

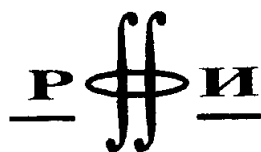
ISSN 2226-8383

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Чебышевский фонд

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Посвящается 85-летию со дня рождения профессора
Сергея Сергеевича Рышкова



ТОМ XVI

ВЫПУСК 2 (54)

Тула 2015

ББК 22.13
Ч34 Журнал включен в список ВАК "Рецензируемые научные издания (текущие номера которых или их переводные версии входят в международные базы данных и системы цитирования), включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук" от 25.05.2015

Главный редактор В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь С. А. Пихтильков (Россия, г. Оренбург)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва), В. Н. Безверхний (Россия, г. Тула),
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск), М. М. Глухов (Россия, г. Москва),
Е. С. Голод (Россия, г. Москва), С. А. Гриценко (Россия, г. Москва),
Н. М. Добровольский (зам. гл. редактора, Россия, г. Тула),
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль), А. Р. Есаян (Россия, г. Тула),
А. М. Зубков (Россия, г. Москва), В. И. Иванов (Россия, г. Тула),
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград), В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов),
М. А. Королёв (Россия, г. Москва), В. Н. Латышев (Россия, г. Москва),
А. В. Михалёв (зам. гл. редактора, Россия, г. Москва),
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск), Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва),
А. И. Нижников (зам. гл. редактора, Россия, г. Москва),
А. А. Фомин (Россия, г. Москва), В. Г. Чирский (Россия, г. Москва),
А. Л. Шмелькин (Россия, г. Москва), В. И. Берник (Беларусь, г. Минск),
М. Деза (Франция, г. Париж), П. О. Касьянов (Украина, г. Киев),
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс), З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Чебышевский сборник: Науч.-теорет. журн. — Т. XVI. Вып. 2(54). —
Ч34 Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. — 336 с.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики, а также информационные материалы.

ББК 22.13

УДК 511

*Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ,
грант № 15-01-20264г.*

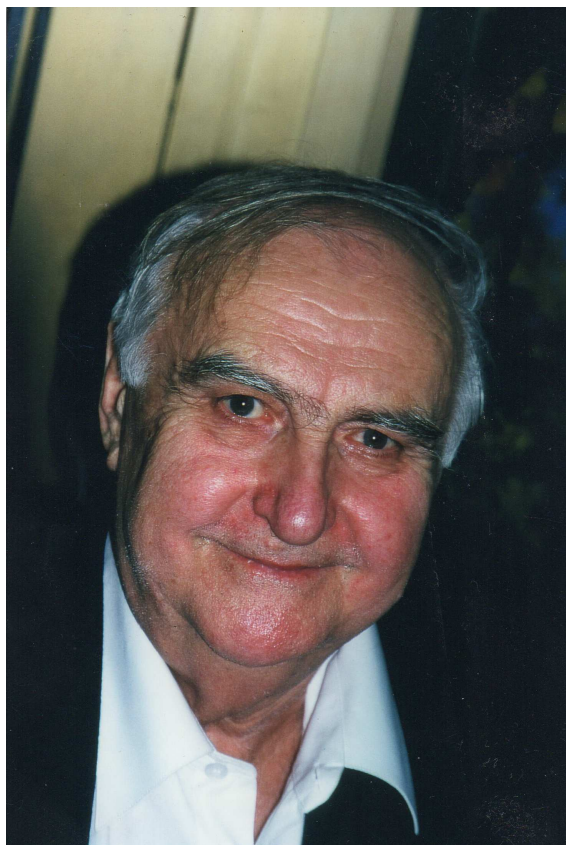
Журнал распространяется в Российской Федерации и странах СНГ.

Подписка по каталогу «Пресса России» — подписной индекс 10642.

© Тульский государственный
педагогический университет
им. Л. Н. Толстого, 2015

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника
посвящен 85-летию со дня рождения
выдающегося российского математика,
доктора физико-математических наук, профессора
Сергея Сергеевича Рышкова.



В данный выпуск по решению редколлегии и программного комитета включены избранные доклады на XIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора
Сергея Сергеевича Рышкова
[25—30 мая 2015 г.]
Часть I

СОДЕРЖАНИЕ

Том 16 Выпуск 2

Письмо украинских коллег	6
А. А. Абросимова BR -множества	8
А. Б. Батхин Структура дискриминантного множества вещественного многочлена	23
А. Д. Брюно Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби	35
В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова Универсальная формальная группа, определяющая эллиптическую функцию уровня 3	66
М. М. Деза, Е. И. Деза, М. Дютур Сикирич Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками	79
В. Г. Журавлев Многоцветные множества ограниченного остатка	93
М. Е. Зеленова О решении полиномиальных уравнений в произвольных порядках	117
А. В. Крот, А. М. Райгородский О реализации случайных графов графами расстояний и диаметров в евклидовых пространствах	133
В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев К задаче численного определения нетривиальных нулей L -функций Дирихле числовых полей	144
Ф. М. Малышев Базисы рекуррентных последовательностей	155
Ю. Р. Пестова О новых свойствах некоторых многообразий почти полиномиального роста	186
Л. Н. Ромакина Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны	208
В. И. Субботин О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников	222
В. Н. Чубариков Арифметические суммы и гауссова теорема умножения .	231
R. Shamoyan, S. Kurilenko Traces and distances in analytic function spaces in C^n and Martinelly – Bochner integrals	254

М. И. Штогрин	О рациональных направлениях в плоской решетке	273
ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ		
Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян	Создание геометрических чертежей в TikZ	282
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ		
М. Б. Челноков	Пространственно-временная инверсия и временной хаос все-ленной	296
ПОЗДРАВЛЕНИЯ ЮБИЛЯРАМ		
60 лет Михаилу Владимировичу Зайцеву		308
60 лет Сергею Петровичу Мищенко		310
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ		311
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS		314
РЕДКОЛЛЕГИЯ		317
THE EDITORIAL BOARD		321
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ		325
TABLE OF CONTENTS		335

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

ПИСЬМО УКРАИНСКИХ КОЛЛЕГ



Глубокоуважаемый Николай Михайлович!

Спасибо за приглашение принять участие в конференции, посвященной памяти Сергея Сергеевича Рышкова.

Мы хорошо помним Сергея Сергеевича, его самое активное участие в работе первых трех киевских конференций, посвященных влиянию научного наследия Георгия Вороного на развитие современной науки (1993, 1998 и 2003 годы). Невзирая на состояние здоровья, он считал своим долгом принять участие в этих конференциях, а также в наших традиционных поездках на малую родину Георгия Вороного — в с. Журавка (в 175 кв. от Киева), где, согласно завещанию ученого, он похоронен.

В 2003 году Сергей Сергеевич преподнес нам, организаторам этих конференций, замечательный подарок — найденные им в рабочем столе проф. Бориса Делоне подлинные рукописи Г. Вороного (рукописи двух его статей, написанных в Гейдельберге в 1904 году и фрагмент его дневниковых записей в октябре 1902 года, сделанных Георгием Феодосиевичем во время его пребывания в С.-Петербурге в качестве представителя Варшавского университета в Комиссии по реформе университетов).

Институт рукописей при Национальной библиотеке Украины имени В. Вернадского имеет специальный фонд Георгия Вороного. В этот фонд и были переданы подаренные рукописи. Содержание этих рукописей отражено в публикации С. С. Рышкова (совместной с его ученицей Е. Большаковой) в Чебышевском сборнике, том 4, вып. 7.

Мы помним и высоко ценим этот благородный поступок Сергея Сергеевича. Пересылаю в дополнении фото (автор — Лена Большакова) выступления С. С. Рышкова на открытии конференции 2003 года, где он рассказывает о своей находке и передает найденные рукописи.

К сожалению, приехать на конференцию никто не сможет.

С уважением, Сытая Галина Николаевна, секретарь киевских конференций.

Поступило 1.02.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.34

BR-МНОЖЕСТВА

А. А. Абросимова (г. Владимир)

Аннотация

Владимирская школа теории чисел долгое время занималась исследованием квазипериодических разбиений. Постепенно отсюда появилась задача о равномерном распределении точек на торе, при этом возникала необходимость в точных оценках остаточных членов этого распределения.

Область исследования работы относится к разделу теории чисел, занимающемуся изучением множеств ограниченного остатка. Актуальность для теории чисел изучения множеств ограниченного остатка и их многомерных динамических модификаций обусловлена современной тенденцией перехода от классических арифметических числовых и функциональных структур к нелинейным арифметическим структурам. Динамические системы на множествах ограниченного остатка порождают хорошо сбалансированные слова, аналогичные словам Штурма и Рози. Значимость же сбалансированных слов объясняется их многочисленными применениями в таких областях, как динамические системы, теория кодов, теория коммуникации и задачи оптимизации, теория языков и лингвистика, теория распознавания и статистическая физика.

Целью работы является построение новых многомерных множеств ограниченного остатка и нахождение точных оценок остаточного члена для этих множеств. Естественным было начать решение с двумерного тора. В результате были построены три семейства трехпараметрических двумерных множеств ограниченного остатка на основе гексагональных разверток двумерного тора. Теперь в распоряжении автора находятся одномерные и двумерные множества ограниченного остатка. Возникает вопрос: нельзя ли на основе уже известных множеств, построить новые множества больших размерностей. Так, с использованием произведения торических разверток, строятся четыре семейства четырехпараметрических трехмерных множеств ограниченного остатка, на основе гексагональных призм-разверток трехмерного тора, полученных при умножении полуинтервалов Гекке и двумерных гексагональных разверток. Для всех построенных множеств определены точные оценки остаточного члена и доказана многомерная теорема Гекке, найдены средние значения отклонений, а в двумерном случае построена оптимизация границ отклонений.

В статье приведен обзор основных результатов автора по множествам ограниченного остатка.

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, распределение дробных долей, развертка тора.

Библиография: 26 наименований.

BR-SETS

A. A. Abrosimova (Vladimir)

Abstract

Vladimir school of number theory was studied quasiperiodic tilings for a long time. The uniform distribution problem of fractional parts on the torus come from here. It is important to find exact estimates of the remainder for this distribution.

The paper is devoted to the important problem of number theory: bounded remainder sets. Relevance of the problem caused by the transition from the classical numerical and functional arithmetic structures to nonlinear arithmetic structures. Dynamical systems on bounded remainder sets generate balanced words, similar to words Sturmian and Rauzy words. Balanced words are important, for dynamical systems, coding theory, theory of communications and optimization problems, theory of languages and linguistics, recognition theory, statistical physics, etc.

The purpose of our research is construction of multidimensional bounded remainder sets and finding exact estimates of the remainder for this sets. The solution to this problem we start from two-dimensional case. We construct three classes of three-parameter two-dimensional bounded remainder sets. For their construction, we use hexagonal toric development. Now we know bounded remainder intervals, obtained by Hecke, and two-dimensional bounded remainder sets. There is the question: can we construct a new multi-dimensional sets using known sets? We construct four classes of four-parameter three-dimensional bounded remainder sets. We used for this the multiplication of toric developments. By multiplication of Hecke's intervals and two-dimensional hexagonal developments we obtain three-dimensional hexagonal Fedorov's prisms-developments. For all described sets we give exact estimates of the remainder and prove generalization of Hecke's theorem to the multidimensional case. Also we obtain average values of the remainders, and find sets with minimal value of the remainder.

This paper is an expository of the author's main results on bounded remainder sets.

Keywords: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development.

Bibliography: 26 titles.

Введение

В 1916 г. Г. Вейль [1] доказал критерий равномерного распределения. Пример последовательности равномерно распределенной по модулю 1 — это последовательность дробных долей $\{i\alpha\}_{i \geq 1}$ при иррациональном α .

Рассмотрим D -мерный тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$, где L — полная решетка размерности D над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть на торе $\mathbb{T}^D$ задано преобразование S_α — сдвиг тора на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Выберем на торе начальную точку x_0 , тогда многократный сдвиг тора S_α^j на вектор α порождает на нем орбиту $Orb_{x_0}(\alpha)$ точки x_0 . Выберем теперь на торе $\mathbb{T}^D$ некоторую область T .

Определим *считающую функцию* $r(i) = \#\{j : 0 \leq j < i, S_\alpha^j \in T\}$ как количество попаданий точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ в область $T \in \mathbb{T}^D$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D)$ иррационален, если его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D$ и 1 линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Для иррационального вектора α точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ всюду плотно и равномерно заполняют весь тор, то есть для $r(i)$ справедлива асимптотическая формула

$$r(i) = i \operatorname{Vol}(T) + \delta(i), \quad (1)$$

где $\operatorname{Vol}(T)$ — объем области T , а $\delta(i) = o(i)$ — остаточный член формулы (1) или отклонение считающей функции $r(i)$ от ожидаемой величины $i \operatorname{Vol}(T)$.

Множество T называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set), если существует такая константа C , что выполняется неравенство

$$|\delta(\alpha, i, T)| \leq C$$

для всех i .

1. Одномерные BR-множества

В одномерном случае первые примеры BR-множеств были построены в 1921 г. Э. Гекке [2]. Это были интервалы $X \subset [0, 1)$ длины $0 < |b + a\alpha| < 1$, где $a \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Гекке доказал, что они будут являться интервалами ограниченного остатка и получил для них следующую оценку остаточного члена

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq |a|.$$

П. Эрдеш [3] предположил, что любой интервал ограниченного остатка удовлетворяет условию, полученному Гекке. Полное описание одномерных интервалов ограниченного остатка было найдено Г. Кестеном [4] в 1966 г. В 2007 г. В. Г. Журавлев на основе квазипериодических разбиений Фибоначчи построил первое бесконечное семейство интервалов ограниченного остатка, длины

которых стремится к нулю, а отклонения ограничены некоторой абсолютной константой [5]. Так же в 2007 г. для интервалов Гекке были получены неуклучиваемые по порядку оценки остаточного члена [6], а в работе [7] были найдены точные значения максимума и минимума остаточного члена. В [8] были описаны одномерные множества ограниченного остатка, полученные объединением нескольких интервалов, а явные оценки остаточного члена для этого случая были получены в работе [9].

2. Многомерные BR-множества

Более сложной оказалась задача нахождения множеств ограниченного остатка и определения границ отклонений в многомерном случае.

В двумерном случае первый пример BR-множеств был получен в 1954 г. R. Szűsz [10]. Это было семейство параметрических параллелограммов, для которых выполняется оценка $\delta(i) = O(1)$. Анализ конструкции Szűsz привел P. Liardet [11] к открытию возможной редукции от BR-множеств размерности D к аналогичным множествам размерности $D - 1$.

Другой подход к построению множеств ограниченного остатка обнаружили математики французской школы Ж. Рози [12] и S. Ferenczi [13]. Они связали свойство быть BR-множеством со свойствами отображения первого возвращения. Но получить оценки остаточного члена в двумерном случае так и не удалось. В 2005 г. В. Г. Журавлев получил оценки для фрактальных множеств ограниченного остатка, построенных на основе двумерного разбиения Рози [14].

В 2011 г. В. Г. Журавлев [15] нашел способ построения множеств ограниченного остатка на основе перекладывающихся торических разверток и получил многомерное обобщение теоремы Гекке [16]. Так например, в одномерном случае эта идея реализовывается так: единичный полуинтервал $T^1 = [0, 1)$ может быть разбит на два полуинтервала $T_0^1 = [0, 1 - \alpha)$ и $T_1^1 = [\alpha - 1, 1)$, перекладывание которых соответствует повороту окружности единичной длины $\mathbb{T}^1$ на угол α . В работе [17] им описан общий подход к построению множеств ограниченного остатка на основе многогранников Е. С. Федорова для трехмерного случая, параллелоэдров Г. Ф. Вороного для четырехмерного случая, а для размерности $D \geq 5$ с помощью вытягивания многомерного куба. Эта конструкция обобщается на все размерности.

2.1. Двумерные BR-множества

В 2011 г. автору в [18] удалось построить трехпараметрические множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся шестиугольных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$. В этом случае развертка $T^2(c)$ разбивается на три перекладывающиеся области $T_k^2, k = 0, 1, 2$, являющиеся множествами ограниченного остатка.

Развертка двумерного тора — это фундаментальная область для квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$, это значит, что этой фигурой можно заполнить всю плоскость сдвигая ее на векторы квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$. Чаще всего в качестве развертки двумерного тора выбирают квадрат и долгое время предпринимались попытки построить множества ограниченного остатка на основе квадрата, но это не принесло положительных результатов. Однако, можно в качестве развертки выбрать шестиугольник с попарно равными и параллельными противоположными сторонами, такая фигура также будет являться фундаментальной областью для квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$.

Любой точке $c = (c_1, c_2)$ из области $C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; \min(|c_1|, |c_2|) \leq 1\}$, где $|\cdot|$ обозначает абсолютную величину, можно поставить в соответствие шестиугольник $T^2(c)$, трансляционно заполняющий всю плоскость. Причем, шестиугольник будет выпуклым, если $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 \leq 1$, и невыпуклый в остальных случаях (рисунок 1).

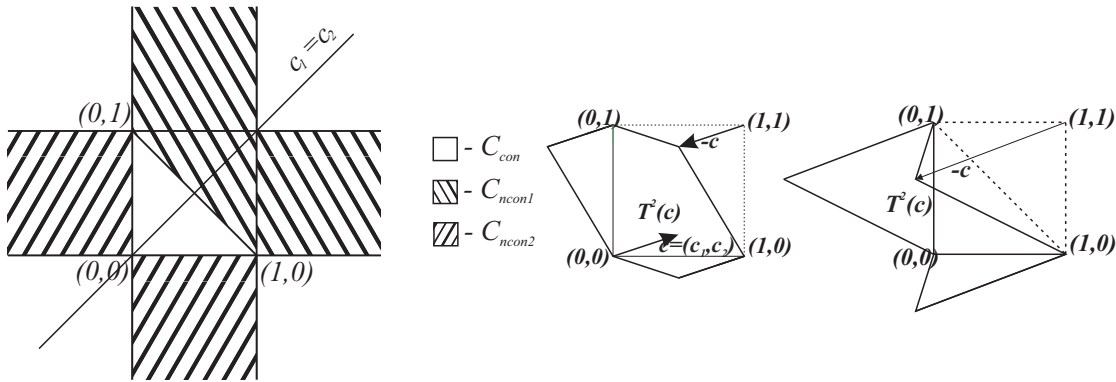


Рис. 1

Координаты вершин полученного шестиугольника $(0, 0)$, $(1 - c_1, -c_2)$, $(1, 0)$, $(1 - c_1, 1 - c_2)$, $(0, 1)$, $(-c_1, 1 - c_2)$. Сдвигая $T^2(c)$ на векторы квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$, можно разбить всю плоскость — значит шестиугольник $T^2(c)$ является разверткой двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Построим вектор $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2) = tc$, где ограничения для параметра t , определяются формой развертки, так, например, $0 < t \leq 1$ в случае выпуклого шестиугольника $T^2(c)$. Отложим теперь вектор α^2 от вершин $(1, 0)$, $(1 - c_1, 1 - c_2)$, $(0, 1)$, соединив концы отложенных векторов, получим разбиение развертки на перекладывающиеся области $T_{k'}^2$, $k' = 0, 1, 2$, две из которых будут являться параллелограммами, а область T_0^2 — шестиугольником (см. рисунок 2). В работе автора [19] доказано, что перекладывание областей T_k^2 соответствует сдвигу тора $\mathbb{T}^2$ на вектор α^2 . Построенные множества $T_{k'}^2$, $k' = 0, 1, 2$ являются множествами ограниченного остатка.

Для построенных множеств в случаях сдвига тора $\mathbb{T}^D$ на иррациональный вектор α^D , $D = 2, 3$, найдены точные оценки остаточного члена $\delta_k(i, x_0)$, $k =$

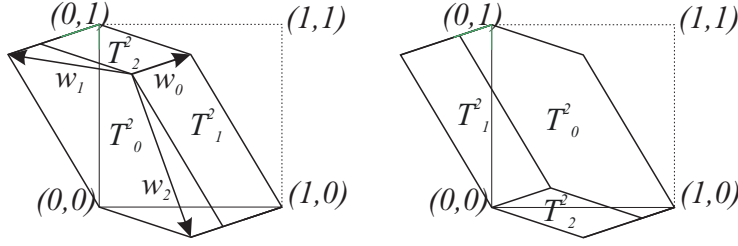


Рис. 2

$0, 1, \dots, D$ [19]. В случае сдвига на вектор $\beta^D = \frac{1}{h}(\alpha^D + d)$, где $h \in \mathbb{N}$, а d вектор из решетки $\mathbb{Z}^2$, получены эффективные оценки границ отклонений $\delta_k(i)$, $k = 0, 1, \dots, D$ и доказано многомерное обобщение теоремы Гекке [20].

В двумерном случае для выпуклой шестиугольной развертки $T^2(c)$ доказана следующая теорема [18] и следствие из нее [20].

ТЕОРЕМА 1. Пусть дан сдвиг тора S_{α^2} на вектор α^2 , и α^2 - иррациональный, т. е. числа $\alpha_1^2, \alpha_2^2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области $\mathbb{T}_k^2 : \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \sqcup \mathbb{T}_2^2$, а его развертка $T^2(c)$ задана параметром $c = (c_1, c_2) \in C_{\text{con}}$. Тогда для отклонений выполняются точные неравенства:

$$\begin{aligned} -\sigma(x_0) &\leq \delta_0(i, x_0) \leq 2 - \sigma(c) - \sigma(x_0); \\ x_{01} - 1 &\leq \delta_1(i, x_0) \leq x_{01} + c_1; \\ x_{02} - 1 &\leq \delta_2(i, x_0) \leq x_{02} + c_2, \end{aligned}$$

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. (двумерное обобщение теоремы Гекке) Если в качестве вектора сдвига выбрать вектор $\beta^2 = \frac{1}{h}(\alpha^2 + l)$, где $h \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}^2$, то все границы отклонений $\delta_k(i, x_0)$ увеличатся в h раз.

Аналогичные теоремы доказаны для случая двумерной развертки тора, представляющей собой невыпуклый шестиугольник. Заметим, что границы отклонений определяются лишь формой развертки $T^2(c)$ и выбором начальной точки x_0 , в частности в случае теоремы 1, если в качестве начальной точки выбрать точку $x_0 = (0, 0)$, то границы отклонения $\delta_1(i, x_0)$ определяются размерами развертки $T^2(c)$ в направлении вектора l_1 , границы отклонения $\delta_2(i, x_0)$ — размерами развертки $T^2(c)$ в направлении вектора l_2 и отклонения $\delta_0(i, x_0)$ — в направлении вектора l_0 . Таким образом, сами границы развертки не обязательно должны быть прямыми, а могут быть любыми линиями вплоть до фрактальных [21], при этом обязательным условием остается соответствие противоположных сторон.

Также в работе [19] автора найдены средние значения отклонений для двумерных множеств. Средние значения отклонений в одномерном случае были найдены В. Г. Журавлевым в [22]. Также в 2011 г. А. В. Шутов построил одно

семейство двумерных множеств ограниченного остатка на основе шестиугольной развертки тора [9]. Множества, описанные в работе [18], включают в себя случаи, рассмотренные Шутовым и Szűsz, как частные.

Для каждого $\delta_k(i, x_0)$ определено среднее отклонение

$$\langle \delta_k(x_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i, x_0),$$

и найдены его значения [19].

ТЕОРЕМА 2. Пусть дан сдвиг тора на вектор α^2 . Пусть вектор α^2 иррациональный, т. е. числа $\alpha_1^2, \alpha_2^2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Тогда для любого $k' = 0, 1, 2$ существуют средние значения отклонений

$$\langle \delta_k(x_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i, x_0),$$

и они соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle \delta_0(x_0) \rangle &= 1 - \frac{c_1 + c_2}{2} - x_{01} - x_{02}, \\ \langle \delta_1(x_0) \rangle &= x_{01} - \frac{1 - c_1}{2}, \\ \langle \delta_2(x_0) \rangle &= x_{02} - \frac{1 - c_2}{2}. \end{aligned}$$

2.2. Оптимизация границ отклонений

В работах автора [23], [24] была построена оптимизация границ отклонений для двумерных множеств на основе шестиугольных разверток двумерного тора.

Если развертка тора T^D задана оптимальным образом и $k_j = k$, когда $S_{\alpha^D}^j(x_0) \in \mathbb{T}_k$, где x_0 начальная точка орбиты, заданной j сдвигами $S_{\alpha^D}(x_0)$ тора на вектор α^D . Тогда любое бесконечное слово $w(x_0) = k_0 k_1 \dots k_D$, записанное в алфавите $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, D\}$, является κ -сбалансированным, т. е. у произвольных одинаковой длины факторов (подслов) u, v слова $w(x_0)$ разность вхождений любой буквы $k \in \mathcal{A}$ не превышает κ [25]. Слова $w(x_0)$ представляют собою естественное обобщение слов Штурма над двухбуквенным алфавитом, являющихся 1-сбалансированными словами и получающихся вращением окружности.

В двумерном случае построена оптимизация границ отклонений $\delta_k(i)$, $k = 0, 1, 2$ для случая сдвига тора на вектор α^2 и начальной точки $x_0 = (0, 0)$ орбиты $Orb_{x_0}(\alpha^2)$. В этом случае границы отклонений для областей $T_{k'}^2$ равны

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta_0(i) \leq 2 - c_1 - c_2; \\ -1 &\leq \delta_1(i) \leq c_1; \\ -1 &\leq \delta_2(i) \leq c_2, \end{aligned}$$

Возникает естественный вопрос: как сделать границы отклонений как можно меньше? Для достижения этой цели можно изменять параметры c_1 и c_2 , но,

уменьшая границу одного отклонения, мы неминуемо увеличиваем границу для другого, поэтому необходим параметр, связывающий все три отклонения. Чтобы разрешить эту проблему, будем рассматривать отклонения $\delta_k(i)$ как координаты трехмерного вектора $x = (x_0, x_1, x_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, а в качестве параметра, связывающего все три отклонения, выберем метрику трехмерного пространства $d_\theta(x)$. Будем рассматривать метрики вида $d_\theta(x) = (|x_0|^\theta + |x_1|^\theta + |x_2|^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$, где $1 \leq \theta \leq \infty$.

Назовем $\Delta_\theta(c) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_2(\delta(i))$ верхней границей векторного отклонения $\delta(i)$ в метрике $d_\theta(x)$ при фиксированном c . Тогда $\Delta_\theta = \inf_{c \in C_{con}} \Delta_\theta(c)$ — нижняя граница $\Delta_\theta(c)$ по всем c из области C .

Если выбрать $\theta = 2$, то получим естественную евклидову метрику $d_2(x) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$.

Относительно величины нижней границы $\Delta_2(c)$ в метрике $d_2(x)$ доказана следующая теорема [23].

ТЕОРЕМА 3. Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x , и пусть его длина $d_2(x)$. Тогда, если $c \in C_{con}$, для Δ_2 справедливы следующие равенства:

$$\Delta_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Полученное равенство достигается при $c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, а $C_{con} = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geq 0, c_1 + c_2 \leq 1\}$ и означает, что рассматривается не вся область C , а только точки, порождающие выпуклые шестиугольники. Аналогичные результаты доказаны для невыпуклых шестиугольников в данной метрике, а также для всех шестиугольников в метриках $d_1(x)$ и $d_\infty(x)$.

2.3. Трехмерные BR-множества

В работах [20], [26] автор описал метод построения трехмерных множеств ограниченного остатка на основе произведения торических разверток, впервые определенном в [15]. В данном случае рассматривалось произведение перекладывающихся единичных интервалов $T^1 = T_0^1 \cup T_1^1$ и шестиугольных разверток $T^2(c)$, построенных в [18]. Были получены новые перекладывающаяся развертки размерности $D = 3$, геометрически являющиеся шестиугольными призмами Е. С. Федорова. В работе также доказано трехмерное обобщение теоремы Гекке.

Для построения трехмерных BR-множеств автор использует $\otimes_k$ -произведение торических разверток, впервые описанное в [15], в данном случае произведение шестиугольной развертки $T^2(c)$ и единичного перекладывающегося полуинтервала T^1 . Как множество, произведение перекладывающихся разверток совпадает с прямым произведением множеств, и в данном случае образует шестиугольную призму Е. С. Федорова, которая трансляционно заполняет все пространство, а значит является разверткой трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$. Но помимо выше сказанного, $\otimes_k$ -произведение задает и разбиение новой развертки на

множества ограниченного остатка, причем в зависимости от выбора параметра k мы можем получать пять различных видов разбиений. Это произведение не является коммутативным. В случае, когда на первом месте в k -произведении стоит полуинтервал T^1 , получим разбиение развертки на две шестиугольные призмы и два параллелепипеда (см. рисунок 3), в противном случае разбиение осуществляется на три параллелепипеда и шестиугольную призму (см. рисунок 4).

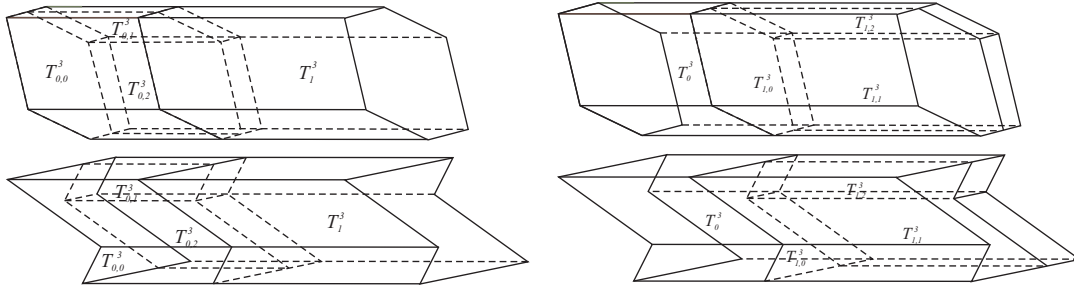


Рис. 3

В трехмерном случае для 0-произведения полуинтервала T^1 и выпуклой шестиугольной развертки $T^2(c)$ получены следующие оценки остаточных членов.

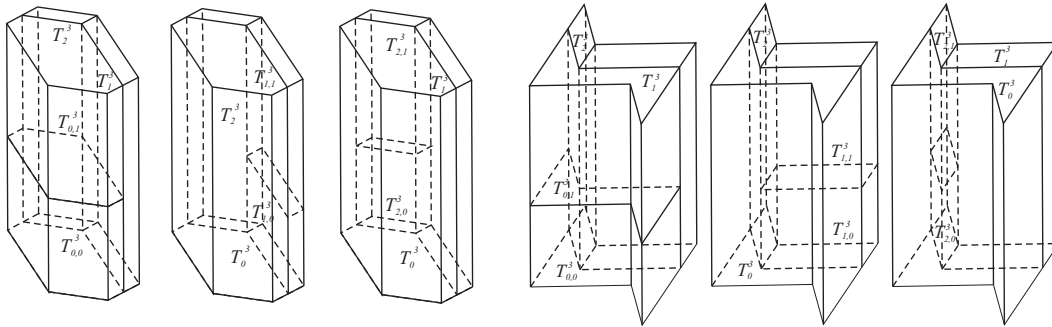


Рис. 4

ТЕОРЕМА 4. [20] Пусть задан трехмерный тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ с разбиением $T^3_1 \sqcup T^3_{0,0} \sqcup T^3_{0,1} \sqcup T^3_{0,2}$, которое задается произведением $T^1 \otimes_0 T^2(c)$. Пусть кроме того задан иррациональный вектор γ^0 сдвига тора $\mathbb{T}^3$, тогда для отклонений $\delta_1(i, x_0), \delta_{0,m}(i, x_0), m = 0, 1, 2$ справедливы точные неравенства.

$$\begin{aligned} -\sigma(x_0) &\leq \delta_{0,0}(i, x_0) \leq 3 - \sigma(c)(t+1) - \sigma(x_0); \\ x_{01} - 1 &\leq \delta_1(i) \leq x_{01}; \\ x_{02} - 1 &\leq \delta_{0,1}(i, x_0) \leq x_{02} + \alpha_1^2 + c_1; \\ x_{03} - 1 &\leq \delta_{0,2}(i, x_0) \leq x_{03} + \alpha_2^2 + c_2. \end{aligned}$$

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. (трехмерное обобщение теоремы Гекке [20]) Если в качестве вектора сдвига выбрать вектор $\gamma' = \frac{1}{h}(\gamma^0 + d)$, где $h \in \mathbb{N}$, d — вектор полной решетки $L^1 \otimes_0 L^2$ для произведения $T^1 \otimes_0 T^2(c)$, то границы отклонений примут вид:

$$\begin{aligned} -h\sigma(x_0) &\leq \delta_{0,0}(i, x_0) \leq h(3 - \sigma(c)(t+1) - \sigma(x_0)); \\ h(x_{01} - 1) &\leq \delta_1(i) \leq hx_{01}; \\ h(x_{02} - 1) &\leq \delta_{0,1}(i, x_0) \leq h(x_{02} + \alpha_1^2 + c_1); \\ h(x_{03} - 1) &\leq \delta_{0,2}(i, x_0) \leq h(x_{03} + \alpha_2^2 + c_2). \end{aligned}$$

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

Аналогичные результаты доказаны для 1-произведения полуинтервала T^1 и шестиугольной развертки $T^2(c)$, а также для 0,1,2-произведений шестиугольной развертки $T^2(c)$ и полуинтервала T^1 .

