

МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕКЛАДЫВАНИЙ ТОРА

© В. Г. ЖУРАВЛЕВ

Рассматривается некоторый класс перекладываний \mathbb{S} двумерного тора \mathbb{T}^2 , получающихся возмущениями прямых произведений двух одномерных перекладываний отрезков. Приводится явная конструкция множеств ограниченного остатка относительно перекладываний \mathbb{S} . Для функций отклонений таких множеств доказываются точные границы и вычисляются их средние значения.

Введение

0.1. Перекладывания тора. Пусть на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ дано некоторое отображение

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathbb{T}^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbb{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + v(\mathbf{x}) \bmod \mathbb{Z}^2.$$

Отображение \mathbb{S} называется *трансляционным*, если множество

$$V = \{v(\mathbf{x}) \bmod \mathbb{Z}^2; \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2\}$$

содержит конечное число $s = \|V\|$ различных векторов по $\bmod \mathbb{Z}^2$. Так, если $s = 1$, то отображение $\mathbb{S} = \mathbb{S}_v$ будет обычным сдвигом (поворотом) тора \mathbb{T}^2 на какой-то фиксированный вектор $v \in \mathbb{T}^2$:

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{\mathbb{S}_v} \mathbb{T}^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbb{S}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + v \bmod \mathbb{Z}^2.$$

В общем случае трансляционного отображения \mathbb{S} тор \mathbb{T}^2 однозначно разбивается

$$\mathbb{T}^2 = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_{s-1} \tag{0.1}$$

на множества $\mathcal{T}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2; v(\mathbf{x}) = v_k\}$, где v_0, v_1, \dots, v_{s-1} — полный набор различных векторов из множества V . Если при этом окажется, что после действия отображения \mathbb{S} на множества \mathcal{T}_k из (0.1) их образы $\mathbb{S}(\mathcal{T}_k)$ снова разбивают тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}(\mathcal{T}_0) \sqcup \mathbb{S}(\mathcal{T}_1) \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}(\mathcal{T}_{s-1}), \tag{0.2}$$

Ключевые слова: перекладывания тора, множества ограниченного остатка на торе, многомерная теорема Гекке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00360.

то такое отображение \mathbb{S} называется *перекладыванием тора \mathbb{T}^2* . Условие (0.2) можно заменить равносильным требованием к трансляционному отображению \mathbb{S} быть биекцией тора \mathbb{T}^2 .

0.2. Множества ограниченного остатка. Выделим произвольное множество X на торе \mathbb{T}^2 и определим для него *функцию распределения*

$$\mathbf{r}_X(i, \mathbf{x}_0) = \#\{j; \mathbb{S}^j(\mathbf{x}_0) \in X; 0 \leq j < i\},$$

равную количеству точек $\mathbf{x}_j = \mathbb{S}^j(\mathbf{x}_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(\mathbf{x}_0, \mathbb{S})$, попавших в множество X . Здесь $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^2$ — начальная точка орбиты. Множество X называется *множеством ограниченного остатка*, кратко — *BR-множеством*, если найдется такое число $\mu(X) > 0$, что *функция отклонения*

$$\delta_X(i, \mathbf{x}_0) = \mathbf{r}_X(i, \mathbf{x}_0) - i\mu(X) \quad (0.3)$$

будет ограниченной

$$m \leq \delta_X(i, \mathbf{x}_0) \leq M \quad (0.4)$$

при всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где m и M — конечные границы.

0.3. Основные результаты. В настоящей работе рассматриваются перекладывания \mathbb{S} тора \mathbb{T}^2 , получающиеся возмущениями прямых произведений двух одномерных перекладываний. Для таких \mathbb{S} в теореме 5.1 доказаны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} m - x_0 &\leq \delta_{\mathbb{T}_0^2}(i, \mathbf{x}_0) \leq M - x_0, \\ x_0 - M &\leq \delta_{\mathbb{T}_1^2}(i, \mathbf{x}_0) \leq x_0 - m \end{aligned} \quad (0.5)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ Здесь в качестве $X \subset \mathbb{T}^2$ взяты множества ограниченного остатка \mathbb{T}_0^2 и \mathbb{T}_1^2 из некоторого разбиения тора

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2,$$

задаваемого перекладыванием \mathbb{S} , m и M — границы явно определяемой развертки тора $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^2$, x_0 — проекция начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^2$ на прямую \mathbb{R} . Если орбита $\text{Orb}(\mathbf{x}_0, \mathbb{S})$ всюду плотна на торе \mathbb{T}^2 , то границы для отклонений (0.5) будут точными.

При некоторых дополнительных ограничениях на перекладывание \mathbb{S} в теореме 7.1 вычислены средние значения $\langle \delta_{\mathbb{T}_0^2}(\mathbf{x}_0) \rangle$ и $\langle \delta_{\mathbb{T}_1^2}(\mathbf{x}_0) \rangle$ для отклонений из (0.3):

$$\langle \delta_{\mathbb{T}_0^2}(\mathbf{x}_0) \rangle = \int_{\widehat{T}} x d\mu(x) - x_0, \quad \langle \delta_{\mathbb{T}_1^2}(\mathbf{x}_0) \rangle = x_0 - \int_{\widehat{T}} x d\mu(x), \quad (0.6)$$

где $\mu(x)$ — инвариантная мера на развертке тора \widehat{T} .

0.4. История вопроса. Гекке [3] первым открыл интервалы ограниченного остатка в 1921 г. Орен [6] смог заменить их конечным объединением интервалов.

В 1954 г. Сюс [8] построил первое семейство BR -параллограммов. Лиарде [5] обнаружил возможность редукции BR -множеств к аналогичным множествам меньшей размерности. Это был важный шаг, так как он позволял строить BR -множества произвольной размерности D . Рози [7] и Ференци [4] связали BR -множества со свойствами соответствующего индуцированного отображения — отображения первого возвращения или отображения Пуанкаре. Идея Рози–Ференци была реализована в [11], где были доказаны неравенства вида (0.4) для множеств из двумерных торических разбиений Рози.

Глобальный подход к поиску BR -множеств был предложен автором в 2011 г. в работе [12], в которой вместо отдельных множеств $X \subset \mathbb{T}^D$ стали рассматриваться полные разбиения торов $\mathbb{T}^D = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_{s-1}$ на BR -множества X_0, X_1, \dots, X_{s-1} . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора \mathbb{T}^D в накрывающее пространство \mathbb{R}^D и вместо тора \mathbb{T}^D рассматривать его развертку $T^D \subset \mathbb{R}^D$. Такие развертки T^D были сконструированы в [13] с помощью операции вытягивания единичных кубов и метода сечений в [14]. В работе [12] впервые было получено многомерное обобщение теоремы Гекке о распределении дробных долей и вычислены средние значения для функций отклонения (0.6), а в [15] были построены непрерывные семейства BR -многогранников для произвольной размерности D . Среди них в размерностях 3 и 4 содержатся параллелоэдры Федорова [18] и Вороного [10].

§1. Перекладывающиеся множества

1.1. Трансляционное преобразование прямой. На множестве вещественных чисел \mathbb{R} зададим разбиение

$$R = R_0 \sqcup R_1 \tag{1.1}$$

на два полуинтервала $R_0 = [-\infty, \omega)$, $R_1 = [\omega, +\infty)$, где $\omega \in \mathbb{R}$ — произвольное сечение. С помощью разбиения (1.1) определим отображение

$$\mathbb{R} \xrightarrow{S_v} \mathbb{R} : S_v(x) = x + v(x), \tag{1.2}$$

где $v(x) = v_k$ для $x \in R_k$, $k = 0, 1$. Здесь v_0, v_1 — некоторые числа из \mathbb{R} . Отображение S_v называется *трансляционным*, поскольку оно любую точку $x \in \mathbb{R}$ переводит некоторым параллельным переносом (трансляцией) в ее образ $S_v(x) = x + v(x)$.

Обозначим через $I = [0, 1)$ единичный полуинтервал, и пусть $\alpha \in I$, $\alpha \neq 0$. В определениях (1.1) и (1.2) выберем

$$\omega = 1 - \alpha, \quad v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - 1. \quad (1.3)$$

При таких параметрах отображение S_v обладает свойством

$$S_v(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

т.е. \mathbb{R} является *стабилизатором* отображения S_v . Но если бесконечную прямую \mathbb{R} заменить произвольным конечным интервалом $\mathbb{R}_c = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq c\}$ при условии $c > 1$, то имеет место уже строгое включение

$$S_v(\mathbb{R}_c) \subset \mathbb{R}_c. \quad (1.4)$$

Поэтому S_v является *стягивающим* отображением на интервалах \mathbb{R}_c . Заметим, что оно не будет сжимающим отображением, поскольку расстояние между образами двух точек может как уменьшаться, так и оставаться неизменным.

Найдем аттрактор

$$\text{Att}_{S_v, c} = \bigcap_{1 \leq i < +\infty} S_v^i(\mathbb{R}_c)$$

отображения S_v на интервалах \mathbb{R}_c . Нетрудно увидеть, что аттрактор $\text{Att}_{S_v, c}$ не зависит от выбора параметра $c > 1$ и равен

$$\text{Att}_{S_v, c} = I. \quad (1.5)$$

Разобъем

$$T = T_0 \sqcup T_1 \quad (1.6)$$

единичный полуинтервал I на два полуинтервала $T_0 = [0, \omega)$, $T_1 = [\omega, 1)$. Тогда ограничение отображения S_v на множество $T \subset \mathbb{R}$ задает на нем взаимно однозначное отображение

$$S_v : T \xrightarrow{\sim} T, \quad (1.7)$$

представляющее собою *перекладывание* полуинтервалов T_0 и T_1 . Полуинтервал T — притягивающее множество, обладающее свойствами: 1) любая точка $x \in \mathbb{R}$ через конечное число шагов переводится отображением S_v в полуинтервал T и 2) далее согласно (1.6) остается в нем. В этом случае говорят, что такие отображения имеют *конечный тип*.

1.2. Перекладывание единичного полуинтервала. Пусть $\alpha' \in I$, $\alpha' \neq 0$. Выберем $\omega' = 1 - \alpha'$, $v'_0 = \alpha'$, $v'_1 = \alpha' - 1$, и пусть

$$T' = T'_0 \sqcup T'_1 \quad (1.8)$$

— разбиение I на два полуинтервала $T'_0 = [0, \omega')$, $T'_1 = [\omega', 1)$. Аналогично (1.2) зададим на T' отображение

$$T' \xrightarrow{S_{v'}} T' : S_{v'}(x') = x' + v'(x'), \quad (1.9)$$

где $v'(x') = v'_{k'}$ для $x' \in T'_{k'}$, $k' = 0, 1$. Из определений (1.8) и (1.9) следует, что $S_{v'}$ — перекладывание полуинтервалов T'_0 , T'_1 из T' и, значит, $S_{v'}$ — взаимно однозначное отображение.

Далее на *полосе*

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T' \quad (1.10)$$

мы намерены рассмотреть прямое произведение $S_v \times S_{v'}$ отображений S_v и $S_{v'}$. Для различения их области определения будем называть: прямую \mathbb{R} *базой*, а полуинтервал T' *слоем* полосы $\widehat{\mathbb{R}}$.

1.3. Склейка. В полосе (1.10) выделим прямоугольник

$$\widehat{W} = W \times T', \quad (1.11)$$

где $W = [w_0, w_1)$ — некоторый полуинтервал, содержащий точку ω . Пусть прямоугольник \widehat{W} разбит каким-то образом

$$\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1. \quad (1.12)$$

Прямоугольник $\widehat{W} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть *склейкой*, а разбиение (1.12) — *раскраской склейки*, указывающей на то, что точки из \widehat{W} имеют два цвета 0 и 1. Склейка \widehat{W} вместе с ее разбиением (1.12) будут выступать в роли *возмущения* для отображения прямого произведения $S_v \times S_{v'}$, которое будет рассмотрено в следующем пункте.

