собрание сочинений. Т. 1 / Г.Ф. Вороной. – Киев.: АН УССР, 1952 – 390 с.
- [11] Вороной, Г.Ф. Собрание сочинений. Т. 2 / Г.Ф. Вороной. – Киев.: АН УССР, 1952 – 392 с.
- [12] Вороной, Г.Ф. Собрание сочинений. Т. 3 / Г.Ф. Вороной. – Киев.: АН УССР, 1953 – 307 с.
- [13] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004 – 560 с.

- [14] Герман, О.Н. Геометрия многомерных диофантовых приближений: Диссертация / О.Н. Герман. – МГУ, 2013 – 150 с.
- [15] Добровольский, Н. М. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби / Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева // Чебышевский сб. – 2013. – Т. 14, вып. 1. – С. 34–55.
- [16] Журавлев, В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2005. – Т. 322. – С. 83–106.
- [17] Журавлев, В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи / В. Г. Журавлев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2007. – Т. 71, № 2. – С. 89–122.
- [18] Журавлев, В. Г. Послойный рост квазипериодического разбиения Рози / В. Г. Журавлев, А.В. Малеев // Кристаллография. – 2007. – Т. 52, № 2. – С. 204–210.
- [19] Журавлев, В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2011. – Т. 392. – С. 95–145.
- [20] Журавлев, В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей / В. Г. Журавлев // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 95–130.
- [21] Журавлев, В. Г. Многогранники ограниченного остатка / В. Г. Журавлев // Труды МИАН. – 2012. – Т. 16. – С. 82–102.
- [22] Журавлев, В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова / В. Г. Журавлев // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 4. – С. 97–136.
- [23] Журавлев, В. Г. Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2015. – Т. 440. – С. 81–98.
- [24] Журавлев, В. Г. Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2015. – Т. 440. – С. 99–122.
- [25] Журавлев, В. Г. Множества ограниченного остатка / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2016. – Т. 445. – С. 93–174.
- [26] Журавлев, В. Г. Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2016. – Т. 445. – С. 33–92.
- [27] Журавлев, В. Г. Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби / В. Г. Журавлев // Труды МИАН. – 2016. – Т. 23. – С. 41–66.

- [28] Журавлев, В. Г. Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в цепные дроби / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2016. – Т. 449. – С. 84–129.
- [29] Журавлев, В. Г. Ядерные разложения чисел Пизо в многомерные цепные дроби / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2016. – Т. 449. – С. 130–167.
- [30] Журавлев, В. Г. Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2016. – Т. 449. – С. 168–195.
- [31] Журавлев, В. Г. Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби / В. Г. Журавлев // Труды МИАН. – 2017. – Т. 299. – С. 283–303.
- [32] Журавлев, В. Г. Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2017. – Т. 458, № 33. – С. 104–134.
- [33] Журавлев, В. Г. Дробно-линейная инвариантность многомерных цепных дробей / В. Г. Журавлев // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2017. – Т. 458, № 33. – С. 42–76.
- [34] Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 213 с.
- [35] Касселс, Дж. Введение в геометрию чисел / Дж. Касселс. – М.: Мир, 1965. – 422 с.
- [36] Карпенков, О. Н. О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических ир-рациональностей / О. Н. Карпенков // Функциональный анализ и его приложения. – 2004. – Т. 38, вып. 2. – С. 28–37.
- [37] Карпенков, О. Н. О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов / О. Н. Карпенков // Математические заметки. – 2010. – Т. 88, вып. 1. – С. 30–42.
- [38] Коркина, Е. И. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры / Е. И. Коркина // Математические заметки. – 1995. – Т. 209. – С. 143–166.
- [39] Марков, А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей / А. А. Марков. – Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1948. – 412 с.
- [40] Мошевитин, Н. Г. Наилучшие совместные приближения: нормы, сигнатуры и асимптотические направления / Н. Г. Мошевитин // Математические заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 730–737.

- [41] Мощевитин, Н. Г. Сингулярные диофантовы системы А. Я. Хинчина и их применение / Н. Г. Мощевитин // УМН. – 2010. – Т. 63, вып. 3. – С. 43–126.
- [42] Подсыпанин, Е. В. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна / Е. В. Подсыпанин // Зап. научн. семинара ЛОМИ. – 1977. – Т. 67. – С. 184–194.
- [43] Пустыльников, Л. Д. Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория / Л. Д. Пустыльников // УМН. – 2003. – Т. 58, вып. 1. – С. 113–164.
- [44] Федоров, Е.С. Начала учения о фигурах / Е.С. Федоров. – М.: АН СССР, 1953 – 411 с.
- [45] Хинчин, А.Я. Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений / А.Я. Хинчин // УМН. – 1948. – Т. 3, вып. 3. – С. 3–28.
- [46] Хинчин, А.Я. Избранные труды по теории чисел / А.Я. Хинчин. – М.: МЦНМО, 2006 – 260 с.
- [47] Хинчин, А.Я. Цепные дроби / А.Я. Хинчин. – 4-е изд. – М.: Наука, 1978 – 112 с.
- [48] Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М.: Мир, 1983 – 228 с.
- [49] Abrate, M. Periodic Representations for Cubic Irrationalities / M. Abrate, S. Barbero, U. Cerruti, N. Murru // Fibonacci Quart. – 2012. – Vol. 50, № 3. – P. 252–264.
- [50] Adams, W. W. Simultaneous asymptotic diophantine approximations to a basis of a real cubic number field / W. W. Adams // J. Number Theory. – 1969. – Vol. 1. – P. 179–194.
- [51] Adams, W. W. Simultaneous diophantine approximations and cubic irrationals / W. W. Adams // Pacific J. Math. – 1969. – Vol. 30. – P. 1–14.
- [52] Arnoux, P. On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms / P. Arnoux, S. Labbe // arXiv:1508.07814v3. – 2016. – P. 1–26.
- [53] Assaf, S. A dual approach to triangle sequences: a multidimensional continued fraction algorithm / S. Assaf, L.-C. Chen, T. Cheslack-Postava, B. Cooper, A. Diesl, T. Garrity, M. Lepinski, A. Schuyler // Integers. – 2005. – Vol. 5, № 1. – P. 1–39.
- [54] Baker, A. Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers / A. Baker // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1964. – Vol. 15, № 2. – P. 375–383.
- [55] Bernstein, L. The Jacobi-Perron algorithm. Its theory and application. – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 207 / L. Bernstein. – Berlin: Springer – Verlag, 1971. – 157 p.