В трехмерном случае полученные границы отклонений не зависят от выбора вектора α^1 , то есть вектора сдвига тора для первого множителя 0-произведения, эта тенденция наблюдается в случае всех пяти видов произведений и объясняется тем, что геометрически границы отклонений определяются проекциями аффинного образа развертки $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ в ортонормированном базисе, а они не зависят от вектора сдвига тора первого множителя, в данном случае вектора α^1 .

Для всех полученных множеств в трехмерном случае найдены средние значения отклонений $\langle \delta_k(x_0) \rangle$, $k = 0, 1, \dots, D$.

Для каждого $\delta_k(i, x_0)$ определено среднее отклонение

$$\langle \delta_k(x_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i, x_0),$$

и найдены его значения.

ТЕОРЕМА 5. [20] Пусть дан сдвиг тора $\mathbb{T}^3$ на вектор γ^0 . Пусть вектор γ^0 иррациональный. Тогда для областей $T_1^3, T_{0,m}^3, m = 0, 1, 2$ существуют средние значения отклонений

$$\begin{aligned} \langle \delta_1(x_0) \rangle &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_1(i, x_0), \\ \langle \delta_{0,1}(x_0) \rangle &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{0,1}(i, x_0), \end{aligned}$$

и они соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle \delta_{0,0}(x_0) \rangle &= \sigma(x) + \frac{\sigma(c)}{2} - \frac{3}{2}, \\ \langle \delta_1(x_0) \rangle &= \frac{1}{2} - x_{01}, \\ \langle \delta_{0,1}(x_0) \rangle &= \frac{1-c_1}{2} - x_{02}, \\ \langle \delta_{0,2}(x_0) \rangle &= \frac{1-c_2}{2} x_{03}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получены для 1-произведения полуинтервала на шестиугольник и 0, 1, 2-произведений шестиугольника и полуинтервала [20].

Заключение

Описанный автором подход к построению множеств ограниченного остатка может быть распространен на торы произвольной $\mathbb{T}^D$ размерности D , так как произведение перекладывающихся разверток определено и все необходимые элементы найдены. В этом случае разбиение будет осуществляться на области $\mathbb{T}_k^D$, где $k = 0, 1, \dots, D + 1$, каждой из которых для визуализации удобно присвоить не только номер, но и цвет. Так например, произведение двух перекладывающихся гексагональных разверток даст новую перекладывающуюся развертку размерности $D = 4$, разбитую на пять областей.

В настоящее время активизировался интерес к задачам, связанным с множествами ограниченного остатка, целый ряд отечественных и зарубежных авторов работает в этом направлении: В. Г. Журавлев, А. В. Шутов, А. А. Абросимова, A. Haynes, H. Koivusalo, S. Grepstad, N. Lev.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1910. Vol. 30. P. 377–407.
2. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.
3. Erdős P. Problems and results on diophantine approximation // Comp. Math. 1964. Vol. 16. P. 52–65.
4. Kesten H. On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12. P. 193–212.
5. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 89–122.
6. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 5. Вып. 3. С. 112–121.
7. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. 2011. Т. 89. Вып. 1. С. 43–52.

-
8. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Israel J. Math. 1982. Vol. 42. P. 353–360.
 9. Шутов А. В. Двумерная проблема Гекке-Кестена // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 2. С. 151–162.
 10. Szűsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1954. № 5. P. 35–39.
 11. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. Vol. 61. P. 267–293.
 12. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. № 110. P. 147–178.
 13. Ferenczi S. Bounded remainder sets // Acta Arithmetica. 1992. Vol. 61. P. 319–326.
 14. Журавлев В. Г. Разбиения Розы и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.
 15. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 392. С. 95–145.
 16. Журавлев В. Г., Многомерное обобщение теоремы Гекке // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24. Вып. 1. С. 1–33.
 17. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка // Труды математического института имени В.А.Стеклова, Современные проблемы математики. 2012. Вып. 16. С. 82–102.
 18. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4(40). С. 15–23.
 19. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2012. № 5(124). Вып. 26. С. 5–11.
 20. Абросимова А. А. Границы отклонений для трехмерных множеств ограниченного остатка // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2013. № 19(162). Вып. 32. С. 5–21.
 21. Абросимова А. А. Фрактальные множества ограниченного остатка // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых. - Нальчик: ООО "Редакция журнала Эльбрус". 2012. С. 18–21.

22. Журавлев В. Г. Геометризация теоремы Гекке // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. Вып. 1. С. 125–144.
23. Абросимова А. А., Блинов Д. А., Полякова Т. В. Оптимизация границ отклонений для множеств ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. Вып. 1(45). С. 9–17.
24. Абросимова А. А., Блинов Д. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2013. № 26(169). Вып. 33. С. 5–13.
25. Абросимова А. А., Журавлев В. Г. Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12–17 сентября 2011 г.). Саратов: Изд-во Саратов.ун-та. 2011. С.3–4.
26. Абросимова А. А. Произведение торических разверток и построение множеств ограниченного остатка // Ученые записки орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6. Ч. 2. С. 30–37.

REFERENCES

1. Abrosimova, A. A. & Zhuravlev, V. G. 2011, “Hecke theorem generalization to the two-dimensional case and balanced words”, *Tezisy dokladov VIII Mezhdunarodnoy konferentsii “Algebra i teoriya chisel: sovremennyye problemy i prilozheniya”, posvyashchennoy 190-letiyu P. L. Chebysheva i 120-letiyu I. M. Vinogradova (VIII Int. Conf. Proc., dedicated to 190-year anniversary of the P. L. Chebyshev and 120-year anniversary of the I. M. Vinogradov “Algebra and Number Theory: modern problems and applications”)*, Saratov, pp. 3–4.
2. Abrosimova, A. A. 2011, “Bounded remainder sets on a two-dimensional torus”, *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 4(40), pp. 15–23.
3. Abrosimova, A. A. 2012, “Average values for deviation distribution of points on the torus”, *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 5(124), no. 26, pp. 5–11.
4. Abrosimova, A. A. 2012, “Multiplication of toric developments and constructing of bounded remainder sets”, *Uchenye zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Yestestvennyye, tekhnicheskiye i meditsinskiye nauki*, no. 6, part 2, pp. 30–37.

-
5. Abrosimova, A. A. 2012, "Fractal bounded remainder sets", *Materialy II Mezhdunarodnoy konferentsii molodykh uchenykh "Matematicheskoye modelirovaniye fraktal'nykh protsessov, rodstvennyye problemy analiza i informatiki" (II Int. Conf. Proc. of Young Scientists "Mathematical Modeling of Fractal Processes of Analysis and Informatics)*, Nalchik, pp. 18–21.
 6. Abrosimova, A. A., Blinov, D. A. & Polyakova, T. V. 2013, "Optimization of boundaries of remainder for bounded remainder sets on two-dimensional torus", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, no. 1(45), pp. 9–17.
 7. Abrosimova, A. A., 2013, "Boundaries of deviations for three-dimensional bounded remainder sets", *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 19(162), no. 32, pp. 5–21.
 8. Abrosimova, A. A. & Blinov, D. A. 2013, "Boundaries optimization of two-dimensional bounded remainder sets", *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 26(169), no. 33, pp. 5–13.
 9. Erdős, P. 1964, "Problems and results on diophantine approximation", *Comp. Math.*, vol. 16, pp. 52–65.
 10. Ferenczi, S. 1992, "Bounded remainder sets", *Acta Arithmetica*, vol. 61, pp. 319–326.
 11. Hecke, E. 1921, "Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins", *Math. Sem. Hamburg. Univ.*, vol. 5, pp. 54–76.
 12. Kesten, H. 1966, "On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1", *Acta Arithmetica*, vol. 12, pp. 193–212.
 13. Krasilshchikov, V. V. & Shutov, A. V. 2011, "Description and exact maximum and minimum values of the remainder in the problem of the distribution of fractional parts", *Mathematical Notes*, vol. 89, no. 1, pp. 43–52.
 14. Liardet, P. 1992, "Regularities of distribution", *Compositio Math.*, vol. 61, pp. 267–293.
 15. Oren, I. 1982, "Admissible functions with multiple discontinuities", *Israel J. Math.*, vol. 42, pp. 353–360.
 16. Rauzy, G. 1982. "Nombres algébriques et substitutions", *Bull. Soc. Math. France*, no. 110, pp. 147–178.
 17. Shutov, A. V. 2007, "Optimum estimates in the problem of the distribution of fractional parts of the sequence $n\alpha$ ", *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, vol. 5, no. 3, pp. 112–121.

18. Shutov, A. V. 2011, “The two-dimensional Hecke-Kesten problem”, *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no 2, pp. 151–162.
19. Szűsz, R. 1954, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, no. 5, pp. 35–39.
20. Weyl, H. 1910, “Über die Gibbs’sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene” *Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo*, vol. 30, pp. 377–407.
21. Zhuravlev, V. G. 2005, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 322, pp. 83–106.
22. Zhuravlev, V. G. 2007, “One-dimensional Fibonacci tilings”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 89–122.
23. Zhuravlev, V. G. 2010, “Геометризация теоремы Гекке”, *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 11, no. 1. pp. 125–144.
24. Zhuravlev, V. G. 2011, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 392, pp. 95–145.
25. Zhuravlev, V. G. 2012, “Multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts”, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 1–33.
26. Zhuravlev, V. G. 2012, “Bounded remainder polyhedra”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, no. 16, pp. 82–102.

Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
Получено 30.04.2015

УДК 512.77

СТРУКТУРА ДИСКРИМИНАНТНОГО МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГОЧЛЕНА

А. Б. Батхин (г. Москва)

Аннотация

Проблема описания структуры дискриминантного множества вещественного многочлена часто возникает при решении различных прикладных задач, например, при описании множества устойчивости положений равновесия многопараметрических систем, при вычислении нормальной формы системы Гамильтона в окрестности положения равновесия в случае кратных частот. В работе рассматривается структура дискриминантного множества многочлена с вещественными коэффициентами. Предлагается два подхода к его изучению. Первый подход основан на исследовании нулей идеалов, образованных набором субдискриминантов исходного многочлена. Рассмотрены различные способы вычисления субдискриминантов. Во втором подходе предлагается исследовать особые точки дискриминантного множества. Методами компьютерной алгебры показано, что для малых значений степени исходного полинома оба подхода эквивалентны, но первый более предпочтителен из-за меньшего размера идеалов.

Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена. С прикладной точки зрения наибольший интерес представляет описание компоненты коразмерности 1 дискриминантного множества. Именно эта компонента делит пространство коэффициентов на области с одинаковой структурой корней многочлена. Набор компонент различных размерностей дискриминантного множества имеет иерархическую структуру. Каждая компонента большей размерности может рассматриваться как некоторая касательная развертывающая поверхность, образованная линейными многообразиями соответствующей размерности. Роль направляющей при этом выполняет компонента дискриминантного множества, имеющая размерность на единицу меньше и на которой исходный многочлен обладает единственным кратным корнем, а остальные его корни простые. Начиная с одномерного алгебраического многообразия размерности 1, на котором исходный многочлен имеет единственный корень максимальной кратности, на следующем шаге алгоритма получаем описание многообразия, на котором многочлен имеет уже 2 корня — один

простой и один кратный. Повторяя последовательно шаги алгоритма, получаем в итоге параметрическое представление компоненты коразмерности 1 дискриминантного множества.

Приведены примеры дискриминантных множеств кубического многочлена и многочлена четвертой степени.

Ключевые слова: дискриминантное множество, особая точка, рациональная параметризация.

Библиография: 15 названий.

STRUCTURE OF DISCRIMINANT SET OF REAL POLYNOMIAL

A. B. Batkhin (Moscow)

Abstract

The problem of description the structure of the discriminant set of a real polynomial often occurs in solving various applied problems, for example, for describing a set of stability of stationary points of multiparameter systems, for computing the normal form of a Hamiltonian system in vicinity of equilibrium in the case of multiple frequencies. This paper considers the structure of the discriminant set of a polynomial with real coefficients. There are two approaches to its study. The first approach is based on the study of zeroes of ideals formed by the set of subdiscriminants of the original polynomial. Different ways of computing subdiscriminants are given. There is proposed to investigate the singular points of the discriminant set in the second approach. By the methods of computer algebra it is shown that for small values of the degree of the original polynomial, both approaches are equivalent, but the first one is preferred because of smaller ideals.

Proposed constructive algorithm for obtaining polynomial parameterization of the discriminant set in the space of coefficients of the polynomial. From the applied point of view the most interesting is the description of the components of codimension 1 of the discriminant set. It is this component divides the space of the coefficients into the domains with the same structure of the roots of the polynomial. The set of components of different dimensions of the discriminant set has a hierarchical structure. Each component of higher dimensions can be considered as some kind of tangent developable surface which is formed by linear varieties of respective dimension. The role of directrix of this component performs a variety of dimension one less than that on which the original polynomial has only multiple zero and the remaining zeroes are simple. Starting with a one-dimensional algebraic variety of dimension 1 on which the original polynomial has the unique zero of maximal multiplicity, in the next step of the algorithm we obtain the description of the variety on which the polynomial has a pair of zeroes: one simple and another multiple. Repeating sequentially the steps of the algorithm, the resulting parametric

representation of components of codimension 1 of the discriminant set can be obtained.

Examples of the discriminant set of a cubic and quartic polynomials are considered.

Keywords: discriminant set, singular point, rational parametrization.

Bibliography: 15 titles.

1. Introduction

Let

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1)$$

be a generic monic polynomial of degree n with real coefficients. The n -dimensional real space Π of its coefficients $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ is called the *coefficient space*.

DEFINITION 1. *The **discriminant set** $\mathcal{D}(f)$ of the polynomial $f(x)$ is called the set of all points of coefficient space Π , at which discriminant $D(f)$ is vanished.*

Investigation of the structure of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ is important for solution of many applied problems, for instance, for study stability of a stationary point of multiparameter mechanical systems (see [1, 2, 3]), for computing normal form of Hamiltonian system in vicinity of stationary point in the case of equal frequencies [4].

The set $\mathcal{D}(f)$ contains the algebraic hypersurface $\mathcal{H}$ of codimension 1 in the space Π . This hypersurface divides the Π into $1 + [n/2]$ domains with fixed number of real zeroes of the polynomial $f(x)$ (see [5, Theorem 2]).

THEOREM 1. *In the space of coefficients Π the domains with the same number of real zeroes of the polynomial $f(x)$ are separated from each other by discriminant hypersurface $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(f)$.*

The goal of the presented paper is to give the description of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ of a generic monic polynomial with real coefficients and, in particular, to construct parametrization of the hypersurface $\mathcal{H}$ of codimension 1.

Two main approaches can be proposed for study of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$.

- The first one is based on exploring the subdiscriminants of the polynomial (1).
- The second one is based on investigation of singular points of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$.

The structure of the paper is as following. In Section 2 we give the definition of subdiscriminant of a polynomial and recall some its useful properties. In Section 3 we provide the description of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ based on subdiscriminant approach. In Section 4 we show that the approach based on investigation of singular points of the set $\mathcal{D}(f)$ is equivalent to the approach based on subdiscriminant technique. Finally, some examples are provided in the last Section 5.

2. Subdiscriminant and its properties

Here we recall the definition of the subdiscriminant, which is used in Section 3 for discriminant set description. This section is mainly based on [6, 7]

DEFINITION 2. Let t_i , $i = 1, \dots, n$ be the roots of the polynomial $f(x)$. The discriminant $D(f)$ of $f(x)$ is defined by formula

$$D(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^2. \quad (2)$$

Usually discriminant $D(f)$ is defined as a resultant computed on the polynomial $f(x)$ and its first derivative $f'(x)$ [7]:

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f').$$

There are several ways for discriminant $D(f)$ computation:

1. as the determinant of Sylvester matrix (see [6, 7, 8] and below);
2. as the determinant of Bézout matrix (see [6, 7, 9]);
3. as the determinant of Hankel matrix constructed of Newtonian sums (see [6, 7]);
4. with the help of pseudo-remainders sequence.

The author's computational experiments demonstrated that the most effective way of the discriminant (and also subdiscriminant) computation is the way with the help of Bézout matrix.

We consider so called *Sylvester-Habicht matrix* [6, 10]

$$\text{SylHab}(f, f') = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n & (n-1)a_{n-1} & \dots & 2a_2 & a_1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & \\ 0 & n & \dots & 2a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ n & \dots & 2a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

So, up to the sign $D(f) = \det \text{SylHab}(f, f')$. The choice of Sylvester-Habicht matrix makes definition of subdiscriminant easier than using the original Sylvester matrix.

If one wants to formulate a condition that the polynomial $f(x)$ has exactly k distinct zeroes, it is necessary to use *subdiscriminant* notion.

DEFINITION 3. The k -th **subdiscriminant** $D^{(k)}(f)$ of the polynomial $f(x)$ is defined by the following formula:

$$D^{(k)}(f) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, p\} \\ \#(I)=k}} \prod_{\substack{(j,l) \in I \\ l > j}} (t_j - t_l)^2.$$

Here $\#(I)$ is the cardinality of the set I .

The next proposition provides the way of subdiscriminant computation.

PROPOSITION 1 ([11]). The determinant of a matrix, resulting from the Sylvester matrix $\text{SylHab}(f, f')$ by deleting the first k and the last k rows, and the first k and the last k columns, is equal to the k -th subdiscriminant of the discriminant $D(f)$.

When $k = 0$ one has the discriminant of the polynomial $f(x)$: $D^{(0)}(f) \equiv D(f)$. It is clear that k -th subdiscriminant $D^{(k)}(f)$ is the k -th inner [12] of the Sylvester-Habicht matrix.

Polynomial $f(x)$ has exactly $n - 1$ non-trivial subdiscriminants each of which is a quasi homogeneous polynomial of its coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$.

THEOREM 2. The polynomial $f(x)$ has exactly d common zeroes with its derivative $f'(x)$ iff the following conditions take place

$$\underbrace{D^{(0)}(f) = \dots = D^{(d-1)}(f)}_d = 0, \quad D^{(d)}(f) \neq 0.$$

Multiple zeroes of the polynomial $f(x)$ are the zeroes of the polynomial $\text{GCD}(f, f')$, which can be written as follows:

$$\text{GCD}(f, f') = D^{(d)}\mu^d + \det M_d^{(1)}\mu^{d-1} + \dots + \det M_d^{(d)},$$

where matrix $M_d^{(j)}$ is the d -th inner of the matrix which is obtained from the Sylvester – Habicht matrix by replacing $d + 1$ -th column counted from the right by the j -th column counted from the right.

The simple zeroes of the polynomial $\text{GCD}(f, f')$ correspond to the double zeroes of the original polynomial $f(x)$. The zeroes of polynomial $\text{GCD}(f, f')$ of multiplicity $m > 1$ correspond to zeroes of the polynomial $f(x)$ with multiplicity $m + 1$.

3. Subdiscriminant approach

Here we propose the following constructive algorithm for obtaining polynomial parameterization of the discriminant set in the space Π of coefficients of the polynomial $f(x)$. The main idea of the algorithm is to consider each variety $\mathcal{V}_i$ of dimension i as a tangent developable surface [13, 14] with the directrix defined by the variety $\mathcal{V}_{i-1}$.

1. We compute the variety $\mathcal{V}_1$ with parametrization

$$\mathcal{V}_1 : \{a_i = (-1)^{n-i} C_n^i t_1^{n-i}, i = 0, \dots, n-1\},$$

which solve the system $\{D^{(j)}(f) = 0\}, j = 0, \dots, n-2$. The polynomial $f(x)$ has the only zero t_1 with multiplicity n on it.

2. Using the variety $\mathcal{V}_1$ as a directrix we obtain the variety $\mathcal{V}_2$ with parametrization

$$\mathcal{V}_2 : \{a_i = (-1)^{n-i} C_n^i t_1^{n-i} + (-1)^{n-i} C_{n-1}^i t_1^{n-1-i} t_2, i = 0, \dots, n-1\},$$

which solve the system $\{D^{(j)}(f) = 0\}, j = 0, \dots, n-3$. The polynomial $f(x)$ has two distinct zeroes on it: zero t_1 with multiplicity $n-1$ and simple zero $t_1 + t_2$. The variety $\mathcal{V}_2$ is a tangent developable surface of dimension 2 in the space Π .

3. Considering the variety $\mathcal{V}_2$ as an envelope of two-dimensional planes one get variety $\mathcal{V}_3$, on which the polynomial $f(x)$ has a zero of multiplicity $n-2$ and a pair of simple zeroes.
4. Finally, repeating the steps described above one obtain the variety $\mathcal{V}_{n-1}$, which is the tangent developable hypersurface $\mathcal{H}$ in Π . On this hypersurface polynomial $f(x)$ has one double zero and $n-2$ simple zeroes.

REMARK 1. *There are other varieties in the discriminant set $\mathcal{D}(f)$, on which polynomial $f(x)$ has zeroes with other scheme of multiplicity. It is easy to show that in the generic position case these varieties have codimension more than 1 and therefore they cannot be the parts of the hypersurface $\mathcal{H}$.*

PROPOSITION 2. *The subset of codimension 1 of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ of a generic monic polynomial with real coefficients is a tangent developable hypersurface $\mathcal{H}$ in the space Π . Therefore it has polynomial parameterization.*

4. Singular points approach

It is possible to describe the mentioned above varieties $\mathcal{V}_i, i = 1, \dots, n-1$ as singular points of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ of orders $n-1-i$ correspondingly.

DEFINITION 4. *Let $\varphi(X)$ be a polynomial of $X = (x_1, \dots, x_n)$. The point $X = X^0$ of the set $\varphi(X) = 0$ is said to be a **singular point** of the **k-th order** if all the partial derivatives of $\varphi(X)$ with respect to $x_1, \dots, x_n$ of order k , inclusive, vanish and at least one partial derivative of order $k+1$ does not vanish.*

Compose the ideal $\mathcal{J}_k$ from the discriminant $D(f)$ and all its partial derivatives up to the order k inclusive. The ideal $\mathcal{J}_k$ includes all singular points of order k and below. The direct computations show that ideal $\mathcal{J}_k$ for certain value $k \leq n - 2$ does not equal to the ideal $\mathcal{I}_k \equiv \{D^{(j)}(f) | j = 0, \dots, k\}$, which include the variety $\mathcal{V}_{n-k-1}$. With the help of computer algebra algorithms (Gröbner basis and procedures for polynomial ideals [15]) it was shown that $\text{Rad } \mathcal{J}_k = \text{Rad } \mathcal{I}_k$ for the following values of $n = 3, 4, 5$, where $\text{Rad } \mathcal{P}$ is the radical of ideal $\mathcal{P}$. It is quite possible that this statement takes place for any $n \in \mathbb{N}$.

REMARK 2. *If statement, that for any finite value k radicals of the ideals $\mathcal{J}_k$ and $\mathcal{I}_k$ coincide, is right then, the subdiscriminant approach is equal to the singular point approach. But it is clear that the first approach is easier than the second one as far as the number of polynomials in the ideals $\mathcal{I}_k$ depends linear on the degree n and the number of polynomials in the ideals $\mathcal{J}_k$ grows as n^k .*

5. Examples

EXAMPLE 1. Monic cubic polynomial

Let consider monic cubic polynomial $f_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Its subdiscriminants are:

$$D^{(0)}(f_3) = -4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 + 18a_2a_1a_0 - 4a_1^3 - 27a_0^2,$$

$$D^{(1)}(f_3) = a_2^2 - 3a_1.$$

The case of the only zero of multiplicity 3 is described by the ideal

$$\mathcal{J}_3^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{D^{(0)}(f_3), D^{(1)}(f_3)\}$$

with Hilbert dimension equal to one. Normalization the polynomial GCD (f_3, f'_3) on the ideal $\mathcal{J}_3^{(1)}$ gives

$$\text{GCD}(f_3, f'_3) = 3x^2 + 2a_2 + a_1 = (3x + a_2)^2/3,$$

which is a full square.

One-parametric variety $\mathcal{V}_1$ has the following parametrization

$$\mathcal{V}_1 : \{a_0 = -t_1^3, a_1 = 3t_1^2, a_2 = -3t_1\},$$

and polynomial $f_3(x) = (x - t_1)^3$ on it.

The case of two zeroes with multiplicities 2 and 1 correspondingly is described by the ideal $\mathcal{J}_3^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{D^{(0)}(f_3)\}$, which has Hilbert dimension 2 and its zeroes forms two-parametric variety $\mathcal{V}_2$ of codimension 1

$$\mathcal{V}_2 : \{a_0 = -t_1^3 - t_1^2t_2, a_1 = 3t_1^2 + 2t_1t_2, a_2 = -3t_1 - t_2\},$$

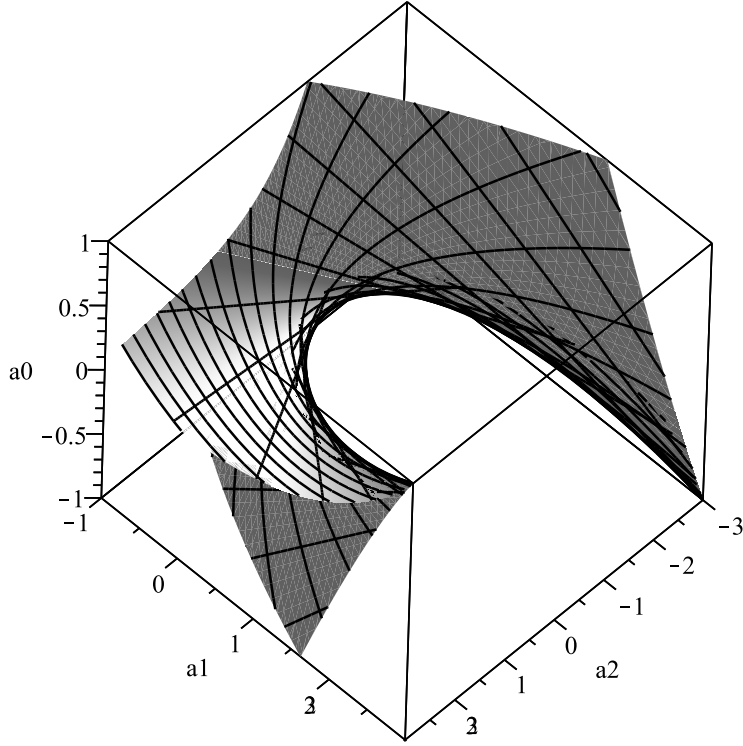


Рис. 1: Discriminant surface for monic cubic polynomial

and polynomial $f_3(x) = (x - t_1)^2(x - (t_1 + t_2))$ on it. This variety is a tangent developable surface in $\Pi = \mathbb{R}^3$ with envelope $\mathcal{V}_1$ and is shown in Fig. 1.

So, variety $\mathcal{V}_2$ is the hypersurface $\mathcal{H}$ dividing coefficient space Π into two domains with different numbers of real zeroes.

EXAMPLE 2. *Monic quartic polynomial.*

Let $f_4(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ be a monic quartic polynomial. Its subdiscriminants are the following:

$$\begin{aligned} D^{(0)}(f_4) &= -27a_3^4a_0^2 + 18a_3^3a_2a_1a_0 - 4a_3^3a_1^3 - 4a_3^2a_2^3a_0 + a_3^2a_2^2a_1^2 + \\ &\quad + 144a_3^2a_2a_0^2 - 6a_3^2a_1^2a_0 - 80a_3a_2^2a_1a_0 + 18a_3a_2a_1^3 + 16a_2^4a_0 - \\ &\quad - 4a_2^3a_1^2 - 192a_3a_1a_0^2 - 128a_2^2a_0^2 + 144a_2a_1^2a_0 - 27a_1^4 + 256a_0^3, \\ D^{(1)}(f_4) &= -6a_3^3a_1 + 2a_3^2a_2^2 - 12a_3^2a_0 + 28a_3a_2a_1 - 8a_2^3 + 32a_2a_0 - 36a_1^2, \\ D^{(2)}(f_4) &= 3a_3^2 - 8a_2. \end{aligned}$$

One-parameter variety $\mathcal{V}_1$ has parametrization

$$\mathcal{V}_1 : \{a_0 = t_1^4, a_1 = -4t_1^3, a_2 = 6t_1^2, a_3 = -4t_1\}.$$

On this variety $f_4(x) = (x - t_1)^4$.

Discriminant set $\mathcal{D}(f_4)$ contains two varieties, on which the polynomial $f_4(x)$ has only two distinct zeroes with multiplicities $(3, 1)$ and $(2, 2)$ correspondingly. The variety $\mathcal{V}_2^{(1)}$ is a tangent developable surface in coefficient space $\Pi = \mathbb{R}^4$ as was shown in Section 3. Its parametrization is the following

$$\mathcal{V}_2^{(1)} : \{ a_0 = t_1^4 + t_1^3 t_2, \quad a_1 = -4t_1^3 - 3t_1^2 t_2, \quad a_2 = 6t_1^2 + 3t_1 t_2, \quad a_3 = -4t_1 - t_2, \}$$

on which $f_4(x) = (x - t_1)^3(x - t_1 - t_2)$. Considering variety $\mathcal{V}_2^{(1)}$ as an envelope of hyperplanes one can obtain the parametrization of those part of variety $\mathcal{V}_3^{(1)}$ of codimension 1, on which the polynomial $f_4(x)$ has only 3 distinct real zeroes. The parametrization of this variety can be given in the following form:

$$\mathcal{V}_3^{(1)} : \{ a_0 = t_1^2 (t_2^2 - t_3^2), \quad a_1 = 2t_1 (t_3^2 - t_2^2 - t_1 t_2), \quad a_2 = t_1^2 + 4t_1 t_2 + t_2^2 + t_3^2, \quad a_3 = -2(t_1 + t_2) \}, \quad (3)$$

on which $f_4(x) = (x - t_1)^2(x - (t_2 + t_3))(x - (t_2 - t_3))$. Setting in (3) $t_3 = 0$ one can get the parametric representation of two-dimensional variety $\mathcal{V}_2^{(2)}$, on which the polynomial $f_4(x)$ has a pair of real distinct zeroes with multiplicity two. Moreover, setting $t_3 = it_3$ one gets parametrization of 3-dimensional variety $\mathcal{V}_3^{(2)}$ on which the polynomial $f_4(x)$ has one real zero t_1 with multiplicity 2 and a pair of simple complex mutually conjugated zeroes $t_2 \pm it_3$. So, both varieties $\mathcal{V}_3^{(1)}$ and $\mathcal{V}_3^{(2)}$ form the hypersurface $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(f_4)$ dividing the coefficient space Π into 3 domains with different numbers of real zeroes.