1.4. Трансляционное отображение $S_{\widehat{v}}$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Теперь мы определим на полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ отображение $S_v \times S_{v'}$. Нас будет интересовать не само это отображение, а некоторое его возмущение с помощью склейки \widehat{W} . С этой целью зададим *раскраску* полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{R} = \coprod_{k,k'} \widehat{R}_{k,k'}, \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{0,0} &= (R_0 \setminus W) \times T'_0 \cup (\widehat{W}_0 \cap \mathbb{R} \times T'_0), \\ \widehat{R}_{0,1} &= (R_0 \setminus W) \times T'_1 \cup (\widehat{W}_0 \cap \mathbb{R} \times T'_1), \\ \widehat{R}_{1,0} &= (R_1 \setminus W) \times T'_0 \cup (\widehat{W}_1 \cap \mathbb{R} \times T'_0), \\ \widehat{R}_{1,1} &= (R_1 \setminus W) \times T'_1 \cup (\widehat{W}_1 \cap \mathbb{R} \times T'_1).\end{aligned}$$

Используя разбиение (1.13), определим на полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ отображение

$$S_{\widehat{v}}(\widehat{x}) = \widehat{x} + \widehat{v}(\widehat{x}), \quad (1.14)$$

где $\widehat{v}(\widehat{x}) = \widehat{v}_{k,k'}$ для $\widehat{x} \in \widehat{R}_{k,k'}$. Здесь векторы сдвигов $\widehat{v}_{k,k'} = (v_k, v'_{k'})$ имеют координаты, определенные в (1.3) и (1.9). Из определения следует замкнутость

$$S_{\widehat{v}} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}} \quad (1.15)$$

полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ относительно отображения (1.14). Так же, как и отображение S_v из (1.2), отображение $S_{\widehat{v}}$ называется *трансляционным* и оно снова является стягивающим. В данном случае отображение $S_{\widehat{v}}$ стягивает

$$\bigcap_{1 \leq i < +\infty} S_{\widehat{v}}^i(\widehat{\mathbb{R}}_c) \subset \widehat{W}_v \quad (1.16)$$

любой прямоугольник $\widehat{\mathbb{R}}_c = \mathbb{R}_c \times I$ с параметром (см. (1.4))

$$c > \max\{w_1 + v_0, |w_0 + v_1|\} \quad (1.17)$$

в прямоугольник

$$\widehat{W}_v = (\widehat{W} + v_0 \cdot I) \cup (\widehat{W} + v_1 \cdot I), \quad (1.18)$$

где $\widehat{W} + v_k \cdot I$ обозначает сумму Минковского двух множеств \widehat{W} и $v_k \cdot I = \{tv_k; t \in I\}$. Это значит, что любая точка $\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}$ через конечное число шагов переводится отображением $S_{\widehat{v}}$ в прямоугольник \widehat{W}_v . При этом сам прямоугольник \widehat{W}_v замкнут $S_{\widehat{v}} : \widehat{W}_v \longrightarrow \widehat{W}_v$ относительно данного отображения, но не является его стабилизатором, поскольку имеет место строгое включение $S_{\widehat{v}}(\widehat{W}_v) \subset \widehat{W}_v$.

Найти в двумерном случае *стабилизатор*

$$\widehat{T} = \bigcap_{1 \leq i < +\infty} S_{\widehat{v}}^i(\widehat{\mathbb{R}}_c) \quad (1.19)$$

— задача более трудная по сравнению с аналогичной одномерной задачей из п. 1.1. Более того, в случае произвольной склейки \widehat{W} привести явное геометрическое описание стабилизатора \widehat{T} не представляется возможным. Наиболее простое устройство стабилизатор \widehat{T} имеет для склеек \widehat{W} малой ширины.

1.5. Стабилизатор отображения $S_{\hat{v}}$. Выделим в прямоугольнике \widehat{W}_v следующее подмножество

$$\widehat{T} = S_{\hat{v}}(\widehat{R}_0) \cap S_{\hat{v}}(\widehat{R}_1), \quad (1.20)$$

где

$$\widehat{R}_0 = \coprod_{k'} \widehat{R}_{0,k'}, \quad \widehat{R}_1 = \coprod_{k'} \widehat{R}_{1,k'}.$$

Заметим, что каждое \widehat{R}_k — в точности подмножество из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, имеющее k -цвет. Перенесем разбиение полосы (1.13) на множество $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{T} = \coprod_{k,k'} \widehat{T}_{k,k'}, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{k,k'} &= \widehat{R}_{k,k'} \cap \widehat{T} \subset \widehat{T} \\ &\text{— } (k, k')\text{-области из множества } \widehat{T}. \end{aligned}$$

Предложение 1.1. Пусть $S_{\hat{v}}$ — отображение (1.14) и $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ — подмножество, определенное в (1.20). Предположим, что выполнено условие

$$|W| < \min\{|v_0|, |v_1|\}, \quad (1.22)$$

где $|W|$ — длина интервала W из (1.11). Тогда \widehat{T} замкнуто относительно отображения $S_{\hat{v}}$:

$$S_{\hat{v}} : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T}. \quad (1.23)$$

Доказательство. Разобьем

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1 \quad (1.24)$$

множество (1.21) на две области

$$\widehat{T}_0 = \coprod_{k'} \widehat{T}_{0,k'}, \quad \widehat{T}_1 = \coprod_{k'} \widehat{T}_{1,k'}, \quad (1.25)$$

окрашенные в 0- и 1-цвет соответственно. Кроме этого, разобьем множество \widehat{T} еще одним способом

$$\widehat{T} = \widehat{T}_l \sqcup \widehat{T}_c \sqcup \widehat{T}_r \quad (1.26)$$

на области

$$\begin{aligned} \widehat{T}_l &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_1, w_1 + v_1] \times T'), \\ \widehat{T}_c &= [w_1 + v_1, w_0 + v_0] \times T', \\ \widehat{T}_r &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_0, w_1 + v_0] \times T'), \end{aligned} \quad (1.27)$$

из которых центральная область \widehat{T}_c представляет собою прямоугольник, не зависящий от раскраски (возмущения) (1.12) склейки \widehat{W} . Имеются в виду размеры и положение прямоугольника \widehat{T}_c , хотя его раскраска, конечно же, будет зависеть от (1.12).

Пусть \hat{x} — произвольная точка из \hat{T} и пусть для определенности \hat{x} принадлежит области \hat{T}_0 .

Случай 1. Пусть \hat{x} принадлежит области \hat{T}_l из (1.26). Тогда $S_{\hat{v}}(\hat{x}) = \hat{x} + \hat{v}_{(0,*)}$ и, следовательно, $S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in \hat{T}_c$ в силу условия (1.22). Так как $\hat{T}_c \subset \hat{T}$, то $S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in \hat{T}$, а значит,

$$S_{\hat{v}}(\hat{T}_l) \subset \hat{T}, \quad (1.28)$$

и замкнутость (1.23) в этом случае доказана.

Случай 2. Пусть теперь \hat{x} принадлежит области \hat{T}_c из (1.26). Поскольку по условию $\hat{x} \in \hat{T}_0$, то отсюда очевидно следует $S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in S_{\hat{v}}(\hat{T}_0)$. Но согласно (1.20) выполняется включение $S_{\hat{v}}(\hat{T}_0) \subset S_{\hat{v}}(\hat{R}_0)$, и мы получаем

$$S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in S_{\hat{v}}(\hat{R}_0). \quad (1.29)$$

Теперь, чтобы доказать замкнутость (1.23), нужно ввиду определения (1.20) проверить еще выполнимость включения

$$S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in S_{\hat{v}}(\hat{R}_1). \quad (1.30)$$

С этой целью воспользуемся бесконечной вправо полосой

$$\hat{R}(w_1 + v_1) = \{\hat{x} = (x, x') \in \hat{R}; x \in [w_1 + v_1, +\infty)\}. \quad (1.31)$$

Заметим, что

$$S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in \hat{R}(w_1 + v_1), \quad (1.32)$$

так как по определению (1.27) имеем $\hat{T}_c \subset \hat{R}(w_1 + v_1)$ и $S_{\hat{v}}(\hat{x}) = \hat{x} + \hat{v}_{(0,*)}$ — сдвиг вправо. Но в силу (1.31) получаем

$$\hat{R}(w_1 + v_1) \subset S_{\hat{v}}(\hat{R}_1) \quad (1.33)$$

и тогда из (1.32) и (1.33) выводим нужное включение (1.30), из которого и ранее полученного включения (1.29) ввиду (1.20) вытекает $S_{\hat{v}}(\hat{x}) \in \hat{T}$. Поэтому имеем включение

$$S_{\hat{v}}(\hat{T}_c) \subset \hat{T}, \quad (1.34)$$

и тем самым замкнутость (1.23) в случае 2 снова доказана.

Из (1.28) и (1.34) следует включение

$$S_{\hat{v}}(\hat{T}_0) \subset \hat{T}.$$

Случай принадлежности \hat{x} множеству \hat{T}_1 из разбиения (1.25) симметричен только что доказанному. Отсюда получаем доказательство замкнутости (1.23) отображения $S_{\hat{v}}$ на всем множестве \hat{T} . \square

Замечание 1.1. Из доказательства предложения 1.1 вытекают равенства

$$\widehat{T} = S_{\widehat{v}}(\widehat{T}), \quad \widehat{T} = S_{\widehat{v}}(\widehat{W}_v). \quad (1.35)$$

Из первого равенства (1.35) следует, что множество \widehat{T} является *стабилизатором* относительно трансляционного отображения $S_{\widehat{v}}$, а из второго равенства и включения (1.16) видим, что отображение $S_{\widehat{v}}$ имеет конечный тип.

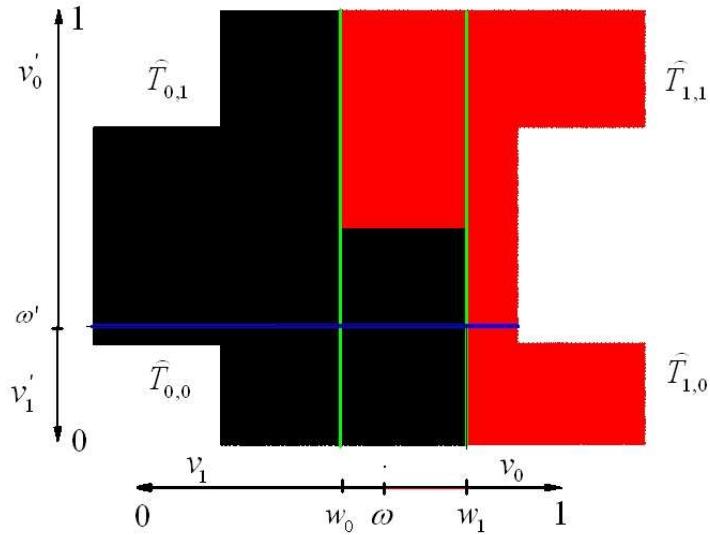


Рис. 1.1. Стабилизатор \widehat{T} трансляционного отображения $S_{\widehat{v}}$.

Простейший стабилизатор \widehat{T} изображен на рис. 1.1. Здесь склейка $\widehat{W} = [w_0, w_1] \times [0, 1]$ разбита по горизонтали $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ на две полосы \widehat{W}_0 и \widehat{W}_1 равной высоты. Действие отображения $S_{\widehat{v}}$ на множестве \widehat{T} сводится к перекладыванию четырех связных многоугольных областей $\widehat{R}_{k,k'}$, определенных в (1.13): областей слева $\widehat{R}_{0,0}$ и $\widehat{R}_{0,1}$, разделенных горизонталью ω' , и аналогично другого цвета областей справа $\widehat{R}_{1,0}$, $\widehat{R}_{1,1}$. На рис. 1.2 показано расположение областей $\widehat{R}_{k,k'}$ после их перекладывания. При этом они снова образуют исходное множество \widehat{T} . Отсюда непосредственно вытекает замкнутость стабилизатора $\widehat{T} = S_{\widehat{v}}(\widehat{T})$ относительно отображения $S_{\widehat{v}}$.

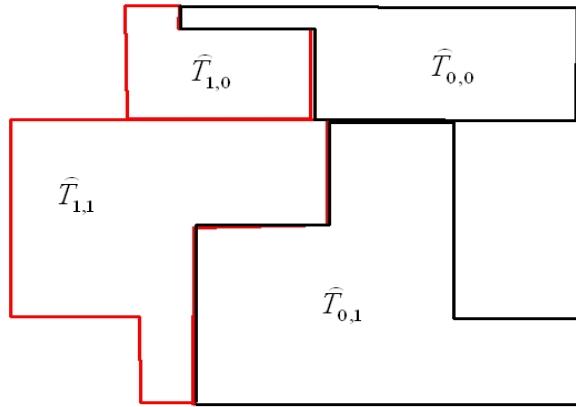


Рис. 1.2. Перекладывание стабилизатора \hat{T} под действием отображения $S_{\hat{v}}$.