- [56] Berthé, V. Multidimensional Euclidean algorithms, numeration and substitutions / V. Berthé // Integers. – 2011. – Vol. 11B. – P. 1–34.
- [57] Berthé, V. Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux–Rauzy–Poincaré algorithm / V. Berthé, S. Labbe // Advances in Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 63. – P. 90–130.
- [58] Bosma, W. Finding simultaneous diophantine approximations with prescribed quality / W. Bosma, I. Smeets // arxiv.org/pdf/1001.4455. – 2010. – P. 1–16.
- [59] Brentjes, A. J. Multidimensional continued fraction algorithms / A. J. Brentjes. – Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981. – 183 p.
- [60] Brun, V. En generalisation av Kjedebroken / V. Brun // Skrifter utgit av Videnskapsselskapet Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse. – 1919. – Vol. 6. – P. 1–29.
- [61] Brun, V. En generalisation av Kjedebroken / V. Brun // Skrifter utgit av Videnskapsselskapet Kristiania. II. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse. – 1920. – Vol. 6. – P. 1–24.
- [62] Brun, V. Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres / V. Brun // Mercators Helsinki, Tryckeri. – 1958. – P. 45–64.
- [63] Cassaigne, J. Un algorithme de fractions continues de complexité linéaire / J. Cassaigne // LIAFA. – 2015. – P. 1–7.
- [64] Chevallier, N. Best simultaneous Diophantine approximations of some cubic numbers / N. Chevallier // Journal de Théories des Nombres de Bordeaux. – 2002. – Vol. 14, № 2. – P. 403 — 414.
- [65] Chevallier, N. Best Simultaneous Diophantine Approximations and Multidimensional Continued Fraction Expansions / N. Chevallier // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. – 2013. – Vol. 3, № 3. – P. 3 — 56.
- [66] Coelho, Z. Absolutely Continuous Invariant Measures for a Class of Affine Interval Exchange Maps / Z. Coelho, A. Lopes, L.F. Da Rocha // Proceedings of The American Mathematical Society. – 1995. – Vol. 111. – P. 3533–3542.
- [67] Dasaratha, K. Cubic irrationals and periodicity via a family of multi-dimensional continued fraction algorithms / K. Dasaratha, L. Flapan, T. Garrity, C. Lee, C. Mihaila, N. Neumann-Chun, S. Peluse, M. Stoffregen // arXiv:1208.4244v5 [math.NT]. – 2014. – P. 1–14.
- [68] Dubois, E. The Jacobi-Perron algorithm and Pisot numbers / E. Dubois, A. Farhane, and R. Paysant-Le Roux // Acta Arithmetica. – 2004. – Vol. 111. – P. 269–275.

- [69] Euler, L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda / L. Euler // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. – 1775. – P. 99–104.
- [70] Ferenczi, S. Bounded Remaider Sets / S. Ferenczi // Acta Arithmetica. – 1992. – Vol. 61, № 4. – P. 319–326.
- [71] Furukado, M. A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface / M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi // Experemental Mathematics. – 2014. – Vol. 23, № 4. – P. 390–410.
- [72] Garrity, Th. On Periodic Sequences for Algebraic Numbers / Th. Garrity // Journal of Number Theory. – 2001. – Vol. 88. – P. 86–103.
- [73] Garrity, Th. A Multidimensional Continued Fraction Generalization of Stern's Diatomic Sequence / Th. Garrity // Journal of Integer Sequences. – 2013. – Vol. 16. – P. 1–24.
- [74] Grabiner, D. Farey nets and multidimensional continued fractions / D. Grabiner // Monatsh. Math. – 1992. – Vol. 114, № 1. – P. 35–61.
- [75] Grepstad, S. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation / S. Grepstad, N. Lev// Geometric and Functional Analysis. – 2014. – Vol. 25, № 1. – P. 87–133.
- [76] Iosifescu M. Metrical theory of continued fractions / M. Iosifescu, C. Kraaikamp. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 383 p.
- [77] Ito S. Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms / S. Ito, M. Ohtsuki // Tokyo J. Math. – 1993. – Vol. 16. – P. 441–472.
- [78] Ito S. On simultaneous approximation to (α, α^2) with $\alpha^3 + k\alpha - 1 = 0$ / S. Ito, J. Fujii, H. Higashino // Tokyo J. Math. – 2003. – Vol. 99. – P. 255–283.
- [79] Ito S. On simultaneous Diophantine approximation to periodic points related to modified Jacobi-Perron algorithm / S. Ito, S. Yasutomi // Adv. Stud. Pure Math. – 2007. – Vol. 49. – P. 171–184.
- [80] Jacobi, C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird / C. G. J. Jacobi // J. Reine Angew. Math. – 1868. – Vol. 69. – P. 29–64.
- [81] Jacobi, C. G. J. Über die Auflösung der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f_n$ / C. G. J. Jacobi // J. Reine Angew. Math. – 1868. – Vol. 69. – P. 21–28.
- [82] Hecke, E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins / E. Hecke // Math. Sem. Hamburg. Univ. – 1921. – Vol. 1. – P. 54–76.
- [83] Hermite, C. Letter to C.D.J. Jacobi / C. Hermite // J. Reine Angew. Math. – 1839. – Vol. 40. – P. 286.