Let us make a linear Tschirnhaus transformation $x = y - a_3/4$ and we obtain polynomial $\tilde{f}_4(y) = y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0$ with the coefficient space $\tilde{\Pi} = \mathbb{R}^3$. Then the variety $\tilde{\mathcal{V}}_1$ shrinks to the origin, the variety $\tilde{\mathcal{V}}_2^{(1)} : \{b_0 = -3t_1^4, \quad b_1 = 8t_1^3, \quad b_2 = -6t_1^2\}$, on which $\tilde{f}_4(y) = (y - t_1)^3(y + 3t_1)$, becomes one-dimensional, and, finally, the variety

$$\tilde{\mathcal{V}}_3 : \{ b_0 = t_1^2 (t_1^2 - t_3), \quad b_1 = 2t_1 t_3, \quad b_2 = -2t_1^2 - t_3, \}$$

which is a tangent developable surface, on which

$$f_4(y) = (y - t_1)^2(y - (t_1 + t_3))(y - (t_2 - t_3)),$$

and the variety $\tilde{\mathcal{V}}_2(2) : \{b_0 = t_2^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2t_2\}$.

Variety $\tilde{\mathcal{V}}_2^{(1)}$ is one-parameter set of singular points of the first order, because they form the set of casps. The part of variety $\tilde{\mathcal{V}}_2^{(2)}$ is one-parameter set of singular points of the first order, because one branch of the parabola is isolated (for $t_2 > 0$) and the other branch is the curve of selfintersection of the variety $\tilde{\mathcal{V}}_3$. The last variety is hypersurface $\mathcal{H}$ of codimension 1 in the coefficient space $\tilde{\Pi}$ and it divides this space into three domains with different numbers of real zeroes of the polynomial $\tilde{f}_4(y)$. All the varieties described above are shown in Figure 2.

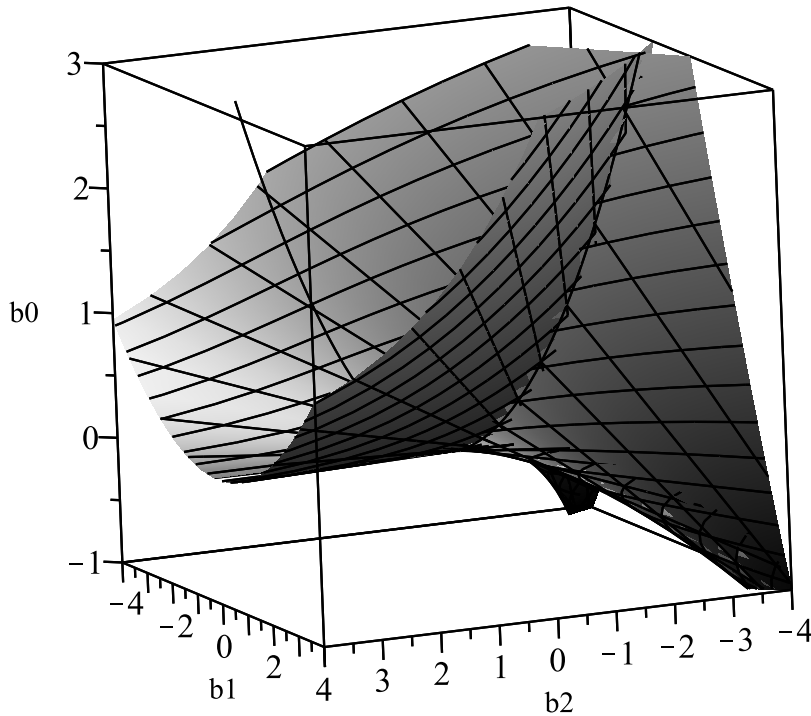


Рис. 2: Discriminant surface for monic quartic polynomial $\tilde{f}_4(y)$.

6. Resume

The described in Section 3 algorithm of polynomial parametrization of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ of the real polynomial $f(x)$ allows to represent this parametrization in a such form that it is possible to obtain the structure of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ as a finite set of algebraic varieties $\mathcal{V}_i$ of different dimensions from 1 to $n - 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батхин, А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // ПММ. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.
2. Батхин А. Б. Устойчивость одной многопараметрической системы Гамильтона // Препринт № 69. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. 28 с.

3. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и Телемеханика. 2008. № 12. С. 3—40.
4. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978.
5. Нейман Н. Н. Некоторые задачи распределения нулей многочленов // УМН. 1949. Т. 4, № 6(34). С. 154—188.
6. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. 2006. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York.
7. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ. 2002. 72 с.
8. Sylvester J. J. On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's function // Trans. Roy. Soc. London (1853).
9. Bézout É. Théorie générale des Équations Algébrique. P.-D. Pierre. Paris. 1779.
10. Habicht W. Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens // Comm. Math. Helvetici. 1948. Vol. 21, pp. 99—116.
11. Uteshev A. Yu., Cherkasov T. M. The search for the maximum of a polynomial // J. Symbolic Computation. 1998. Vol. 25. no 5. pp. 587—618.
12. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука. 1979. 304 с.
13. Oprea J. Differential Geometry and its Applications. The Mathematical Assosiation of America. 2007.
14. Фиников С. П. Теория поверхностей. М.: ГТТИ. 1934. 203 с.
15. Кокс Д., Литтл Д., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир. 2000. 687 с.

REFERENCES

1. Batkhin, A. B., Bruno, A. D. & Varin, V. P. 2012, "Stability sets of multi-parameter Hamiltonian systems" *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 76, no. 1, pp. 56—92. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006
2. Batkhin, A. B. 2011, "Stability of the certain multiparameter Hamiltonian system", Preprint No. 69, *KIAM, Moscow*.

3. Gryazina, E. N., Polyak, B. T., & Tremba, A. A. 2008, “*D*-decomposition technique state-of-the-art”, *Automation and Remote Control*, vol. 69, no. 12, pp. 1991–2026.
4. Markeev, A. P. 1978, “Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics”, *Nauka, Moscow*.
5. Neiman, N. N. 1949, “Some problems on the distributions of the zeroes of polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 4, no. 6(34), pp. 154–188. (in Russian)
6. Basu, S, Pollack, R & Roy, M-F 2006, “Algorithms in Real Algebraic Geometry”, *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York*.
7. Kalinina, E. A. & Uteshev, A. Yu. 2002, “Elimination theory”, *Izd-vo NII Khimii SPbGU, Saint-Petersburg*.
8. Sylvester, J. J. 1853, “On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm’s function”, *Trans. Roy. Soc., London*.
9. Bézout, É. 1779, “Théorie générale des Équations Algébrique”, *P.-D. Pierre. Paris*.
10. Habicht, W. 1948, “Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens”, *Comm. Math. Helvetici*, vol. 21, pp. 99–116.
11. Uteshev, A. Yu. & Cherkasov, T. M. 1998, “The search for the maximum of a polynomial”, *J. Symbolic Computation*, vol. 25, no 5. pp. 587–618.
12. Jury, E. 1974, “Inners and stability of dynamic systems”, *John Wiley and Sons*.
13. Oprea, J. 2007, “Differential Geometry and its Applications”, *The Mathematical Assosiation of America*.
14. Finikov, S. P. 1934, “Theory of Surfaces”, *GTTI, Moscow*.
15. Cox, D., Little, J. & O’Shea, D. 1997, “Ideals, varieties and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra”, *Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York*.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша.

Поступило 30.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.36

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА ЦЕПНОЙ ДРОБИ

А. Д. Брюно (г. Москва)

Аннотация

1. Простое обобщение. Пусть в трехмерном вещественном пространстве заданы три вещественные однородные линейные формы. Их модули дают отображение этого пространства в другое. В нем рассматривается выпуклая оболочка образов всех целочисленных точек первого пространства, кроме его начала координат. Замыкание этой выпуклой оболочки названо модульным многогранником. Наилучшие целочисленные приближения к корневым подпространствам заданных форм дают точки, образы которых лежат на границе модульного многогранника. Граница модульного многогранника вычисляется любой стандартной программой вычисления выпуклых оболочек. Алгоритм дает также периодичность для кубических иррациональностей с положительным дискриминантом. Обобщить цепную дробь пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Вороной и многие другие.

2. Универсальное обобщение. Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы l линейных и k квадратичных форм ($n = l + 2k$). Модули этих форм задают отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ m -мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^m$, $m = l + k$. При этом целочисленная решётка $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \setminus 0$ является многогранным множеством. Целочисленные точки из $\mathbb{R}^n$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$, дают наилучшие диофантовы приближения к совокупности корневых подпространств m заданных форм. В алгебраическом случае, когда заданные формы определённым образом связаны с корнями многочлена степени n , доказывается, что многогранник $\mathbf{H}$ имеет $m - 1$ независимый период. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби квадратичной иррациональности. По теореме Дирихле соответствующее поле алгебраических чисел имеет ровно $m - 1$ фундаментальных единиц. Граница $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$ вычисляется стандартной программой вычисления выпуклых оболочек.

Ключевые слова: цепная дробь, модульный многогранник, программа вычисления выпуклого многогранника.

Библиография: 75 названий.

UNIVERSAL GENERALIZATION OF THE CONTINUED FRACTION ALGORITHM

A. D. Bruno (Moscow)

Abstract

1. Simple generalization. Let three homogeneous real linear forms be given in a three-dimensional real space. Their moduli give a mapping of the space into another space. In the second space, we consider the convex hull of images of all integer points of the first space except its origin. This convex hull is called the modular polyhedron. The best integer approximations to the root subspaces of these forms are given by the integer points whose images lie on the boundary of the modular polyhedron. For the concrete three linear forms, any part of the boundary of the modular polyhedron can be computed by means of any standard program for computation of a convex hull. The algorithm gives the best approximations, and it is periodic for cubic irrationalities with positive discriminant. It also allows to understand why matrix algorithms proposed by Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincare, Hurwitz, Brun, Guting and others are not universal: proper algorithm is composed from several different matrix algorithms.

2. Universal generalization. Let l linear forms and k quadratic forms ($n = l + 2k$) be given in the n -dimensional real space $\mathbb{R}^n$. Absolute values of the forms define a map of the space $\mathbb{R}^n$ into the positive orthant $\mathbf{S}$ of the m -dimensional real space $\mathbb{R}^m$, where $m = l + k$. Here the integer lattice $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$ is mapped into a set $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{S}$. The closure of the convex hull $\mathbf{H}$ of the set $\mathbf{Z} \setminus 0$ is a polyhedral set. Integer points from $\mathbb{R}^n$, which are mapped in the boundary $\partial\mathbf{H}$ of the polyhedron $\mathbf{H}$, give the best Diophantine approximations to root subspaces of all given forms. In the algebraic case, when the given forms are connected with roots of a polynomial of degree n , we prove that the polyhedron $\mathbf{H}$ has $m - 1$ independent periods. It is a generalization of the Lagrange Theorem, that continued fractions of a square irrationality is periodic. For the certain set of the m forms, any part of the boundary $\partial\mathbf{H}$ of the polyhedron $\mathbf{H}$ can be computed by a program for computing convex hulls.

3. Main achievement. Best Diophantine approximations can be computed by a global algorithm using a standard program for computing convex hulls, instead of step-by-step computations as in the continued fraction algorithm. It gives a solution of the problem, that majority of main mathematicians of the XIX century tried to solve.

Keywords: continued fraction, modular polyhedron, program for computing convex hull.

Bibliography: 75 titles.

1. Введение

1.1. Цепная дробь

Пусть α_0 и α_1 – натуральные числа. Для нахождения их наибольшего общего делителя используется алгоритм Евклида [1] последовательного деления с остатком:

$$\alpha_0 = a_0\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = a_1\alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 = a_2\alpha_3 + \alpha_4, \dots$$

где натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \dots$ суть неполные частные. Это алгоритм разложения числа $\alpha = \alpha_0/\alpha_1$ в правильную цепную дробь [2], и он применим к любым вещественным числам α . При этом $a_0 = [\alpha]$, где $[\alpha]$ – целая часть числа α , $a_1 = [1/(\alpha - a_0)]$, $\dots$, т. е.

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad (1)$$

$$\text{и } \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix}, \quad a_k = [\alpha_k/\alpha_{k+1}]. \quad (2)$$

Если разложение (1) оборвать на a_k и свернуть эту оборванную цепную дробь в рациональное число p_k/q_k , то получается **подходящая дробь**, которая дает наилучшее рациональное приближение к числу α . При этом

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и

$$\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \pm 1,$$

т.е. векторы (α_k, α_{k+1}) и (p_k, q_k) принадлежат сопряженным плоскостям, и пара векторов $(p_k, q_k), (p_{k-1}, q_{k-1})$ может служить базисом в одной из них. Цепные дроби (1) и соотношения (2), (3) рассматривал Валлис [3] в 1655 г. В 1737 г. Эйлер [4] дал название “непрерывная дробь” (fractio continua). Лагранж [5] доказал, что для квадратичных иррациональностей α разложение в цепную дробь периодически (и обратно), т. е. последовательность неполных частных $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, начиная с какого-то номера, состоит из повторяющегося отрезка $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+t}$.

Итак, алгоритм разложения числа в цепную дробь:

1. прост;
2. дает наилучшие рациональные приближения к числу;
3. конечен для рационального числа;
4. периодичен для квадратичных иррациональностей [2];
5. устроен как для почти всех чисел [2] для кубических иррациональностей [37].

Кроме того, он обладает еще рядом замечательных свойств.

1.2. История обобщений

В 1775 г. Эйлер [6] сделал первую попытку обобщить алгоритм цепной дроби на векторы. Впоследствии его подход развивали Якоби [7, 8], Пуанкаре [9], Брун [10], Гютинг [67], Брюно [16, 17, 19, 21] (два алгоритма) и Парусников [16, 17], Пустыльников [13] и др. Они по аналогии с (2) строили матричные алгоритмы вида

$$A_{k+1} = C_k A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где A_k – n -мерный вектор и C_k – квадратная n -матрица с целыми элементами, которая образована по вектору A_k , и $\det C_k = \pm 1$. Эти алгоритмы просты, но, вообще говоря, не дают наилучших рациональных приближений к вектору и не всегда при $n = 3$ обладают аналогом свойства 4.:

4'. периодичность для кубических иррациональностей.

Еще Эрмит [15] критиковал алгоритм Якоби. В работах [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] было проведено сравнение качества матричных алгоритмов и было установлено, что ни один из них не обладает свойствами 2 и 4' для всех векторов A_0 . При этом оказалось, что наихудшим является алгоритм Пуанкаре [9]. В 1842 г. Дирихле [24] при $n = 3$ предложил рассматривать не трехмерный вектор $A = A_0$, а две линейные однородные формы $l_1(X)$ и $l_2(X)$ такие, что $l_1(A) = l_2(A) = 0$. В 1850 г. Эрмит [25], развивая этот подход, предложил свое обобщение цепной дроби. Наконец, в 1895–96 гг. Клейн [26], Минковский [27] и Вороной [28] независимо пришли к тому, что надо в $\mathbb{R}^3$ рассматривать тройку однородных линейных форм $l_1(X), l_2(X), l_3(X)$ и предложили свои концепции обобщения цепной дроби. При этом Клейн ограничился общими геометрическими соображениями, а Минковский и Вороной предложили конкретные алгоритмы. Впоследствии подход Клейна переоткрывали Скубенко [29] и Арнольд [30] и называли многогранники Клейна парусами и многогранниками Арнольда [31, 32, 74] соответственно. И хотя в [16] был предложен алгоритм вычисления многогранников Клейна, в [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] было выяснено, что многогранники Клейна-Скубенко-Арнольда не дают основы для хорошего алгоритма, обобщающего цепную дробь. Только алгоритмы Минковского и Вороного обладают свойствами 2 и 4' но они весьма громоздки. Их применению и развитию было посвящено много работ (см. [33, 34, 35]). Свой подход к обобщению цепной дроби предложил Гурвиц [36] в 1894 г., но без алгоритма. Интерес автора к обобщению цепной дроби возник в связи с его работой [37] 1964 г., которая была повторена Ленгом [38] в 1972 г. (см. также Старк [39]). В 2003 г. автор [40] предложил новое обобщение цепной дроби. Оно состоит в следующем.

Пусть для $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ заданы три однородные линейные формы $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ имеются три плоскости $\mathcal{L}_i = \{X : f_i(X) = 0\}$ и три прямых $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$. Модули форм $|f_i(X)| \stackrel{\text{def}}{=} g_i(X)$ задают отображение целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ в некоторое множество $\mathbf{Z}$ неотрицательного октанта $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_+^3 = \{Y : Y \geq 0\}$. Пусть $\mathbf{H}$ – выпуклая оболочка множества $\mathbf{Z}$ и $\partial\mathbf{H}$ – ее граница. Множество $\partial\mathbf{H}$ является двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин, ребер и граней. При этом плоскостям $\mathcal{L}_i \subset \mathbb{R}^3$ соответствуют координатные квадранты октанта $\mathbf{S}$, а прямым $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \subset \mathbb{R}^3$ соответствуют координатные лучи октанта $\mathbf{S}$. Наилучшим целочисленным приближением плоскостей $\mathcal{L}_i$ и прямых $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$ в $\mathbb{R}^3$ соответствуют вершины многогранной поверхности $\partial\mathbf{H}$ в $\mathbf{S}$. Поэтому нахождение наилуч-

ших диофантовых приближений сводится к вычислению поверхности $\partial\mathbf{H}$ [73], которая была названа «модульным многогранником». Модульный многогранник является выпуклой оболочкой четырех многогранников Клейна. Для одиннадцати наборов форм $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ модульные многогранники вычислены в [44] и показаны их логарифмические проекции. Свойства модульных многогранников изучены в [42, 43, 44, 45]. Оказалось, что все грани модульного многогранника являются треугольниками с вершинами $G(B_i)$, $i = 1, 2, 3$, где вектор $G(X) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))$. При этом $\det(B_1 B_2 B_3) = 0$ или ± 1 или ± 2 . Если коэффициенты форм $f_i(X)$ принадлежат одному кубическому полю, то поверхность $\partial\mathbf{H}$ дважды периодична. В [43, 69] был предложен алгоритм движения по поверхности $\partial\mathbf{H}$. Однако он был довольно громоздким.

1.3. Постановка задачи

Рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм $f_1(X), \dots, f_m(X)$, которые не имеют общего корня $X \neq 0$, $2 \leq m \leq n$. Целочисленная ненулевая точка $X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \subset \mathbb{R}^n$ называется **минимальной**, если для всякой другой ненулевой целочисленной точки $Y \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$|f_i(X)| \leq |f_i(Y)|, \quad i = 1, \dots, m.$$

ЗАДАЧА 1. Найти все минимальные точки.

Частичное решение задачи 1. Модули форм $f_i(X)$ задают отображение $G(X)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ m -мерного пространства $\mathbb{R}^m$ с координатами $S = (s_1, \dots, s_m)$: $s_i = g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \dots, m$. При этом целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \setminus 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ множества $\mathbf{H}$, являются минимальными и дают наилучшие диофантовые приближения к совокупности корневых пространств m форм $f_i(X)$. Возможны минимальные точки X , образы которых $G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))$ не лежат на границе $\partial\mathbf{H}$. Однако будем искать **пограничные минимальные точки** X , для которых $G(X) \in \partial\mathbf{H}$.

ПРИМЕР 1. Если $m = n = 2$, а $f_1(X)$ и $f_2(X)$ — линейные формы, то $\partial\mathbf{H}$ — выпуклая ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, лежащая в $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^2$. Координаты x_1 и x_2 преобразуют $X = (x_1, x_2)$ ее вершины $G = (g_1, g_2)$ — это числитель и знаменатель подходящей цепной дроби числа, равного тангенсу наклона одной из корневых прямых $f_1(X) = 0$ или $f_2(X) = 0$. Точки из $\mathbf{Z}$, лежащие на ребрах ломанной $\partial\mathbf{H}$, отсутствуют. Промежуточным дробям этой цепной дроби соответствуют не минимальные пограничные точки.

В дальнейшем ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbf{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\partial\mathbf{H}$ состоит из вершин, ребер и граней различных размерностей и не содержит непрерывных «кривых» частей. В этих случаях граница $\partial\mathbf{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ для вычисления выпуклых многогранников [68, 73].

Пусть иррациональные λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ – корни квадратного уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ с целыми коэффициентами. Тогда цепные дроби чисел λ_1 и λ_2 периодичны и ломаная $\partial\mathbf{H}$ для пары форм $f_1(X) = x_1 - \lambda_1 x_2$ и $f_2(X) = x_1 - \lambda_2 x_2$ также периодична.

ЗАДАЧА 2. Найти все периоды поверхности $\partial\mathbf{H}$, т.е. ее линейные автоморфизмы $X = TY$.

1.4. О содержании статьи

Статья состоит из трех параграфов.

В § 2 рассматривается случай трех линейных форм от трех переменных. Для этого случая определяется модульный многогранник, изучаются его свойства. Подробно рассматривается подслучай, когда коэффициенты всех форм принадлежат одному кубическому полю. В нем модульный многогранник имеет два независимых периода, которым соответствуют две фундаментальные единицы поля. Наконец, приводится 11 примеров проекций модульных многогранников на плоскость.

В § 3 обсуждается случай нескольких линейных и нескольких квадратичных форм. Определяется модульный многогранник. В алгебраическом случае он имеет столько периодов, сколько фундаментальных единиц имеет соответствующее поле. Через периоды можно вычислить эти фундаментальные единицы.

2. Модульный многогранник и его глобальные свойства

2.1. Общие свойства [69]

Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы три вещественные независимые однородные линейные формы

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad \det(L_1, L_2, L_3) \neq 0, \quad (5)$$

где $X \in \mathbb{R}^3$, $L_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}) \in \mathbb{R}_*^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, и пространство $\mathbb{R}_*^3$ двойственно пространству $\mathbb{R}^3$. Три линейные однородные формы (5) определяют отображение $G(X) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))$, где $g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, 2, 3$.

В [43] предложена следующая конструкция. Вектор-функция $G(X)$ отображает пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами X в пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $G = (g_1, g_2, g_3)$, точнее – в его неотрицательный октант $\mathbb{R}_+^3 = \mathbf{S}$. При этом множество $\mathbb{Z}^3 \setminus 0$ всех целочисленных точек X кроме $X = 0$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{S}$. Пусть $\mathbf{H}$ – замыкание выпуклой оболочки точек множества $\mathbf{Z}$ и $\partial\mathbf{H}$ – его граница. Очевидно, что $\mathbf{H}$ – это выпуклый многогранник (точнее – многогранное множество), который назван **модульным**, и $\partial\mathbf{H}$ – это выпуклая многогранная поверхность, состоящая из вершин V_i , ребер R_i и граней Γ_i .

Пусть $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z}$ и

$$V_j = G(B_j), \quad B_j \in \mathbb{Z}^3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Положим $\omega(V_1, V_2, V_3) = |\det(B_1 B_2 B_3)|$. Очевидно ω принимает целые неотрицательные значения. Для грани Γ_i поверхности $\partial\mathbf{H}$ определим $\omega(\Gamma_i)$ как минимум

$\omega(V_1, V_2, V_3)$ по всем тройкам точек $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z}$, лежащих на грани Γ_i и не лежащих на одной прямой, т. е. $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z} \cap \Gamma_i$ и $\det(V_1 V_2 V_3) \neq 0$. **Грань** Γ_i поверхности $\partial \mathbf{H}$ назовем **простой**, если она является треугольником с вершинами (6) и не содержит других точек из множества $\mathbf{Z}$, и **полупростой**, если она является треугольником, содержащим внутри ровно одну точку множества $\mathbf{Z}$, и имеет $\omega(\Gamma_i) = 1$. Для простой грани Γ_i с вершинами (6) имеем $\omega(\Gamma_i) = |\det(B_1 B_2 B_3)|$.

ТЕОРЕМА 1. *Для граней Γ_i поверхности $\partial \mathbf{H}$ всегда $\omega(\Gamma_i) \leq 2$.*

ТЕОРЕМА 2. *Грань Γ_i с $\omega(\Gamma_i) = 2$ является простым треугольником.*

ТЕОРЕМА 3. *Если точки (6) лежат на одной грани Γ_i и $\omega(V_1, V_2, V_3) = 0$, то одна из точек B_1, B_2, B_3 является суммой двух других.*

2.2. Периодичность [75, §7]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0. *Унимодулярная 3×3 матрица T называется периодом поверхности $\partial \mathbf{H}$, если поверхность $\partial \tilde{\mathbf{H}}$, соответствующая формам $\tilde{f}_i(Y) = \langle L_i, Y T^* \rangle$, $i = 1, 2, 3$, переводится в $\partial \mathbf{H}$ линейным преобразованием*

$$g_i = \mu_i \tilde{g}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\mu_i \in \mathbb{R}$ и $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$.

Здесь звездочка означает транспонирование. Таким образом, периодичность $\partial \mathbf{H}$ означает, что для $\partial \mathbf{H}$ два линейных преобразования $X^* = T Y^*$ в $\mathbb{R}^3$ и (7) в $\mathbf{S}$ дают один и тот же результат.

Пусть u неприводимого в $\mathbb{Q}$ кубического многочлена

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (8)$$

дискриминант положительный. Тогда у него имеются три вещественных корня $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Пусть вектор L_i в форме (5) такой, что

$$(L_1^*, L_2^*, L_3^*) = R W, \quad (9)$$

где R – невырожденная матрица, а W – матрица Вандермонда для полинома (8).

ТЕОРЕМА 4. *Если все коэффициенты многочлена (8) целые числа, и все элементы матрицы R рациональные, то поверхность $\partial \mathbf{H}$, соответствующая формам (7), двояко периодическая, т. е. ее логарифмическая проекция*

$$n_1 = \log |f_1(X)|, n_2 = \log |f_2(X)| \quad (10)$$

инвариантна относительно двух независимых параллельных переносов.

Положим, что модуль Ω состоит из чисел $\langle L, X \rangle$, где $X \in \mathbb{Z}^3$, и числа r_1, r_2, r_3 являются генераторами модуля Ω . В соответствии с теоремой Дирихле [66, гл. II] в этом случае имеется ровно две фундаментальные единицы u и v поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ в модуле Ω , т. е. каждая единица поля имеет форму $\zeta^k u^m v^n$, где $\zeta^k = 1$ и $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, поверхность $\partial \mathbf{H}$ имеет два независимых периода $\mathcal{D}_u^*$ и $\mathcal{D}_v^*$. В логарифмической проекции каждому периоду соответствует свой параллельный перенос.

2.3. Примеры [44]

Здесь для $m = n = 3$ приводятся вычисления многогранных поверхностей $\partial\mathbf{H}$ для 11 тернарных кубических форм вида

$$h(X) = \langle L_1, X \rangle \langle L_2, X \rangle \langle L_3, X \rangle, \quad (11)$$

где $f_i(X) = \langle L_i, X \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Десять из них, являющиеся экстремальными формами Девенпорта и Свиннертона-Дайера [62], рассматривались в [16] – [23], где для них были вычислены многогранники Клейна. Одиннадцатая форма (11) была взята из примера работы Вороного [28]. Результаты вычислений представлены в виде рисунков, где показаны логарифмические проекции (10) многогранников $\partial\mathbf{H}$ на плоскость $n_1 = \ln |f_1(X)|$, $n_2 = \ln |f_2(X)|$. Проекции вершин $V(X)$ обозначены черными кружочками и соединены проекциями ребер. В каждой из этих точек $V(X) = (|f_1(X)|, |f_2(X)|, |f_3(X)|)$ указано соответствующее значение вектора X и значение формы (11) для этого X .

Ниже каждая из этих 11 форм обсуждается в отдельном примере, и для нее приводятся начальные значения в виде многочлена (8) и таблицы

$$\begin{array}{cccccc} B_1 & f_1(B_1) & f_2(B_1) & f_3(B_1) & a_1 & f_i(B_1) \\ B_2 & f_1(B_2) & f_2(B_2) & f_3(B_2) & a_2 & f_i(B_2) \\ B_3 & f_1(B_3) & f_2(B_3) & f_3(B_3) & a_3 & f_i(B_3) \end{array}$$

где B_1, B_2, B_3 – исходный базис, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $f_1(A) = f_2(A) = 0$, $f_i(B_j)$ точные значения. Во всех случаях поверхность $\partial\mathbf{H}$ просчитывается алгоритмом для вычисления выпуклого многогранника и имеет 2 независимых периода, которым в логарифмической проекции соответствуют параллельные переносы. Указываются фундаментальные области Φ относительно группы этих переносов.

ПРИМЕР 2. Форма h_1 .

Согласно [16, 17], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	-1.24697960	1.80193773	0.44504187	0.44504187	$-\lambda_{i+2}$
(0,0,1)	-0.55495813	-2.24697960	0.80193774	0.80193774	$-1 - \lambda_{i+1}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 1. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$G_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad G_2 = \{G(1, 0, 0), G(0, 0, 1), G(1, 0, 1)\}. \quad (12)$$

ПРИМЕР 3. Форма h_2 .

Согласно [16, 17], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 1$,

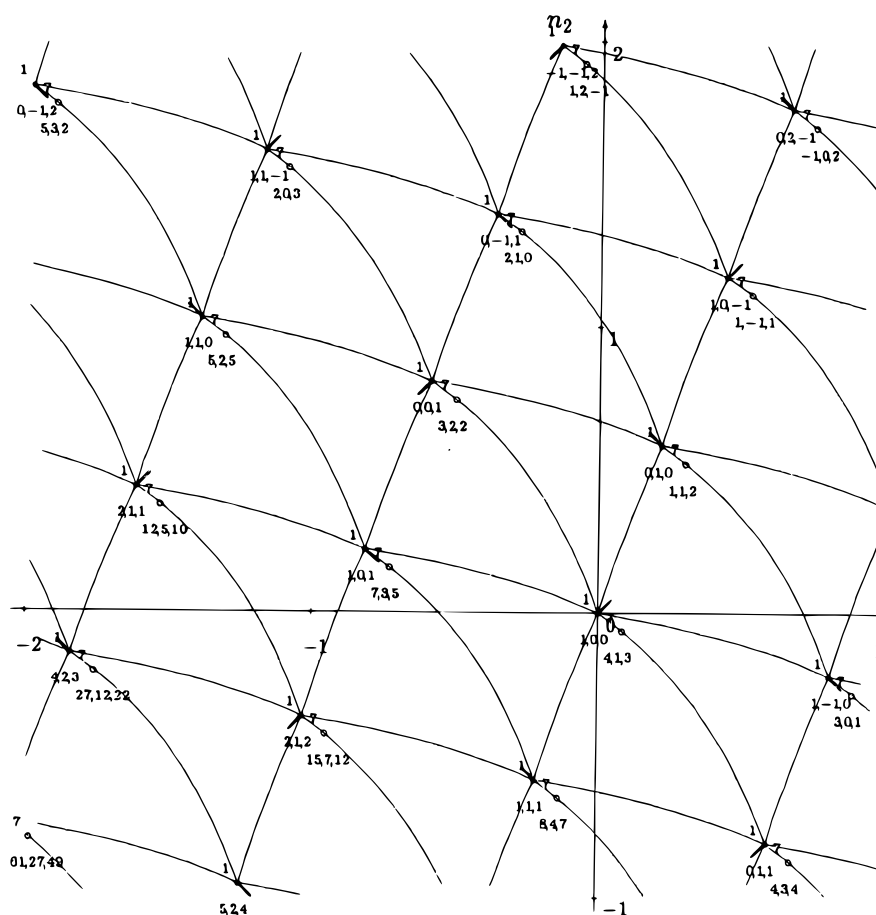


Рис. 1: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_1 .

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	-1.87938524	1.53208889	0.34729636	0.34729636	$-\lambda_{i+2}$
(0,0,1)	-0.65270364	-2.87938524	0.53208889	0.53208889	$-1 - \lambda_{i+1}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 2. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников (12).