Замечание 1.2. При доказательстве равенства (1.37) использовано ограничение (1.22) из предложения 1.1 на ширину полосы \widehat{W} . При ослаблении ограничения (1.22), т.е. при условии, когда разрешить расти ширине полосы \widehat{W} , приведенная конструкция (1.20) стабилизатора \hat{T} уже не работает.

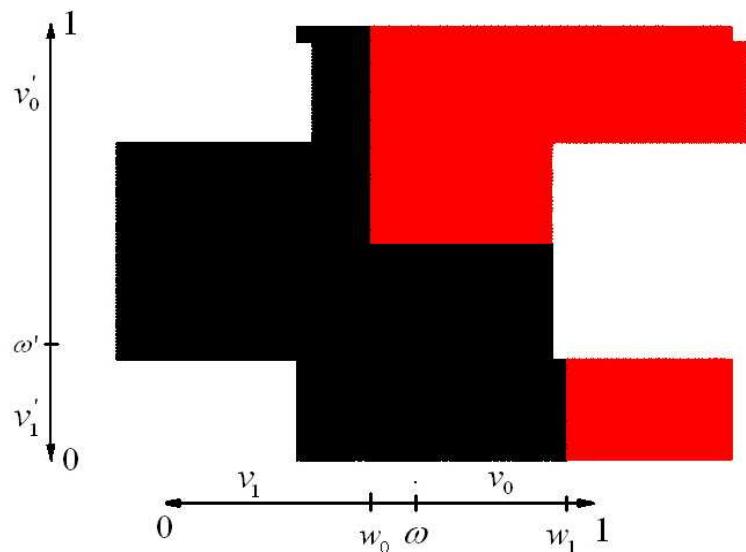


Рис. 1.3. Возмущенный стабилизатор \hat{T} отображения $S_{\hat{v}}$.

Так, на рис. 1.3 показан возмущенный стабилизатор \widehat{T} с теми же параметрами, что и на рис. 1.1, но с условием $|W| > \min\{|v_0|, |v_1|\}$.

1.6. Торы. Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, l_2]$ — полная решетка в \mathbb{R}^2 , т.е. \mathbb{Z} -модуль с базисом $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^2$, линейно не зависимым над полем \mathbb{R} . Тором \mathbb{T}_L^2 называется фактор-пространство \mathbb{R}^2/L . Развёрткой T_L^2 тора \mathbb{T}_L^2 называется любое подмножество T_L^2 из \mathbb{R}^2 такое, что каноническое отображение

$$T_L^2 \xrightarrow{\text{mod } L} \mathbb{T}_L^2 : \widehat{x} \mapsto \widehat{x} \bmod L \quad (1.36)$$

является биекцией. Более геометрическое определение развёртки T_L^2 связывает ее с фундаментальной областью $T_L^2 \subset \mathbb{R}^2$ группы трансляций L плоскости \mathbb{R}^2 : $\widehat{x} \rightarrow \widehat{x} + l$ для $l \in L$. По определению фундаментальная область T_L^2 — подмножество из \mathbb{R}^2 , разбивающее

$$\mathbb{R}^2 = \coprod_{l \in L} T_L^2[l]$$

плоскость \mathbb{R}^2 . Здесь $T_L^2[l] = T_L^2 + l$ обозначает сдвиг области T_L^2 на вектор l и $T_L^2[l_1] \cap T_L^2[l_2] = \emptyset$ для любых $l_1 \neq l_2$.

Решетка $L = \mathbb{Z}[l_1, l_2]$ называется квадратной, если $l_1 = e_1 = (1, 0)$, $l_2 = e_2 = (0, 1)$ — единичный базис. В этом случае будем использовать сокращения \mathbb{Z}^2 для квадратной решетки $\mathbb{Z}[e_1, e_2]$ и соответственно $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}^2$ и $T^2 = T_{\mathbb{Z}^2}^2$ для тора и его развёртки.

Лемма 1.1. Пусть X^2 — некоторое подмножество развёртки тора T_L^2 и пусть $X^2[l]$ — сдвиг этого подмножества на произвольный вектор l решетки L . Тогда деформированное множество

$$T^* = (T_L^2 \setminus X^2) \cup X^2[l]$$

снова будет развёрткой тора \mathbb{T}_L^2 относительно той же решетки L .

Доказательство вытекает из равенства $T^*/L = T_L^2/L$ и определения развёртки (1.36). \square

1.7. Стабилизатор \widehat{T} и развёртка тора.

Теорема 1.1. Если склейка \widehat{W} удовлетворяет условию (1.22), то множество \widehat{T} , определенное в (1.20), является развёрткой

$$\widehat{T} = T^2 \quad (1.37)$$

тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки $L = \mathbb{Z}^2$.

Доказательство. Прежде всего, согласно определению (1.3) отображения S_v можем записать соотношение

$$S_v(x_0) = S_v(x_1) + 1 \quad (1.38)$$

между S_v -образами точки x , имеющей 0-цвет $x = x_0$, и той же самой точки x , если бы она была окрашена $x = x_1$ в 1-цвет. Из равенства (1.38), определений (1.20) и (1.27) множества \widehat{T} и его подмножества $\widehat{T}_l \subset \widehat{T}$ вытекает, что перестроенное множество

$$\widehat{T}^* = (\widehat{T} \setminus \widehat{T}_l) \cup \widehat{T}_l[e_1] \quad (1.39)$$

будет представлять собою прямоугольник

$$\widehat{T}^* = [w_1 + v_1, w_1 + v_0) \times T' = [w_1 + v_1, w_1 + v_0) \times [0, 1),$$

являющийся единичным квадратом, поскольку в силу (1.3) имеем $(w_1 + v_0) - (w_1 + v_1) = 1$. Поэтому по определению (1.36) он будет разверткой

$$\widehat{T}^* = T^2 \quad (1.40)$$

тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки \mathbb{Z}^2 . Теперь из леммы 1.1 и сооношений (1.39), (1.40) получаем нужное утверждение теоремы 1.1. \square

Поясним теорему 1.1 на примере стабилизатора \widehat{T} , изображенного на рис. 1.1. Стабилизатор \widehat{T} является разверткой тора T^2 , что нетрудно увидеть, если \widehat{T} факторизовать относительно квадратной решетки \mathbb{Z}^2 . В результате получается тор \mathbb{T}^2 с разбиением на два множества (рис. 1.4).

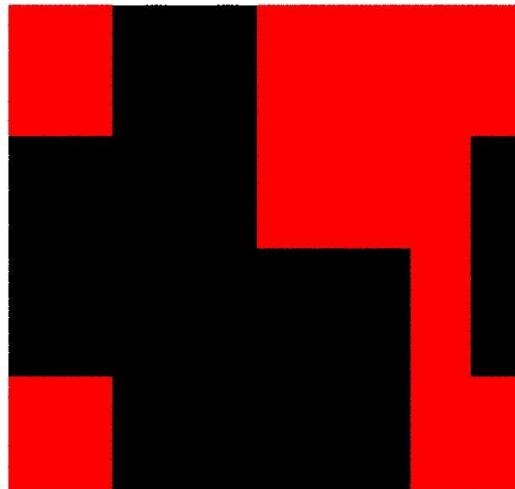


Рис. 1.4. Факторизация \mathbb{T}^2 развертки тора $\widehat{T} \bmod \mathbb{Z}^2$.

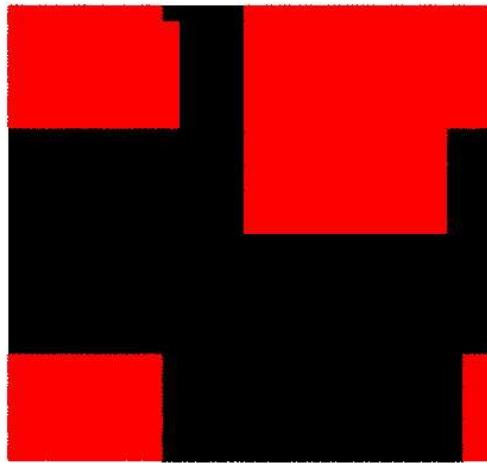


Рис. 1.5. Факторизация \mathbb{T}^2 возмущенной развертки тора $\widehat{T} \bmod \mathbb{Z}^2$.

Если же факторизовать возмущенный стабилизатор \widehat{T} на рис. 1.3, то снова получается тор \mathbb{T}^2 , но уже с разбиением на другие несколько измененные два множества (рис. 1.5).

§2. Слой с произвольным перекладыванием отрезков

В этом и следующем параграфе мы расширим приведенные выше построения торической развертки \widehat{T} . Более конкретно, зададимся следующими вопросами. Как сильно можно изменить определенное в (1.14) отображение $S_{\widehat{v}}$ так, чтобы

- 1) сохранялась конструкция (1.20) стабилизатора \widehat{T} отображения $S_{\widehat{v}}$;
- 2) сохранялась не только конструкция (1.20), но и сам стабилизатор \widehat{T} .

2.1. Перекладывание слоя T' . Базу \mathbb{R} и ее отображение S_v из (1.2), (1.3) трогать не будем, а посмотрим на слой T' и его перекладывание $S_{v'}$ из (1.8) и (1.9). Заметим, что определения (1.15) и (1.20) отображения $S_{\widehat{v}}$ и множества \widehat{T} сохранятся, если заменить перекладывание двух полуинтервалов из разбиения $T' = T'_0 \sqcup T'_1$ на перекладывание произвольного числа соседних полуинтервалов $T'_{k'} = [\omega'_{k'}, \omega'_{k'+1})$ из разбиения

$$T' = T'_0 \sqcup T'_1 \sqcup \dots \sqcup T'_{k'} \quad (2.1)$$

слоя $T' = [0, 1)$. *Перекладывание* $S_{v'}$ отрезка T' зададим формулой

$$T' \xrightarrow{S_{v'}} T' : S_{v'}(x') = x' + v'(x'), \quad (2.2)$$

где $v'(x') = v'_{k'}$ для $x' \in T'_{k'}$, $k' = 0, 1, \dots, \mathbf{k}'$. Здесь сдвиги $v'_{k'}$ выбираются из открытого интервала $I^{\text{int}} = (-1, 1)$ с условием, что отображение (2.2) будет биекцией. Геометрически это означает, что полуинтервалы $T'_0, T'_1, \dots, T'_{\mathbf{k}'}$ заданным образом меняются местами и затем снова, уже в измененном порядке, составляют полный полуинтервал $T' = [0, 1]$.

2.2. Трансляционное отображение $S_{\hat{v}}$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Полосу $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T'$, склейку $\widehat{W} = W \times T'$ и ее раскраску определяем так же, как в (1.10)–(1.12). А вот раскраску (1.13) полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ видоизменим соответствующим разбиению (2.1) образом:

$$\widehat{R} = \coprod_{k,k'} \widehat{R}_{k,k'}, \quad (2.3)$$

где множества

$$\widehat{R}_{k,k'} = (R_k \setminus W) \times T'_{k'} \cup (\widehat{W}_k \cap \mathbb{R} \times T'_{k'}) \quad (2.4)$$

теперь нумеруются индексами $k = 0, 1$ и $k' = 0, 1, \dots, \mathbf{k}' - 1$.

Замечание 2.1. Отметим здесь, что у нас используются три вида раскрасок: 1) k -раскраска (1.6) единичного полуинтервала T ; 2) k' -раскраска (1.8) слоя T' и 3) (k, k') -раскраска (2.3) полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Каждой раскраске отвечает свой цвет.

Трансляционное отображение

$$S_{\hat{v}} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}} \quad (2.5)$$

полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ снова зададим формулой

$$S_{\hat{v}}(\hat{x}) = \hat{x} + \hat{v}(\hat{x}), \quad (2.6)$$

где $\hat{v}(\hat{x}) = \hat{v}_{k,k'}$ для $\hat{x} \in \widehat{R}_{k,k'}$. Теперь векторы сдвигов $\hat{v}_{k,k'} = (v_k, v'_{k'})$ имеют координаты, определенные в (1.3) и (2.2). Отображение $S_{\hat{v}}$ стягивает любой прямоугольник $\widehat{\mathbb{R}}_c = \mathbb{R}_c \times I$, где $c > 1$, из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ в определенный в (1.18) прямоугольник \widehat{W}_v , замкнутый $S_{\hat{v}} : \widehat{W}_v \longrightarrow \widehat{W}_v$ относительно отображения (2.6).