- [84] Hubert, P. Best simultaneous Diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals / P. Hubert, A. Messaoudi // Acta Arith. – 2006. – Vol. 124, № 1. – P. 1–15.
- [85] Karpenkov, O. N. Constructing multidimensional periodic continued fractions in the sense of Klein / O. N. Karpenkov // Mathematics of computation. – 2008. – P. 1–25.
- [86] Lagarias, J. Best simultaneous Diophantine approximations. I. Roth rates of best approximation denominators / J. Lagarias // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 272, № 2. – P. 545–554.
- [87] Lagarias, J. Best simultaneous Diophantine approximations. II. Behavior of consecutive best approximations / J. Lagarias // Pacific J. Math. – 1982. – Vol. 102. – P. 61–88.
- [88] Lagarias, J. The quality of the Diophantine approximations found by the Jacobi-Perron algorithm and related algorithms / J. Lagarias // Pacific J. Math. – 1993. – Vol. 115. – P. 299–328.
- [89] Lagarias, J. Geodesic multidimensional continued fractions / J. Lagarias // Proc. London Math. Soc. – 1994. – Vol. 69, № 3. – P. 464–488.
- [90] Liardet, P. Algebraic computations with continued fractions / P. Liardet, P. Stambul // Journal of Number Theory. Soc. – 1998. – Vol. 73. – P. 92–121.
- [91] Markoff, A. Sur les formes quadratiques binaires indefinies / A. Markoff // Mathematische Annalen. – 1879. – Vol. 15. – P. 381–407.
- [92] Markoff, A. Sur les formes quadratiques binaires indefinies, (second m  moire) / A. Markoff // Mathematische Annalen. – 1880. – Vol. 17. – P. 379–399.
- [93] Minkowski, H. Generalisation de la theorie des fractions continues / H. Minkowski // Ann. de l'Ecole Norm. – 1896. – Vol. 13. – P. 41–60.
- [94] Minkowski, H. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1 / H. Minkowski. – Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1911. – 392 p.
- [95] M  nkmeyer, R.   ber Fareynetze in n Dimensionen / R. M  nkmeyer // Math. Nachr. – 1963. – Vol. 11. – P. 321–344.
- [96] Morse, M. Symbolic Dynamics II: Sturmian trajectories / M. Morse, C.A. Hedlund // Amer. J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 1–42.
- [97] Moshchevitin, N. G. On some open problems in Diophantine approximation / N. G. Moshchevitin // arXiv:1202.4539v5 [math.NT]. – 2012. – P. 1–42.
- [98] Mukunda, K. Littlewood Pisot numbers / K. Mukunda // Journal of Number Theory. – 2006. – Vol. 117. – P. 106 – 121.

- [99] Murru, N. On the periodic writing of cubic irrationals and a generalization of Rédei functions / N. Murru // Int. J. of Number Theory. – 2015. – Vol. 11. – P. 779–799.
- [100] Nogueira, A. The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm / A. Nogueira // Israel J. Math. – 1995. – Vol. 90, № 1–3. – P. 373–401.
- [101] Paysant-Le Roux, R. Une application des nombres de Pisot l'algorithme de Jacobi-Perron / R. Paysant-Le Roux, E. Dubois // Monatshefte für Mathematik. – 1984. – Vol. 98. – P. 145–155.
- [102] Perron, O. Über diophantische approximationen / O. Perron // Math. Annalen. – 1921. – Vol. 83. – P. 77–84.
- [103] Poincare, H. Sur une generalization des fractionés continues / H. Poincare // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1884. – Vol. 99, № 1. – P. 1014–1016.
- [104] Rauzy, G. Nombres algébriques et substitutions / G. Rauzy // Bull. Soc. Math. France. – 1982. – Vol. 110. – P. 147–178.
- [105] Rauzy, G. Ensembles à restes bornés / G. Rauzy // Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux. – 1984. – Vol. 24. – P. 1–12.
- [106] E.S. Selmer, E.S. Continued fractions in several dimensions / E.S. Selmer // Nordisk Nat. Tidskr. – 1961. – Vol. 9. – P. 37–43.
- [107] Schmidt, W. S. Diophantine Approximation. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 785 / W. S. Schmidt. – Berlin: Springer – Verlag, 1980. – 299 p.
- [108] Schweiger, F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory / F. Schweiger. – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 293 p.
- [109] Schweiger, F. Multidimensional Continued Fraction / F. Schweiger. – New York: Oxford Univ. Press, 2000. – 234 p.
- [110] Shutov, A.V. Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry / A.V. Shutov, A.V. Maleev, V.G. Zhuravlev // Acta Crystallogr. – 2010. – Vol. A66. – P. 427–437.
- [111] Voronoi, G.F. On a generalization of the algorithm of continued fractions. PhD Dissertation / G.F. Voronoi. – Warsaw, 1896. – 190 p.
- [112] Wang, Q. On optimal simultaneous rational approximation to $(\omega, \omega^2)^\tau$ with ω being some kind of cubic algebraic function / Q. Wang, K. Wang, Z. Dai // Journal of Approximation TheoryQ. – 2007. – Vol. 148. – P. 194–210.
- [113] Zhuravlev, V.G. Derivatives of circle rotations and similarity of orbits / V.G. Zhuravlev, A.V. Shutov // Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series. – 2004. – Vol. 62. – P. 1–11.