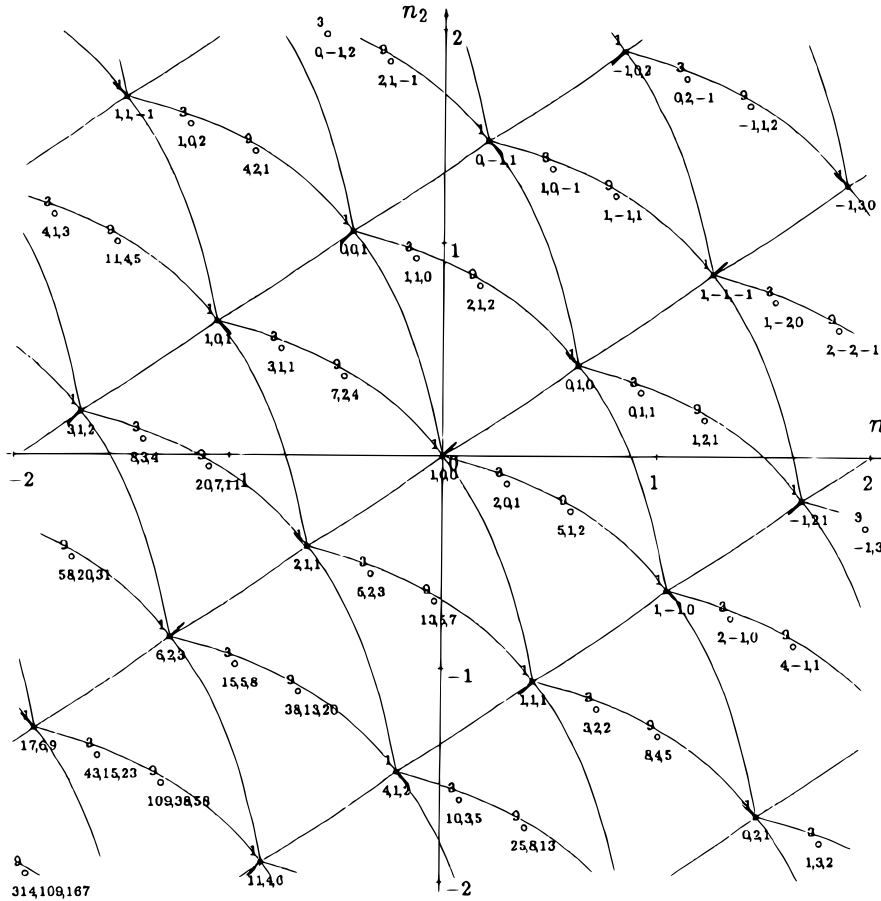


Рис. 2: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_2 .

ПРИМЕР 4. Форма h_3 .

Согласно [18], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	2.48119430	-1.17008647	0.68889218	0.68889218	$\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i}$
(0,0,1)	-5.15632517	-0.369102386	0.52542756	0.52542756	$\frac{\lambda_i^2 - 3\lambda_i + 1}{\lambda_i}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 3. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(1, 0, 0), G(1, 1, 0), G(2, 1, 1)\}. \quad (13)$$

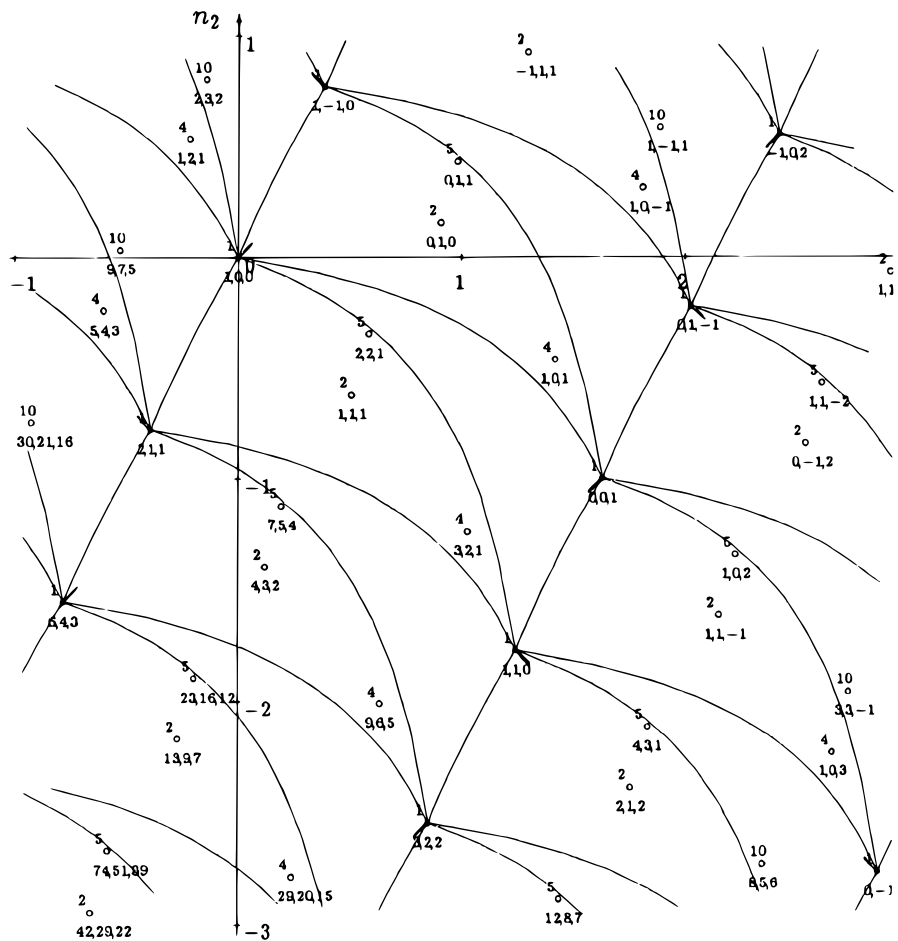


Рис. 3: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_3 .

ПРИМЕР 5. Форма bg .

Согласно [20], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

$(1,0,0)$	1	1	1	1	1
$(0,1,0)$	0.87891770	-0.13776296	8.25884526	8.25884526	$7 + 9\lambda_i + \lambda_i^2$
$(0,0,1)$	-7.25884526	0.121082302	1.13776296	1.13776296	$\lambda_i + 1$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 4. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(0, 1, 0), G(0, 0, 1), G(0, 1, 1)\}. \quad (14)$$

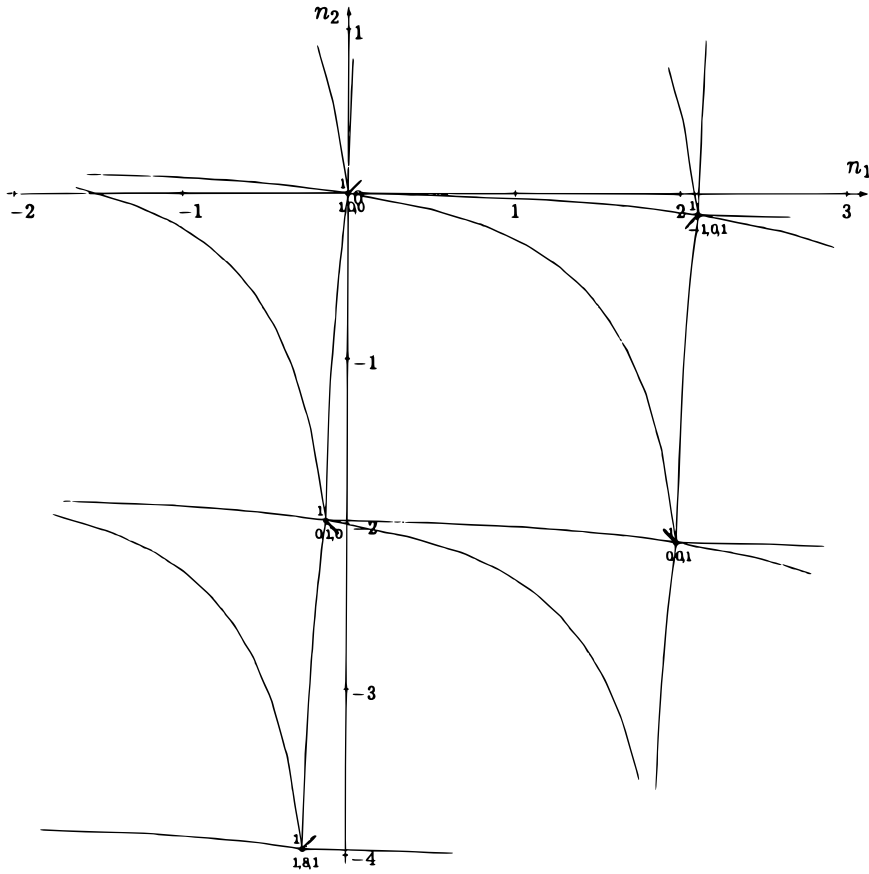


Рис. 4: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы bg .

ПРИМЕР 6. Форма h_4 .

Согласно [19], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	1.90687424	-2.92775456	-0.17911967	1.51261571	$\frac{-3+15\lambda_i+2\lambda_i^2}{5}$
(0,0,1)	-0.67598551	0.59666387	2.47932164	5.74622955	$\frac{11+10\lambda_i+\lambda_i^2}{5}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 5. Фундаментальная область ограничена вершинами $G(1,1,4)$, $G(0,0,1)$, $G(1,0,0)$, $G(0,-1,0)$, $G(-5,-1,2)$, $G(3,1,-1)$, $G(-1,0,1)$, $G(1,1,3)$ и состоит из 9 треугольников.

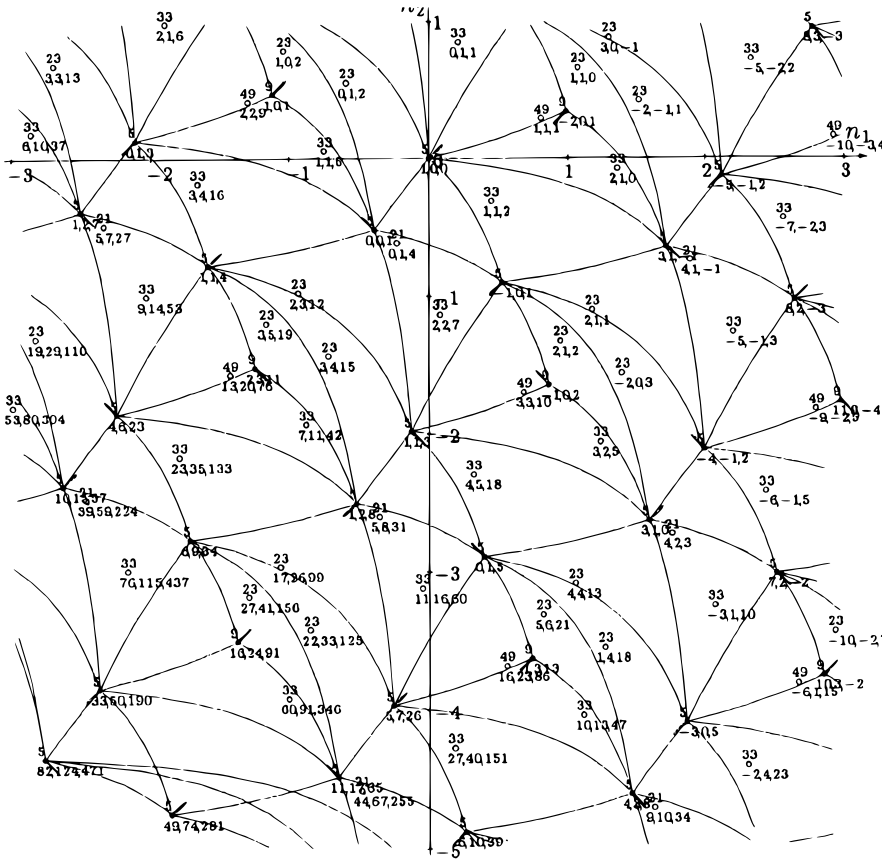


Рис. 5: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_4 .

ПРИМЕР 7. Форма $\tilde{h}_4$, сопряженная к h_4 .

Согласно [19], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	0.26323621	-0.68494283	1.51261571	-0.17911967	$\frac{13+26\lambda_i+3\lambda_i^2}{11}$
(0,0,1)	-0.38431852	-0.452820124	5.74622955	2.47932164	$\frac{53+73\lambda_i+8\lambda_i^2}{11}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 6. Фундаментальная область поверхности $\partial\mathbf{H}$ состоит из 4 треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(2, -5, 1), G(-1, 1, 0), G(-1, -3, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(2, -5, 1), G(-1, 1, 0), G(0, 1, 0)\},$$

$$\Gamma_3 = \{G(0, 1, 0), G(-1, 1, 0), G(-1, -3, 1)\},$$

$$\Gamma_4 = \{G(0, 1, 0), G(-1, -3, 1), G(-1, -2, 1)\}.$$

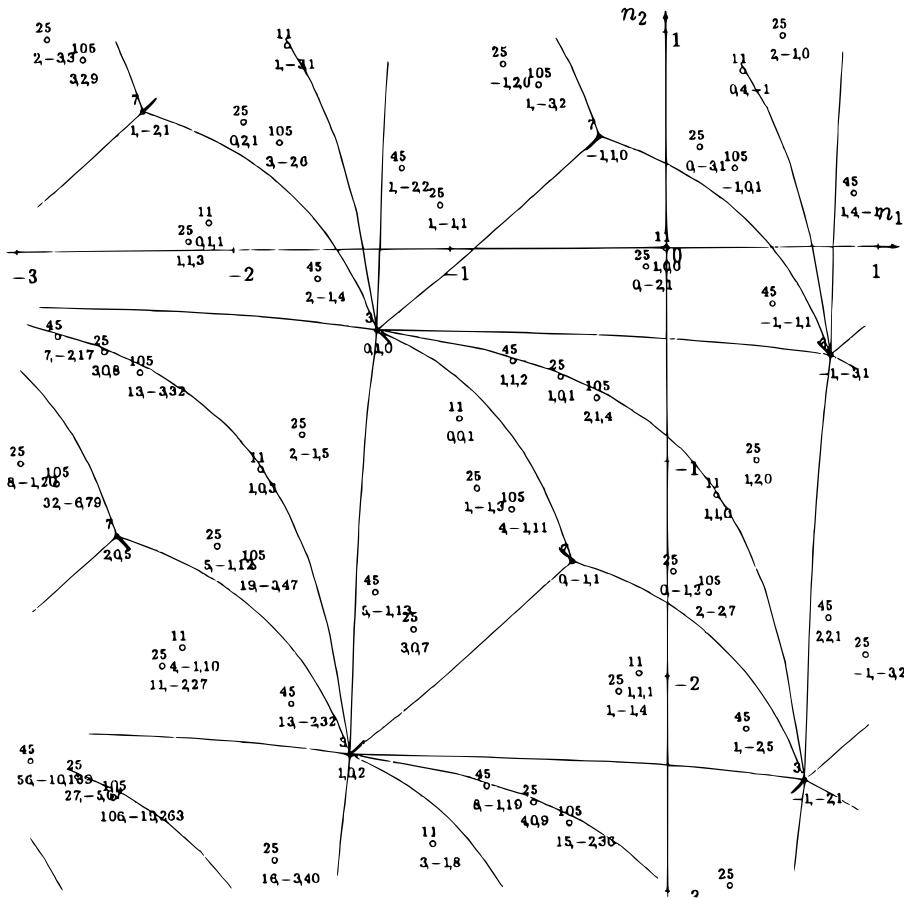


Рис. 6: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы $\tilde{h}_4$.

ПРИМЕР 8. Форма h_5 .

Согласно [21, 61], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	0.72610945	-0.37720285	3.65109341	3.65109341	$-1 + 2\lambda_i + \lambda_i^2$
(0,0,1)	-2.65109341	0.273890555	1.37720285	1.37720285	λ_i

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 7. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(0, 1, 0), G(0, 0, 1), G(0, 1, 1)\}. \quad (15)$$

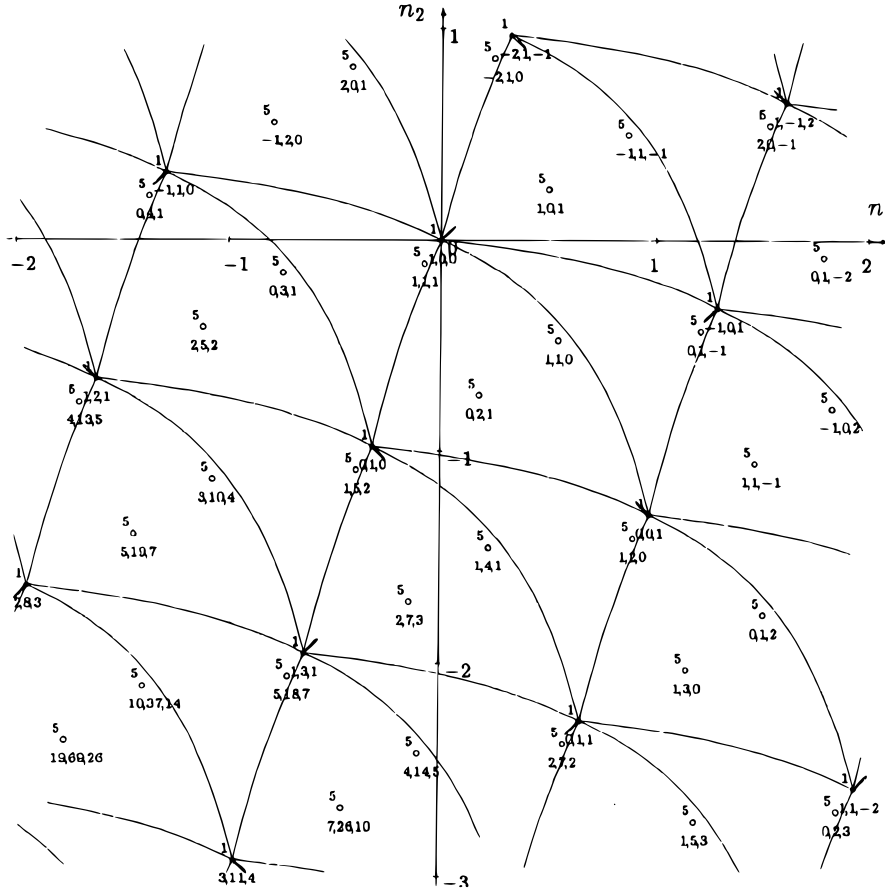


Рис. 7: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_5 .

ПРИМЕР 9. Форма h_6 .

Согласно [22, 61], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 25\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	0.23382690	1
(0,1,0)	3.88530978	-0.24362329	1.35831350	0.12322591	$\frac{-5+3\lambda_i+2\lambda_i^2}{21}$
(0,0,1)	-2.24362329	-0.64168650	1.88530978	0.31761024	$\frac{-13+12\lambda_i+\lambda_i^2}{21}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 8. Фундаментальная область состоит из 9 треугольников и ограничена вершинами $G(5, -2, -1)$, $G(-3, 1, 1)$, $G(2, 0, -1)$, $G(-1, -2, 2)$, $G(1, -2, 1)$, $G(0, -1, 1)$, $G(0, 1, 0)$, $G(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $G(3, 1, 3)$, $G(2, 0, 1)$, $G(-2, 1, 1)$.

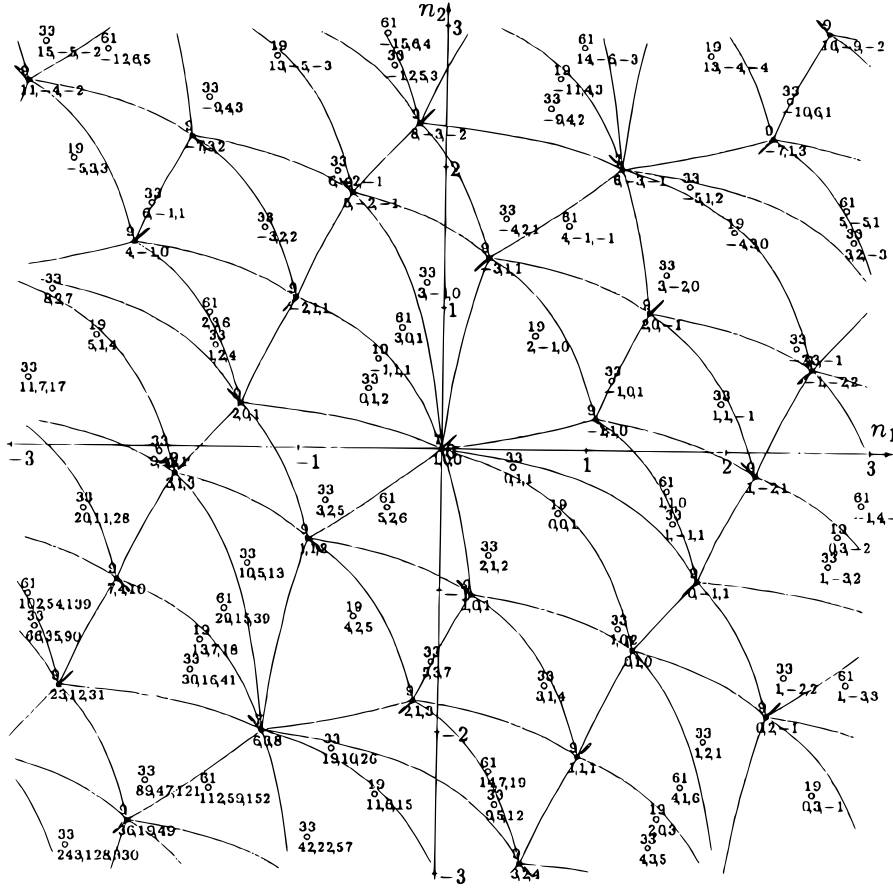


Рис. 8: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_6 .

ПРИМЕР 10. Форма h_7 .

Согласно [23, 61], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$,

(1,0,0)	1	1	1	-0.08626792	1
(0,1,0)	0.643104132	0.307978528	5.04891734	0.21777981	λ_i^2
(0,0,1)	2.24697960	-0.801937736	0.55495813	-0.02393754	$\lambda_i^2 - 2\lambda_i$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 9. Фундаментальная область ограничена вершинами $G(1, 0, 0)$, $G(0, 0, 1)$, $G(-3, 1, -3)$, $G(1, 0, 1)$, $G(-1, 1, -1)$, $G(0, 1, 0)$, $G(-1, 2, 0)$, $G(-1, 1, 0)$ и состоит из 6 треугольников.



Рис. 9: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_7 .

В [28, § 53] рассмотрена форма (11), где $L_i = (1, \lambda_i, (\lambda_i + \lambda_i^2)/2)$, $i = 1, 2, 3$, а λ_i – корни уравнения $\lambda^3 - 7\lambda - 2 = 0$. Начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda - 2$,

(1,0,0)	1	1	1	0.79184956	1
(0,1,0)	-2.48928857	-0.28916855	2.77845712	1.95640956	λ_i
(0,0,1)	1.85363451	-0.10277505	5.24914054	2.20012002	$(\lambda_i + \lambda_i^2)/2$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 11. Фундаментальная область Φ ограничена вершинами $G(1,0,0)$, $G(0,1,0)$, $G(0,0,1)$, $G(2,5,6)$, $G(1,1,2)$, $G(1,1,1)$ и состоит из 6 треугольников.

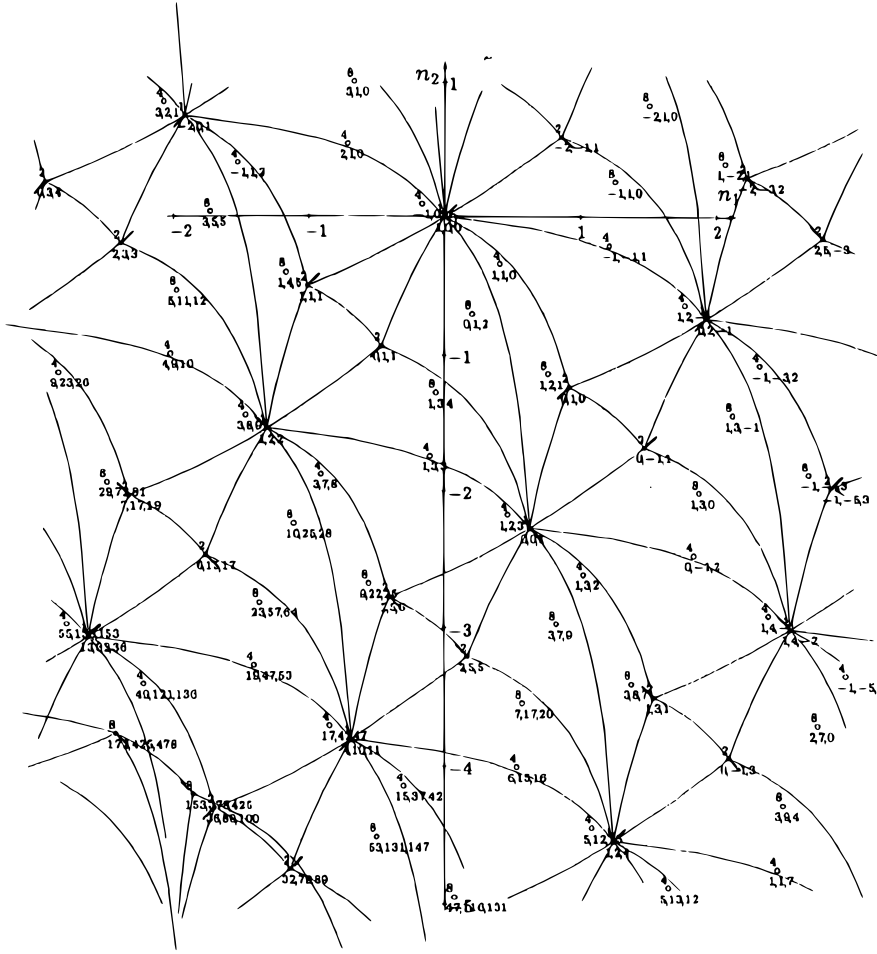


Рис. 11: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы Вороного.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формы h_1, h_2, h_3, b_d и h_5 являются самосопряженными. Поэтому для них и их сопряженных форм $\tilde{h}$ многогранники $\partial\mathbf{H}$ и $\partial\tilde{\mathbf{H}}$ совпадают и устроены

просто. Формы h_4, h_6, h_7 и форма Вороного не являются самосопряженными. Они отличаются от своих сопряженных форм; отличаются и их многогранники $\partial\mathbf{H}$, $\partial\tilde{\mathbf{H}}$, которые устроены сложнее. Здесь приведены многогранники для сопряженных форм $\tilde{h}_4$ и $\tilde{h}_7$, но отсутствуют многогранники для форм, сопряженных к h_6 и Вороного.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неудача попыток найти единый матричный алгоритм вызван тем, что в сложных (несамосопряженных) случаях переходы от граней с $\omega = 1$ к другим таким же граням дается последовательностью разных матричных алгоритмов. Только в самосопряженных случаях можно обойтись каким-то одним матричным алгоритмом.

3. Многомерный случай [70]

3.1. Модульный многогранник

Пусть в $\mathbb{R}^n = \{X\}$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы l линейных форм

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, \dots, l \quad (16)$$

и k квадратичных форм

$$f_{l+j}(X) = \langle K_j, X \rangle \langle \bar{K}_j, X \rangle, \quad j = 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$l, k \geq 0, \quad l + 2k = n, \quad l + k = m \geq 2. \quad (18)$$

Здесь L_i — n -мерные вещественные векторы-строки, K_j — n -мерные комплексные векторы-строки, $\langle L_i, X \rangle$ означает скалярное произведение и черта сверху означает комплексное сопряжение. Очевидно, $m \leq n$. Предположим, что набор форм (16), (17) невырожден, т. е.

$$\det(L_1^*, \dots, L_l^*, K_1^*, \dots, K_k^*, \bar{K}_1^*, \dots, \bar{K}_k^*) \neq 0. \quad (19)$$

Здесь звездочка $*$ означает транспонирование, т. е. L_i^* и K_j^* векторы-столбцы.

Положим

$$g_i(X) = |f_i(X)|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (20)$$

и

$$G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X)). \quad (21)$$

Целочисленная точка $X \in \mathbb{Z}^n$ называется минимальной или **наилучшим (диофантовым) приближением** к корневым подпространствам

$$\mathcal{L}_i = \{X : f_i(X) = 0\}, \quad i = 1, \dots, l + k = m, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

совокупности форм (16), (17), если для всякого $Y \in \mathbb{Z}^n$, $Y \neq 0$:

$$G(X) \leq G(Y). \quad (23)$$

В частности, если $n = 2$, $l = 0$ и $k = 1$, то этот случай не рассматривается, ибо $m = k + l = 1 < 2$, что противоречит (18).

Предлагается изучить структуру наилучших целочисленных приближений $X \in \mathbb{Z}^n$ к корневым подпространствам (22) форм (16), (17) с помощью следующего подхода [69, 70].

Формулы (20), (21) задают отображение n -мерного пространства $\mathbb{R}^n = \{X\}$ в неотрицательный ортант $\mathbf{S} = \{S \geq 0\}$ m -мерного пространства $\mathbb{R}^m = \{S\}$. При этом корневые подпространства (22) из $\mathbb{R}^n$ отображаются в координатные подпространства в $\mathbf{S}$, а целочисленные точки $X \neq 0$, т.е. $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, отображаются в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Пусть $\mathbf{H}$ – замыкание выпуклой оболочки множества $\mathbf{Z}$. Согласно определению 0 наилучшим целочисленным приближениям $X \in \mathbb{Z}^n$ корневым подпространств (22) соответствуют точки $G(X)$ множества $\mathbf{Z}$, лежащие на границе $\partial\mathbf{H}$ многогранного множества $\mathbf{H}$.

Вершины, ребра и грани любых размерностей для $\partial\mathbf{H}$ вычисляются стандартной программой вычисления выпуклых оболочек [73] для $m \leq 14$ или [68] для любого m . Точки из $\mathbf{Z} \cap \partial\mathbf{H}$, отличные от вершин, также находятся. Они являются пограничными минимальными точками. Не пограничные минимальные точки этим подходом не отлавливаются.

3.2. Периодичность модульного многогранника

Рассмотрим линейное преобразование

$$X = D\tilde{X} \quad (24)$$

исходных координат, где D – неособая квадратная n -матрица. Напомним, что матрица D называется **унимодулярной**, если все её элементы – целые и $\det D = \pm 1$. Унимодулярная матрица D является **периодом** модульного многогранника $\mathbf{H}$, если линейному преобразованию (24) соответствует диагональное линейное преобразование

$$g_i = \mu_i \tilde{g}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mu_1 \dots \mu_m = 1 \quad (25)$$

между многогранниками $\mathbf{H}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, где $\tilde{g}_i = g_i(\tilde{X})$, или между их частями.

Пусть неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (26)$$

с целыми коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$ имеет l вещественных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ и k пар комплексно сопряжённых корней $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{l+k}, \bar{\lambda}_{l+1}, \dots, \bar{\lambda}_{l+k}$, $l + 2k = n$. Здесь $l \geq 0$, $k \geq 0$, но нам нужно чтобы $k + l \geq 2$. Пусть W – соответствующая матрица Вандермонда, R – неособая матрица с рациональными элементами и

$$(L_1^*, L_2^*, \dots, L_l^*, K_1^*, K_2^*, \dots, K_k^*, \bar{K}_1^*, \bar{K}_2^*, \dots, \bar{K}_k^*) = RW, \quad (27)$$

где звёздочка означает транспонирование, т.е. L_i^* – вектор-столбец. Рассмотрим $m = k + l$ форм

$$\begin{aligned} f_i(X) &= \langle L_i, X \rangle, & i &= 1, \dots, l, \\ f_{l+j}(X) &= \langle K_j, X \rangle \langle \bar{K}_j, X \rangle, & j &= 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 5. *Соответствующая формам (28) гиперповерхность $\partial\mathbf{H}$ размерности $m - 1$ имеет ровно $m - 1$ независимых периодов.*

Согласно теореме Дирихле [66] поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеет ровно $m - 1$ независимых фундаментальных единиц. Следовательно, многогранная гиперповерхность $\partial\mathbf{H}$ размерности $m - 1$ имеет ровно $m - 1$ независимых периодов, произведение степеней которых не равно тождественному преобразованию. Алгоритмы, обобщающие цепную дробь, позволяют находить многогранники $\mathbf{H}$. По многогранникам $\mathbf{H}$ находятся их периоды и по ним — фундаментальные единицы поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ (см. [66]–[68], также [70, 71, 72, 73]).