Аналогично (1.20) определим множество

$$\widehat{T} = S_{\hat{v}}(\widehat{R}_0) \cap S_{\hat{v}}(\widehat{R}_1), \quad (2.7)$$

где

$$\widehat{R}_0 = \coprod_{k'} \widehat{R}_{0,k'}, \quad \widehat{R}_1 = \coprod_{k'} \widehat{R}_{1,k'}$$

и множества $\widehat{R}_{k,k'}$ определены в (2.4). Тогда получаем разбиение

$$\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{R}_0 \sqcup \widehat{R}_1 \quad (2.8)$$

полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ на два множества \widehat{R}_0 и \widehat{R}_1 , имеющих 0- и 1-цвет соответственно. Из (1.18) и (2.7) следует включение

$$\widehat{T} \subset \widehat{W}_v. \quad (2.9)$$

Разбиение полосы (2.3) задает соответствующее разбиение

$$\widehat{T} = \coprod_{k,k'} \widehat{T}_{k,k'} \quad (2.10)$$

множества $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ на области

$$\widehat{T}_{k,k'} = \widehat{R}_{k,k'} \cap \widehat{T} \subset \widehat{T},$$

имеющие (k, k') -раскраску.

Теорема 2.1. *Пусть $S_{\widehat{v}}$ — отображение (2.6) и $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ — подмножество, определенное в (2.7). Предположим, что длина интервала $W = [w_0, w_1]$ из (1.11) удовлетворяет неравенству*

$$|W| < \min\{|v_0|, |v_1|\}. \quad (2.11)$$

Тогда при этих условиях справедливы следующие утверждения.

1. *Выполняется равенство*

$$\widehat{T} = \bigcap_{1 \leq i < +\infty} S_v^i(\widehat{\mathbb{R}}_c), \quad (2.12)$$

т.е. множество \widehat{T} — стабилизатор отображения $S_{\widehat{v}}$ и, как следствие, оно замкнуто относительно отображения $S_{\widehat{v}}$:

$$S_{\widehat{v}} : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T}. \quad (2.13)$$

2. *Множество \widehat{T} является разверткой*

$$\widehat{T} = T^2 \quad (2.14)$$

т.о. \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки $L = \mathbb{Z}^2$.

Доказательство опирается на те же соображения, что были использованы в предложении 1.1 и теореме 1.1. \square

Замечание 2.2. Теорема 2.1 остается в силе при замене отображения перекладывания $S_{v'}$ из (2.2) на перекладывание $S_{v', \varepsilon'}$ с инверсиями ε' , когда после перекладывания интервалов из T' над некоторыми из них дополнительно совершается инверсия относительно их центров.

§3. Изоморфизмы

3.1. Перекладывание тора. Рассмотрим бесконечный цилиндр $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ и зададим биекцию полосы $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T'$ и данного цилиндра

$$\iota' : \widehat{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{C}} : \widehat{x} = (x, x') \mapsto (x, x' \bmod \mathbb{Z}). \quad (3.1)$$

Используя биекцию (3.1), перенесем отображение полосы $S_{\widehat{v}}$ из (2.6) на цилиндр $\widehat{\mathbf{C}}$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{R}} & \xrightarrow{S_{\widehat{v}}} & \widehat{\mathbb{R}} \\ \downarrow \iota' & & \downarrow \iota' \\ \widehat{\mathbf{C}} & \xrightarrow{S_{\widehat{v}}} & \widehat{\mathbf{C}} \end{array} \quad (3.2)$$

и оставим за новым отображением прежнее обозначение $S_{\widehat{v}}$. Введем еще одно фактор-отображение цилиндра $\widehat{\mathbf{C}}$ на тор

$$\iota : \widehat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbb{T}^2 : \widehat{x} = (x, x' \bmod \mathbb{Z}) \mapsto \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (3.3)$$

где была использована связь $\widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^2 = (x \bmod \mathbb{Z}, x' \bmod \mathbb{Z})$. С помощью (2.6) и (3.3) перенесем отображение $S_{\widehat{v}}$ на тор \mathbb{T}^2 через коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{R}} & \xrightarrow{S_{\widehat{v}}} & \widehat{\mathbb{R}} \\ \downarrow \widehat{\iota} & & \downarrow \widehat{\iota} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{S_{\widehat{v}}} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (3.4)$$

при этом $\widehat{\iota} = \iota \circ \iota'$ — композиция и отображение $\mathbb{S}_{\widehat{v}}$ задается формулой

$$\mathbb{S}_{\widehat{v}} : \widehat{x} = (x, x') \mapsto (x + \alpha, S_{v'}(x')) \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (3.5)$$

поскольку согласно определениям (1.2) и (1.3) отображения S_v имеем

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

В частности, если отображение $S_{v'}$ будет перекладыванием двух отрезков (1.9), то формула (3.5) примет вид

$$\mathbb{S}_{\widehat{v}} : \widehat{x} \mapsto \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (3.7)$$

где $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$. Таким образом, в этом случае отображение

$$\mathbb{S}_{\widehat{v}} = \mathbb{S}_{\widehat{\alpha}} \quad (3.8)$$

— обычный *сдвиг* тора \mathbb{T}^2 на вектор $\widehat{\alpha}$. В общем же случае отображение $\mathbb{S}_{\widehat{v}}$ из (3.5) представляет собою *перекладывание* тора \mathbb{T}^2 , разбитого на $2k'$ областей.

3.2. Раскраска тора. Пусть точка \hat{x} принадлежит полосе $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{R}_0 \sqcup \widehat{R}_1$ с разбиением, определенным в (2.8). Для цвета точки $\hat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}$ введем обозначение

$$\text{col}(\hat{x}) = k,$$

если $\hat{x} \in \widehat{R}_k$. Возьмем отображение $\hat{\iota}$ из диаграммы (3.4) $\hat{\iota}: \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{T}^2$ и зададим цвет точек на торе \mathbb{T}^2 равенством

$$\text{col}(\hat{\iota}(\hat{x})) = \text{col}(\hat{x}). \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) неоднозначно определяет цвет точек на торе, так как цвет точки $\text{col}(\hat{\iota}(\hat{x}))$ зависит от выбора ее прообраза \hat{x} из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Однако если ограничить отображение (3.5) на развертку тора $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$, то цвет $\text{col}(\hat{\iota}(\hat{x}))$ будет задаваться уже однозначно.

Далее по умолчанию будем предполагать, что склейка \widehat{W} удовлетворяет условию (2.11) из теоремы 2.1.

Лемма 3.1. 1. Пусть $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ — развертка тора, определенная в (2.7), \hat{x} — произвольная точка на торе \mathbb{T}^2 и $\hat{\iota}$ — отображение из диаграммы (3.4). Тогда для данной точки \hat{x} существует единственная точка $\hat{x} \in \widehat{T}$ с условием

$$\hat{\iota}(\hat{x}) = \hat{x}. \quad (3.10)$$

2. Разобъем

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1 \quad (3.11)$$

множество \widehat{T} на две области

$$\widehat{T}_0 = \coprod_{k'} \widehat{T}_{0,k'}, \quad \widehat{T}_1 = \coprod_{k'} \widehat{T}_{1,k'}, \quad (3.12)$$

где множества $\widehat{T}_{k,k'}$ были определены в (2.10). Тогда разбиение (3.11) задает раскраску множества \widehat{T} , которая, в свою очередь, индуцирует однозначно определенную раскраску

$$\text{col}(\hat{x}) = \text{col}(\hat{x}) \quad (3.13)$$

на торе \mathbb{T}^2 .

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 2.1 и определения (3.4) отображения $\hat{\iota}$, поскольку множество \widehat{T} является разверткой тора $\widehat{T} = T^2$ относительно той же квадратной решетки $L = \mathbb{Z}^2$, что и сам тор \mathbb{T}^2 , причем развертка и тор получаются факторизацией полосы $\widehat{\mathbb{R}}$.

Второе утверждение вытекает из определения (3.12) раскраски множества \widehat{T} и определения (3.13) раскраски тора \mathbb{T}^2 . \square

Предложение 3.1. Пусть $S_{\hat{v}}$ — отображение полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, определенное в (2.6), и $\mathbb{S}_{\hat{v}}$ — отображение тора \mathbb{T}^2 из диаграммы (3.4). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \xrightarrow{S_{\hat{v}}} & \widehat{T} \\ \widehat{\iota} \downarrow & & \downarrow \widehat{\iota} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\mathbb{S}_{\hat{v}}} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (3.14)$$

где вертикальные стрелки обозначают биекцию $\widehat{\iota}$.

2. Отображения из диаграммы (3.14) согласуют цвета

$$\text{col}(S_{\hat{v}}(\hat{x})) = \text{col}(\mathbb{S}_{\hat{v}}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (3.15)$$

точек \hat{x} из множества \widehat{T} и их образов $\hat{\mathbf{x}} = \widehat{\iota}(\hat{x})$ на торе \mathbb{T}^2 .

Доказательство вытекает из диаграммы (3.4) и леммы 1.1. \square

3.3. Трансляционное отображение прямой $S_{v,c}$. Рассмотрим проекцию полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ на прямую

$$\text{pr} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} : \hat{x} = (x, x') \mapsto x \quad (3.16)$$

и зададим цвет $\text{col}(x)$ точек x на прямой \mathbb{R} , полагая

$$\text{col}(x) = \text{col}(\hat{x}), \quad (3.17)$$

где $x = \text{pr}(\hat{x})$. Вообще говоря, равенство (3.17) однозначно определяет цвет точек не на всей прямой \mathbb{R} , а только на ее части $\mathbb{R} \setminus W$, где $W = [w_0, w_1]$ — полуинтервал из (1.11). Если же точка x принадлежит полуинтервалу W , то цвет точки $\text{col}(x)$ будет зависеть от выбора ее прообраза \hat{x} из склейки — прямоугольника $\widehat{W} = W \times T'$ (см. (1.11)).

Обычно в подобных ситуациях рассматривают не все расслоенное пространство $\widehat{\mathbb{R}}$, а лишь его сечения. В нашем случае сечения будем задавать орбитами

$$\text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) = \{\hat{x}_i = S_{\hat{v}}^i(\hat{x}_0); i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3.18)$$

произвольных начальных точек $\hat{x}_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ относительно трансляционного отображения $S_{\hat{v}}$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, определенного в (2.6). Перенесем цвет точек с орбиты $\text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})$ на ее проекцию

$$x_i = \text{pr}(\hat{x}_i) \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots$$

естественным способом

$$\text{col}(x_i) = \text{col}(\hat{x}_i). \quad (3.19)$$

Сейчас нам нужно несколько изменить определение (1.2), (1.3) отображения S_v . Пусть \mathbb{R}_c — прямая \mathbb{R} , каждая точка которой имеет определенный цвет $\text{col}(x) = k$, где $k = 0, 1$. Аналогично (1.3) определим на прямой \mathbb{R}_c отображение

$$\mathbb{R}_c \xrightarrow{S_{v,c}} \mathbb{R}_c : S_{v,c}(x) = x + v_{(\text{col}(x))}, \quad (3.20)$$

где $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ и $\alpha \neq 0$ — некоторое число из единичного полупротивала $I = [0, 1)$. Так же, как и S_v , отображение $S_{v,c}$ является *трансляционным*. С помощью этого отображения проекцию орбиты $\text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})$ можно записать в виде

$$\text{Orb}(x_0, S_{v,c}) = \{x_i = S_{v,c}^i(x_0); i = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.21)$$

при этом имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) & \xrightarrow{S_{\hat{v}}} & \text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr}, \\ \text{Orb}(x_0, S_{v,c}) & \xrightarrow{S_{v,c}} & \text{Orb}(x_0, S_{v,c}) \end{array} \quad (3.22)$$

где вертикальные стрелки обозначают проекцию (3.16). Здесь коммутативность диаграммы (3.22), кроме обычного смысла, означает еще и согласованность цвета точек орбит

$$\text{col}(\hat{x}) = \text{col}(\text{pr}(\hat{x})), \quad \text{col}(\text{pr} \circ S_{\hat{v}}(\hat{x})) = \text{col}(S_{\hat{v}} \circ \text{pr}(\hat{x})). \quad (3.23)$$

3.4. Торические орбиты.