- [114] Zhuravlev, V.G. On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling / V.G. Zhuravlev // Anal. Probab. Methods Number Theory. – 2007. – P. 240–254.
- [115] Zhuravlev, V. G. Bounded Remainder Polyhedra / V. G. Zhuravlev // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Vol. 280. – P. 71–90.
- [116] Zhuravlev, V. G. Simplex-karyon Algorithm for Expansion in Multidimensional Continued Fractions / V. G. Zhuravlev // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2017. – Vol. 299. – P. 283–303.

Предметный указатель

- *-иррациональная точка, 240
- 1-метрика, 60
- 1-норма матрицы, 239
- 2-метрика, 61
- CU -базис, 213
- CU -суперсимплекс, 213
- G_0 — подгруппа, 164
- $S' = S'_{\alpha'}$ — сдвиг тора на вектор α' , 19
- $S = S_\alpha$ — сдвиг тора на вектор α , 20
- S_{d+1} — группа перестановок из $d+1$ элемента, 44
- $T = T(v)$ — развертка звезды v , 22
- $T^{(n)}$ -норма, 9, 66
- $T^{[\sigma]_n}$ — ядро разбиения тора \mathbb{T}^d , 9
- $[\sigma]_n$ -дифференцируемый симплекс, 222
- $[\sigma]_n$ -производные, 222
- Σ — сочетания σ из двух элементов, 15
- $\Xi = \Sigma^\mathbb{N}$ — бесконечные последовательности дифференцирований, 222
- α -крона, 153
- α -ствол, 147
- κ -проекция, 213
- κ_0 -проекция, 213
- s -норма, 197
- s_n -норма, 210
- \mathcal{D} — расширенная полугруппа, 51
- \mathcal{D}_δ -полугруппа симплекса Δ , 51
- \mathcal{G} -алгоритмы, 12
- \mathcal{L} -различимое подмножество, 20
- \mathcal{SK} -алгоритмы, 12, 225
- \mathcal{SM} -алгоритм, 12, 163, 182
- $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ — индуцированное разбиение тора, 22
- \mathfrak{D}_s — полугруппа обратных возвратных отображений, 149
- $Kr = Kr(\mathcal{T})$ — ядро разбиения, 22
- $Orb^+(T_k)$ — орбита множества T_k , 21
- $Orb(T_k)$ — полная орбита множества T_k , 21
- макс-норма матрицы, 61, 91
- рг-проекция, 44
- рг₀-проекция, 213
- ω -шаговая стратегия, 228
- σ -производная звезда, 17, 72
- σ -производный базис, 216
- Δ -многочлен, 81, 107
- Δ_{irr} -многочлен, 81, 107
- Δ_{irr} -условие, 81
- \triangleleft — знак вхождения в разбиение, 30
- $\widehat{\mathcal{D}}$ -полугруппа унимодулярных матриц, 82
- \wp -экспонента, 227
- \wp -стратегия, 226
- $\wp(r)$ — целевая функция, 226
- \wp^ω -стратегия, 228
- d -мерные подходящие дроби, 11
- i -алгоритм, 19, 20
- аффинные повороты, 76
- аффинный изоморфизм, 58
- алгебраическая точка, 228
- алгоритм Монкемайера, 235
- ангармоническая группа, 76
- базисный симплекс, 165, 178
- базисный треугольник, 76
- биквадратичные иррациональности, 230
- брюс, 38
- целевая функция, 226
- центр нормированной звезды, 78
- центральная проекция, 217