Теперь один из векторов L_i , $i = 1, \dots, l$ или K_j , $j = 1, \dots, k$ в (27) заменим произвольным вектором L'_i или K'_j с сохранением вещественности или комплексности вектора L_i или K_j и свойства невырожденности (19), и вместо формы $f_i(X)$ рассмотрим форму

$$f'_i(X) = \langle L'_i, X \rangle, \text{ если } i \leq l,$$

$$f'_i(X) = \langle K'_{i-l}, X \rangle \langle \bar{K}'_{i-l}, X \rangle, \text{ если } i > l.$$

Пусть пересечение U корневых подпространств $\mathcal{L}_j$ всех нештрихованных форм ($j \neq i$) отлично от нуля, а пересечение подпространства U с корневым подпространством $\mathcal{L}'_i$ формы $f'_i(X)$ состоит только из нуля $X = 0$. Тогда поверхность $\partial\mathbf{H}'$, соответствующая $m - 1$ старым нештрихованным формам и одной штрихованной форме, будет $m - 1$ периодической вблизи подпространства U . Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби для квадратичной иррациональности.

4. Заключение

Наилучшие диофантовые приближения можно вычислять посредством глобального алгоритма, использующего стандартную программу вычисления выпуклых оболочек, вместо пошаговых вычислений как в алгоритме цепной дроби. Это дает решение проблемы, которую пытались решить большинство ведущих математиков XIX века.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1961.
3. Wallis J. A. Arithmetica infinitorum, 1655.
4. Euler L. De fractinibus continuis // Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol. 1737. V. 9.
5. Lagrange J. L. Complement chez Elements d'algebre etc. par M. L. Euler. T. III. 1774.
6. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. P. 99–104.
7. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 29–64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer, 1891. P. 385–426.

8. Jacobi C. G. J. Ueber die Auflösung der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f_n$ // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 21–28.
9. Poincare H. Sur une generalization des fractionés continues // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1884. V. 99. P. 1014–1016.
10. Brun V. En generalisation av Kjedefbroken // Skrifter utgit av Videnskapsselskapeti Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse 1919. 1920. № 6.
11. Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. P. 1–76.
12. Bernstein L. The Jacobi-Perron algorithm — its theory and application. LNM 207. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1971.
13. Пустыльников Л. Д. Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория // УМН. 2003. Т. 58. № 1. С. 113–164.
14. Schweiger F. Multidimensional Continued Fractions. Oxford Univ. Press: New York, 2000.
15. Hermite Ch. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. T. II, lettres 232, 238, 408. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
16. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 4. С. 9–27.
17. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 339–348.
18. Parusnikov V. I. Klein polyhedra for complete decomposable forms // Number theory. Dvophantine, Computational and Algebraic Aspects. Editors: K. Györy, A. Pethő and V. T. Sós. De Gruyter. Berlin, New York. 1998. P. 453–463.
19. Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 110–128.
20. Парусников В. И. Многогранники Клейна с большими гранями // Препринт № 93. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1997.
21. Парусников В. И. Многогранники Клейна для пятой экстремальной кубической формы // Препринт № 69. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1998.
22. Парусников В. И. Многогранники Клейна для шестой экстремальной кубической формы // Препринт № 69. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1999. 31 с.
23. Парусников В. И. Многогранники Клейна для седьмой экстремальной кубической формы // Препринт № 79. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1999. 32 с.
24. Lejeune Dirichlet G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S.- B. Press. Akad. Wiss. 1842. S. 93–95 // Werke. Bd. I. Berlin: Reimer, 1889. P. 635–638.

-
25. Hermite Ch. Lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres // J. Reine Angew. Math. 1850. Bd. 40. P. 261- 315 // Oeuvres, T. I, Paris: Gauthier-Villares. 1905. P. 100–163 // Opusculum Mathematica de Jacobi. V. II.
 26. Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nadir. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1895. № 3. P. 357–359.
 27. Minkowski H. Generalisation de le theorie des fractions continues / Ann. Sci. Ec. Norm. Super, ser III, 1896, t. 13, p. 41–60. Also in: Gesamm. Abh. I. P. 278- 292.
 28. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.
 29. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых кубических форм от трех переменных // Записки научных семинаров Ленинградского отделения математич. ин-та им. Стеклова (ЛОМИ). 1988. Т. 168. С. 125–139.
 30. Арнольд В. И. Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2001.
 31. Lachaud G. Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // C.R. Acad. Sei. Ser. 1. 1993. V. 317. P. 711–716.
 32. Lachaud G. Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial, analogues du théorème de Lagrange pour les irrationnels de degré quelconque. Prétirage N 93–17. Marseille: Laboratoire de Mathématiques Discretes du C.N.R.S., 1993.
 33. Brentjes A. J. Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. Mathematical Centre Tracts 145, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981.
 34. Buchmann J. On the period length of the generalized Lagrange algorithm // J. Number Theory. 1987. V. 26. P. 8–37.
 35. Быковский В. А. Теорема Валена для двумерных подходящих дробей // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 30–37.
 36. Hurwitz A. Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1894. Bd. 44. P. 417–436.
 37. Брюно А. Д. Разложения алгебраических чисел в цепные дроби // Журнал вычислительной матем. и матем. физики. 1964. Т. 4. № 2. С. 211–221.
 38. Lang S., Trotter H. Continued fractions of some algebraic numbers // J. Reine Angew. Math. 1972. Bd. 252. P. 112–134.
 39. Старк Х. М. Объяснение некоторых экзотических непрерывных дробей, найденных Бриллихартон // Вычисления в алгебре и теории чисел (ред. Б.Б. Венков и Д.К. Фаддеев). М.: Мир, 1976. С. 155–171.
 40. Minkowski H. Über die Annelierung an eine reelle Grosse durch rationale Zahlen // Math. Annalen. 1901. B. 54. P. 91–124. Also in: Gesamm. Abh. I. P. 320–352.

41. Pipping N. Zur Theorie der Diagonalkettenbrüche // Acta Acad. Aboens., 1924. В. 3. 22 S.
42. Нечаев В. И. Диагональная цепная дробь // Математ. Энциклоп. М.: Советская Энциклоп. 1979. Т. 2. С. 123.
43. Брюно А. Д. Правильное обобщение цепной дроби // Препринт № 86. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2003. 17 с.
44. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники модулей троек линейных форм // Препринт N 93. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2003. 20 с.
45. Брюно А. Д. К обобщениям цепной дроби // Препринт N 10. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2004. 31 с.
46. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N 45. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2004. 32 с.
47. Брюно А. Д., Парусников В. И. Дальнейшее обобщение цепной дроби // Препринт N 40. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2005. 19 с.
48. Bruno A.D. and Parusnikov V. I. New generalizations of the continued fraction // Preprint no. 52 of the Keldysh Inst, of Applied Math.: Moscow, 2005. 20 p.
49. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Т. 402. № 4. С. 439–444.
50. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2000. Т. 402. № 6. С. 732–736.
51. Parusnikov V. I. Comparison of several generalizations of the continued fraction // Чебышевский сборник (Тула). 2005. Т. 5. № 4. Р. 180–188.
52. Брюно А. Д. Свойства модульного многогранника // Препринт № 72. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2005. 31 с.
53. Klein F. Sur une representation geometrique du developpement, en fraction continue ordinaire // Nouv. Ann. Math. (3), 1896, Bd. 15. P. 327–331.
54. Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Bd. I, Einleitung. Göttingen. 1896. P. 16–50.
55. Koksma J. F. Diophantische Approximationen. Berlin: Julius Springer, 1936.
56. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner, Leipzig, 1913; Stuttgart, 1954, 1977.
57. Hurwitz A. Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung relir Grössen // Acta math. 1889. В. 12. P. 367–405.
58. Коркина Е. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры. // Труды Мат. ин-та им. Стеклова. 1995. Т. 203. С. 143–166.

-
59. Kontsevich M. L., Suhov Yu. M. Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1999. V. 197. P. 9–27.
60. Briggs K. Klein polyhedra (2013), Доступно по адресу: <http://keithbriggs.info/klein-polyhedra.html>.
61. Парусников В. И. Многогранники Клейна для трех экстремальных форм // Матем. заметки. 2005. Т. 77. На 4. С. 566–583.
62. Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms // Acta Arithmetica. 1971. V. 18. P. 371–385.
63. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени. Труды МИ АН. Т. 11. М.–Л.: АН СССР, 1947.
64. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.–Л.: АН СССР, 1947.
65. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во иностр. лит., пер. с англ., 1961.
66. Боревиц З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Второе изд. М.: Наука, 1972.
67. Güting R. Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I // J. Reine Angew. Math., 278/279 (1975).
68. Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and algebraic computations, ACM NY, USA, 2008, 333–334.
69. Брюно А. Д. Обобщения цепной дроби // Чебышевский сборник, 7:3 (2006) 4–71.
70. Брюно А. Д. Структура многомерных диофантовых приближений // ДАН 433:5 (2010) 587–589.
71. Брюно А. Д., Парусников В. И. Двустороннее обобщение непрерывных дробей // ДАН 429:6 (2009) 727–730.
72. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений и многомерное обобщение цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула) 11:1 (2010) 68–73.
73. Maple 2015.0 // <http://www.maplesoft.com/products/Maple>.
74. Bruno A. D. On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov. Preprint of arXiv, No 1401.6320.
75. Bruno A. D. New generalization of continued fraction, I // Functiones et Approximatio. 2010. vol. 43, no. 1. P. 55–104.

REFERENCES

1. Venkov, BA 1937, *Elementary theory of numbers*, ONTI, Moscow–Leningrad.
2. Khinchin, AYa 1963, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen.
3. Wallis, JA 1655, *Arithmetica infinitorum*.
4. Euler, L. 1737, “De fractinibus continuis”, *Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol.*, vol. 9.
5. Lagrange, JL 1774, *Complement chez Elements d’algebre etc. par M. L. Euler*, T. III.
6. Euler, L. 1775, “De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda”, *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.*, Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. pp. 99–104.
7. Jacobi, C. G. J. 1868, “Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 29–64. // *Gesammelte Werke*, Bd. IV. Berlin: Reimer, 1891. pp. 385–426.
8. Jacobi, C. G. J. 1868, “Ueber die Auflösung der Gleichung $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=f_n$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 21–28.
9. Poincare, H. 1889, “Sur une generalization des fractionés continues”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. 1, vol. 99, pp. 1014–1016.
10. Brun, V. 1920, “En generalisation av Kjedebrøken”, *Skifter utgit av Videnskapselskapeti Kristiania. I, Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse* 1919, no. 6.
11. Perron, O. 1907, “Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus”, *Math. Ann.*, vol. 64, pp. 1–76.
12. Bernstein, L 1971, *The Jacobi-Perron algorithm — its theory and application*, LNM 207, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
13. Pustyl'nikov, L.D. 2003, “Generalized continued fractions and the ergodic theory”, *Russian Math.-Surveys*, vol. 58, no. 1.
14. Schweiger, F 2000, *Multidimensional Continued Fractions*, Oxford Univ. Press, New York.
15. Hermite, Ch. 1905, *Correspondance d’Hermite et de Stieltjes*, T. II, lettres 232, 238, 408, Gauthier-Villars, Paris.
16. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 1994, “Klein polyhedrals for two cubic Davenport forms”, *Math. Notes*, vol. 56, no. 3–4, pp. 994–1007.
17. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 1997, “Comparison of various generalization of continued fractions”, *Math. Notes*, vol. 61, no. 3, pp. 278–286.
18. Parusnikov, V.I. 1998, “Klein polyhedra for complete decomposable forms”, *Number theory. Dvophantine, Computational and Algebraic Aspects*, Editors: K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós, De Gruyter, Berlin, New York, pp. 453–463.

19. Parusnikov, V.I. 2000, "Klein polyhedra for the fourth extremal forms", *Math. Notes*, vol. 67, no. 1, pp. 87–102.
20. Parusnikov, V.I. 1997, "Klein's polyhedra with big faces", *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
21. Parusnikov, V.I. 1998, "Klein's polyhedra for the fifth extremal cubic form", *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
22. Parusnikov, V.I. 1999, "Klein's polyhedra for the sixth extremal cubic form", *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
23. Parusnikov, V.I. 1999, "Klein's polyhedra for the seventh extremal cubic form", *Preprint no. 79 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
24. Lejeune Dirichlet, G.P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S.- B. Press. Akad. Wiss.*, S. 93–95 // Werke. Bd. I, Reimer, Berlin, 1889, pp. 635–638.
25. Hermite, Ch. 1850, "Lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres", *J. Reine Angew. Math.*, Bd. 40, pp. 261–315 // Oeuvres, T. I, Gauthier-Villares, Paris, 1905, pp. 100–163 // Opusculum Mathematica de Jacobi. V. II.
26. Klein, F. 1895, "Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung", *Nadir. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, no. 3, pp. 357–359.
27. Minkowski, H. 1896, "Generalisation de la theorie des fractions continues", *Ann. Sci. Ec. Norm. Super*, ser III, t. 13, pp. 41–60. Also in: *Gesamm. Abh.* I. P. 278–292.
28. Voronoi, GF 1896, *On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction*, Warsaw University.
29. Skubenko, B.F. 1991, "Minimum of decomposable cubic form of three variables", *J. Sov. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 302–321.
30. Arnold, V.I. 1998, "Higher dimensional continued fraction", *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 3, no. 3, pp. 10–17.
31. Lachaud, G. 1993, "Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange", *C.R. Acad. Sci.*, Ser. 1, vol. 317, pp. 711–716.
32. Lachaud, G. 1993, "Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial, analogues du théorème de Lagrange pour les irrationnels de degré quelconque", *Prétirage N 93–17*, Laboratoire de Mathématiques Discretes du C.N.R.S., Marseille.
33. Brentjes, A.J. 1981, "Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms", *Mathematical Centre Tracts*, 145, Amsterdam, Mathematisch Centrum.
34. Buchmann, J. 1987, "On the period length of the generalized Lagrange algorithm", *J. Number Theory*, vol. 26, pp. 8–37.

35. Bykovsky, V.A. 1999, "The Valen's theorem for two-dimensional convergent fraction", *Math. Notes*, vol. 66, no. 1.
36. Hurwitz, A. 1984, "Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche", *Math. Ann.*, Bd. 44, pp. 417–436.
37. Bruno, A.D. 1964, "Continued fraction expansion of algebraic numbers", *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–15.
38. Lang, S. & Trotter, H. 1972, "Continued fractions of some algebraic numbers", *J. Reine Angew. Math.*, Bd. 252, pp. 112–134.
39. Stark, H.M. 1971, "An explanation of some exotic continued fractions found by Brillhart", *Computers in Number Theory*, Academic Press, London and New York, pp. 21–35.
40. Minkowski, H. 1901, "Über die Annelierung an eine reele Grosse durch rationale Zahlen", *Math. Annalen*. B. 54, pp. 91–124. Also in: *Gesamm. Abh. I.* pp. 320–352.
41. Pipping, N. 1924, "Zur Theorie der Diagonalkettenbrüche", *Acta Acad. Aboens.*, B. 3, 22 S.
42. Nechaev, V.I. 1979, "Diagonal continued fraction", *Math. Encyclop.*, Kluwer Acad. Publ.
43. Bruno, A.D. 2003, "The correct generalization of the continued fraction", *Preprint no. 86 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
44. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2003, "Polyhedra of absolute values for triple of linear forms", *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
45. Bruno, A.D. 2004, "On generalization of the continued fraction", *Preprint no. 10 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
46. Bruno, A.D. 2004, "Algorithm of generalized continued fractions", *Preprint no. 45 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
47. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2005, "Further generalization of the continued fraction", *Preprint no. 40 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
48. Bruno, A.D. & Parusnikov, V. I. "New generalizations of the continued fraction" *Preprint no. 52 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow, 20 p.
49. Bruno, A.D. 2005, "Structure of the best Diophantine approximations", *Doklady Mathematics*, vol. 71, no. 3, pp. 396–400.
50. Bruno, A.D. 2000, "Generalized continued fraction algorithm", *Doklady Mathematics*, vol. 71, no. 3, pp. 446–450.
51. Parusnikov, V. I. 2005, "Comparison of several generalizations of the continued fraction", *Chebyshevsky Sbornik (Tula)*, vol. 5. no. 4, pp. 180–188.

52. Bruno, A.D. 2005, "Properties of the modular polyhedron", *Preprint no. 72 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
53. Klein, F. 1896, "Sur une representation geometrique du développement, en fraction continue ordinaire", *Nouv. Ann. Math. (3)*, Bd. 15, pp. 327–331.
54. Klein, F. 1896, "Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie", Bd. I, Einleitung. Göttingen. pp. 16–50.
55. Koksma, JF 1936, *Diophantische Approximationen*, Julius Springer, Berlin.
56. Perron, O 1913, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Leipzig; Stuttgart, 1954, 1977.
57. Hurwitz, A. 1889, "Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung relir Grössen", *Acta math*, B. 12, pp. 367–405.
58. Korkina, E.I. 1995, "Two-dimensional convergent fractions. The simplest examples", *Proceedings of the Steklov Inst. of Math.*, vol. 209, pp. 124–144.
59. Kontsevich, M.L. & Suhov, Yu.M. 1999, "Statistics of Klein polyhedra and multi-dimensional continued fractions", *Amer. Math. Soc. Transi. (2)*, vol. 197, pp. 9–27.
60. Briggs, K. Klein polyhedra (2013), Available at:
<http://keithbriggs.info/klein-polyhedra.html>.
61. Parusnikov, V.I. 2005, "Klein's polyhedra for three extremal forms", *Math. Notes*, vol. 77, no. 4, pp. 523–538.
62. Swinnerton-Dyer H.P.F. 1971, "On the product of three homogeneous linear forms", *Acta Arithmetica*, vol. 18, pp. 371–385.
63. Delone, B.N. & Faddeev, D.K. 1964, "The theory of irrationalities of the third degree", *Am. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs*, vol. 10.
64. Delone, BN 1947, *The Petersburg's School of Mathematics*, AN SSSR, Moscow–Leningrad.
65. Cassels, JWS 1959, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin.
66. Borevich, ZI & Shafarevich, IR 1966, *Number Theory*, Academic Press.
67. Güting, R. 1975, "Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I", *J. Reine Angew. Math.*, 278/279.
68. Fukuda, K. "Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation", *Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and algebraic computations*, ACM NY, USA, 2008, pp. 333–334.
69. Bruno, A.D. 2006, "Generalization of continued fraction", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 4–71.

- 70. Bruno, A.D. 2010, “The structure of multidimensional Diophantine approximations”, *Doklady Mathematics*, vol. 82, no. 1.
- 71. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2009, “Two-way generalization of the continued fraction”, *Doklady Mathematics*, vol. 80, no. 3, pp. 887–890.
- 72. Bruno, A.D. 2010, “Structure of the best Diophantine approximations and multi-dimensional generalizations of the continued fraction”, *Chebyshevskii Sbornik (Tula)*, vol. 11, no. 1. pp. 68–73.
- 73. Maple 2015.0 (2015), Available at: <http://www.maplesoft.com/products/Maple>.
- 74. Bruno, A.D. 2014, “On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov”, *Preprint of arXiv*, No 1401.6320.
- 75. Bruno A. D. 2010 “New generalization of continued fraction, I”, *Functiones et Approximatio*, vol. 43, no. 1. pp. 55–104.

Поступило 30.04.2015

УДК 512.741

**УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА,
ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ
ФУНКЦИЮ УРОВНЯ 3¹**

В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова (г. Москва)

Аннотация

Классическая теорема М. Лазара (см. [1]) о структуре кольца коэффициентов универсальной формальной группы является ключевым результатом теории одномерных формальных групп. Открытие формальной группы геометрических кобордизмов ([2], [3]) и теорема Д. Квиллена ([4]) о том, что её можно отождествить с универсальной формальной группой, позволили ввести теорию формальных групп в аппарат алгебраической топологии, включая аппарат теории родов Хирцебруха. Широко известно обязанное этому фундаментальное взаимопроникновение методов и результатов алгебраической топологии (см. [5]), алгебраической геометрии, теории функциональных уравнений и математической физики.

Важные приложения в алгебраической топологии нашли результаты теории эллиптических функций и функций Бейкера–Ахиезера, играющие фундаментальную роль в современной теории интегрируемых систем.

Актуальным стало построение универсальных формальных групп заданного вида, экспоненты которых задаются этими функциями. Известные результаты в этом направлении используют как классические, так и полученные недавно, теоремы сложения, определяющие вид формальных групп.

В настоящей работе решена давно стоявшая задача: найден вид универсальной формальной группы, экспонентой которой является эллиптическая функция уровня 3. Получены результаты о кольце коэффициентов этой группы, описаны её связи с известными универсальными формальными группами.

Ключевые слова: формальные группы, эллиптическая функция уровня 3.

Библиография: 15 названий.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 14-11-00414).

THE UNIVERSAL FORMAL GROUP THAT DEFINES THE ELLIPTIC FUNCTION OF LEVEL 3

V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova (Moscow)

Abstract

The classical theorem of M. Lazar (see [1]) on the structure of the ring of coefficients of the universal formal group is a key result of the theory of one-dimensional formal groups. The discovery of the formal group of geometric cobordisms ([2], [3]) and D. Quillen's theorem ([4]) that it can be identified with the universal formal group allowed to introduce the theory of formal groups in the apparatus of algebraic topology, including the apparatus of the theory of Hirzebruch genera. Due to this there has been a widely-known fundamental mutual penetration of methods and results of algebraic topology, (see [5]), algebraic geometry, the theory of functional equations and mathematical physics.

Important applications in algebraic topology found results of the theory of elliptic functions and Baker–Akhiezer functions, which play a fundamental role in the modern theory of integrable systems.

The construction of universal formal groups of given form, with exponents given by these functions, became actual. Known results in this direction use both classic and recently obtained addition theorems, that determine the form of formal groups.

In this paper we solved a long standing problem: we have found the form of universal formal group the exponent of which is the elliptic function of level 3. We have obtained results on the coefficient ring of this group and described its relationship with known universal formal groups.

Keywords: formal groups, elliptic function of level 3.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Эллиптический синус Якоби $sn(x)$ имеет реализацию в виде эллиптической функции уровня 2. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = sn(x)$, $\mu = sn'(x)$, униформизирует кривую

$$\mu^2 = 1 - 2\delta\xi^2 + \varepsilon\xi^4.$$

Закон сложения для этой кривой определяется законом сложения для $sn(x)$ в форме А. Кэли (см. [6])

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)^2 - \psi(y)^2}{\psi(x)\psi'(y) - \psi(y)\psi'(x)}.$$

Доказано, что $sn(x)$ является экспонентой *универсальной* формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)},$$

Кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_2$ этой формальной группы вычислено в [7]. Оказывается, что $B(u)^2 = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4$ и поэтому $\mathcal{R}_2[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$.

Для эллиптической функции $f(x)$ уровня 3 отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = f(x)$, $\mu = f'(x)$, униформизирует кривую

$$\mu^3 + 3a\xi\mu^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)\xi^3 + (a^3 - 3b)^2\xi^6. \quad (1)$$

В настоящей работе мы показываем, что эллиптическая функция уровня 3 является экспонентой *универсальной* формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 C(v) - v^2 C(u)}{u C(v)^2 - v C(u)^2}, \quad (2)$$

и тем самым полностью определяется соответствующим законом сложения.

Оказывается, что эта формальная группа определена над кольцом $\mathcal{R}_3$, таким что

$$\mathcal{R}_3 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] [a, b],$$

и $C(u)^2 = w(u) - au$, где $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$ — решение уравнения

$$w^3 + 3a u w^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2 u^6 \quad (3)$$

с начальными данными $w(0) = 1$.

Формальная группа вида (2) является специализацией формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{u B(v) - v B(u)}, \quad (4)$$

введённой в [8]. Её кольцо коэффициентов вычислено в [7].

2. Функции Вейерштрасса

Напомним понятия из классической теории эллиптических функций (см. [6]).

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, $L = \{2n\omega_1 + 2m\omega_2\}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ — решётка, порождённая $(2\omega_1, 2\omega_2)$, положим $L' = L \setminus (0, 0)$.

Эллиптической функцией (относительно решётки L) называется мероморфная двоякопериодическая функция, то есть мероморфная $f(x)$, такая что

$$f(x + 2\omega_1) = f(x), \quad f(x + 2\omega_2) = f(x).$$

Функция Вейерштрасса

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{l \in L'} \left(\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right)$$

является эллиптической (относительно решётки L). Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $z \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = \wp(z)$, $\mu = \wp'(z)$, униформизирует эллиптическую кривую

$$\mu^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \quad (5)$$

где g_2, g_3 задаются формулами

$$g_2 = 60 \sum_{l \in L'} \frac{1}{l^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{l \in L'} \frac{1}{l^6}.$$

Дискриминант и J -инвариант эллиптической кривой задаются формулами

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \quad J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

ζ -функция Вейерштрасса, определяемая соотношениями

$$\zeta'(x) = -\wp(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x} \right) = 0,$$

и σ -функция Вейерштрасса, определяемая соотношениями

$$(\lg \sigma(x))' = \zeta(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma(x)}{x} = 1,$$

являются квазипериодическими:

$$\zeta(x + 2\omega_k) = 2\eta_k + \zeta(x), \quad \sigma(x + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(x + \omega_k)} \sigma(x),$$

где $\eta_k = \zeta(\omega_k)$ и имеет место соотношение

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

3. Эллиптические функции уровня N

Понятие *эллиптического рода уровня N* ввёл Ф. Хирцебрух в [9] (см. также [10]). Функция, которая задаёт этот род называется *эллиптической функцией уровня N* . Следуя [11] (см. также [12]), определим эллиптическую функцию уровня N выражением

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(z)}{\sigma(z-x)} \exp(-kx), \quad (6)$$

где $z = \frac{2n}{N}\omega_1 + \frac{2m}{N}\omega_2$ и $k = \frac{2n}{N}\eta_1 + \frac{2m}{N}\eta_2$, $n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Имеем

$$f(x + 2\omega_1) = e^{2\pi i \frac{m}{N}} f(x), \quad f(x + 2\omega_2) = e^{-2\pi i \frac{n}{N}} f(x).$$

Таким образом, функция $h(x) = (f(x))^N$ является эллиптической относительно решётки L и имеет единственный ноль порядка N в точке $x = 0$. Она имеет единственный полюс порядка N в точке $x = z$ — точке порядка N в группе $\mathbb{C}/L$. Сама функция $f(x)$ является эллиптической относительно подрешётки индекса N решётки L .

ЛЕММА 1 (см. [9], [12]). *Эллиптическая функция уровня 3 удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^3 + a_1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 + a_3 = \frac{1}{f(x)^3} + a_6 f(x)^3, \quad (7)$$

где коэффициенты a_k связаны соотношениями $a_1 = -6e_1$, $a_3 = 32e_1^3 - 4e_3$, $a_6 = 4e_3^2$ для алгебраически независимых параметров e_1 и e_3 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Положив $a = -2e_1$, $b = \frac{2}{3}(e_3 - 4e_1^3)$ в (7), для $\xi = f(x)$, $\mu = f'(x)$, получаем уравнение (1).

4. Формальные группы

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей 1.

Коммутативной одномерной формальной группой над R называется формальный ряд

$$F(u, v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \in R, \quad i > 0, j > 0, \quad (8)$$

удовлетворяющий условию ассоциативности

$$F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w). \quad (9)$$

Общую теорию формальных групп см. в [13].

Экспонентой формальной группы $F(u, v)$ называется формальный ряд $f(t) \in R \otimes \mathbb{Q}[[t]]$, однозначно определяемый законом сложения

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (10)$$

Логарифмом формальной группы F называется формальный ряд $g(u)$ такой, что

$$g(f(x)) = x.$$

Из (10) получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right|_{v=0} = \frac{1}{g'(u)}, \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial v^2} F(u, v) \right|_{v=0} = \frac{g'(u)^2 g''(0) - g''(u)}{g'(u)^3}. \quad (11)$$

Формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$ над кольцом $\mathcal{R}$ называется *универсальной формальной группой*, если для любой формальной группы $F(u, v)$ над некоторым кольцом R существует единственный гомоморфизм $r : \mathcal{R} \rightarrow R$ такой, что $F(u, v) = u + v + \sum r(\alpha_{i,j}) u^i v^j$. Гомоморфизм r называется *классифицирующим гомоморфизмом*.

Рассмотрим градуированное кольцо $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\beta_{i,j} : i > 0, j > 0]$, $\deg \beta_{i,j} = -2(i + j - 1)$. Положим $\hat{F}(u, v) = u + v + \sum \beta_{i,j} u^i v^j$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{F}(u, v), w) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^l u^i v^j w^k, \\ \hat{F}(u, \hat{F}(v, w)) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^r u^i v^j w^k, \end{aligned}$$

где $\beta_{i,j,k}^l$ и $\beta_{i,j,k}^r$ – однородные полиномы от $\beta_{i,j}$ и $\deg \beta_{i,j,k}^l = \deg \beta_{i,j,k}^r = -2(i + j + k - 1)$.

Пусть $J \subset \mathcal{U}$ – идеал ассоциативности с образующими $\beta_{i,j,k}^l - \beta_{i,j,k}^r$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R} = \mathcal{U}/J$, каноническую проекцию $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ и пусть $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$, где $\alpha_{i,j} = \pi(\beta_{i,j})$. По построению, ряд $\mathcal{F}(u, v)$ задаёт формальную группу над градуированным кольцом $\mathcal{R}$, которая является универсальной. В случае, когда мы рассматриваем формальные группы $F(u, v)$ определённого вида, то аналогично определяется универсальная формальная группа заданного вида над кольцом $\mathcal{R}/I$, где идеал I кольца $\mathcal{R}$ определяется видом формальной группы. Обратим внимание, что кольцо $\mathcal{R}/I$ мультипликативно порождается коэффициентами ряда, задающего формальную группу.

Пусть даны универсальные формальные группы $F_1(u, v)$ и $F_2(u, v)$ разного вида. Скажем, что эти виды эквивалентны, если каждый из них получается специализацией другого.

В [14] введена универсальная формальная группа вида

$$F(u, v) = uw(v) + vw(u) - w_1uv + \frac{w(u)\beta(u) - w(v)\beta(v)}{uw(v) - vw(u)}u^2v^2, \quad (12)$$

которая названа формальной группой Кричевера.

ЛЕММА 2. *Виды формальных групп (4) и (12) эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратим внимание, что вид (4) не зависит от значений $B'(0)$ и $A''(0)$, поэтому в случае универсальной формальной группы нужно положить $B'(0) = 0$ и $A''(0) = 0$. Также нужно положить $A(0) = 1$, $B(0) = 1$.

Формулы специализации (12) для перехода к (4):

$$w(u) = B(u) + A'(0)u, \quad \beta(u) = \frac{A'(0)uB(u) + B(u)^2 - A(u)}{u^2(B(u) + A'(0)u)}.$$

Формулы специализации (4) для перехода к (12):

$$A(u) = w(u)(w(u) - w_1u - \beta(u)u^2), \quad B(u) = w(u) - w_1u.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 2. *Кольца коэффициентов универсальных формальных групп вида (4) и (12) совпадают.*

5. Результаты

ТЕОРЕМА 1. *Экспонентой универсальной формальной группы вида (2)*

$$F(u, v) = \frac{u^2C(v) - v^2C(u)}{uC(v)^2 - vC(u)^2}.$$

является эллиптическая функция уровня 3.