Рассмотрим *орбиты*

$$\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{v}}) = \{\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbb{S}_{\hat{v}}^i(\hat{\mathbf{x}}_0); i = 0, 1, 2, \dots\}$$

произвольных начальных точек $\hat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 относительно перекладывающего отображения $\mathbb{S}_{\hat{v}}$ тора, определенного в (3.5). Определим *проекцию* тора \mathbb{T}^2 на прямую

$$\text{pr} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

исходя из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \xrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathbb{T}^2 \\ \text{pr} \searrow & & \swarrow \text{pr}, \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad (3.25)$$

где $\widehat{T} = T^2$ — развертка тора \mathbb{T}^2 , горизонтальная стрелка означает биекцию $\widehat{\iota}$ из предложения 3.1, а левая стрелка — проекция (3.16).

Предложение 3.2. Для любой начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 существует такая раскраска прямой $\mathbb{R}_c = \mathbb{R}_{c,\widehat{\mathbf{x}}_0}$, зависящая от точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\widehat{v}}) & \xrightarrow{\mathbb{S}_{\widehat{v}}} & \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\widehat{v}}) \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr.} \\ \mathbb{R}_c & \xrightarrow{S_{v,c}} & \mathbb{R}_c \end{array} \quad (3.26)$$

Здесь вертикальные стрелки обозначают проекцию (3.24) и в диаграмме (3.26) выполняется согласованность цвета точек $\widehat{\mathbf{x}} \in \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\widehat{v}})$ и $\widehat{x} = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}_c$:

$$\text{col}(\widehat{\mathbf{x}}) = \text{col}(\widehat{x}), \quad \text{col}(\text{pr} \circ \mathbb{S}_{\widehat{v}}(\widehat{\mathbf{x}})) = \text{col}(\mathbb{S}_{\widehat{v}} \circ \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}})), \quad (3.27)$$

где раскраска $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}})$ точек $\widehat{\mathbf{x}}$ тора \mathbb{T}^2 была определена в (3.13).

Доказательство. С помощью проекции pr из (3.25) перенесем цвет точек $\widehat{\mathbf{x}}_i$ орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\widehat{v}})$ на их образы $x_i = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_i)$ на прямой \mathbb{R} . Для остальных точек на прямой \mathbb{R} цвет задается произвольным образом. После этого мы получаем некоторую неоднозначно определенную раскраску прямой \mathbb{R}_c , которой уже достаточно для задания отображения $S_{v,c}$ из (3.20) и тем самым — всей диаграммы (3.26). Теперь предложение 3.2 вытекает из диаграммы (3.22) и согласованности цвета (3.23). \square

§4. Распределение точек на прямой

4.1. Функции распределения на прямой.

Пусть

$$\mathbb{R}_c = \mathbb{R}_{c,0} \sqcup \mathbb{R}_{c,1} \quad (4.1)$$

— произвольная раскраска прямой \mathbb{R} с разбиением на два множества $\mathbb{R}_{c,k}$, где $k = 0, 1$, задающих цвет $\text{col}(x) = k$ точек $x \in \mathbb{R}_{c,k}$. Выберем некоторую начальную точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим ее орбиту $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$. Согласно определению (3.20) отображения $S_{v,c}$, любую точку x_i орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ можем записать в виде

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + \sum_{0 \leq j < i} v_{(\text{col}(x_j))}, \quad (4.2)$$

где $x_j = S_{v,c}^j(x_0)$ — текущая точка орбиты и сдвиги v_k заданы равенствами $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ для некоторого $\alpha \neq 0$ из единичного полунтервала $I = [0, 1]$.

Для $k = 0, 1$ определим функции распределения

$$r_k(i, x_0) = \#\{j; \quad S_{v,c}^j(x_0) \in \mathbb{R}_{c,k}; \quad 0 \leq j < i\}, \quad (4.3)$$

т.е. $r_k(i, x_0)$ равно количеству точек $x_j = S_{v,c}^j(x_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$, имеющих цвет $\text{col}(x_j) = k$. Используя такие функции, можем переписать равенство (4.2) в свернутом виде

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + r_0(i, x_0)v_0 + r_1(i, x_0)v_1. \quad (4.4)$$

В силу определения (4.3) и условия (4.1) между функциями распределения $r_0(i, x_0)$ и $r_1(i, x_0)$ существует очевидная связь

$$r_0(i, x_0) + r_1(i, x_0) = i \quad (4.5)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

4.2. Функции отклонения на прямой. Выражая из (4.5) функцию $r_1(i, x_0)$ через $r_0(i, x_0)$ и подставляя ее значение в равенство (4.4), получаем

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + r_0(i, x_0) + iv_1, \quad (4.6)$$

так как по условию $v_0 - v_1 = 1$. Введем дополнительные функции

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - ia_k \quad (4.7)$$

для $k = 0, 1$ с коэффициентами $a_0 = -v_1$ и $a_1 = v_0$, которые, вспоминая условие из (4.2), удобно выразить через один параметр

$$a_0 = 1 - \alpha, \quad a_1 = \alpha. \quad (4.8)$$

Предельно упростим ситуацию, предположив склейку \widehat{W} из (1.11) пустой. В этом случае разбиение прямой (4.1) вырождается в разбиение (1.1), а отображение $S_{v,c}$ из (3.20) — в отображение S_v из (1.3). Предположим, что начальная точка x_0 принадлежит единичному полуинтервалу I , разбитому $T = T_0 \sqcup T_1$ на два полуинтервала $T_0 = [0, 1-\alpha]$, $T_1 = [1-\alpha, 1]$ (см. (1.6)). Как уже было сказано в (1.7), отображение S_v представляет собою перекладывание полуинтервалов T_0 и T_1 , и, следовательно, наше отображение $S_{v,c} = S_v$ изоморфно повороту единичной окружности \mathbb{T}^1 на угол α . Пусть угол α будет иррациональным. Тогда в этом случае точки орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ из (3.21) равномерно распределены по всему единичному полуинтервалу $T = T_0 \sqcup T_1$. Заметим, что составляющие его полуинтервалы T_0 и T_1 имеют соответственно длины

$$|T_0| = 1 - \alpha, \quad |T_1| = \alpha. \quad (4.9)$$

Поэтому в силу равномерности для функций распределения (4.3) будут выполняться асимптотические равенства

$$r_0(i, x_0) \sim (1 - \alpha)i, \quad r_1(i, x_0) \sim \alpha i \quad (4.10)$$

при $i \rightarrow +\infty$. Теперь, если сравнить (4.8) с (4.9), то асимптотические равенства (4.10) проясняют смысл функций $\delta_k(i, x_0)$, определенных в (4.7):

функция $\delta_k(i, x_0)$ равна *отклонению* числу попаданий $r_k(i, x_0)$ точек орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ в полуинтервал T_k от ожидаемого среднего числа попаданий ia_k , где коэффициент $a_k = |T_k|$ равен длине полуинтервала T_k .

Теперь переходим к случаю общей раскраски прямой (4.1).

Предложение 4.1. Для функций отклонений $\delta_k(i, x_0)$, $k = 0, 1$, определенных в (4.7), выполняются следующие формулы:

$$\delta_0(i, x_0) = x_i - x_0, \quad \delta_1(i, x_0) = x_0 - x_i, \quad (4.11)$$

где $x_i = S_{v,c}^i(x_0)$ — текущая точка из орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ с номером $i = 0, 1, 2, \dots$

Из предложения 4.1 вытекает

Следствие 4.1. Между функциями отклонений $\delta_0(i, x_0)$ и $\delta_1(i, x_0)$ имеем место соотношение

$$\delta_0(i, x_0) + \delta_1(i, x_0) = 0 \quad (4.12)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство предложения 4.1. Подставим значение (4.7) функции отклонения $\delta_0(i, x_0)$ в равенство (4.6) и получим первое равенство из (4.11). Второе равенство из (4.11) доказывается аналогично, если из равенства (4.5) выразить теперь уже функцию распределения $r_0(i, x_0)$ через $r_1(i, x_0)$ и подставить ее значение в равенство (4.4). \square

§5. Распределение точек на торе

5.1. Функции распределения и отклонения на торе. В лемме 3.1 была определена раскраска точек $\text{col}(\hat{\mathbf{x}})$ на торе \mathbb{T}^2 . Используя ее, разобьем тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \quad (5.1)$$

на множества \mathbb{T}_k^2 из точек одного цвета $\text{col}(\hat{\mathbf{x}}) = k$. Аналогично (4.3) для перекладывающего отображения $\mathbb{S}_{\hat{v}}$ тора \mathbb{T}^2 , определенного в (3.5), определим функции распределения

$$\mathbf{r}_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = \#\{j; \quad \mathbb{S}_{\hat{v}}^j(\hat{\mathbf{x}}_0) \in \mathbb{T}_k^2; \quad 0 \leq j < i\}, \quad (5.2)$$

равные количеству точек $\hat{\mathbf{x}}_j = \mathbb{S}_{\hat{v}}^j(\hat{\mathbf{x}}_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{v}})$, имеющих один и тот же цвет $\text{col}(\hat{\mathbf{x}}) = k$, где $k = 0, 1$. Тогда соответствующие им функции отклонения на торе \mathbb{T}^2 примут вид (ср. с отклонениями (4.7))

$$\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0) - ia_k \quad (5.3)$$

с коэффициентами $a_0 = 1 - \alpha$ и $a_1 = \alpha$.

5.2. Основной результат.

Теорема 5.1. Пусть $\hat{\mathbf{x}}_0$ — произвольная начальная точка на торе \mathbb{T}^2 , $\mathbb{S}_{\hat{v}}$ — перекладывание тора (3.5) и пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для функций отклонений $\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, определенных в (5.3), выполняются следующие формулы:

$$\delta_0(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = x_i - x_0, \quad \delta_1(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = x_0 - x_i, \quad (5.4)$$

зде

$$x_i = \text{pr}(\hat{\mathbf{x}}_i) \quad \text{для } \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbb{S}_{\hat{v}}^i(\hat{\mathbf{x}}_0) \quad (5.5)$$

— текущей точки из орбиты $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{v}})$ с номером $i = 0, 1, 2, \dots$

2. Отклонения $\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0)$ удовлетворяют неравенствам

$$m(\hat{T}) - x_0 \leq \delta_0(i, \hat{\mathbf{x}}_0) \leq M(\hat{T}) - x_0, \quad x_0 - M(\hat{T}) \leq \delta_1(i, \hat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 - m(\hat{T}) \quad (5.6)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь обозначили через $m(\hat{T})$ и $M(\hat{T})$ граничные значения

$$m(\hat{T}) = \inf_{\hat{x} \in \hat{T}} \text{pr}(\hat{x}), \quad M(\hat{T}) = \sup_{\hat{x} \in \hat{T}} \text{pr}(\hat{x}), \quad (5.7)$$

зде $\hat{T} \subset \mathbb{R}^2$ — развертка тора (2.7) и pr — проекция (3.16).

Доказательство. 1. В силу предложения 3.2 можем записать

$$\mathbf{r}_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = r_k(i, x_0). \quad (5.8)$$

Тогда из (5.8) и определений (4.7), (5.3) следует равенство функций отклонений

$$\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0) = \delta_k(i, x_0). \quad (5.9)$$

Из (5.9) и предложения 4.1 получаем формулы (5.4).