- центрированный симплекс, 219
центрированный унимодулярный базис, 213
центрированный унимодулярный суперсимплекс, 213
цепь кубов, 37
цвет точки, 19
числа Фибоначчи, 139
числа Литтлвуда-Пизо, 138
числа Пизо, 125, 126
числа Пизо-Виджаярагхавана, 126
числа Трибоначчи, 139
дифференцирование симплекса, 219
динамические звезды, 56
диофантина экспонента, 207, 227
допустимая матрица, 178
допустимые степени, 180
дроби Фарея, 163
дробно-линейные преобразования, 47, 78
единица Рози, 99
единицы Пизо, 166
единицы алгебраических полей, 81, 107
единичный симплекс, 164
евклидова метрика, 61
элементарные возвратные матрицы, 82
фактор-автоморфности, 48, 84, 250
формула коммутирования, 72
фрейм разложения, 83
геометрический смысл дифференцирований, 216, 219
гиперплоскость Фарея, 217
группа аффинных симметрий, 44
группа единиц, 166
группа унимодулярных матриц, 168
характеристический многочлен, 94, 118
характеристическое уравнение, 55
индукционное отображение, 22, 74
индукционное разбиение пространства, 30
индукционное разбиение тора, 22, 74
инварианты кроны, 154
инверсный многочлен, 126
иррациональная точка, 53, 81, 200
иррациональный вектор, 21, 74, 200
калибровочная матрица, 58, 89, 126
калибровочный алгоритм, 12
калибровочный многочлен, 127
критерий вложимости развертки тора, 22
критерий звезды, 16
крона (сома), 153
кубические единицы, 81
кубические иррациональности, 231
квадратная решетка, 73
локализованная единица Пизо, 205, 255
локализованная матрица Пизо, 205
локальная φ -экспонента, 228
локальные стратегии, 226, 228
локальное окружение, 30
максимальный d -ранг, 238
максимальный ранг, 238
матрица Фробениуса, 82, 168
матрица Пизо, 162, 170
матрица перехода, 169
матрица представления, 168
матрица системы форм, 238
матрицы симметрий треугольника, 80
матрицы возвратных отображений, 48, 78
медианная гиперплоскость, 45
минимальный многочлен, 168
минимальный симплекс, 163, 174, 220
минимальный вектор, 97, 121, 151
многочлены Литтлвуда, 138
многочлены Пизо, 125
многомерные цепные дроби, 163
многомерные дроби Фарея, 163
многоодношаговая стратегия, 227
множества ограниченного остатка, 12, 41
модуль, 167
модульная матрица, 169
модульная матрица Пизо, 170
начальная звезда, 56
наилучшее ядерное приближение, 66, 99, 123
настраиваемые алгоритмы, 12, 161

- настройка \mathcal{SM} -алгоритма, 188
 неподвижные точки, 54, 84
 невырожденная звезда, 17, 72
 невырожденное множество векторов, 17
 норма алгебраического числа, 204
 норма единицы, 168
 нормированная звезда, 47, 78
 нормированные дифференцирования звезд, 45, 77
 обычные подходящие дроби, 7
 обратные возвратные отображения, 49, 79
 однородные части матриц, 51
 одношаговая стратегия, 227
 орбита множества, 21
 орбитное разбиение, 21
 осевые симметрии, 76
 основные серии, 82
 остов разложения, 83, 109
 отображение Фарея, 48, 190
 отображение Пуанкаре, 22
 отображение первого возвращения, 22
 отрезки Фарея, 163
 отрезок дифференцирований, 222
 параллелепипеды, 19
 параллелоэдр, 19
 параллелоэдр Вороного, 19
 параллелоэдр звезды, 20
 перекладывающаяся развертка, 18
 перекладывающаяся развертка тора, 72
 перестановочная матрица, 63
 период звезды, 58, 130
 периодичная звезда, 58
 периодичность
 подходящих дробей, 192
 первообразная точка, 149
 плохо приближающиеся числа, 197
 подходящие дроби, 7, 99, 123, 162, 191
 показатель унимодулярной
 матрицы, 170
 покрытие области, 33
 полиэдральная гиперповерхность, 32
 полиэдральная норма, 197
 полиэдральный диск, 33
 полная орбита, 21
 полная решетка, 18
 полная система основных единиц, 166
 полная точка, 161
 полный модуль, 168
 полный набор чисел, 169
 порядковая матрица, 126
 порядковая матрица звезды, 64, 93
 порядок луча, 60, 90
 порядок орбиты, 22, 75
 порядок звезды, 60, 90
 последовательности Фибоначчи, 101
 последовательности Трибоначчи, 100
 правильный симплекс, 44
 принцип Дирихле, 197
 приведенная матрица, 239
 приведенная система линейных форм, 239
 приведенная звезда, 18, 25
 производная звезда, 17, 58
 промежуточные подходящие дроби, 7
 пространство Фарея, 217
 радиус параллелоэдра, 61
 радиус симплекса, 223
 радиус звезды, 223
 ранг группы единиц, 166
 ранг вектора, 200
 разбиения Рози, 41, 99
 развертка тора, 18, 72
 рекуррентные последовательности, 94, 118
 ромбическая норма, 99
 ромбододекаэдр Федорова, 19
 сбалансированные слова, 41
 сдвиг тора, 19
 семейство алгоритмов, 192
 сети Фарея, 235
 сильная сходимость, 12
 симметрии базисного симплекса, 50
 симметрии правильного симплекса, 44
 симплекс, 43
 симплекс звезды, 223
 симплекс-модульный алгоритм, 12, 182
 симплекс-ядерный алгоритм, 12, 225
 симплексы Пизо, 180

- симплексиальная s_n -норма, 210
слабая сходимость, 12
собственные значения, 54, 84
согласованное множество векторов, 16
специализации дифференцирований, 9
специализации матриц, 46
специализация преобразования, 51
специализация
 \mathcal{SM} -алгоритма, 189
спектральный радиус, 60, 91
степень алгебраического поля, 166
степень поля, 87, 112
степень точки, 55, 87, 112, 169
ствол точки, 147
сумма Фарея, 177
суперпространство, 213
суперсимплекс, 212
свободные алгоритмы, 12
свойство минимальности, 9, 66, 99, 123,
 163
свойство минимальности симплекса, 210
шестиугольная развертка тора, 73
теорема Дирихле, 197
теорема Гамильтона-Кэли, 94, 118, 181
теорема Лагранжа, 67, 190
теория сложности, 41
точка Фарея, 8, 177, 182
трансцендентные точки, 229
триангулляции Фарея, 235
тройные звезды, 71
унимодулярная матрица, 211
унимодулярный базис, 165, 211
унимодулярный симплекс, 165
урезанная φ -экспонента, 229
уровень рациональной
 матрицы, 170
уровень точки, 38
вектор системы форм, 240
векторы перекладывания, 19, 21
верхнее суперпространство, 217
ветви точки, 149
вкладывающаяся в тор развертка, 20,
 74
вкладывающаяся в тор звезда, 23
вмещающее пространство, 20, 73
возвратные матрицы, 81, 82
возвратные отображения, 48, 78
ядерная гиперплоскость, 213
ядерные цепные дроби, 11, 66, 99, 123
ядерные нормы, 66, 131
ядерные разбиения, 10, 131
ядерный алгоритм, 11
ядерное пространство, 213
ядро, 9
ядро (karyon) разбиения, 11, 22, 74
золотое сечение, 138
звезда, 16, 71