ТЕОРЕМА 2. *Универсальная формальная группа вида (2) определена над кольцом $\mathcal{R}_3$, таким что*

$$\mathcal{R}_3 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] [a, b].$$

Здесь a и b — алгебраически независимые параметры.

Доказательство этих теорем мы приводим в следующем разделе. Нам понадобится следующий результат:

ТЕОРЕМА 3. *Эллиптическая функция уровня 3 является двухпараметрической, с параметрами, скажем, a и b . Её можно задать в любом из следующих видов:*

•

$$f(x) = -2 \frac{\wp(x) + \frac{a^2}{4}}{\wp'(x) - a\wp(x) + b - \frac{a^3}{4}} \quad (13)$$

где $\wp(x) = \wp(x; g_2, g_3)$ и $\wp'(x) = \wp'(x; g_2, g_3)$ — функции Вейерштрасса, и

$$g_2 = \frac{1}{4}a(3a^3 - 8b), \quad g_3 = \frac{1}{24}(3a^6 - 12a^3b + 8b^2).$$

•

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(s)}{\sigma(s-x)} e^{-(\frac{a}{2} + \zeta(s))x} \quad (14)$$

где $\sigma(x) = \sigma(x; \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ и $\zeta(x) = \zeta(x; \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ — функции Вейерштрасса, и

$$\hat{g}_2 = \frac{3}{4}a(a^3 + 24b), \quad \hat{g}_3 = \frac{1}{8}(a^6 - 60a^3b - 72b^2), \quad (15)$$

а параметр s определяется соотношениями

$$\wp(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \frac{3}{4}a^2, \quad \wp'(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = a^3 - 3b.$$

• Решение уравнения

$$f'(x)^3 + 3af'(x)^2f(x) = (a^3 - 3b)^2f(x)^6 + 2(a^3 + 3b)f(x)^3 + 1 \quad (16)$$

с начальными данными $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1 мы получаем, что эллиптическая функция уровня 3 является решением (16) с заданными начальными условиями. Такое решение полностью определяется параметрами a и b . Функции (13) и (14) являются решениями того же дифференциального уравнения с теми же начальными условиями, и поэтому эти три функции совпадают как функции на $\mathbb{C}$.

Доказательство того, что функция (13) удовлетворяет уравнению (16) получается прямой подстановкой (13) в (16) с использованием соотношения (5). Доказательство того, что функции (13) и (14) совпадают дано в [14], где эти функции представлены как выражения экспоненты одной и той же формальной группы. Параметры a, b введены в [15]. $\square$

Обратим внимание, что функция (13) является эллиптической относительно решётки L , соответствующей параметрам g_2, g_3 . Функция (14) является квазипериодической относительно решётки $\hat{L}$, соответствующей параметрам $\hat{g}_2, \hat{g}_3$. Решётка L является подрешёткой решётки $\hat{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для инвариантов $\hat{g}_2$ и $\hat{g}_3$, заданных формулами (15), точка s , определяемая соотношениями

$$\wp(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \frac{3}{4}a^2, \quad \wp'(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = a^3 - 3b,$$

является точкой порядка 3 в группе $\mathbb{C}/\hat{L}$.

6. Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим универсальную формальную группу вида (2)

$$F(u, v) = \frac{u^2 C(v) - v^2 C(u)}{u C(v)^2 - v C(u)^2}.$$

ЛЕММА 3. Имеем $C(0) = 1$.

Доказательство получается применением к виду (2) условия, что начало разложения формальной группы в ряд должно иметь вид (8).

Положим (см. (11))

$$w(u) = \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = \frac{1}{g'(u)}.$$

Введём w_k как коэффициенты ряда

$$w(u) = 1 + \sum_k w_k u^k.$$

ТЕОРЕМА 4. Универсальная формальная группа вида (2) является специализацией универсальной формальной группы вида (4), выделяемым условием, что $w(u)$ является решением уравнения

$$w(u) + w_1 u = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2} u w(u) (w'(u) + w_1) - \frac{w_2 + w_1^2}{2} u^2 \right)^2. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (11) получаем

$$\left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = w(u), \quad \left. \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0} = w(u) (w'(u) - w_1).$$

С другой стороны, из (2) с учётом леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} &= C(u)^2 - C'(0)u, \\ \left. \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0} &= 2C''(0)u - 6C'(0)C(u)^2 + 2\frac{C(u)^4}{u} - C'''(0)u - 2\frac{C(u)}{u}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место соотношения на коэффициенты

$$C'(0) = w_1, \quad C''(0) = w_2 - w_1^2,$$

и выражения

$$C(u)^2 = w(u) + w_1 u, \quad C(u) = w(u)^2 - \frac{1}{2} u w(u) w'(u) - \frac{w_1}{2} u w(u) - \frac{w_2 + w_1^2}{2} u^2. \quad (18)$$

Отсюда получаем уравнение (17).

Подстановка (18) в (2) даёт формальную группу

$$F(u, v) = uw(v) + vw(u) - \frac{w_1}{2}uv - \frac{uv}{2} \frac{uw(v)w'(v) - vw(u)w'(u)}{uw(v) - vw(u)},$$

которая переобозначением $\beta(u) = \frac{w'(u)-w_1}{2u}$ принимает вид (12).

Применяя лемму 2, получаем доказательство теоремы. $\square$

Уравнение (17)

$$w(u) + w_1u = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)(w'(u) + w_1) - \frac{w_2 + w_1^2}{2}u^2 \right)^2$$

задаёт коэффициенты w_k начиная с $k = 4$ как многочлены от w_1, w_2, w_3 с рациональными коэффициентами, поскольку с точностью до элементов, разложимых в кольце порождённом w_k , уравнение превращается в

$$3(w(u) - 1) = uw'(u) + 2w_1u + w_2u^2,$$

и коэффициент при u^k при $k \geq 3$ в левой части равен 3, а в правой он равен k .

ЛЕММА 4. *Для формальной группы (2) имеет место соотношение на коэффициенты*

$$w_2 = w_1^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из начальных коэффициентов разложения в ряд уравнения (17) следует соотношение

$$w_1(w_1^2 - w_2) = 0$$

и выражения

$$\begin{aligned} w_4 &= \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2)^2, \\ w_5 &= -\frac{1}{4}w_1(w_1^2 - w_2)^2 - \frac{1}{4}w_3(3w_1^2 + w_2). \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности формальной группы (12) получаем

$$\frac{3}{4}(w_1^2 - w_2)(w_1^3 - w_1w_2 - w_3) = 0.$$

Таким образом, если $w_2 \neq w_1^2$, то получаем

$$w_1 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_5 = 0, \quad \dots \quad w_{2k+1} = 0.$$

Далее из условия ассоциативности получаем

$$w_6 = -w_2w_4.$$

При этом уравнение (17) принимает вид

$$w(u) = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)w'(u) - \frac{w_2}{2}u^2 \right)^2,$$

и из него получаем

$$w_4 = \frac{1}{4}w_2^2, \quad 3w_6 = -2w_2w_4,$$

откуда $w_2 = 0$, что противоречит условию $w_2 \neq w_1^2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Универсальная формальная группа вида (2) является специализацией универсальной формальной группы вида (4), выделяемым условием, что $w(u)$ является решением уравнения

$$w(u) - au = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)(w'(u) - a) - a^2u^2 \right)^2 \quad (19)$$

с параметром a . Из уравнения получаем $a = -w_1$.

Из $w_2 = w_1^2$ для $g(u) = u + \sum_k g_k u^{k+1}$ получаем $g_1 = -\frac{w_1}{2}$, $g_2 = 0$, $g_3 = \frac{w_1^3 - w_3}{4}$.
Для $f(u) = u + \sum_k f_k u^{k+1}$ получаем $f_1 = \frac{w_1}{2}$, $f_2 = \frac{w_1^2}{2}$, $f_3 = \frac{3w_1^3 + 2w_3}{8}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Экспонента формальной группы (2) задаётся двумя параметрами: w_1 и w_3 .

В терминах функции $f(x)$ уравнение (19) принимает вид

$$f'(x) - af(x) = \left(f'(x)^2 - \frac{1}{2}f(x)(f''(x) - af'(x)) - a^2f(x)^2 \right)^2. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 5. Множество экспонент формальных групп вида (2) является двухпараметрическим и имеет вид, описанный в теореме 3, для $a = -w_1$, $2b = w_3$.

Доказательство получаем прямой подстановкой функции (13) в (20).

Таким образом, теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. По теореме 3 экспонента $f(x)$ удовлетворяет уравнению (16). Следовательно, $w(u)$ удовлетворяет (3)

$$w^3 + 3auw^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2u^6.$$

СЛЕДСТВИЕ 7. $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $w(u)$ является решением (3) с начальным условием $w(0) = 1$. Это уравнение задаёт коэффициенты w_k через a и b рекуррентно выражением

$$\begin{aligned} & 3(1 + 2au)(w(u) - 1) = \\ & = 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2u^6 - 3au - (w(u) - 1)^3 - 3(au + 1)(w(u) - 1)^2, \end{aligned}$$

и следовательно $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$. $\square$

Таким образом, из (18) мы получаем доказательство теоремы 2.

7. Приложение теоремы 3 к изогениям эллиптической кривой

ТЕОРЕМА 6. Пусть для эллиптической кривой с образующими $(2\omega_1, 2\omega_2)$ заданы её дискриминант Δ и J -инвариант. Тогда дискриминант Δ и J -инвариант каждой из кривых с образующими

$$\left(2\hat{\omega}_1 = 2\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = \frac{2}{3}\omega_2 \right), \quad \left(2\hat{\omega}_1 = \frac{2}{3}\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = 2\omega_2 \right)$$

выражаются следующим образом:

Можно ввести формальные переменные p, s , так, что

$$\Delta = -\frac{1}{27}p^3s, \quad J = -\frac{1}{64} \frac{(p-s)(p-9s)^3}{p^3s},$$

тогда

$$\hat{\Delta} = -27s^3p, \quad \hat{J} = -\frac{1}{64} \frac{(s-p)(s-9p)^3}{s^3p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (13) имеет в ячейке ровно три полюса в точках x , где выражение $\wp'(x) - a\wp(x) + b - \frac{a^3}{4}$ обращается в ноль. Функция (14) имеет в ячейке ровно один полюс в точке $x = s$.

Таким образом, если $(2\omega_1, 2\omega_2)$ — периоды функции (13), то у функции (14) периоды $(2\hat{\omega}_1 = 2\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = \frac{2}{3}\omega_2)$ либо $(2\hat{\omega}_1 = \frac{2}{3}\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = 2\omega_2)$. Данная неоднозначность получается ввиду неоднозначности выбора формальных переменных p и s .

Выражая Δ и J через a и b по формулам теоремы 3, после подстановки

$$a = (p-s)^{1/3}, \quad b = \frac{1}{3}p,$$

получим формулы теоремы 6. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Lazard Sur les groupes de Lie formels a un parametre // Bull. Soc. Math. France. 1955. Vol. 83. P. 251–274.
2. В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26, № 2. С. 131–154.
3. С. П. Новиков Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Известия АН СССР, серия матем.. 1967. Т. 31, № 4. С. 855–951.
4. D. Quillen On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 75, № 6. P. 1293–1298.
5. В. М. Бухштабер Комплексные кобордизмы и формальные группы // УМН. 2012. Т. 67, № 5(407). С. 111–174.
6. E. T. Whittaker, G. N. Watson A Course in Modern Analysis. 1990. 4th ed. Cambridge, England: Cambridge University Press.
7. В. М. Бухштабер, А. В. Устинов Кольца коэффициентов формальных групп // Матем. сборник (в печати).
8. В. М. Бухштабер Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45, № 3(273). С. 185–186.

9. F. Hirzebruch Elliptic genera of level N for complex manifolds // Prep. MPI. P. 88–24.
10. F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung Manifolds and Modular Forms. 1992. Braunschweig: Vieweg.
11. И. М. Кричевер Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Мат. Заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 34–45; I. M. Krichever Generalized elliptic genera and Baker–Akhiezer functions // Math. Notes. 1990. Vol. 47, № 2. P. 132–142.
12. J. Barr von Oehsen Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122. P. 303–312.
13. M. Hazewinkel Formal Groups and Applications. 1978. Academic Press, New York–San Francisco–London.
14. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова Формальные группы Кричевера // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, № 2. С. 23–44; Funct. Anal. Appl. 2011. Vol. 45, № 2. P. 99–116.
15. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Нетай $CP(2)$ -мультипликативные роды Хирцебруха и эллиптические когомологии // УМН. 2014. Т. 69, № 4(418). С. 181–182; Russian Math. Surveys. 2014. Vol. 69, № 4. P. 757–759.

REFERENCES

1. Lazard, M. 1955., "Sur les groupes de Lie formels a un parametre", *Bull. Soc. Math. France.*, vol. 83, pp. 251–274.
2. Buhstaber, V. M., Miscenko, A. S. & Novikov, S. P. 1971, "Formal groups and their role in the apparatus of algebraic topology" (Russian) *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 26, no. 2(158), pp. 131–154.
3. Novikov, S. P. 1967, "Methods of algebraic topology from the point of view of cobordism theory" (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 31, № 4, pp. 855–951.
4. Quillen, D. 1969, "On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, № 6, pp. 1293–1298.
5. Bukhshtaber, V. M. 2012, "Complex cobordisms and formal groups" (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 67, no. 5(407), pp. 111–174; translation in *Russian Math. Surveys*, vol. 67 (2012), no. 5, pp. 891–950.
6. Whittaker, E. T. & Watson, G. N. 1990, "A Course in Modern Analysis.", 4th ed. *Cambridge, England: Cambridge University Press.*
7. Buchstaber, V. M. & Ustinov, A. V. "Rings coefficients formal groups", *Mat. Sb.* (in the press).

8. Bukhshtaber, V. M. 1990, "Functional equations that are associated with addition theorems for elliptic functions, and two-valued algebraic groups" (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, no. 3(273), pp. 185–186; translation in *Russian Math. Surveys*, vol. 45 (1990), no. 3, pp. 213–215.
9. Hirzebruch, F. "Elliptic genera of level N for complex manifolds" *Prep. MPI.*, pp. 88–24.
10. Hirzebruch, F., Berger, T. & Jung, R. 1992, "Manifolds and Modular Forms.", *Braunschweig: Vieweg*.
11. Krichever, I. M. 1990, "Generalized elliptic genera and Baker-Akhiezer functions" (Russian) *Mat. Zametki*, vol. 47, no. 2, pp. 34–45, 158; translation in *Math. Notes*, vol. 47 (1990), no. 1-2, pp. 132–142.
12. von Oehsen, J. Barr 1994, "Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 122. pp. 303–312.
13. Hazewinkel, M. 1978, "Formal Groups and Applications." *Academic Press, New York – San Francisco – London*.
14. Bukhshtaber, V. M. & Bun'kova, E. Yu. 2011, "Krichever formal groups" (Russian. Russian summary) *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* vol. 45, no. 2, pp. 23–44; translation in *Funct. Anal. Appl.*, vol. 45 (2011), no. 2, pp. 99–116.
15. Buchstaber, V. M. & Netay, E. Yu. 2014, " $\mathbb{C}P(2)$ -multiplicative Hirzebruch genera and elliptic cohomology", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 69, № 4(418), pp. 181–182; *Russian Math. Surveys*. 2014. Vol. 69, № 4, pp. 757–759.

Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia.

Поступило 6.06.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 519.1

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КВАЗИ-МЕТРИКАМИ

М. М. Деза (Париж, Франция), Е. И. Деза (г. Москва),
М. Дютур Сикирич (Загреб, Хорватия)

Аннотация

В данной работе рассмотрены проблемы, связанные с построением и исследованием конусов и многогранников конечных квази-метрик, которые являются несимметричными аналогами классических метрик.

Во введении рассмотрена история вопроса, приведены примеры использования метрик и квазиметрик в математике и ее приложениях, в том числе задачи, связанные с проблемой максимального разреза.

В первом разделе даны определения конечных метрики и полуметрики, а также их важнейших частных случаев: разреза, мультиразреза и гиперсемиметрики; построены конусы и многогранники указанных объектов; исследованы их свойства. Рассмотрены связи конуса разрезов с метрическими l_1 -пространствами. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов, которые состоят из перестановок и так называемых свичингов; именно преобразование свичинга служит основанием для выбора неравенств, определяющих соответствующий многогранник.

Во втором разделе рассмотрены конечные квази-метрики и квази-полуметрики, которые являются несимметричным аналогом конечных метрик и полуметрик; даны определения ориентированного разреза и ориентированного мультиразреза — важнейших частных случаев квази-полуметрики; введены понятия взвешиваемой квази-метрики и родственной ей частичной метрики; построены конусы и многогранники указанных объектов; исследованы их свойства. Рассмотрены связи ориентированных разрезов с квази-метрическим l_1 -пространством. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов, которые состоят из перестановок и ориентированных свичингов; как и в симметричном случае, преобразование ориентированного свичинга служит основанием для выбора неравенств, определяющих соответствующий многогранник. Рассмотрены разные подходы к построению конуса и многогранника несимметричных гиперполуметрик.

В последнем разделе представлены результаты вычислений, посвященных конусам и многогранникам квази-полуметрик, ориентированных разрезов, ориентированных мультиразрезов, взвешиваемых квази-метрик и частичных метрик на 3, 4, 5 и 6 точках. Указаны размерность объекта, число

экстремальных лучей (вершин) и их орбит, число гиперграней и их орбит, диаметры скелетона и реберного графа построенных конусов и многогранников.

Ключевые слова: Полуметрика, разрез, и мультиразрез, гиперполуметрика, конусы и многогранники полуметрик, разрезов и гиперполуметрик, квази-полуметрика, ориентированные разрез и мультиразрез, взвешиваемая метрика, частичная метрика, конусы квази-полуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, взвешиваемых и частичных метрик, многогранники квази-полуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, взвешиваемых и частичных метрик.

Библиография: 15 названий.

POLYHEDRAL STRUCTURES ASSOCIATED WITH QUASI-METRICS

M. M. Deza (Paris, France), E. I. Deza (Moscow),
M. Dutour Sikirić (Zagreb, Croatia)

Abstract

In this paper the problems of construction and description of cones and polyhedra of finite quasi-metrics are considered. These objects are asymmetrical analogs of classical finite metrics.

The introduction presents the historical background and examples of applications of metrics and quasi-metrics. In particular, the questions connected with maximum cut problem are represented.

In the first section definitions of finite metrics and semi-metrics are given, and also their major special cases are considered: cuts, multicut and hyper-semimetrics. Cones and polyhedrons of the specified objects are constructed; their properties are investigated. Connections of the cut cone with metric l_1 -spaces are indicated. The special attention is paid to symmetries of the constructed cones which consist of permutations and so-called switchings; transformation of a switching serves the basis for a choice of the inequalities defining the corresponding polyhedron.

In the second section finite quasi-metrics and quasi-semimetrics are considered. They are asymmetrical analogs of the usual finite metrics and semimetrics. Definition of the oriented cuts and oriented multicuts are given: they are the most important special cases of the quasi-semimetrics. Concept of weightable quasi-metrics and related to them partial metrics is introduced. Cones and polyhedrons of these objects are constructed; their properties are investigated. Connections of the oriented cut cone with quasi-metric l_1 -space are considered. The special attention is paid to symmetries of the constructed cones, which consist of permutations and oriented switchings; as well as in symmetric case, transformation of the oriented switching serves the basis for a choice of the inequalities defining the corresponding polyhedron. Different

approaches to creation of a cone and a polyhedron of asymmetrical hypersemimetrics are considered.

In the last section results of the calculations devoted to cones and to polyhedrons of quasi-semimetrics, the oriented cuts, the oriented multicuts, weighed quasimetrics and partial metrics for 3, 4, 5 and 6 points are considered. In fact, the dimension of an object, the number of its extreme rays (vertices) and their orbits, the number of its facets and their orbits, the diameters of the skeleton and the the ridge graph of the constructed cones and polyhedrons are specified.

Keywords: Semi-metrics, cut and multicut, hypersemimetric, cones and polyhedra of semimetrics, cuts and hypersemimetrics, quasi-semimetrics, oriented cut and multicut, weightable metric, partial metric, cones of quasi-semimetrics, of oriented cuts and oriented multicuts, of weightable and partial metrics, polyhedra of quasi-semimetrics, of oriented cuts and multicuts, of weightable and partial metrics.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Метрики и их аналоги играют большую роль как непосредственно в математической науке, так и в ее многочисленных приложениях. В частности, к центральным объектам дискретной математики принадлежат метрический и разрезной конусы. Так, разрезной конус на n точках состоит из всех n -точечных полуметрических подпространств пространства l_1 [8]. Родственная *проблема максимального разреза*, состоящая в нахождении для данного графа разреза максимального веса, является одной из наиболее значимых в комбинаторной оптимизации и имеет множество применений, в том числе в статистической механике.

Представляют значительный интерес и другие полиэдральные конструкции, связанные с конечными метриками, их аналогами и обобщениями: квази-метриками (несимметричный случай), m -метриками (многомерный случай) и т.д. В данной статье мы рассматриваем вопросы, касающиеся конусов и многогранников конечных квази-метрик, ориентированных разрезов и других несимметричных объектов, родственных метрикам, в том числе анализируем результаты машинных вычислений, полученные для таких конусов и многогранников небольших размеров.

2. Метрики и их компаньоны: классический случай

Метрикой на n точках называется функция $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$; $d_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$; $d_{ij} = d_{ji}$ (симметричность); $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$ (неравенства треугольника).

При построении полиэдральных конструкций понятие метрики слишком ограничивает наши возможности, и значительно удобнее пользоваться его ослабленным аналогом — понятием полуметрики.

Полуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$ и неравенствам треугольника $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$. Коротко говоря, полуметрика — это метрика, позволяющая расстояние "ноль" между несовпадающими точками.

Среди множества различных полуметрик особую роль играют так называемые разрезы и мультиразрезы.

Разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой разрез является полуметрикой (но не метрикой).

Мультиразрезом (точнее, m -мультиразрезом) на n точках для разбиения

$$\bigcup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$$

называется функция $\delta_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a \neq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что 2-мультиразрезы совпадают с разрезами. Более того, любой мультиразрез можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов:

$$\delta_{S_1, \dots, S_m} = \sum_{i=1}^m \delta_{S_i, \overline{S_i}}.$$

Число всех мультиразрезов на n точках представляет собой *число Белла* $B(n)$, то есть число всех разбиений n -множества.

Еще одним интересным классом полуметрик являются гиперполуметрики.

Гиперполуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$ и *гиперметрическим неравенствам*

$$H(b, d) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} \leq 0 \text{ для всех } b \in \mathbb{Z}^n, \sum_i b_i = 1.$$

Поскольку вектора b вида $(1, 1, -1, 0^{n-3})$ превращают гиперметрические неравенства в неравенства треугольника, то любая гиперполуметрика является специальным случаем полуметрики.

Центральным разделом теории конечных полуметрик являются задачи комбинаторной оптимизации, решаемые полиэдральным методом, ведущим к построению соответствующих конусов и многогранников.

Метрическим конусом на n точках MET_n называется множество всех полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Метрическим многогранником на n точках $MET P_n$ называется множество всех полуметрик $d \in MET_n$, удовлетворяющих *неравенствам периметра*

$$d_{ik} + d_{ij} + d_{jk} \leq 2.$$

Разрезным конусом (или *конусом разрезов*) на n точках CUT_n называется коническая оболочка (множество всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами) всех $2^{n-1} - 1$ ненулевых разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Следует заметить, что разрезный конус CUT_n представляет собой множество n -точечных l_1 -полуметрик, то есть полуметрик, изометрически вложимых в пространство $l_1 = (\mathbb{R}^m, \|x - y\|_1)$ с l_1 -нормой

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|.$$

В пространстве меры величине $\|x - y\|_1$ соответствует $\mu(A \Delta B)$, где A, B - множества, представляющие x и y [8].

Разрезным многогранником (*многогранником разрезов*) на n точках $CUT P_n$ называется выпуклая оболочка всех 2^{n-1} разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Гиперметрическим конусом на n точках HYP_n называется множество всех гиперполуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Гиперметрическим многогранником на n точках $HYP P_n$ называется множество гиперполуметрик $d \in HYP_n$ [5], удовлетворяющих *обобщенным гиперметрическим неравенствам*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{i,j} \leq s(s+1), \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 2s+1, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

(Заметим, что обычные гиперметрические неравенства, определяющие $HYP P_n$, являются частным случаем обобщенных гиперметрических неравенств при $s = 0$.)

Поскольку метрический многогранник $MET P_n$ получается при использовании наборов b вида $(1, 1, -1, 0^{n-3})$ и $(1, 1, 1, 0^{n-3})$, то имеет место очевидное включение $HYP P_n \subseteq MET P_n$.

Метрики были введены в начале 20-го века Фреше и Хаусдорфом. Первое исследование конечных метрик принадлежит Блюменталю. Работы, связанные с разрезами, появились в конце 80-х годов 20-го века. Обширная библиография и детальный обзор имеющийся в этой области литературы дан в [8].

Конусы MET_n и CUT_n представляют собой полноразмерные конусы в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поскольку любой разрез является полуметрикой, то выполняется очевидное включение $CUT_n \subseteq MET_n$ с равенством лишь для $n = 3, 4$. Поскольку любой мультиразрез представляет собой неотрицательную линейную комбинацию разрезов, то говорить о

конусе мультиразрезов смысла не имеет: коническая оболочка множества мультиразрезов является частью конуса CUT_n .

Полная группа симметрий конусов CUT_n и MET_n представляет собой группу $Sym(n)$ для $n \neq 4$ и группу $Sym(4) \times Sym(3)$ для $n = 4$. Многогранники $CUTP_n$ и $METP_n$ инвариантны, помимо перестановок, относительно так называемого свичинга $U_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, осуществляющегося по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 - d_{ij}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ d_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В целом это дает группу порядка $2^{n-1} \times n!$. Для $n \neq 4$ это полная группа симметрий. Для $n = 4$ полная группа симметрий представляет собой $Aut(K_{4,4})$, то есть имеет порядок $2^3 \times 144$.

Следует заметить, что свичинг неравенства треугольника приводит к неравенству периметра; свичинг гиперметрического неравенства приводит к обобщенному гиперметрическому неравенству. Именно этот факт послужил основанием для выбора неравенств, определяющих метрический и гиперметрический многогранники.

3. Квази-метрики и их компаньоны: несимметричный случай

Одним из возможных обобщений (полу)метрик и (мульти)разрезов являются квази-(полу)метрики и ориентированные (мульти)разрезы, соответственно, представляющие собой аналогичные, но несимметриченные конструкции.

Квази-метрикой на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ii} = 0$; $q_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$; $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$ (*ориентированные неравенства треугольника*). Другими словами, квази-метрика, в отличие от метрики, не всегда удовлетворяет условию симметричности $d_{ij} = d_{ji}$.

Квази-полуметрикой q на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ii} = 0$ и ориентированным неравенствам треугольника $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$. Таким образом, квази-полуметрика - это "несимметричная полуметрика", или, что то же, "несимметричная метрика, позволяющая значение ноль на несовпадающих точках".

Нас интересует важный специальный случай квази-полуметрик, являющийся несимметричным аналогом разрезов и мультиразрезов.

Ориентированным разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta'_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой ориентированный разрез является квази-полуметрикой (но не квази-метрикой).

Ориентированным мультиразрезом (точнее, *ориентированным m -мультиразрезом*) для ориентированного разбиения $\cup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ на

m частей $S_1, \dots, S_m$ называется функция $\delta'_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a < b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что ориентированные 2-мультиразрезы совпадают с ориентированными разрезами: $\delta'_S = \delta'_{\overline{S}}$. Однако, в отличие от классического симметричного случая, не каждый ориентированный мультиразрез (даже в простейшем случае $n = 3$) можно представить в виде линейной комбинации ориентированных разрезов.

Число всех ориентированных мультиразрезов на n точках представляет собой *число Фубини* (*упорядочное число Белла*) $p'(n)$, то есть число всех упорядоченных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$; оно равно

$$\sum_{\pi \in \text{Sym}(n)} 2^{D(\pi)},$$

где $D(\pi) := |\{i \leq n : a_i > a_{i+1}\}|$ для перестановки $\pi = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Sym}(n)$.

Для нашего исследования представляет интерес еще один специальный класс квази-полуметрик — так называемые взвешиваемые квази-полуметрики.

Взвешиваемой квази-полуметрикой на n точках называется квази-полуметрика q на $\{1, \dots, n\}$, для которой существует *весовая функция* $w : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ij} + w_i = q_{ji} + w_j$.

Легко видеть, что квази-полуметрика q является взвешиваемой если и только если она обладает свойством *3-симметрии*, то есть, для различных $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$q_{ij} + q_{jk} + q_{ki} = q_{ik} + q_{kj} + q_{ji}.$$

В [4] доказано, что свойство 3-симметрии равносильно свойству k -симметрии ($k \geq 3$): сохранению сумм расстояний при изменении направления обхода k -угольника.

В свою очередь, взвешиваемые квази-полуметрики оказываются тесно связаны с еще одним обобщением классического случая — так называемыми *частичными полуметриками*: объектами, сохранившими симметричность, но потерявшими свойство превращаться в ноль на паре (i, i) .

Частичной полуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$p : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $0 \leq p_{ii} \leq p_{ij}$ и *жестким неравенствам треугольника*

$$p_{ik} \leq p_{ij} + p_{jk} - p_{jj}.$$

Очевидно, что $q = ((q_{ij}))$ является взвешиваемой квази-полуметрикой тогда и только тогда, когда $q + w = ((q_{ij} + w_i))$ есть частичная полуметрика. С другой стороны, $p = ((p_{ij}))$ является частичной полуметрикой тогда и только тогда, когда $((p_{ij} - p_{ii}))$ является взвешиваемой квази-полуметрикой.

Как и в классическом симметричном случае, интерес представляют полиэдральные конструкции, связанные с квази-полуметриками.

Квази-метрическим конусом на n точках $QMET_n$ называется множество всех квази-полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Квази-метрическим многогранником на n точках $QMETP_n$ называется множество квази-полуметрик $q \in QMET_n$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющих неравенствам периметра

$$q_{ki} + q_{ij} + q_{jk} \leq 2.$$

Конусом ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUT_n$ называется коническая оболочка всех $p'(n) - 1$ ненулевых ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$. Пользуясь формулой $\delta_{S_1, \dots, S_m} = \delta'_{S_1, \dots, S_m} + \delta'_{S_m, \dots, S_1}$, мы получаем, что

$$CUT_n = \{q + q^T : q \in OMCUT_n\}.$$

Многогранником ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех $p'(n)$ ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Конусом ориентированных разрезов на n точках $OCUT_n$ называется коническая оболочка всех $2^n - 2$ ненулевых ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Многогранником ориентированных разрезов на n точках $OCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех 2^n ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Поскольку в несимметричном случае ориентированный мультиразрез может и не быть линейной комбинацией ориентированных разрезов, то конусы $OMCUT_n$ и $OCUT_n$ не совпадают.

Конус $OCUT_n$ представляет собой множество всех n -точечных l_1 -квази-полуметрик, то есть квази-полуметрик, вложимых в квази-метрическое пространство $(\mathbb{R}^m, \|x - y\|_{or,1})$ с ориентированной l_1 -нормой

$$\|z\|_{or,1} = \sum_{i=1}^m \max(z_i, 0).$$

На пространстве меры величине $\|x - y\|_{or,1}$ соответствует $\mu(B \setminus A)$, где множества B, A представляют x, y [6].