2. Рассмотрим орбиту $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, S_{\hat{v}})$, определенную в (3.18), для начальной точки \hat{x}_0 из развертки тора \hat{T} , отвечающую $\hat{\iota}(\hat{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0$ точке $\hat{\mathbf{x}}_0$, где $\hat{\iota}$ — биекция из диаграммы (3.14). Из замкнутости (2.13) развертки тора \hat{T} относительно отображения $S_{\hat{v}}$ следует включение $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, S_{\hat{v}}) \subset \hat{T}$. Поэтому, согласно формуле (5.4) и предложению 4.1, для функций отклонений $\delta_k(i, \hat{x}_0) = r_k(i, \hat{x}_0) - i a_k$ распределения точек $\hat{x}_j = S_{\hat{v}}^j(\hat{x}_0)$ орбиты $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, S_{\hat{v}})$ по областям \hat{T}_k из разбиения $\hat{T} = \hat{T}_0 \sqcup \hat{T}_1$ (см. (3.11)) будут выполняться неравенства

$$m(\hat{T}) - x_0 \leq \delta_0(i, \hat{x}_0) \leq M(\hat{T}) - x_0, \quad x_0 - M(\hat{T}) \leq \delta_1(i, \hat{x}_0) \leq x_0 - m(\hat{T}),$$

из которых вытекают требуемые неравенства (5.6). \square

5.3. Насыщенные раскраски склейки. Для произвольных раскрасок (1.12) склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ и произвольных перекладывающих отображений $S_{\widehat{v}}$ тора \mathbb{T}^2 доказанные нами неравенства (5.6) для отклонений $\delta_k(i, \widehat{x}_0)$, $k = 0, 1$, не являются точными. Сейчас мы сформулируем несколько условий, гарантирующих точность неравенств (5.6).

Назовем раскраску $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ склейки \widehat{W} из (1.12) *насыщенной*, если для любого $k = 0, 1$, любой точки \widehat{x} из области \widehat{W}_k и произвольной ее окрестности $b(\widehat{x}, \varepsilon)$ радиуса $\varepsilon > 0$ найдется некоторая окрестность $b(\widehat{x}', \varepsilon')$ радиуса $\varepsilon' > 0$, удовлетворяющая условию

$$b(\widehat{x}', \varepsilon') \subset b(\widehat{x}, \varepsilon) \cap \widehat{W}_k, \quad (5.10)$$

т.е. все точки \widehat{y} окрестности $b(\widehat{x}', \varepsilon')$ имеют одинаковый цвет и этот цвет тот же $\text{col}(\widehat{y}) = k$, что и у точки \widehat{x} .

Предложение 5.1. Пусть раскраска $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ будет насыщенной и орбита $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, S_{\widehat{v}})$ является всюду плотной на торе \mathbb{T}^2 . Тогда неравенства (5.6) для отклонений $\delta_k(i, \widehat{x}_0)$, $k = 0, 1$, будут точными.

Доказательство. Поскольку раскраска склейки \widehat{W} насыщенная (5.10), то из построения (2.7) развертки тора \widehat{T} следует, что для любой точки \widehat{x} из \widehat{T} и любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность

$$b(\widehat{x}', \varepsilon') \subset \widehat{T} \cap b(\widehat{x}, \varepsilon) \quad (5.11)$$

радиуса $\varepsilon' > 0$, все точки \widehat{y} которой имеют цвет $\text{col}(\widehat{y}) = \text{col}(\widehat{x})$. Далее, снова из построения развертки \widehat{T} , теоремы 2.1 и из условия всюду плотности орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, S_{\widehat{v}})$ на торе \mathbb{T}^2 следует существование точки $\widehat{x}_i = \widehat{\iota}(\widehat{\mathbf{x}}_i)$ из развертки тора \widehat{T} , где $\widehat{\mathbf{x}}_i$ — некоторая точка из орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, S_{\widehat{v}})$ и $\widehat{\iota}$ — биекция из диаграммы (3.14) такой, что $\widehat{x}_i \in b(\widehat{x}', \varepsilon')$. Поэтому указанная точка имеет цвет

$$\text{col}(\widehat{x}_i) = \text{col}(\widehat{x}).$$

Из определения (5.7) значения $M(\widehat{T})$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $\widehat{x} \in \widehat{T}$ с условием $\text{pr}(\widehat{x}) > M(\widehat{T}) - \varepsilon$. Отсюда и включения (5.11) получаем неравенство

$$\text{pr}(\widehat{x}_i) > M(\widehat{T}) - 2\varepsilon, \quad (5.12)$$

из которого и формулы (5.4.1) следует неравенство $\delta_0(i, \widehat{x}_0) > M(\widehat{T}) - 2\varepsilon$ для отклонения $\delta_0(i, \widehat{x}_0)$ с тем же номером i , что и в (5.12). Теперь в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем доказательство точности неравенства $\delta_0(i, \widehat{x}_0) \leq M(\widehat{T}) - x_0$ из (5.6).

Точность остальных неравенств из (5.6) доказывается по той же схеме. \square

5.4. Отклонения для сдвига тора. Пусть перекладывающее отображение $\mathbb{S}_{\hat{v}} = \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ будет *сдвигом*

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}} \mathbb{T}^2 : \hat{x} \mapsto \hat{x} + \hat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^2 \quad (5.13)$$

тора \mathbb{T}^2 на вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$. В этом случае для любой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^2$ можно полностью описать структуру орбиты $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}})$ для сдвига тора (5.13) в терминах ранга вектора $\hat{\alpha}$.

Определим *ранг* вектора $\hat{\alpha}$ на кольцом целых чисел \mathbb{Z} равенством

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}) - 1, \quad (5.14)$$

где $M(\hat{\alpha}) = \mathbb{Z}[1, \alpha, \alpha'] \subset \mathbb{R}$ обозначает *модуль* над кольцом \mathbb{Z} , порождаемый числами $1, \alpha, \alpha'$. Ранг $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha, \alpha']$ — размерность этого модуля над \mathbb{Z} . Из определения (5.14) следуют неравенства

$$0 \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) \leq 2.$$

Назовем вектор $\hat{\alpha}$ *иррациональным*, если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 2$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*. Это равносильно тому, что вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$ имеет рациональные координаты $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$.

Для вектора $\hat{\alpha}$ отвечающий ему сдвиг $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ тора (5.13) будем называть соответствующим образом.

Обозначим через $\overline{\text{Orb}}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}})$ *замыкание орбиты* $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}})$. Тогда имеет место следующая формула

$$\dim \overline{\text{Orb}}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}) = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) \quad (5.15)$$

для размерности замыкания орбиты $\overline{\text{Orb}}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}})$ (относительно максимально иррациональных сдвигов тора \mathbb{T}^D произвольной размерности D , которые принято называть *минимальными*, см. [9], а для остальных случаев — [16]).

С помощью формулы (5.15) для максимально иррациональных сдвигов тора $\hat{\alpha}$ предложение 5.1 может быть переформулировано в следующем виде.

Предложение 5.2. *Пусть перекладывающее отображение $\mathbb{S}_{\hat{v}} = \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ является максимально иррациональным сдвигом тора \mathbb{T}^2 и раскраска $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ склейки (1.12) будет насыщенной. Тогда неравенства (5.6) для отклонений $\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, будут точными.*

Доказательство. По условию ранг вектора $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 2$. Следовательно, в силу формулы (5.15), замыкание орбиты $\overline{\text{Orb}}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}) \subset \mathbb{T}^2$ имеет размерность $\dim \text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}) = 2$. А это означает, что орбита $\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\hat{\alpha}})$

всюду плотная на торе T^2 . Теперь наше утверждение вытекает из предложения 5.1. \square

Для не максимально иррациональных сдвигов тора $S_{\hat{\alpha}}$ утверждение предложения 5.2 в общем случае становится уже неверным. Это легко увидеть, если заметить, что в силу формулы (5.15) замыкание орбиты $\overline{\text{Orb}}(\hat{x}_0, S_{\hat{\alpha}})$ представляет собою одномерную обмотку тора T^2 , когда ранг вектора $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 1$, и — конечное множество точек, когда $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 0$.

Поэтому вместо граничных значений $m(\hat{T})$ и $M(\hat{T})$, определенных в (5.7), более естественно рассмотреть новые граничные значения

$$m(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) = \inf_{\hat{x} \in \text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})} \text{pr}(\hat{x}), \quad M(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) = \sup_{\hat{x} \in \text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})} \text{pr}(\hat{x}). \quad (5.16)$$

Поскольку имеет место включение $\text{Orb}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) \subset \hat{T}$, то граничные значения (5.7) и (5.16) связаны между собою очевидными неравенствами

$$m(\hat{T}) \leq m(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}), \quad M(\hat{T}) \leq M(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}). \quad (5.17)$$

Предложение 5.3. Пусть перекладывающее отображение $S_{\hat{v}} = S_{\hat{\alpha}}$ имеет ранг $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) \leq 1$. Тогда для любой раскраски $\hat{W} = \hat{W}_0 \sqcup \hat{W}_1$ склейки (1.12) отклонения $\delta_k(i, \hat{x}_0)$, $k = 0, 1$, будут удовлетворять точным неравенствам

$$\begin{aligned} m(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) - x_0 &\leq \delta_0(i, \hat{x}_0) \leq M(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) - x_0, \\ x_0 - M(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) &\leq \delta_1(i, \hat{x}_0) \leq x_0 - m(\hat{x}_0, S_{\hat{v}}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство непосредственно вытекает из формул (5.4) для отклонений $\delta_k(i, \hat{x}_0)$ и определения (5.16) граничных значений $m(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})$, $M(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})$. \square

Замечание 5.1. Если ранг $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) = 2$, то доказанные неравенства (5.18) переходят в неравенства (5.6) из теоремы 5.1.

5.5. Отклонения для перекладываний тора. Заметим, что неравенства (5.18) будут также выполняться и для произвольных перекладываний $S_{\hat{v}}$ тора T^2 . Недостаток же неравенств (5.18) состоит в том, что их применение предполагает знание строения замыкания орбит $\overline{\text{Orb}}(\hat{x}_0, S_{\hat{v}})$, а это — трудная задача, к настоящему времени решенная только для частных случаев перекладываний тора (см., например, [2, 1]). Таким образом, доказательство строгих неравенств вида (5.6) для отклонений $\delta_k(i, \hat{x}_0)$, $k = 0, 1$, в случае общих перекладываний $S_{\hat{v}}$ тора T^2 остается открытой проблемой.

**§6. Перекладывание четырех отрезков:
числовой пример**

6.1. Разворотка тора и ее факторизация. Применим теорему 5.1 к случаю, когда слой $T' = [0, 1)$ разбит

$$T' = T'_0 \sqcup T'_1 \sqcup T'_2 \sqcup T'_3 \quad (6.1)$$

на четыре различных полуинтервала $T'_{k'} = [\omega'_{k'}, \omega'_{k'+1})$ с граничными точками

$$\begin{aligned} w'_0 &= 0, & w'_1 &= \sqrt{5} - 2 \approx 0.24, & w'_2 &= \sqrt{6} - 2 \approx 0.45, \\ w'_3 &= \sqrt{3} - 1 \approx 0.73, & w'_4 &= 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Пусть перекладывание $S_{v'}$ полуинтервалов $T'_{k'}$ из разбиения (6.1) задается подстановкой $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Если данное перекладывание $S_{v'}$ записать в виде трансляций

$$S_{v'}(x') = x' + v'_{k'}, \quad \text{если } x' \in T'_{k'},$$

то векторы $v'_{k'}$ перекладывания $S_{v'}$ будут соответственно равны

$$\begin{aligned} v'_0 &= 3 - \sqrt{5} \approx 0.76, & v'_1 &= 5 - \sqrt{5} - \sqrt{6} \approx 0.31, \\ v'_2 &= 4 - \sqrt{3} - \sqrt{6} \approx -0.18, & v'_3 &= 1 - \sqrt{3} \approx -0.73. \end{aligned} \quad (6.3)$$

На множестве вещественных чисел \mathbb{R} зададим разбиение $R = R_0 \sqcup R_1$ на два полуинтервала $R_0 = [-\infty, \omega]$, $R_1 = [\omega, +\infty)$ с сечением $\omega = 1 - \alpha \approx 0.59$, где $\alpha = \sqrt{2} - 1$, и с помощью этого разбиения определим отображение S_v на базе $\mathbb{R} \xrightarrow{S_v} \mathbb{R}$, полагая (см. определение (1.3))

$$S_v(x) = x + v_k, \quad \text{если } x \in R_k, \quad (6.4)$$

где

$$v_0 = \alpha = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41, \quad v_1 = \alpha - 1 = \sqrt{2} - 2 \approx -0.59. \quad (6.5)$$

В качестве склейки выберем прямоугольник $\widehat{W} = W \times T'$ с основанием $W = [w_0, w_1)$, где

$$w_0 = \omega + d_0, \quad w_1 = \omega + d_1. \quad (6.6)$$

Величины $d_0 \leq 0$ и $d_1 \geq 0$ назовем *возмущениями*. В случае $d_0 = 0$, $d_1 = 0$ полоса $\widehat{\mathbb{R}}$ имеет прямое разбиение $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1$ на две половины: точки $\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0$ с ординатами $x < \omega$ имеют цвет $\text{col}(\widehat{x}) = 0$, а точки $\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1$ с $x \geq \omega$ имеют цвет $\text{col}(\widehat{x}) = 1$. Если же $d_0 - d_1 > 0$, то указанное разбиение возмущается (1.13) произвольной раскраской склейки \widehat{W} , имеющей ширину

$$|\widehat{W}| = |W| = d_1 - d_0. \quad (6.7)$$

В дополнение к сказанному в п. 6.2 мы приведем еще один весомый аргумент, объясняющий название возмущений для величин d_0, d_1 .