Оглавление

Перечень стандартных обозначений	3
Введение	5
I Ядерные разбиения тора	13
1 Дифференцирование ядерных разбиений тора	15
1.1 Согласованные множества векторов и их производные	15
1.1.1 Согласованные множества векторов.	15
1.1.2 Производные звезды.	16
1.1.3 Инвариантность относительно афинных отображений.	18
1.2 Индуцированные разбиения тора	18
1.2.1 Перекладывающиеся развертки тора.	18
1.2.2 Перекладывающиеся параллелоэдры и их деформации.	19
1.2.3 Вмещающее пространство.	20
1.2.4 Вкладывающиеся в тор развертки.	20
1.2.5 Индуцированные отображения и ядро разбиения.	22
1.2.6 Критерий вложимости развертки тора.	22
1.3 Производные разбиения тора	23
1.3.1 Производные вкладывающихся векторов	23
1.3.2 Инвариантность вложений звезд.	24
1.3.3 Приведенные звезды.	24
1.4 Структура точечных орбит	26
1.4.1 Структура производной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$	26
1.4.2 Структура начальной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$	27
1.4.3 Структура новой части орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$	28
1.5 Разбиение пространства и полиэдральная гиперповерхность	30
1.5.1 Индуцированное разбиение пространства.	30
1.5.2 Полиэдральная поверхность.	31
1.5.3 Покрытие области T'_-	32
1.6 Доказательство теоремы о вложении	35
1.6.1 Точки орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$	35
1.6.2 Точки орбиты $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$	35
1.6.3 Точки орбиты $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$	36

1.6.4	Окончание доказательства теоремы 1.3.2.	40
1.7	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	41
2	Многомерные приближения алгебраических чисел	43
2.1	Возвратные отображения	43
2.1.1	Базисный симплекс и его симметрии.	43
2.1.2	Разбиения базисного симплекса.	45
2.1.3	Нормированные дифференцирования звезд.	45
2.1.4	Возвратные отображения.	48
2.2	Дробно-линейные и проективные преобразования	48
2.2.1	Матрицы возвратных отображений.	48
2.2.2	Обратные возвратные отображения.	49
2.2.3	Матрицы симметрий базисного симплекса.	50
2.2.4	Полугруппа \mathcal{D} .	51
2.2.5	Связь между дробно-линейными и проективными преобразованиями.	52
2.2.6	Иррациональные точки.	53
2.3	Периодические точки	54
2.3.1	Неподвижные точки и собственные значения.	54
2.3.2	Степень неподвижной точки.	55
2.4	Преобразования и нормирования звезды	56
2.4.1	Общий случай.	56
2.4.2	Периодический случай.	57
2.5	Приближения на торе	59
2.5.1	Генерации вкладывающихся разверток.	59
2.5.2	Спектральный радиус.	60
2.5.3	Радиусы и объемы производных параллелоэдров.	61
2.5.4	Порядковые матрицы.	63
2.5.5	Основная теорема.	65
2.5.6	Минимальное свойство и ядерные нормы.	66
2.6	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	67
II	Ядерные разложения чисел Пизо	69
3	Периодические разложения кубических иррациональностей	71
3.1	Тройные звезды и их производные	71
3.1.1	Тройные звезды.	71
3.1.2	Производные звезды.	72
3.2	Индуктированные разбиения тора	72
3.2.1	Перекладывающиеся развертки тора.	72
3.2.2	Шестиугольная развертка тора.	73
3.2.3	Вмещающее пространство.	73
3.2.4	Вкладывающиеся в тор развертки.	74
3.2.5	Индуктированные отображения и ядро разбиения.	74