Конусом взвешиваемых квази-полуметрик на n точках $WQMET_n$ называется множество всех взвешиваемых квази-полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Многогранником взвешиваемых квази-полуметрик на n точках $WQMETP_n$ называется множество $WQMET_n \cap QMETP_n$.

Конусом частичных полуметрик на n точках $PMET_n$ называется множество всех частичных полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Выпуклым телом частичных полуметрик $PMETP_n$ называется множество частичных полуметрик $p \in PMET_n$, удовлетворяющих для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ условиям $p_{ij} \leq 1 + p_{ii}$ и неравенствам периметра

$$p_{ij} + p_{jk} + p_{ki} \leq 2 + p_{ii} + p_{jj} + p_{kk}.$$

В $PMETP_n$ элементы p_{ij} ограничены элементами p_{ii} , но величины p_{ii} не ограничены; таким образом, $PMETP_n$ не является многогранником. Однако мы можем получить многогранник, добавляя неравенства $\sum_i p_{ii} \leq 1$; вершины полученного многогранника - это вершины $METP_n$ вместе с экстремальными лучами конуса $PMET_n$.

Квази-полуметрики изучались в [6, 3, 4, 9]. Частичные полуметрики были введены в [13]; они используются для работы с частично определяемыми/вычисляемыми объектами в семантике вычислений: положительность $p(x, x)$ означает, что объект x еще не полностью определен, в то время как числовое значение $p(x, x)$ показывает, как много информации нужно еще вычислить.

Конусы $QMET_n$ и $OMCUT_n$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$, конусы $WQMET_n$ и $OCUT_n$ имеют размерность $\binom{n+1}{2} - 1$, а конус $PMET_n$ имеет размерность $\binom{n+1}{2}$.

Кроме очевидных строгих включений

$$WQMET_n \subset QMET_n \text{ и } OCUT_n \subset OMCUT_n,$$

мы имеем, с равенством только для $n = 3$, включения

$$OMCUT_n \subseteq QMET_n \text{ и } OCUT_n \subseteq WQMET_n.$$

В [7] показано, что конусы $WQMET_n$ и $OCUT_n$ (определенные на множестве $\{1, \dots, n\}$) есть проекции конусов MET_{n+1} и CUT_{n+1} (определенных на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$), соответственно, на подпространство, ортогональное к $\delta_{\{0\}}$. Так, $WQMET_n$ состоит из всех $((d_{ij} + d_{i0} - d_{j0}))$, где $d = ((d_{ij}))$ есть полуметрика на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$; при этом соблюдения неравенств $d_{i0} + d_{j0} - d_{ij} \geq 0$ не требуется.

Более того, квази-гиперметрический конус на n точках $WQHYP_n$ может быть определен как такая проекция для HYP_{n+1} ; в этом случае имеет место включение

$$OCUT_n \subseteq WQHYP_n \subseteq WQMET_n$$

с равенством $WQHYP_n \subseteq WQMET_n$ только для $n = 3$ и равенствами $OCUT_n = WQHYP_n$ только для $3 \leq n \leq 5$. (См. данные для $WQHYP_5$ в таблице 1.)

Экстремальные лучи конуса $QMET_n$ исследовались в [6]. Здесь было доказано, что они не являются симметричными и имеют по меньше мере $n - 1$ нулей, то есть не могут быть расстояниями на ориентированном графе. Ориентированные мультиразрезы соответствуют экстремальным лучам конуса $QMET_n$. Кроме того, расщепление экстремального луча вновь дает экстремальный луч.

В [6] была представлена и таблица несмежности гиперграней конуса $QMET_n$; было сделано предположение о том, что во всех остальных случаях гипергранни смежны, откуда следует, что диаметр скелетона дуального конуса $QMET_n^*$ равен 2. Диаметр скелетона $QMET_n$ равен 3 для $n = 4, 5$.

Существует предположение, что диаметры $OCUT_n$ и $OMCUT_n$ равны 1 и 2, соответственно. Более того, если $f \geq 0$ определяет гипергрань $OMCUT_n$, то нулевое расширение f в $OMCUT_{n+1}$ останется гипергранью, как и в классическом случае конуса разрезов CUT_n .

Группа $Sym(n)$ всех перестановок на n точках является группой симметрий конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Но существует и другая симметрия, называемая *реверселем*. Для осуществления операции реверселя нужно поставить в соответствие каждому лучу q луч q^T , определенный как $q_{ij}^T = q_{ji}$. (Другими словами, в матричных терминах реверсель соответствует транспонированию матриц.) Из этого факта следует, что группа $Z_2 \times Sym(n)$ также является группой симметрий для конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$.

Мы предполагаем, что это их полная группа симметрий. Для конуса $OCUT_n$ этот факт доказан в [6].

Для многогранника $QMETP_n$ можно определить ориентированный аналог операции свичинга на $METP_n$. Для данной квази-полуметрики $q \in QMETP_n$ и данного множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ назовем *ориентированным свичингом* операцию

$$U_S(q) : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

осуществляемую по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 - q_{ji}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ q_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Она, вместе с перестановками $Sym(n)$ и реверселем, образует группу порядка $2^n n!$. Мы предполагаем, что эта группа является полной группой симметрий для многогранников $QMETP_n$ и $WQMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$).

Таблица 1: Число экстремальных лучей и гиперграней в некоторых квази-метрических конусах для $3 \leq n \leq 6$

Конус	Разм.	Число экст. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$OCUT_3 = WQMET_3$	5	6(2)	9(2)	1; 2
$OCUT_4 = QHYP_4$	9	14(3)	30(3)	1; 2
$OCUT_5$	14	30(4)	130(6)	1; 3
$OCUT_6$	20	62(5)	16,460(61)	1; 3
$QHYP_5$	14	70(6)	90(4)	2; 2
$WQMET_4$	9	20(4)	24(2)	2; 2
$WQMET_5$	14	190(11)	50(2)	2; 2
$WQMET_6$	20	18,502(77)	90(2)	3; 2
$OMCUT_3 = QMET_3$	6	12(2)	12(2)	2; 2
$OMCUT_4$	12	74(5)	72(4)	2; 2
$OMCUT_5$	20	540(9)	35,320(194)	2; 3
$QMET_4$	12	164(10)	36(2)	3; 2
$QMET_5$	20	43,590(229)	80(2)	3; 2

При появлении операции ориентированного свичинга возникает ситуация, требующая несколько изменить определения многогранников ориентированных разрезов и мультиразрезов. Именно, в этих условиях кажется естественным определить многогранник ориентированных разрезов $OCUTP_n$ как выпуклую оболочку всех ориентированных разрезов и их образов относительно ориентированных свичингов. Аналогично, $OMCUTP_n$ можно определить как выпуклую оболочку всех ориентированных мультиразрезов и их образов относительно ориентированных свичингов. Мы предполагаем, что определенный таким образом многогранник $OCUTP_n$ имеет ровно 2^{2n-2} вершин, что значительно больше, чем $2^n - 2$ - число экстремальных лучей в $OCUT_n$. Оба этих многогранника имеют ту же группу симметрий, что и $QMETP_n$.

Группа $Sym(n)$ является группой симметрий для конуса частичных метрик $PMET_n$. Мы предполагаем, что $Sym(n)$ является полной симметрической группой для $PMET_n$ (проверено для $n \leq 9$). Однако $PMETP_n$ имеет и дополнительные симметрии. Для данной частичной метрики $p \in PMET_n$ и данного множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ определим p -свичинг $U_S(p) : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 + p_{ii} + p_{jj} - p_{ji}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ p_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы предполагаем, что, вместе с $Sym(n)$, данная операция определяет полную группу симметрий для $PMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$).

4. Численные данные для несимметричного случая

В этом параграфе мы анализируем полученную с помощью вычислительной техники информацию о поведении "ориентированных" конусов и многогранников на n точках при малых значениях n .

Таблица 2: Число вершин и гиперграней в некоторых квази-метрических многогранниках для $3 \leq n \leq 6$

Многогранник	Разм.	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)
$OCUTP_3 = WQMETP_3$	5	16(2)	16(2)
$OCUTP_4 = WQMETP_4$	9	64(3)	40(2)
$OCUTP_5$	14	256(3)	1,056(5)
$OCUTP_6$	20	1,024(4)	1,625,068(97)
$WQMETP_5$	14	2,656(8)	80(2)
$WQMETP_6$	20	1,933,760(120)	140(2)
$OMCUTP_3 = QMETP_3$	6	22(3)	20(2)
$OMCUTP_4$	12	136(5)	1,160(9)
$OMCUTP_5$	20	1,016(7)	?(?)
$QMETP_4$	12	544(8)	56(2)
$QMETP_5$	20	1,155,136(392)	120(2)

В таблицах 1 и 2, представлены результаты вычислений для малых квази-метрических конусов и многогранников, соответственно; орбиты даны относительно $Sym(n)$ для конусов и относительно $Sym(n) \times Z_2$ для многогранников.

В таблицах 3 и 4 рассмотрены имеющиеся данные по конусу и многограннику частичных метрик. Орбиты конуса $PMET_n$ рассмотрены относительно $Sym(n)$, в то время как орбиты тела $PMETP_n$ - относительно группы (порядка $2^{n-1}n!$), порожденной свичингами и перестановками. Однако оба этих объекта имеют 3 орбиты гиперграней и, вероятно, реберный граф диаметра 2.

Таблица 3: Число экстремальных лучей и гиперграней в конусе $PMET_n$ для $3 \leq n \leq 6$

Конус	Разм.	Число экстр. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$PMET_3$	6	13(5)	12(3)	3; 2
$PMET_4$	10	62(11)	28(3)	3; 2
$PMET_5$	15	1,696(44)	55(3)	3; 2
$PMET_6$	21	337,092(734)	96(3)	3; 2

Таблица 4: Число вершин и гиперграней в теле $PMETP_n$ для $3 \leq n \leq 6$

Тело	Разм.	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$PMETP_3$	6	17(4)	19(3)	2; 2
$PMETP_4$	12	97(6)	44(3)	2; 2
$PMETP_5$	20	7953(24)	85(3)	3; 2
$PMETP_6$	12	5090337(427)	146(3)	?; 2

5. Заключение

Помимо рассмотренных в статье несимметричных аналогов классического симметричного случая метрик, разрезов, мультиразрезов и других родственных конструкций, интерес представляют многомерные аналоги классического двумерного случая: m -метрики ($m \geq 3$; случай $m = 2$ соответствует обычной метрике), m -суперметрики и др.

Построение и исследование соответствующих конусов и многогранников на малом числе точек можно провести по той же схеме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charikar M., Makarychev K., Makarychev V. Directed metrics and directed graph partitioning problem // Proc. of 11-th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2006. P. 51–60.
2. Deza M. M., Deza E. I. Encyclopedia of Distances / 3-rd edition. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 716 p.
3. Deza M. M., Deza E. I. Cones of partial metrics // Contrib. Discrete Math. 2011. № 6(1). P. 26–47.
4. Deza M. M., Deza E. I., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics // Proceedings of the International Conference on Algebra 2010. NJ: World Sci. Publ., 2012. P. 177–197.

5. Deza M. M., Dutour Sikirić M. The hypermetric cone on 8 vertices and some generalizations // Preprint at *arxiv:arXiv:1503.04554*. 2013. Aviable at: <http://arxiv.org/abs/1503.04554>.
6. Deza M. M., Dutour M., Panteleeva E. I. Small cones of oriented semi-metrics // Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics & Related Areas. 2002. Vol. 22. P. 199–225.
7. Deza M. M., Grishukhin V. P., Deza E. I. Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts // Mathematics of Distances and Applications. Sofia: ITHEA, 2012. P. 31–53.
8. Deza M. M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 517 c.
9. Deza M. M., Panteleeva E. I. Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra // European Journal of Combinatorics. 2000. № 21(6). P. 777–795.
10. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rend. Circolo mat. Palermo. 1906. Vol. 22. PP. 1–74.
11. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
12. Hitzler P. Generalized Metrics and Topology in Loic Programming Semantics // PhD Thesis. National University of Ireland: Univ. College Cork, 2001.
13. Matthews S. G. Partial metric topology (Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)) // Ann. New York Acad. Sci. 1994. Vol. 728. P. 183–197.
14. Seda A. K. Quasi-metrics and the semantic of logic programs // Fundamenta Informaticae. 1997. Vol. 9. P. 97–117.
15. Wilson W. A. On quasi-metric spaces // American J. of Math. 1931. Vol. 53. P. 575–681.

REFERENCES

1. Charikar, M., Makarychev, K. & Makarychev, V. 2006, "Directed metrics and directed graph partitioning problem", *Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 51–60.
2. Deza, M. M. & Deza, E. I. 2014, "Encyclopedia of Distances", 3-rd edition, *Springer-Verlag, Berlin*. 716 p.
3. Deza, M. M. & Deza, E. I. 2011, "Cones of partial metrics", *Contrib. Discrete Math.*, no. 6(1), pp. 26–47.
4. Deza, M. M., Deza, E. I. & Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", *Proceedings of the International Conference on Algebra 2010, World Sci. Publ., NJ*, pp. 177–197.

5. Deza, M. M. & Dutour Sikirić, M. 2013, "The hypermetric cone on 8 vertices and some generalizations", Preprint at *arxiv:arXiv:1503.04554*, Aviable at: <http://arxiv.org/abs/1503.04554>.
6. Deza, M. M., Dutour, M. & Panteleeva, E. I. 2002, "Small cones of oriented semi-metrics", *Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics & Related Areas*, vol. 22, pp. 199–225.
7. Deza, M. M., Grishukhin, V. P. & Deza, E. I. 2012, "Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts", *Mathematics of Distances and Applications, ITEA, Sofia*, pp. 31–53.
8. Deza, M. M. & Laurent, M. 1997, "Geometry of cuts and metrics", *Springer-Verlag, Berlin*. 517 p.
9. Deza, M. M. & Panteleeva, E. I. 2000, "Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra", *European Journal of Combinatorics*, no. 21(6), pp. 777–795.
10. Fréchet, M. 1906, "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Circolo mat. Palermo*, vol. 22, pp. 1–74.
11. Hausdorff, F. 1914, "Grundzüge der Mengenlehre", *Leipzig*.
12. Hitzler, P. 2001, "Generalized Metrics and Topology inLoic Programming Semantics", PhD Thesis, *National University of Ireland, Univ. College Cork*.
13. Matthews, S. G. 1994, "Partial metric topology", *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 728, pp. 183–197.
14. Seda, A. K. 1997, "Quasi-metrics and the semantic of logic programs", *Fundamenta Informaticaem*, vol 29, pp. 97–117.
15. Wilson, W. A. 1931, "On quasi-metric spaces", *American J. of Math.*, vol. 53, pp. 575–681.

Ecole Normale Supérieure.

Московский педагогический государственный университет.

Поступило 14.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.95

МНОГОЦВЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА¹

В. Г. Журавлев (г. Владимир)

Аннотация

Пусть $r(i, X^1)$ — количество точек орбиты длины i относительно вращения $S_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ окружности единичной длины $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол α , попавших в X^1 , и пусть $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$ — отклонение функции распределения $r(i, X^1)$ от ее среднего значения $i|X^1|$, где $|X^1|$ означает длину X^1 . В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему: если X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, то для отклонения $\delta(i, X^1)$ выполняется неравенство $|\delta(i, X^1)| \leq h$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

В 1981 г. И. Орен перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов X^1 и для таких множеств получил оценку $\delta(i, X^1) = O(1)$ при $i \rightarrow \infty$.

В общем случае, если X^d принадлежит d -мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие $\delta(i, X^d) = O(1)$ при $i \rightarrow \infty$, то X^d называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен В. Г. Журавлевым, при котором вместо отдельных множеств X_k^d на торе $\mathbb{T}^d$ рассматриваются полные разбиения торов $\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$ с некоторыми параметрами c, λ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$ так, чтобы повороту тора S_α отвечало перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ из $\mathbb{R}^d$. Если число таких множеств X'_k окажется $s+1 \leq d+1$, то каждый из образов $X_k^d = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR -множеством, а соответствующее объединение $T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$ из $\mathbb{R}^d$ — торической разверткой для $\mathbb{T}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d -мерного единичного куба C^d и отрезков.

В 2012 г. В. Г. Журавлевым по указанной схеме были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка $X^d = P^d$, являющиеся d -мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин $\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2$. Для размерностей $d = 1$ и 2 это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00360.

и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ — параллелоэдры Вороного, среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова.

В настоящей работе с помощью разбиений многомерных торов строятся множества ограниченного остатка, представляющие собою конечные объединения выпуклых многогранников. Для отклонений распределения точек орбит относительно сдвигов тора по указанным множествам доказывается многомерный вариант теоремы Гекке о распределении дробных долей на окружности.

Ключевые слова: многомерная теорема Гекке, множества ограниченного остатка, многогранники.

Библиография: 9 названий.

MULTI-COLOUR BOUNDED REMAINDER SETS

V. G. Zuravlev (Vladimir)

Abstract

Let $r(i, X^1)$ be the number of points in the S_α -orbit of the length i with respect to a rotation $S_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ of the unit circle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ by an angle α hit the X^1 . Denote by $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$ the deviation of the function $r(i, X^1)$ from its average value $i|X^1|$, where $|X^1|$ is the length of X^1 .

In 1921 E. Hecke had proved the theorem: if X^1 has the length $|X^1| = h\alpha + b$, where $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, then the inequality $|\delta(i, X^1)| \leq h$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ holds for all $i = 0, 1, 2, \dots$.

In 1981 r. I. Oren was able to generalize the Hecke theorem to the case of a finite union of intervals X^1 . He proved the estimation $\delta(i, X^1) = O(1)$ as $i \rightarrow \infty$.

In the general case, if X^d belongs to the d -dimensional torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ and there is $\delta(i, X^d) = O(1)$ as $i \rightarrow \infty$, then X^d is called a bounded remainder set.

Global approach to search of bounded remainder sets was proposed by V.G. Zhuravlev in 2011 when, instead of separate sets X_k^d on the torus $\mathbb{T}^d$, the complete toric decompositions $\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$ with parameters c, λ began to be considered. The main idea was to determine a lifting $\pi^{-1} : \mathbb{T}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ of the torus $\mathbb{T}^d$ into the covering space $\mathbb{R}^d$ so the rotation S_α maps to a rearrangement S_v of the corresponding sets $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ in $\mathbb{R}^d$. In the case $s + 1 \leq d + 1$, each set $X_k^d = \pi(X'_k)$ is a bounded remainder set and the union $T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$ in $\mathbb{R}^d$ is a toric development for $\mathbb{T}^d$. These developments T^d were built with the help of rearrangement parallelohedra, and the parallelohedra obtained as the Minkowskii sums of the unit cube C^d and intervals. If $d = 3, 4$ we have the Voronoi parallelohedra and the Fedorov rhombic dodecahedron.

In the present paper, by using tilings of multidimensional tori, bounded remainder sets are constructed. The tilings consist of a finite combination of

convex polyhedra. A multi-dimension version of Hecke theorem with respect to the uniform distribution of fractional parts on the unit circle is proved for these sets.

Keywords: multi-dimension Hecke theorem, bounded remainder sets, polyhedra.

Bibliography: 9 titles.

Введение

Пусть $r(i, X^1)$ — количество точек орбиты длины i относительно вращения

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$$

окружности единичной длины $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол α , попавших в X^1 . Обозначим через

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$$

отклонение функции распределения $r(i, X^1)$ от ее среднего значения $i|X^1|$, где $|X^1|$ означает длину X^1 . В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему [1]: если X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, то для отклонения $\delta(i, X^1)$ выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leq h \quad (1)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Орен [2] перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов X^1 и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty \quad (2)$$

Отметим, что интервалы из множества X^1 сами в отдельности могут и не обладать свойством (2).

В общем случае, если X^d принадлежит d -мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие (2), то X^d называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен в [3], где вместо отдельных множеств X_k^d на торе $\mathbb{T}^d$ стали рассматриваться полные разбиения торов

$$\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$$

с некоторыми параметрами c, λ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^d & & \\ \pi \downarrow & & \downarrow & \pi, & \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d & & \end{array} \quad (3)$$

при котором повороту тора S_α отвечает перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ из $\mathbb{R}^d$. Если число таких множеств X'_k окажется $s + 1 \leq d + 1$, то

каждый из образов $X_k^d = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR -множеством, а соответствующее объединение

$$T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$$

из $\mathbb{R}^d$ — торической разверткой для $\mathbb{T}^d$, т.е. фундаментальной областью в пространстве $\mathbb{R}^d$ относительно трансляций кубической решеткой $\mathbb{Z}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы в [4] с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d -мерного единичного куба C^d и отрезков.

В [5] по схеме (3) были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка $X^d = P^d$, являющиеся d -мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин

$$\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2.$$

Для размерностей $d = 1$ и 2 это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ — параллелоэдры Вороного [6], среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова [7]. Для указанных многогранников ограниченного остатка $X^d = P^d$ в [5] доказано неравенство

$$|\delta(i, X^d)| \leq dh, \quad (4)$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1). Здесь в неравенстве (4) отклонения $\delta(i, X^d)$ рассматриваются для сдвига тора S_β на вектор $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$, где h — любое натуральное число и l — произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Следующим шагом исследования общих многомерных множеств ограниченного остатка может служить задача о построении более сложные множества X^d , отличных от вытянутых кубов $X^d = P^d$ и их малых деформаций. Основная идея состоит в том, чтобы использовать многоцветные разбиения

$$\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_D^d$$

тора $\mathbb{T}^d$ с числом областей $D+1 > d+1$, получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений

$$\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D = X_0^D \sqcup X_1^D \sqcup \dots \sqcup X_D^D$$

тора $\mathbb{T}^D$ большей размерности $D > d$. При таком подходе возникают множества ограниченного остатка X^d , представляющие собою конечные объединения d -мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого D -мерного многогранника из разбиения $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D$, т.е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелоэдра P^D . В теореме 5.1 доказывается, что отклонения $\delta(i, X^d)$ для таких многоцветных множеств ограниченного остатка X^d снова удовлетворяют неравенству (4).

1. Торические развертки

1.1. Перекладывающиеся торические развертки. Пусть дан D -мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L, \quad (1)$$

где L — невырожденная решетка из векторного пространства $\mathbb{R}^D$, т.е. решетка L имеет размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod L. \quad (2)$$

Разверткой T^D тора $\mathbb{T}^D$ назовем такое подмножество T^D из $\mathbb{R}^D$, для которого ограничение фактор-отображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D : x \mapsto x \bmod L$$

на указанное подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ задает биекцию

$$T^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D. \quad (3)$$

Пусть дана торическая развертка T^D , удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (4)$$

развертки T^D , что если с помощью биекции (3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D , то индуцированное отображение

$$T^D \xrightarrow{S_v} T^D$$

для сдвига тора (2) будет эквивалентно перекладыванию областей $T_0, T_1, \dots, T_D$ развертки T^D :

$$S_v(x) = x + v(x), \quad (5)$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T^D$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если } x \in T_k, \quad (6)$$

при этом $v_0, v_1, \dots, v_D$ — некоторая фиксированная система векторов. Развертка T^D , удовлетворяющая условиям (3)–(6), называется *перекладывающейся*.

Заметим, что в силу биекции (3) разбиению (4) развертки T^D отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D \quad (7)$$

тора $\mathbb{T}^D$ на соответствующие области $\mathbb{T}_k \equiv T_k \bmod L$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в *обычном* (*строгом*) смысле, когда рассматриваются покрытия множеств

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$$

с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \neq k'$, а также в *расширенном* смысле

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots,$$

предполагая в данном случае, что различные множества $X_k, X_{k'}$ не имеют общих внутренних точек $X_k^{\text{int}} \cap X_{k'}^{\text{int}} = \emptyset$.

1.2. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига. Из определений (2), (5) и (6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \pmod{L} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (8)$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, D \quad (9)$$

принадлежат основной решетке периодов L тора (1). В дальнейшем на протяжении всей статьи будем предполагать, что L является невырожденной решеткой, порождаемой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D] \quad (10)$$

векторами (9) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\text{векторы } l_1, \dots, l_D \text{ имеют ранг } D \text{ над } \mathbb{R}. \quad (11)$$

При этом условии вектор сдвига α можно разложить по данному базису

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_D l_D. \quad (12)$$

Пусть α — произвольный вектор из $\mathbb{R}^D$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ в базисе (12). Определим его *ранг относительно решетки L* равенством

$$\text{rank}_L(\alpha) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \quad (13)$$

где

$$M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$$

обозначает *модуль* над кольцом $\mathbb{Z}$, порождаемый числами $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$;

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D]$$

— размерность этого модуля над $\mathbb{Z}$. Если $\alpha' \in \mathbb{R}^D$ — другой вектор, удовлетворяющий условию $\alpha' \equiv \alpha \pmod{L}$, то из определения (13) вытекает равенство

$$\text{rank}_L(\alpha') = \text{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг $\text{rank}_L(\alpha)$ корректно определен для векторов α на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. Из определения (13) также следуют неравенства

$$0 \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leq D.$$

Назовем вектор α *иррациональным*, если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*. Это равносильно тому, что вектор α имеет рациональные координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ в базисе (12).

Для вектора α отвечающие ему сдвиг S_α тора (2) и перекладывание S_v из (6) будем называть соответствующим образом.

2. Торические развертки и множества ограниченного остатка

2.1. Цветные k -отклонения. Пусть $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D$ — разбиение тора (7), отвечающее разбиению (4) развертки тора T^D . Зададим сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \bmod L \quad (1)$$

на вектор

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + b \circ l), \quad (2)$$

при этом h — произвольное натуральное число,

$$b \circ l = b_1 l_1 + \dots + b_D l_D$$

и $b = (b_1, \dots, b_D) \in \mathbb{Z}^D$ — целый вектор. Из определения следует, что вектор $b \circ l$ принадлежит решетке L . Любому сдвигу тора (1) можно сопоставить *считающую функцию*

$$r_k(i, x_0) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k; 0 \leq j < i\}. \quad (3)$$

По условию L — невырожденная решетка (10). Поэтому для ее базиса $l_1, \dots, l_D$ существует двойственный базис $l_1^*, \dots, l_D^*$, связанный с исходным базисом соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \quad (4)$$

где $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$ — скалярное произведение для $x = (x_1, \dots, x_D)$, $y = (y_1, \dots, y_D)$ из $\mathbb{R}^D$ и δ_{km} — символ Кронекера.

Для $k = 0, 1, \dots, D$ обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k. \quad (5)$$

Здесь коэффициенты a_k ($k = 1, \dots, D$) задаются равенствами

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k, \quad (6)$$

где α_k — координаты (12) вектора α относительно базиса $l_1, \dots, l_D$, а коэффициент a_0 определяется из равенства

$$a_0 + a_1 + \dots + a_D = 1. \quad (7)$$

Назовем $\delta_k(i, x_0)$ отклонением распределения точек *орбиты*

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \bmod L; i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (8)$$

относительно области $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T}^D$, или кратко — *k -отклонением* или *цветным отклонением*.

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим его крайние значения

$$\underline{m}_k(X) = \inf_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad (9)$$

где векторы $l_1^*, \dots, l_D^*$ определены в (4) и

$$l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^*. \quad (10)$$

Относительно отклонений $\delta_k(i, x_0)$ в [5] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T) h \quad (11)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T), \quad (12)$$

не зависят от h , i и определяются исключительно размерами развертки тора $T = T^D$, определенной в (4).

2.2. Вырождение орбит. Пусть вектор сдвига α будет произвольным, т.е. не обязательно иррациональным, и пусть $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ — орбита (8) произвольной начальной точки $x_0 \in T$ относительно сдвига S_β , где вектор сдвига β определен равенством (2). Обозначим $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c$ замыкание орбиты $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$.

Если вектор сдвига α будет максимально иррациональным, то есть иметь ранг $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то вектор β также будет максимально иррациональным. Известно [8], что для указанных β будет выполняться равенство

$$\dim \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = D$$

и, таким образом, в этом случае выполняется формула

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = T^c. \quad (13)$$

В общем случае будет выполняться лишь включение

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subseteq T^c, \quad (14)$$

поэтому для констант (12) из (14) будет следовать неравенство

$$c_k(X) \leq c_k(T). \quad (15)$$

Здесь множество X определяется с помощью биекции (3):

$$T^D \supseteq X \xrightarrow{\text{mod } L} \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subset \mathbb{T}^D. \quad (16)$$

Если неравенство (15) будет строгим, то, как следствие, в случае произвольного вектора сдвига α мы получим для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ усиление оценки (11).

В этом случае теорема 1 принимает вид [5].

ТЕОРЕМА 2. При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X) h \quad (17)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы $c_k(X)$ вычисляются по формуле

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \quad (18)$$

не зависят от h , i и определяются исключительно размерами множества X из (16). Величины $\overline{m}_k(X)$ и $\underline{m}_k(X)$ определены в (9).

2.3. Единичный базис. Константы $c_k(X)$ из теоремы 2 можно конкретизировать, если перейти

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots \quad l_D = -\mathbf{e}_D \quad (19)$$

от базиса (11) к единичному базису

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1). \quad (20)$$

При таком выборе базиса решетка L , определенная в (10), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \quad (21)$$

т.е. будет кубической решеткой $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Если решетка L имеет вид (21), то выполняется следующая теорема [5].

ТЕОРЕМА 3. Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ выбраны в виде (19) и x_0 — произвольная начальная точки из тора $\mathbb{T}^D$.

1. Тогда k -отклонения (5) принимают вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (22)$$

где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$.

2. Пусть выбран вектор сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$ с произвольным натуральным h и вектором l из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$. Тогда при любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (23)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ с константами

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X),$$

где множество X определено в (16),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = -\inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\underline{m}_0(X) = \inf_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x, \quad \overline{m}_0(X) = \sup_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x$$

для $k = 0$, где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$.

3. В случае $h = 1$ выполняются точные неравенства:

$$x_{0k} - \sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leq \delta_k(i, x_0) \leq x_{0k} - \inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad (24)$$

для $k = 1, \dots, D$, где начальная точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ — записана в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$; и

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leq \delta_0(i, x_0) \leq \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \quad (25)$$

где $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$.

3. Разбиения вытянутых параллелоэдров

3.1. Вытянутые кубы C_s . Приведем из [4] основные понятия и результаты, необходимые нам для дальнейшего. Пусть $C = C^D$ — замкнутый D -мерный куб, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Обозначим $\mathbb{R}_+^D$ *положительный конус*, состоящий из $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}_+^D$ определим операцию *вытягивания* $\text{Str}_{\mathbf{s}}$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ как сумму по Минковскому

$$\text{Str}_{\mathbf{s}}(X) = X + I\mathbf{s} = \bigcup_{t \in I} (X + t\mathbf{s}) \quad (1)$$

самого множества X и вложенного в пространство $\mathbb{R}^D$ отрезка $I\mathbf{s} = \{t\mathbf{s}; t \in I\}$, где $I = [0, 1]$. Условимся $\mathbf{s}$ из (1) называть *вытягивающим вектором*.

Применяя данную операцию к единичному кубу C , построим из него многогранник

$$C_{\mathbf{s}} = \text{Str}_{\mathbf{s}}(C), \quad (2)$$

представляющий собою *вытянутый куб*, имеющий объем

$$\text{vol } C_{\mathbf{s}} = \sigma(\mathbf{s}) + 1.$$

Здесь обозначили

$$\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$$

для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$. Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$ обладают следующим важным для наших целей свойством ([4], теорема 1.1):

для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^D$ имеет место разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_{\mathbf{s}}} C_{\mathbf{s}}[l], \quad (3)$$

где $C_{\mathbf{s}}[l] = C_{\mathbf{s}} + l$ — множество, полученное сдвигом куба $C_{\mathbf{s}}$ на вектор l , и

$$L_{\mathbf{s}} = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{s}}]$$

— полная решетка, порождаемая векторами $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ для $k = 1, \dots, D$.