Далее мы выберем $d_0 = -0.1$ и $d_1 = 0.2$, и тогда в этом случае для концов полуинтервала \widehat{W} получим значения

$$w_0 = \omega - 0.1 \approx 0.49, \quad w_1 = \omega + 0.2 \approx 0.79. \quad (6.8)$$

Раскраску на \widehat{W} зададим следующим образом:

$$\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1, \quad \text{где} \quad \widehat{W}_0 = W \times [0, 0.5), \quad \widehat{W}_1 = W \times [0.5, 1). \quad (6.9)$$

По формулам (2.3) и (2.4) зададим разбиение

$$\widehat{R} = \coprod_{k,k'} \widehat{R}_{k,k'}$$

полосы $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T'$ на восемь областей $\widehat{R}_{k,k'}$ с индексами $k = 0, 1$ и $k' = 0, 1, 2, 3$ и, используя раскраску (2.4), определим трансляционное отображение на полосе $S_{\widehat{v}} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ по формуле (2.6):

$$S_{\widehat{v}}(\widehat{x}) = \widehat{x} + \widehat{v}_{k,k'}, \quad \text{если} \quad \widehat{x} \in \widehat{R}_{k,k'},$$

где векторы сдвигов $\widehat{v}_{k,k'} = (v_k, v'_{k'})$ имеют координаты, определенные в (6.3) и (6.4).

Чтобы построить стабилизатор \widehat{T} отображения $S_{\widehat{v}}$ с помощью формулы (2.7), нужно согласно теореме 2.1 обеспечить выполнение условия (2.11). Ширина склейки вычисляется по формуле (6.7), а $\min\{|v_0|, |v_1|\} = |v_0| = \sqrt{2} - 1$ в силу (6.5). Поэтому условие (2.11) примет вид

$$d_1 - d_0 < \sqrt{2} - 1 \approx 0.41. \quad (6.10)$$

Выбранные нами ранее значения $d_0 = -0.1$ и $d_1 = 0.2$ удовлетворяют неравенству (6.10), следовательно, мы можем применить формулу (2.7) для построения стабилизатора \widehat{T} и задать на нем разбиение

$$\widehat{T} = \coprod_{k,k'} \widehat{T}_{k,k'}, \quad (6.11)$$

используя формулу (2.10). Теперь условия теоремы 2.1 выполнены, и, значит, наше множество (6.11) замкнуто относительно отображения $S_{\widehat{v}}$:

$$S_{\widehat{v}} : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T} \quad (6.12)$$

и, кроме того, является разверткой $\widehat{T} = T^2$ тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки $L = \mathbb{Z}^2$.

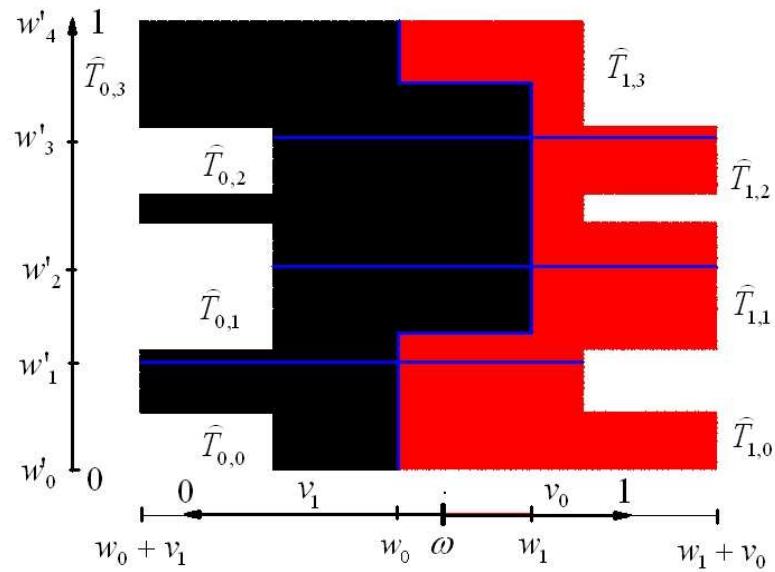


Рис. 6.1. Стабилизатор \hat{T} трансляционного отображения $S_{\hat{v}}$.

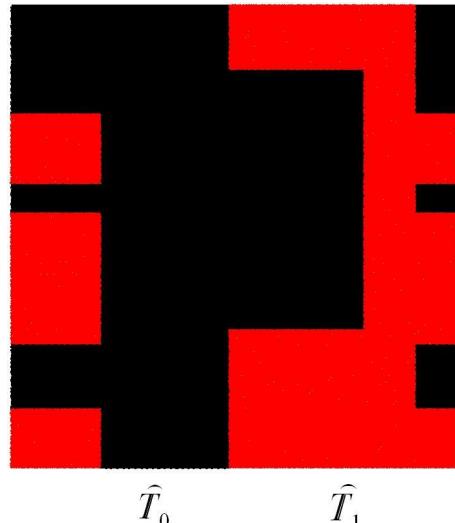


Рис. 6.2. Факторизация \mathbb{T}^2 развертки тора $\hat{T} \bmod \mathbb{Z}^2$.

На рис. 6.1 показан сам стабилизатор \hat{T} и его разбиение на восемь областей $\hat{T}_{k,k'}$ из (6.11), а на рис. 6.2 — факторизация $\mathbb{T}^2 \simeq \hat{T} \bmod \mathbb{Z}^2$

стабилизатора \widehat{T} относительно решетки \mathbb{Z}^2 . При этом тор \mathbb{T}^2 разбит

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \quad (6.13)$$

на области \mathbb{T}_0^2 и \mathbb{T}_1^2 одного цвета в согласии с определением (5.1). Данные области отвечают разбиению развертки тора

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1 \quad (6.14)$$

на соответствующие области

$$\begin{aligned}\widehat{T}_0 &= \widehat{T}_{0,0} \sqcup \widehat{T}_{0,1} \sqcup \widehat{T}_{0,2} \sqcup \widehat{T}_{0,3}, \\ \widehat{T}_1 &= \widehat{T}_{1,0} \sqcup \widehat{T}_{1,1} \sqcup \widehat{T}_{1,2} \sqcup \widehat{T}_{1,3},\end{aligned}$$

где множества $\widehat{T}_{k,k'}$ взяты из разбиения (6.11).

6.2. Несжимаемые раскраски склейки. Сейчас отступим от основной линии и приведем несколько определений. Раскраску склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ назовем *несжимаемой справа (слева)*, если для любого $\varepsilon > 0$ полоса $\widehat{W} \setminus \widehat{W}_\varepsilon$ ($\widehat{W} \setminus {}_\varepsilon \widehat{W}$), где $\widehat{W}_\varepsilon = [w_0, w_1 - \varepsilon] \times \widehat{T}$ и ${}_\varepsilon \widehat{W} = [w_0 + \varepsilon, w_1] \times \widehat{T}$, содержит хотя бы одну точку \widehat{x} цвета $\text{col}(\widehat{x}) = 0$ ($\text{col}(\widehat{x}) = 1$). Раскраску будем называть *несжимаемой*, если она несжимаема одновременно справа и слева. Так, например, несжимаема раскраска (6.9) склейки \widehat{W} (см. рис. 6.1).

Лемма 6.1. *Если раскраска склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ несжимаема и возмущения $d_0 \leq 0$ и $d_1 \geq 0$ из (6.6) удовлетворяют условию*

$$d_1 - d_0 < \min\{|v_0|, |v_1|\}, \quad (6.15)$$

то справедливы следующие утверждения.

1. Множество \widehat{T} замкнуто относительно отображения $S_{\widehat{v}}$ и является разверткой $\widehat{T} = T^2$ тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки $L = \mathbb{Z}^2$.

2. Границные значения $m(\widehat{T})$ и $M(\widehat{T})$, определенные в (5.7), вычисляются по формулам

$$m(\widehat{T}) = d_0, \quad M(\widehat{T}) = 1 + d_1. \quad (6.16)$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 2.1, поскольку неравенство (6.15) равносильно неравенству (2.11).

Для доказательства второго утверждения заметим, что из построения (2.7) развертки тора \widehat{T} и из несжимаемости раскраски склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ для граничных значений $m(\widehat{T})$ и $M(\widehat{T})$ следуют равенства

$$m(\widehat{T}) = w_0 + v_1, \quad M(\widehat{T}) = w_1 + v_0. \quad (6.17)$$

Подставляя в равенства (6.17) значения для v_0, v_1 и w_0, w_1 из (6.5) и (6.6), получаем требуемые формулы (6.16). \square

Теперь мы можем конкретизировать оценки (5.6) из теоремы 5.1 в случае несжимаемых раскрасок склейки \widehat{W} .

Предложение 6.1. *Пусть $\widehat{\mathbf{x}}_0$ — некоторая произвольная фиксированная начальная точка на торе \mathbb{T}^2 , $\mathbb{S}_{\widehat{v}}$ — перекладывание тора, отвечающее с помощью диаграммы (3.4) отображению $S_{\widehat{v}}$, и пусть выполняются условия леммы 6.1. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Функции отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, определенные в (5.3), удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} d_0 - x_0 &\leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 1 + d_1 - x_0, \\ x_0 - 1 - d_1 &\leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 - d_0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $x_0 = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_0)$ — проекция (3.25) точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на прямую \mathbb{R} и $d_0 \leq 0$, $d_1 \geq 0$ — возмущения из (6.6).

2. Для произвольной начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 выполняются обеющие неравенства

$$|\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1 + |\widehat{W}|, \quad |\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1 + |\widehat{W}| \quad (6.19)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где $|\widehat{W}| = d_1 - d_0$ — ширина склейки \widehat{W} .

Замечание 6.1. Названия возмущений для величин d_0 и d_1 , данные им в (6.6), объясняются неравенствами (6.18) и (6.19): с увеличением этих величин растут и границы изменений для функций отклонений $\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ и $\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$.

Доказательство предложения 6.1. 1. Неравенства (6.18) вытекают из теоремы 5.1 и леммы 6.1.

2. Воспользовавшись биекцией $\widehat{\iota}$ из диаграммы (3.14), получаем точку $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0) = \widehat{\iota}^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}_0)$. Поскольку она принадлежит развертке тора \widehat{T} , то в силу леммы 6.1 абсцисса x_0 точки \widehat{x}_0 должна удовлетворять неравенствам $d_0 \leq x_0 \leq 1 + d_1$. Отсюда и (6.18) выводим неравенства (6.19). \square

6.3. Границы для функций отклонения. Возвращаемся к отображению перекладывания $S_{\widehat{v}}$, определенному в (6.12). Пусть

$$\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) - ia_0, \quad \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) - ia_1 \quad (6.20)$$

— функции отклонения (5.3), где $\mathbf{r}_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ и $\mathbf{r}_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ — функции распределения (5.2) точек из орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \mathbb{S}_{\widehat{v}})$ по областям \mathbb{T}_0^2 и \mathbb{T}_1^2 на торе \mathbb{T}^2 . В нашем случае центрирующие коэффициенты a_0 и a_1 из (6.20) равны

$$a_0 = 1 - \alpha = 2 - \sqrt{2} \approx 0.59, \quad a_1 = \alpha = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$

и указанные коэффициенты равны соответственно площадям $\text{vol}(\mathbb{T}_0^2)$ и $\text{vol}(\mathbb{T}_1^2)$ областей \mathbb{T}_0^2 и \mathbb{T}_1^2 , изображенных на рис. 6.2. Заметим, что весь тор \mathbb{T}^2 имеет площадь $\text{vol}(\mathbb{T}^2) = 1$.