3.2.6	Критерий вложимости шестиугольной развертки тора	75
3.2.7	Вложения в тор производных звезд	75
3.3	Возвратные отображения	76
3.3.1	Базисный треугольник	76
3.3.2	Разбиения треугольника	76
3.3.3	Нормированные дифференцирования звезд	77
3.3.4	Возвратные отображения	78
3.3.5	Матрицы возвратных отображений	78
3.3.6	Обратные возвратные отображения	79
3.3.7	Матрицы симметрий треугольника	80
3.3.8	Иррациональные точки	81
3.4	Разложение в произведение элементарных возвратных матриц	81
3.4.1	Кубические единицы	81
3.4.2	Возвратные матрицы для кубических единиц	81
3.4.3	Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$	82
3.4.4	Серия $a_0 = -1$	82
3.4.5	Серия $a_0 = 1$	83
3.5	Неподвижные точки возвратных матриц	83
3.5.1	Соответствие и специализации	83
3.5.2	Неподвижные точки и собственные значения	84
3.6	Дифференцирования и нормирования звезды	88
3.6.1	Коммутативная диаграмма	88
3.6.2	Периодические звезды	89
3.6.3	Калибровочная матрица	89
3.7	Приближения на торе	90
3.7.1	Генерации вкладывающихся разверток	90
3.7.2	Спектральный радиус	91
3.7.3	Радиусы и площади производных шестиугольников	91
3.7.4	Порядковые матрицы	92
3.7.5	Рекуррентные последовательности	94
3.7.6	Основная теорема (общий случай)	95
3.8	Двумерная ядерная аппроксимация	96
3.8.1	Возвратные матрицы для кубических единиц и рекуррентные последовательности	96
3.8.2	Основная теорема для кубических единиц	97
3.9	Числовые примеры	99
3.9.1	Кубическая единица Рози	99
3.9.2	Кубические корни	101
3.10	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	104
4	Периодические разложения единиц алгебраических полей	107
4.1	Возвратные матрицы	107
4.1.1	Единицы алгебраических полей	107
4.1.2	Возвратные матрицы для алгебраических единиц	108
4.1.3	Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$	108

4.1.4	Разложение в произведение элементарных возвратных матриц.	109
4.2	Неподвижные точки возвратных матриц	111
4.2.1	Соответствие и специализации.	111
4.2.2	Неподвижные точки.	112
4.3	Порядковые и калибровочные матрицы	113
4.3.1	Порядковые матрицы для алгебраических единиц.	113
4.3.2	Калибровочные матрицы для алгебраических единиц.	115
4.4	Рекуррентные последовательности	118
4.5	Многомерная ядерная аппроксимация	119
4.5.1	Основная теорема (общий случай).	119
4.5.2	Возвратные матрицы для алгебраических единиц и рекуррентные последовательности.	120
4.5.3	Основная теорема для алгебраических единиц.	122
4.6	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	124
5	Ядерные разложения чисел Пизо в цепные дроби	125
5.1	Числа и многочлены Пизо	125
5.1.1	Единицы алгебраических полей.	125
5.1.2	Числа Пизо-Виджаярагхавана.	126
5.2	Калибровочный и инверсный многочлены	126
5.2.1	Порядковая и калибровочная матрицы.	126
5.2.2	Калибровочный многочлен.	127
5.3	Характеристический многочлен порядковой матрицы	128
5.3.1	Характеристический многочлен.	128
5.3.2	Связь с инверсным многочленом.	129
5.4	Дифференцирования звезд и торические ядерные разбиения	130
5.4.1	Периодические звезды.	130
5.4.2	Ядерные разбиения.	131
5.5	Основная теорема для алгебраических единиц	131
5.5.1	Рекуррентные последовательности.	131
5.5.2	Основная теорема.	132
5.6	Константы	133
5.6.1	Константа $c_1(\mathbf{A})$	133
5.6.2	Константа $c_1^{(0)}$	134
5.7	Кубические числа Пизо	135
5.7.1	Комплексный случай.	135
5.7.2	Вещественный случай.	137
5.8	Числа Литтлвуда-Пизо	138
5.8.1	Многочлены Литтлвуда.	138
5.8.2	Числа Фибоначчи и их многомерные обобщения.	139
5.8.3	Спектральный радиус для чисел Литтлвуда-Пизо.	140
5.8.4	Аппроксимация чисел Литтлвуда-Пизо.	141
5.9	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	142

6 Унимодулярная инвариантность ядерных разложений	145
6.1 Расширение единиц алгебраических полей	145
6.2 Стволовые точки	146
6.2.1 Циклические множества	146
6.2.2 Циклические сдвиги	147
6.3 Первообразные точки	149
6.3.1 Ветви: \mathfrak{D}_s -множество	149
6.3.2 Расширенная диаграмма	149
6.3.3 Аппроксимация первообразных точек	150
6.4 Крона	153
6.4.1 Линейные унимодулярные преобразования	153
6.4.2 Свойства кроны	154
6.4.3 Аппроксимация точек кроны	154
6.5 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	157

III Алгоритмы **159**

7 Симплекс-модульный алгоритм	161
7.1 Введение	161
7.1.1 Полные точки	161
7.1.2 Матрицы Пизо	162
7.1.3 Подходящие дроби и рекуррентные соотношения	162
7.1.4 Основной результат	162
7.1.5 Алгоритм разложения в многомерные цепные дроби	163
7.2 Унимодулярный базисный симплекс	164
7.2.1 Линейные унимодулярные преобразования	164
7.2.2 Унимодулярный симплекс	164
7.3 Единицы алгебраических полей	166
7.3.1 Основные единицы	166
7.3.2 Единицы Пизо	166
7.4 Модульные матрицы Пизо	167
7.4.1 Модули	167
7.4.2 Матрицы Фробениуса	168
7.4.3 Матрица перехода T	169
7.4.4 Модульные матрицы	169
7.4.5 Унимодулярные модульные матрицы	170
7.5 Аппроксимация	170
7.5.1 Разложение модульной матрицы Пизо	170
7.5.2 Линейные отображения модульной матрицей Пизо	171
7.5.3 Дробно-линейные преобразования	172
7.5.4 Оценка расстояния	172
7.6 Минимальные симплексы	174
7.6.1 Минимальные рациональные симплексы	174
7.6.2 Точка Фарея	176