Как уже было отмечено, раскраска склейки \widehat{W} , определенная в (6.9), несжимаема. Кроме того, в силу (6.10) условие (6.15) из леммы 6.1 выполнено. Поэтому мы можем применить к нашему отображению перекладывания $S_{\widehat{v}}$ предложение 6.1. Вспоминая, что $d_0 = -0.1$, $d_1 = 0.2$, и, следовательно, ширина склейки $|\widehat{W}| = d_1 - d_0 = 0.3$, для отклонений (6.20) получаем двусторонние неравенства

$$\begin{aligned} -0.1 - x_0 &\leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 1.2 - x_0, \\ x_0 - 1.2 &\leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 + 0.1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

и общие неравенства

$$|\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1.3, \quad |\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1.3 \quad (6.22)$$

для любой начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ из тора \mathbb{T}^2 и всех $i = 0, 1, 2, \dots$

§7. Средние значения функции отклонения

7.1. μ -допустимые перекладывания развертки тора. Определим для функции отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$, введенной в (5.3), ее *среднее значение*

$$\langle \delta_k(\widehat{\mathbf{x}}_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i \leq N-1} \delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \quad (7.1)$$

в случае, если предел (7.1) существует.

Пусть $k = 0$. Подставляя для отклонения его значение $\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = x_i - x_0$ из формулы (5.4), имеем

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i \leq N-1} \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i \leq N-1} \text{pr}(S_{\widehat{v}}^i(\widehat{\mathbf{x}}_0)) - x_0. \quad (7.2)$$

Здесь в правой части равенства (7.2) мы вместо x_i подставили его значение $x_i = \text{pr}(\mathbb{S}_{\widehat{v}}^i(\widehat{\mathbf{x}}_0)) = \text{pr}(S_{\widehat{v}}^i(\widehat{\mathbf{x}}_0))$ из равенства (5.5).

Далее мы хотим свести предельное значение суммы из правой части равенства (7.2) к некоторому интегралу по развертке тора \widehat{T} . Такой переход хорошо известен для строгого эргодических преобразований: гомеоморфизмов S компактных метрических пространств X с единственной инвариантной борелевской мерой μ (см. обзор [17]). Относительно отображений перекладывания многомерных областей известны лишь частные случаи их минимальности. Никаких результатов об их свойствах строгой эргодичности автору не известно. Поэтому ниже мы введем два поступающих понятия, гарантирующие выполнимость эргодических свойств

у интересующих нас перекладываний $S_{\hat{v}}$. Еще одним обстоятельством, побуждающим к такому временному обходу эргодических теорем, является строение самой развертки тора \hat{T} , которая может быть даже и не интегрируема.

Будем говорить, что отображение перекладывания развертки $S_{\hat{v}} : \hat{T} \rightarrow \hat{T}$ из теоремы 2.1 является μ -допустимым, если найдется мера $\mu(\hat{x})$ на развертке тора \hat{T} такая, что существует интеграл $\int_{\hat{T}} x d\mu(\hat{x})$ и для любой начальной точки $\hat{x}_0 \in \hat{T}$ выполняется следующая формула

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i \leq N-1} \text{pr}(S_{\hat{v}}^i(\hat{x}_0)) = \int_{\hat{T}} x d\mu(\hat{x}), \quad (7.3)$$

где x — координата точки $\hat{x} = (x, x')$ из \hat{T} . Далее меру $\mu(\hat{x})$ будем предполагать нормированной, т.е. $\int_{\hat{T}} d\mu(\hat{x}) = 1$. Существование интеграла из (7.3) зависит от раскраски склейки $\hat{W} = \hat{W}_0 \sqcup \hat{W}_1$ из (2.11). Такую раскраску будем называть *интегрируемой* относительно меры $\mu(\hat{x})$, если существуют ниже выписанные интегралы и выполняется равенство

$$\int_{\hat{W}_0} x d\mu(\hat{x}) + \int_{\hat{W}_1} x d\mu(\hat{x}) = \int_{\hat{W}} x d\mu(\hat{x}). \quad (7.4)$$

Из построения (2.7) развертки тора \hat{T} и определения (7.4) интегрируемости раскраски склейки $\hat{W} = \hat{W}_0 \sqcup \hat{W}_1$ следует существование интеграла из правой части формулы (7.3).

Теорема 7.1. *Пусть на развертке тора \hat{T} существует мера μ , для которой отображение перекладывания развертки $S_{\hat{v}} : \hat{T} \rightarrow \hat{T}$, определенное в (2.13), будет μ -допустимым (7.3). Тогда для любой начальной точки \hat{x}_0 из \mathbb{T}^2 средние значения $\langle \delta_k(\hat{x}_0) \rangle$ для функции отклонения $\delta_k(i, \hat{x}_0)$, определенные в (7.1), существуют и вычисляются по формулам*

$$\langle \delta_0(\hat{x}_0) \rangle = \int_{\hat{T}} x d\mu(\hat{x}) - x_0, \quad \langle \delta_1(\hat{x}_0) \rangle = x_0 - \int_{\hat{T}} x d\mu(\hat{x}), \quad (7.5)$$

где $x_0 = \text{pr}(\hat{x}_0)$ — проекция (3.25) начальной точки $\hat{x}_0 \in \mathbb{T}^2$ на прямую \mathbb{R} .

Доказательство. Первая формула в (7.5) следует из определения в (7.1) для среднего значения $\langle \delta_k(\hat{x}_0) \rangle$ и из формул (7.2), (7.3). Для доказательства второй формулы в (7.5) заметим, что в силу формул (5.4) между отклонениями $\delta_0(i, \hat{x}_0)$ и $\delta_1(i, \hat{x}_0)$ имеется соотношение $\delta_1(i, \hat{x}_0) = -\delta_0(i, \hat{x}_0)$, из которого вытекает соответствующее соотношение между средними значениями $\langle \delta_1(\hat{x}_0) \rangle = -\langle \delta_0(\hat{x}_0) \rangle$. \square

7.2. Средние значения отклонений для сдвигов тора. Пусть переводывающее отображение $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}} = \mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ будет сдвигом $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}(\hat{x}) \equiv \hat{x} + \hat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^2$ тора \mathbb{T}^2 на вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$. Предположим, что вектор $\hat{\alpha}$ является максимально иррациональным (см. п. 5.4). В качестве меры $\mu(\hat{x})$ на развертке тора $\hat{T} \subset \mathbb{R}^2$ можно взять обычную меру площади или, иначе, — меру Лебега. Таким образом, в данном случае имеем

$$d\mu(\hat{x}) = dxdx', \quad (7.6)$$

где x, x' — координаты точки $\hat{x} = (x, x')$ на плоскости \mathbb{R}^2 .

Чтобы сдвиг тора $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ был μ -допустимым для меры (7.6), нужно потребовать интегрируемость раскраски склейки $\hat{W} = \hat{W}_0 \sqcup \hat{W}_1$ из (1.12), т.е. выполнения равенства

$$\int_{\hat{W}_0} x dx dx' + \int_{\hat{W}_1} x dx dx' = \int_{\hat{W}} x dx dx', \quad (7.7)$$

при этом предполагается, что интегралы слева существуют.

Предложение 7.1. Пусть сдвиг $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ тора \mathbb{T}^2 будет максимально иррациональным и пусть раскраска склейки $\hat{W} = \hat{W}_0 \sqcup \hat{W}_1$ из (1.12) удовлетворяет условию (7.7). Тогда для любой начальной точки $\hat{\mathbf{x}}_0$ из \mathbb{T}^2 средние значения $\langle \delta_k(\hat{\mathbf{x}}_0) \rangle$, определенные в (7.1), существуют и вычисляются по формулам

$$\langle \delta_0(\hat{\mathbf{x}}_0) \rangle = \int_{\hat{T}} x dx dx' - x_0, \quad \langle \delta_1(\hat{\mathbf{x}}_0) \rangle = x_0 - \int_{\hat{T}} x dx dx', \quad (7.8)$$

где $x_0 = \text{pr}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ — проекция начальной точки $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{T}^2$ на прямую \mathbb{R} .

Доказательство. Из условия (7.7) и конструкции (2.7) развертки тора \hat{T} получаем существование интеграла $\int_{\hat{T}} x d\mu(\hat{x})$. Отсюда и максимальной иррациональности сдвига тора $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$ следует выполнение формулы (7.3), из которой и равенств (7.1), (7.2) выводим формулы (7.8). \square

Замечание 7.1. Из геометрических соображений следует, что значение интеграла

$$c_{\hat{T},x} = \int_{\hat{T}} x dx dx' \quad (7.9)$$

из формул (7.8) есть не что иное, как проекция $c_{\hat{T},x} = \text{pr}(c_{\hat{T}})$ центра тяжести $c_{\hat{T}}$ развертки тора \hat{T} на прямую \mathbb{R} .

Замечание 7.2. Формулы (7.8) остаются справедливыми и для немаксимально иррациональных сдвигов $\mathbb{S}_{\hat{\alpha}}$, когда ранг вектора сдвига $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\hat{\alpha}) \leqslant 1$. Нужно лишь вернуться к общим формулам из теоремы 7.1 и переписать их в виде

$$\langle \delta_0(\hat{\mathbf{x}}_0) \rangle = \int_{\hat{O}} x d\mu(\hat{x}) - x_0, \quad \langle \delta_1(\hat{\mathbf{x}}_0) \rangle = x_0 - \int_{\hat{O}} x d\mu(\hat{x}). \quad (7.10)$$

Здесь в интегралах развертка тора \widehat{T} заменена на $\widehat{O} = \overline{\text{Orb}}(\widehat{x}_0, S_{\widehat{v}})$ — замыкание орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, S_{\widehat{v}})$. В качестве меры $\mu(\widehat{x})$ в интегралах из (7.10) выбирается нормированная мера длины в случае $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\widehat{\alpha}) = 1$ и — нормированная дискретная мера, если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\widehat{\alpha}) = 0$. При этом, как и в формулах (7.9), значения $c_{\widehat{O}, x}$ интегралов из (7.10) можно интерпретировать как проекцию центра тяжести \widehat{O} на прямую \mathbb{R} .

Список литературы

- [1] Athreya J., Boshernitzan M., *Ergodic properties of compositions of interval exchange maps and rotations*, Nonlinearity **26** (2013), no. 2, 417–423.
- [2] Haller H., *Rectangle exchange transformations*, Monatsh. Math. **91** (1981), no. 3, 215–232.
- [3] Hecke E., *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **1** (1921), no. 1, 54–76.
- [4] Ferenczi S., *Bounded remainder sets*, Acta Arith. **61** (1992), no. 4, 319–326.
- [5] Liardet P., *Regularities of distribution*, Compositio Math. **61** (1987), no. 3, 267–293.
- [6] Oren I., *Admissible functions with multiple discontinuities*, Proc. Special Sem. Topology. Vol. 1 (Mexico City, 1980/1981), Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City, 1981, pp. 217–230.
- [7] Rauzy G., *Ensembles à restes bornés*, Sem. Number Theory, 1983–1984 (Talence, 1983/1984), Exp. No. 24, Univ. Bordeaux, Talence, 1984.
- [8] Szűsz R., *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **5** (1954), 35–39.
- [9] Weyl H., *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. **77** (1916), no. 3, 313–352.
- [10] Вороной Г. Ф., *Собрание сочинений*. Т. 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
- [11] Журавлев В. Г., *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
- [12] Журавлев В. Г., *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей*, Алгебра и анализ **24** (2012), №1, 95–130.
- [13] Журавлев В. Г., *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
- [14] Журавлев В. Г., *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова*, Алгебра и анализ **24** (2012), №4, 97–136.

- [15] Журавлев В. Г., *Многогранники ограниченного остатка*, Математика и информатика. 1, К 75-летию со дня рожд. А. А. Карапубы, Совр. пробл. матем., вып. 16, МИАН, М., 2012, с. 82–102.
- [16] Журавлев В. Г., *Многоцветные динамические разбиения торов на множества ограниченного остатка*, Изв. РАН. Сер. мат. (2014) (в печати).
- [17] Козлов В. В., *Весовые средние, равномерное распределение и строгая эргодичность*, Успехи мат. наук **60** (2005), №6, 115–138.
- [18] Федоров Е. С., *Начала учения о фигурах*, Изд-во АН СССР, М., 1953.

Владимирский
государственный университет
600024, Владимир
пр. Строителей, 11
Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 1 сентября 2014 г.