7.6.3	Унимодулярные преобразования симплексов	177
7.7	Симплексы Пизо	178
7.7.1	Базисный симплекс	178
7.7.2	Симплексы Пизо	179
7.7.3	Рекуррентные последовательности	180
7.8	Основные теоремы	181
7.8.1	Геометрическая теорема	182
7.8.2	Аналитическая теорема	183
7.9	Числовой пример	184
7.9.1	Выбор базового симплекса	184
7.9.2	Единица Пизо поля F	185
7.9.3	Матрица перехода T	186
7.9.4	Матрица Пизо P_α	186
7.9.5	Рекуррентные последовательности	187
7.9.6	Аппроксимация корней четвертой степени	187
7.10	Параметры и настройка симплекс-модульного алгоритма	188
7.10.1	Настройка \mathcal{SM} -алгоритма	188
7.10.2	Выбор параметров настройки	189
7.11	Многомерное обобщение теоремы Лагранжа	190
7.11.1	Теорема Лагранжа: достаточное условие	190
7.11.2	Теорема Лагранжа: необходимое условие	191
7.12	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	192
8	Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения	195
8.1	Введение	195
8.1.1	Симплекс-модулярный алгоритм	195
8.1.2	Основной результат	196
8.2	Приведение векторов к каноническому виду	197
8.2.1	Унимодулярные матрицы	197
8.2.2	Ранг вектора и его каноническое представление	199
8.3	Единицы алгебраических полей	202
8.3.1	Локализованные единицы Пизо	202
8.3.2	Модульная матрица Пизо	205
8.4	Диофанты экспонента	205
8.4.1	Асимптотические разложения для знаменателей	205
8.4.2	Основная теорема	206
8.4.3	Диофанты экспонента алгебраических точек	207
8.5	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	208
9	Симплекс-ядерный алгоритм	209
9.1	Введение	209
9.2	Симплексы и суперсимплексы	211
9.2.1	Унимодулярные симплексы	211
9.2.2	Базисный симплекс	212

9.2.3	Суперсимплекс.	212
9.3	Дифференцирования центрированных унимодулярных базисов . .	213
9.3.1	Центрированный унимодулярный базис.	213
9.3.2	Пространства.	213
9.3.3	Проекции.	213
9.3.4	Центрированные унимодулярные базисы и звезды.	214
9.3.5	Дифференцирования центрированных базисов.	215
9.4	Пространства Фарея	217
9.4.1	Пространство и гиперплоскость Фарея.	217
9.4.2	Сумма Фарея точек.	218
9.5	Дифференцирования центрированных симплексов	218
9.5.1	Центрированные унимодулярные симплексы.	218
9.5.2	Дифференцирования симплексов.	219
9.6	Минимальные симплексы	219
9.6.1	Минимальные рациональные симплексы.	219
9.6.2	Производные центрированных минимальных симплексов. .	220
9.7	Аппроксимация	221
9.7.1	Связь между ядерном пространством и пространством Фарея.	221
9.7.2	Бесконечные итерации дифференцирований.	222
9.7.3	Радиус производных звезд и симплексов.	223
9.7.4	Углы между векторами CU -базисов произвольного порядка n	223
9.7.5	Точки Фарея производных симплексов.	225
9.7.6	Основная теорема об аппроксимации.	225
9.8	Локальные стратегии	226
9.8.1	Целевая функция.	226
9.8.2	Диофантовы экспоненты.	226
9.8.3	Многошаговые стратегии.	227
9.9	Числовые примеры	228
9.9.1	Степень точки.	228
9.9.2	Локальные и урезанные диофантовы экспоненты.	228
9.9.3	Трансцендентные числа.	229
9.9.4	Биквадратичные иррациональности	230
9.9.5	Кубические иррациональности.	231
9.9.6	Сравнение различных экспонент.	232
9.9.7	Последовательность кубических корней.	233
9.10	БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	235
10	Дробно-линейная инвариантность симплекс-ядерного алгоритма	237
10.1	Введение	237
10.2	Системы линейных форм	238
10.2.1	Приведенные системы линейных форм.	238
10.2.2	Связь между системами линейных форм.	239

10.2.3 Условия на линейные формы.	240
10.3 Дробно-линейные преобразования	240
10.3.1 Вектор системы линейных форм.	240
10.3.2 Унимодулярные преобразования.	241
10.3.3 Дробно-линейные преобразования.	242
10.3.4 Биекция: системы линейных форм (матрицы) — векторы.	242
10.4 Дробно-линейные преобразования симплексов и точек Фарея	244
10.4.1 Точка и ее дробно-линейный образ.	244
10.4.2 Коммутативная диаграмма.	245
10.4.3 Унимодулярные преобразования векторов Фарея.	246
10.5 Основные теоремы	248
10.6 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	251
11 Дробно-линейная инвариантность симплекс-модульного алгоритма	253
11.1 Введение	253
11.2 Единицы алгебраических полей	254
11.2.1 Локализованные единицы Пизо.	254
11.3 Дробно-линейные преобразования и точки Фарея	255
11.3.1 Рекуррентные последовательности.	255
11.3.2 Точки Фарея.	257
11.4 Основная теорема	257
11.5 БИБЛИОГРАФИЯ И КОММЕНТАРИИ	259
Литература	261
Предметный указатель	274

Научное издание

ЖУРАВЛЕВ Владимир Георгиевич

ЯДЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Монография

Подписано в печать

Формат 60 84/16. Усл. печ. л. . . . Тираж . . . экз

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
600000, Владимир, ул. Горького, 87