3.2. Вытянутые параллелоэдры $C_{\mathbf{c}}$. Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_{\mathbf{s}}} \mathbb{R}^D : \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k \quad k = 1, \dots, D \quad (4)$$

задает изоморфизм решеток

$$M_{\mathbf{s}} : L_{\mathbf{s}}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^D$$

и переводит D -мерный единичный куб C в *параллелоэдр*

$$C = M_{\mathbf{s}}(C), \quad (5)$$

натянутый соответственно на векторы

$$\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c},$$

где вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = \text{inv}(\mathbf{s}). \quad (6)$$

Здесь

$$\text{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

представляет собою *линейно-инверсное преобразование* пространства $\mathbb{R}^D$.

Согласно (5), вытянутый куб $C_{\mathbf{s}}$ отображается

$$M_{\mathbf{s}} : C_{\mathbf{s}} \longrightarrow C_{\mathbf{c}}$$

в многогранник

$$C_{\mathbf{c}} = \text{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}), \quad (7)$$

получающийся вытягиванием параллелоэдра $\mathcal{C}$ вдоль вектора $\mathbf{c}$, связанного с вектором $\mathbf{s}$ формулой (6). *Вытянутый параллелоэдр* $C_{\mathbf{c}}$ имеет объем

$$\text{vol } C_{\mathbf{c}} = 1 \quad (8)$$

и число вершин $\sharp V(C_{\mathbf{c}}) = 2^{D+1} - 2$.

3.3. Вытягивающие векторы для параллелоэдров. Согласно [5], имеет место биекция

$$\text{inv} : \mathbf{S}_{<1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1} \quad (9)$$

между $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_+^D$ и множеством

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \quad (10)$$

где $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_D$. Множество $\mathbf{C}_{<1}$ является D -мерным симплексом, замыкание которого содержит $(D - 1)$ -мерный симплекс

$$\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^D)^c; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}.$$

В [9] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. 1. Множество

$$\mathbf{C}_{\leq 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$$

- внутренность симплекса $\mathbf{C}_1^c$, представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелоэдров (7): любому вектору $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ соответствует $\mathbf{c} \mapsto C_{\mathbf{c}}$
- выпуклый параллелоэдр $C_{\mathbf{c}}$.

2. Вытянутые параллелоэдры $C_{\mathbf{c}}$ разбивают пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} C_{\mathbf{c}}[l] \quad (12)$$

на многогранники $C_{\mathbf{c}}[l] = C_{\mathbf{c}} + l$ без общих внутренних точек.

3.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелепедов. Используя (12), определим разбиение пространства $\mathbb{R}^D$:

$$\mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_c[l]. \quad (13)$$

Обозначим

$$\partial \mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial \mathcal{C}_c[l]$$

множество всех границ разбиения $\mathcal{T}_c$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}_c[l]$. Для любого $\alpha = \lambda c$, $0 < \lambda < 1$, определим множество границ

$$\partial \mathcal{C}_{c,\lambda} = \partial \mathcal{C}_c \cup [\mathcal{C}_c \cap (\partial \mathcal{T}_c - \alpha)] \subset \mathcal{C}_c.$$

Границы $\partial \mathcal{C}_{c,\lambda}$ разбивают вытянутый параллелепед $\mathcal{C}_c$ на $D + 1$ область без общих внутренних точек [5]:

$$\mathcal{C}_{c,\lambda} = \mathcal{P}_0^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c, \quad (14)$$

где $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, \dots, D$ — параллелепеды, содедержающие точки

$$e_k = (0, \dots, \overset{(k)}{1}, \dots, 0),$$

а

$$\mathcal{P}_0^c = [\mathcal{C}_c \setminus (\mathcal{P}_1^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c)]^c$$

— вытянутый параллелепед вида $\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{c-\alpha}(\mathcal{C})$.

Зададим перекладывание

$$S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} S_v(\mathcal{P}_0^c) \cup S_v(\mathcal{P}_1^c) \cup \dots \cup S_v(\mathcal{P}_D^c) \quad (15)$$

вытянутого параллелепедра с разбиением (14), где

$$S_v(\mathcal{P}_k^c) = \mathcal{P}_k^c[v_k] = \mathcal{P}_k^c + v_k$$

— параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}_k^c$ на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Перекладывание S_v индуцирует многозначное отображение

$$S_v : \text{Str}_c(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \quad (17)$$

определяемое условиями

$$x \mapsto S_v(x) = x + v_k, \quad \text{если } x \in \mathcal{P}_k^c.$$

Из ([4], предложение 1.1) вытекает следующее свойство перекладывания S_v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Вытянутый параллелепед $\mathcal{C}_{c,\lambda} = \text{Str}_c(\mathcal{C})$ с разбиением (14) замкнут $S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{c,\lambda}$ относительно операции перекладывания (15).*

Из определения (16) векторов сдвигов v_k вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ для любого $k = 0, 1, \dots, D$. Отсюда и (17) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D, \quad (18)$$

означающее, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом параллелепипеде $S_v : \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$, если отображение S_v рассмотреть по $\bmod \mathbb{Z}^D$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D.$$

Тогда из (15)-(18) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D \end{array} \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (19)$$

3.5. Построение перекладывающихся торических разверток. Чтобы построить для вытянутого параллелепипеда $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ с разбиением (14) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathbb{R}^D$ (см. определение в п. 1.1), нам потребуется следующий i -алгоритм [4], определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$.

Согласно i -алгоритму, любая точка x из вытянутого параллелепипеда $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ имеет однозначно определенный индекс

$$i(x) = -1, 0, 1, \dots, D.$$

Если точка x принадлежит внутренности некоторого параллелепипеда $\mathcal{P}_k^c$, то она имеет индекс $i(x) = k$. Так что смысл индекса $i(x)$ состоит в том, что он распределяет общие граничные точки между параллелепипедами $\mathcal{P}_0^c, \mathcal{P}_1^c, \dots, \mathcal{P}_D^c$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие незамкнутые многогранники

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\} \quad (20)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Они состоят из всех внутренних точек параллелепипедов $\mathcal{P}_k^c$ и части их граничных точек. Из однозначности индекса $i(x)$ следует $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \emptyset$ с номерами $k_1 \neq k_2$. Так определенные многогранники $\mathcal{P}_k$ обладают следующим свойством [4].

ТЕОРЕМА 5. Пусть параметр $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ определен равенством $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}_k$ — многогранники (20). Тогда их объединение

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D \quad (21)$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

Итак, любому вытянутому параллелепипеду $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ из (14) i -алгоритм ставит в соответствие

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \Rightarrow T(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) = T_{\mathbf{c},\lambda}^D \quad (22)$$

перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda}^D \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением (21). Ее роль состоит в том, посредством биекции (3) она задает *каноническое разбиение* тора

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (23)$$

на множества $\mathbb{T}_k^D = \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$, являющиеся по теореме 1 множествами ограниченного остатка.

Из последовательности шагов (14), (22) и (23) получается следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$.

Общая схема для канонического разбиения тора $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$:

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \Rightarrow T_{\mathbf{c},\lambda}^D \Rightarrow \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D. \quad (24)$$

4. Теорема Гекке для BR -многогранников

4.1. Многомерная теорема Гекке. Пусть

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D$$

— перекладывающаяся торическая развертка (21) с заданным на ней перекладыванием S_v (см. определение (5)). Указанной развертке $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$ по схеме (24) соответствует разбиение тора

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D,$$

на котором определен сдвиг $S_{\alpha}(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$. Введем обозначение (ср. (2))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \quad (1)$$

при этом h — произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \#\{j; S_{\beta}^j(x_0) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\},$$

где S_{β} — сдвиг тора на вектор (1) и x_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$. Относительно отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) - i \operatorname{vol}(\mathbb{T}_k^D) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (2)$$

доказана следующая теорема [4].

ТЕОРЕМА 6. (*многомерное обобщение теоремы Гекке*).

1. Пусть $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Тогда в формуле (2) объемы равны

$$\text{vol}(\mathbb{T}_k^D) = \alpha_k \quad (3)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ и для отклонений (2) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (4)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формуле

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = \max_{v \in V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_k$ — единичные векторы для $k = 1, \dots, D$ и $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_D$. Здесь в (5) через $V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$. Таким образом, константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ в неравенстве (4) не зависят от выбора множителя h в определении (1) вектора сдвига β .

2. Если вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, то константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad (6)$$

для $k = 1, \dots, D$; и соответственно

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (7)$$

для $k = 0$.

3. Для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ из (6), (7) выполняется общее неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) \leq D \quad \text{для любого } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}. \quad (8)$$

4.2. BR-многогранники. Замкнутые многогранники $\mathcal{P}_k^c$ с номерами $k = 1, \dots, D$, определенные в (14), допускают простое описание

$$\mathcal{P}_k^c = P_k^c + \omega. \quad (9)$$

Здесь $P_k^c \subset \mathbb{R}^D$ обозначает замкнутый параллелепипед, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'} \quad \text{для всех } k' = 1, \dots, D, \quad k' \neq k, \quad (10)$$

где $\mathbf{c} = \lambda \alpha$ и $\mathbf{e}_{k'}$ — единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D - 1)\mathbf{c} - \alpha, \quad (11)$$

где $\mathbf{e}_0 = (1, \dots, 1)$, является общей для всех многогранников $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 0, 1, \dots, D$. При этом в случае $k = 0$ многогранник P_0^c также задается равенством (9), в котором полагаем $\omega = 0$ и P_0^c — вытянутый параллелоэдр вида (см. (7))

$$\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{\mathbf{c} - \alpha}(\mathcal{C}). \quad (12)$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ и $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$, то из определения (10) следует

$$\text{vol } P_k^c = \alpha_k. \quad (13)$$

В (20) были определены незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k$, содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника $\mathcal{P}_k^c$. Используя $\mathcal{P}_k$, определим соответствующие незамкнутые многогранники P_k равенством (ср. (9))

$$\mathcal{P}_k = P_k + \omega \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (14)$$

Множество $X \subset \mathbb{R}^D$ назовем $\mathbb{Z}^D$ -различимым, если оно удовлетворяет свойству

$$\forall x, y \in X : x - y \in \mathbb{Z}^D \Rightarrow x = y. \quad (15)$$

Из определения (14) следует, что все многогранники P_k являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, так как, согласно теореме 4.1, все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$. Пусть дан произвольный вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h = 1, 2, 3, \dots$ — такое, что существует вектор α , удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \quad \alpha \equiv h\beta \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (16)$$

Обозначим

$$P_k = P_{\beta, h, \lambda, k} \quad (17)$$

многогранники, определенные равенствами (14) для векторов α из (16) и $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$.

Для сдвига S_β тора $\mathbb{T}^D$ и многогранника P_k зададим *считающую функцию*

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in P_k \bmod \mathbb{Z}^D, 0 \leq j < i\},$$

где x_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$; и, принимая во внимание равенство (13), определим отвечающее функции $r(i; \beta, x_0, P_k)$ *отклонение*

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = r(i; \beta, x_0, P_k) - i \text{vol } \mathbb{P}_k^D \quad (18)$$

распределения точек орбиты $\text{Orb}(S_\beta, x_0)$ относительно области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, имеющие, согласно (3) и (13), объемы $\text{vol } \mathbb{P}_k^D = \text{vol } P_k^c = \alpha_k$ для $k = 0, 1, \dots, D$.

Из теоремы 6 вытекает следствие [5].

ТЕОРЕМА 7. Пусть даны вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и $h = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяющие условиям (16), $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$, и пусть $P_k = P_{\beta, h, \lambda, k}$ — отвечающие этим параметрам многогранники (17). При этих условиях имеют место следующие утверждения.

1. Для отклонений (18) выполняются неравенства

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq h\gamma_k \quad (19)$$

с константами

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)c_k \quad (20)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (21)$$

для $k = 0$, где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$.

2. Также для отклонений выполняется общее неравенство

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq hD. \quad (22)$$

Как уже отмечалось, многогранники P_k , определенные в (14), являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, а из теоремы 7 следует, что относительно сдвига S_β многогранники P_k , если их рассматривать как области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, являются множествами ограниченного остатка. По аналогии с определением (2) многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, *BR-многогранниками*.

Для произвольной размерности D многогранники P_k с номерами $k = 1, \dots, D$ по своей конструкции — параллелепипеды (10) — представляют собою простейший вид BR-многогранников. Многогранник P_0 также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, когда $\lambda = 1$. Если же $\lambda < 1$, то P_0 — параллелоэдр с числом вершин $\#V(P_k) = 2^{D+1} - 2$.

Заметим, что приведенное во введении неравенство (4) вытекает из неравенства (22).

Далее мы предполагаем построить более сложные BR-множества, состоящие из объединения нескольких многогранников, каждый из которых уже не обязан быть BR-многогранником.

5. Многоцветные разбиения торов

5.1. Вложения торов и торические обмотки. Определим вложение

$$\mathbb{R}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}}^d \subseteq \mathbb{R}^D, \quad (1)$$

полагая $\widehat{x} = (x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}^d$. Здесь считаем, что $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, где $D = d + d'$.

Поскольку кубическая решетка $\mathbb{Z}^D$ также разлагается в прямое произведение $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^{d'}$, то вложение (1) можно факторизовать

$$x \bmod \mathbb{Z}^d \mapsto \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^D \quad (2)$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (3)$$

тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. Так определенное вложение (3) согласовано

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\widehat{\alpha}} \\ \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (4)$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d, \quad S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{x}) \equiv \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (5)$$

Укажем, что в (5) при определении сдвига S_α — в отличие от п. 1.1 — мы теперь выбираем d -мерный вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$.

Тор меньшей размерности $\hat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D$ будем называть *торической обмоткой* в $\mathbb{T}^D$. Из (3) и (4) следует, что торическая обмотка $\hat{\mathbb{T}}^d$ — инвариантное множество

$$S_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbb{T}}^d = \hat{\mathbb{T}}^d \quad (6)$$

относительно сдвига $S_{\hat{\alpha}}$.

Начиная с этого места, если не оговорено противное, будем предполагать, что вектор сдвига α тора $\mathbb{T}^d$ максимально иррациональный, т.е. $\text{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{Z}^d) = d$.

5.2. Автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$. С помощью автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$ исходя из некторой фиксированной обмотки $\hat{\mathbb{T}}^d$ можно получить богатое семейство других торических обмоток на торе $\mathbb{T}^D$. Обозначим $\text{Aut } \mathbb{T}^D$ группу автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$. Ее можно разложить в прямое произведение

$$\text{Aut } \mathbb{T}^D \simeq \text{Aut}_h \times \text{Aut}_s$$

ее некоммутативной подгруппы гиперболических автоморфизмов $\text{Aut}_h \simeq \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ и коммутативной подгруппы сдвигов тора $\text{Aut}_s \simeq \mathbb{T}^D$. Здесь $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$ обозначает *группу унимодулярных матриц* или, иначе, матриц с целыми коэффициентами определителя ± 1 .

1. *Гиперболические автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$.* Любая матрица $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ следующим образом

$$A : \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D : x^D \bmod \mathbb{Z}^D \mapsto Ax^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (7)$$

Это непосредственно вытекает из свойства $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$ быть группой автоморфизмов кубической решетки $\mathbb{Z}^D$: для любого A из группы $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$ отображение $x^D \mapsto Ax^D$ задает изоморфизм решетки $\mathbb{Z}^D$.

2. *Сдвиги тора $\mathbb{T}^D$.* Если элемент $t^D \in \mathbb{T}^D$, то отвечающий ему автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ из подгруппы Aut_s будет обычным сдвигом тора

$$S_{t^D} : \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D : x^D \mapsto x^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (8)$$

5.3. Согласованность сдвига S_α с автоморфизмами тора $\mathbb{T}^D$. Для произвольного преобразования $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$A^\wedge \alpha = A\hat{\alpha} \quad (9)$$

и определим вектор сдвига $\hat{\alpha}_A$ тора $\mathbb{T}^D$:

$$\hat{\alpha}_A \equiv A^\wedge \alpha \bmod \mathbb{Z}^D,$$

полагая при этом, что вектор $\hat{\alpha}_A$ имеет вид

$$\hat{\alpha}_A = (\hat{\alpha}_{A,1}, \dots, \hat{\alpha}_{A,D}), \quad \text{где } 0 \leq \hat{\alpha}_{A,k} < 1. \quad (10)$$

При автоморфизме тора (7) преобразование сдвига $S_{\hat{\alpha}}$ переходит в преобразование $S_{\hat{\alpha}_A}$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (11)$$

Из диаграммы (11) и коммутативности сдвигов

$$S_{t^D} \circ S_{\hat{\alpha}_A} = S_{\hat{\alpha}_A} \circ S_{t^D}$$

получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A}, \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (12)$$

где автоморфизм A_{t^D} тора $\mathbb{T}^D$ определяется как композиция

$$A_{t^D}(x^D) \equiv Ax^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (13)$$

5.4. Стационарные разбиения тора $\mathbb{T}^d$. Пусть $t = t^D$ и

$$\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = A_t^\wedge \mathbb{T}^d = S_t A \hat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (14)$$

— торическая обмотка, где полагаем

$$A_t^\wedge(x) = A_t(\hat{x}).$$

Из диаграммы (12) и инвариантности (6) торической обмотки $\hat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ вытекает инвариантность

$$S_{\hat{\alpha}_A} \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (15)$$

обмотки (14), при этом, как нетрудно убедиться, имеют место следующие коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \xrightarrow[\sim]{A_t^\wedge} & \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow[\sim]{A_t^\wedge} & \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \end{array} \quad (16)$$

и

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}_A} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (17)$$

Здесь id обозначает тождественное вложение обмотки $\hat{\mathbb{T}}^d$ в содержащий ее тор $\mathbb{T}^D$.

Пусть вектор сдвига α будет иррациональным. Для таких α в [9] доказано, что существуют преобразования A из группы $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$ с условием

$$\sigma(\hat{\alpha}_A) < 1, \quad (18)$$

где

$$\sigma(\hat{\alpha}_A) = \hat{\alpha}_{A,1} + \dots + \hat{\alpha}_{A,D}$$

для вектора (10). Неравенство (18) означает, что $\hat{\alpha}_A$ принадлежит

$$\hat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1} \quad (19)$$

— множеству параметров (10). Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством

$$\hat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где} \quad \sigma(\hat{\alpha}_A) < \lambda \leq 1. \quad (20)$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{c}$ также, как и вектор $\hat{\alpha}_A$, удовлетворяет условию

$$\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}. \quad (21)$$

Для таких векторов $\mathbf{c}$ по схеме (24) мы можем построить

$$\mathbb{T}_{c,\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (22)$$

— каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$. Используя разбиение (22) и вложение (17), можем естественным образом задать разбиение торической обмотки $\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \subset \mathbb{T}^D$, полагая

$$\hat{\mathbb{T}}_{A_t,c,\lambda}^d = \hat{\mathbb{T}}_{A_t,0}^d \sqcup \hat{\mathbb{T}}_{A_t,1}^d \sqcup \dots \sqcup \hat{\mathbb{T}}_{A_t,D}^d, \quad (23)$$

где

$$\hat{\mathbb{T}}_{A_t,k}^d = \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \cap \mathbb{T}_k^D$$

и множества $\mathbb{T}_k^D$ взяты из разбиения (22).

Теперь с помощью изоморфизма (2) мы можем перенести разбиение (23) обмотки $\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d$ на изоморфный ей тор $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d = \mathbb{T}_{A_t,0}^d \sqcup \mathbb{T}_{A_t,1}^d \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_{A_t,D}^d. \quad (24)$$

Разбиение $\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d$ назовем *стационарным* разбиением тора $\mathbb{T}^d$. Такое название обусловлено тем, что в п. 7.1 мы определим еще другой вид, так называемых, динамических разбиений.

5.5. Распределение точек орбит на торе $\mathbb{T}^D$: общий случай. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \hat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{c,\lambda}^D) = \#\{j; S_{\hat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\} \quad (25)$$

для сдвига тора $S_{\hat{\beta}_A}$ на вектор $\hat{\beta}_A = A^\wedge \beta$. Здесь x_0^D — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$ и

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d), \quad (26)$$

где h — произвольное натуральное число и l^d из решетки $\mathbb{Z}^D$. Обозначим

$$\delta_k(i; \hat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{c,\lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \hat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{c,\lambda}^D) - i\hat{\alpha}_{A,k} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D \quad (27)$$

— отклонение распределения точек орбиты $\text{Orb}(S_{\hat{\beta}_A}, x_0)$ относительно области $\mathbb{T}_k^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, где согласно (19) координаты вектора $\hat{\alpha}_A = (\hat{\alpha}_{A,1}, \dots, \hat{\alpha}_{A,D})$ удовлетворяют условиям:

$$\hat{\alpha}_{A,1} + \dots + \hat{\alpha}_{A,D} < 1 \quad \text{и} \quad \hat{\alpha}_{A,k} > 0. \quad (28)$$

Аналогично, как это было сделано в теореме 3, дополнительно определяем нулевую координату

$$\hat{\alpha}_{A,0} = 1 - \hat{\alpha}_{A,1} - \dots - \hat{\alpha}_{A,D} = 1 - \sigma(\hat{\alpha}_A). \quad (29)$$

Из (28) следует, что $\widehat{\alpha}_{A,0} > 0$. Тогда, согласно теореме 6, для отклонений (27) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (30)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ в силу (6) и (7) вычисляются по следующим формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad (31)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (32)$$

для $k = 0$, где вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ определен в (20). Для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ из формул (31) и (32) вытекает грубое неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) < D \quad (33)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$.

5.6. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: стационарный случай. Выберем произвольную начальную точку x_0^d на торе $\mathbb{T}^d$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ из (15) определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \#\{j; S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^D; 0 \leq j < i\}, \quad (34)$$

а также отклонение

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) - i \widehat{\alpha}_{A, k} \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (35)$$

распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_{\beta}}(x_0^d)$ относительно области $\mathbb{T}_{A_t, k}^D$ из разбиения тора $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$, определенного в (24).

ТЕОРЕМА 8. 1. Пусть параметр $\mathbf{c}$ определен равенством (20), где $\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ для некоторого преобразования $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$. Тогда для отклонений (35) имеют место неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (36)$$

где константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ определены в (31) и (32).

2. При тех же условиях, независимо от выбора параметра $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$, выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| < Dh \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор сдвига $\widehat{\beta}_A$ определен согласно (10). Так как по условию $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где $l^d \in \mathbb{Z}^D$, то обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ инвариантна $S_{\widehat{\beta}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d$ относительно сдвига $S_{\widehat{\beta}}$. Отсюда следует инвариантность

$$S_{\widehat{\beta}_A} \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (38)$$

обмотки (14).

Пусть $x_0^D = A_t^\wedge x_0^d$. Согласно коммутативной диаграмме (17), имеем согласование

$$S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D,$$

а в силу диаграммы (16) и (38) — еще одно согласование

$$S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_k^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d.$$

Отсюда для любого k выводим равносильность

$$S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D. \quad (39)$$

Из определений (34), (35) и согласования (39) для любого i вытекает равенство отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D), \quad (40)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Теперь из равенства (40) и теоремы 6 следуют неравенства (36) и (37). $\square$

6. Заключение

Чтобы продвигаться дальше, было бы интересно на первом шаге более подробно рассмотреть случай $d = 1$, когда описанным выше методом получаются конечные разбиения

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^1 \subset \mathbb{T}^1$$

единичной окружности или, что равносильно — единичного полуинтервала $\mathbb{T}^1$. По теореме 8 разбиения $\mathbb{X}^1$ состоят

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{X}_0^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{X}_D^1 \quad (41)$$

из множеств ограниченного остатка $\mathbb{X}_k^1$ для $k = 0, 1, \dots, D$.

Каждое такое $\mathbb{X}_k^1$ есть конечное объединение полуинтервалов и при этом для отклонений $\delta_k(i; \beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (42)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

С другой стороны, ранее [2] Орен также рассматривал конечные объединения полуинтервалов X^1 и для них получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Более того, А. В. Шутов [10] получил явные оценки в (43).

Из сопоставления двух оценок (42) и (43) сразу возникает несколько задач.

1. Образуют ли совокупности всех множеств $\mathbb{X}_k^1$ из (41) и X^1 из (43) один и тот же класс множеств ограниченного остатка на $\mathbb{T}^1$.

2. Как ведут себя отклонения из (42) с ростом размерности $D \rightarrow \infty$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^D$.

3. Описать развертки T^D тора $\mathbb{T}^D$, минимизирующие границы отклонений в неравенствах (42).

4. Чему соответствуют размерность D и развертки тора T^D в терминах работ [2] и [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Bd. 1. S. 54–76.
2. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City. 1981. Vol. V. I. P. 217–230.
3. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.
4. Журавлев В. Г. Переключающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95–145.
5. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка. Математика и информатика, 1 — К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. — Совр. пробл. матем. Москва: МИАН, 2012. 128 с.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. т. 2. Киев: Из-во АН Украинской ССР, 1952. 420 с.
7. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Москва: Из-во АН СССР, 1953. 418 с.
8. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352.
9. Журавлев В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 97–136.
10. Шутов А. В. Проблема Гекке – Кестена для нескольких интервалов // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 1. С. 172–177.

REFERENCES

1. Hecke, E. 1922, "Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 1, no. 1, pp. 54–76. (German)
2. Oren, I. 1981, "Admissible functions with multiple discontinuities", *Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City*, vol. V. I., pp. 217–230.
3. Zhuravlev, V. G. 2012, "A multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 1, pp. 95–130. (Russian); translation in *St. Petersburg Math. J.* 2013. vol. 24, no. 1, pp. 71–97.
4. Zhuravlev, V. G. 2011, "Exchanged toric developments and bounded remainder sets", *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 392, *Analiticheskaya Teoriya Chisel i Teoriya Funktsii*. 26, pp. 95–145, 219–220. (Russian); translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 184 (2012), no. 6, pp. 716–745.

5. Zhuravlev, V. G. 2012, "Polyhedra bounded remainder", *Mathematics and informatics, 1 — the 75th anniversary of Anatolia Alekseevicha Karatsuba. — Sovrem. probl. Mat. Moscow, Steklov Mathematical Institute*, 2012. 128 p. (Russian)
6. Voronoi, G. F. 1952, 1953, "Sobranie socinenii v treh tomah", [Collected works in three volumes.] *Izdatel'stvo Akademii Nauk Ukrainskoi SSR, Kiev*, vol. I, 1952, 399 p.; vol. II, 1952, 391 p.; vol. III, 1953, 306 p. (Russian)
7. Fedorov, E. S. 1953, "Nacala uceniya o figurah", [Elements of the study of figures.] *Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow*, 410 p. (Russian)
8. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins", *Math. Ann.* Bd. 77. S. 313–352.
9. Zhuravlev, V. G. 2012, "Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 4, pp. 97–136. (Russian); translation in *St. Petersburg Math. J.* 2013, vol. 24, no. 4, pp. 601–629.
10. Shutov, A. V. 2011, "The Hecke-Kesten problem for some integrals", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 1(37), pp. 172–177. (Russian)

Владимирский государственного университета им. братьев Столетовых.

Поступило 15.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.2

О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКАХ

М. Е. Зеленова (г. Москва)

Аннотация

В данной статье описывается алгоритм решения полиномиальных уравнений в кольце $\mathfrak{D}[x]$, где $\mathfrak{D}$ – произвольный порядок поля $\mathbb{Q}(\omega)$, а ω – целое алгебраическое число. Предложенный алгоритм является развитием идеи Курта Гензеля, описанной им в 1904 году и впоследствии названной леммой Гензеля о подъеме решения полиномиального сравнения. Описываемый алгоритм основан на следующих теоретических результатах. Во-первых, оцениваются коэффициенты разложения по базису порядка $\mathfrak{D}$ решений уравнения, то есть выводится оценка на высоту решения полиномиального уравнения в произвольном порядке поля алгебраических чисел. Во-вторых, выписывается итерационная формула, не содержащая в себе делений, позволяющая произвести квадратичный подъем решения соответствующего сравнения по модулю степени простого числа в порядке. В-третьих, подбирается эффективная оценка на степень простого числа, до которой следует поднимать решение вышеуказанного сравнения для получения точного решения исходного уравнения.

Следует заметить, что для корректной работы алгоритма требуется выбрать простое число p , по которому будет производиться подъем, так, чтобы выполнялись определенные условия. А именно, p не должно делить норму результата исходного многочлена и его производной и дискриминант целого алгебраического числа ω . Также вычислительная сложность алгоритма уменьшается, если удастся подобрать простое число p , которое в дополнение к двум условиям, изложенным в предыдущем предложении, обладает тем свойством, что минимальный многочлен алгебраического числа ω , все коэффициенты которого редуцированы по модулю p , неприводим в конечном поле из p элементов. В этом случае вычислительная сложность алгоритма составляет $\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))$ арифметических операций. Здесь m – степень исходного многочлена, γ_i , $0 \leq i \leq m$ – его коэффициенты, а $\lceil \gamma \rceil$ – максимум модулей всех чисел, сопряженных с γ . В том же случае, когда не удастся выбрать простое число p так, чтобы минимальный многочлен ω был неприводим в конечном поле из p элементов, вычислительная сложность алгоритма составляет $\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) +$

$m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^d \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)$ арифметических операций. Здесь d – количество неприводимых сомножителей, на которые раскладывается минимальный многочлен числа ω в $\mathbb{F}_p$. Алгоритм, изложенный в статье, включает в себя стратегию выбора простого числа p для достижения меньшей вычислительной сложности.

Ключевые слова: полиномиальные уравнения, алгебраические числа, группа Галуа.

Библиография: 15 названий.

SOLUTION OF POLYNOMIAL EQUATIONS IN ARBITRARY ORDERS

M. E. Zelenova

Abstract

The article deals with an algorithm of solving polynomial equations in a ring $\mathfrak{D}[x]$, where $\mathfrak{D}$ is an arbitrary order of field $\mathbb{Q}(\omega)$ and ω is an algebraic integer. The algorithm develops Kurt Hensel's idea published in 1904 which was named Hensel's lifting lemma later. The algorithm described is based on the following theoretical results. Firstly, basis of order $\mathfrak{D}$ expansion coefficients of the equation roots are estimated, i. e. an estimate for the polynomial equation roots height in an algebraic number field arbitrary order is derived. Secondly, an iterative formula for the corresponding polynomial congruence solution quadratic lifting modulo power of prime in the order is obtained. This formula does not contain any divisions. Thirdly, an effective bound for prime power the congruence solution needs to be lifted to obtain the exact solution of the original equation is derived.

Notice that a prime p which is used for lifting needs to satisfy certain conditions for the algorithm correct work. In particular, p should not divide the original polynomial and its derivative resultant norm and also p should not divide discriminant of an algebraic integer ω . Also the algorithm complexity is decreased if it is possible to choose prime p which in addition to two previous conditions has the following property: the minimal polynomial of ω which coefficients are reduced modulo p is irreducible over finite field $\mathbb{F}_p$. In this case the algorithm complexity is $\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))$ arithmetic operations. Here m is the original polynomial degree, γ_i , $0 \leq i \leq m$ are its coefficients and $\lceil \gamma \rceil$ is the algebraic numbers conjugated to γ absolute values maximum. If it is impossible to choose prime number p such that minimal polynomial of ω is irreducible over $\mathbb{F}_p$ then the algorithm complexity is $\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^d \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))$ arithmetic operations. Here d is the minimal polynomial of ω irreducible factors over $\mathbb{F}_p$ number. The algorithm includes strategy to select a prime p to achieve lower computational complexity. *Keywords:* polynomial equations, algebraic numbers, Galois group.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Нахождение корней уравнений и систем в определенных кольцах или полях является одной из классических задач алгебры и теории чисел.

Один из подходов к решению данной задачи основан на классическом результате, а именно, лемме Гензеля о подъеме решения полиномиального сравнения (см. [1]). Идея алгоритмов, построенных с помощью данного подхода, состоит в том, что сначала с помощью подъема ищется решение данного уравнения или системы по модулю степени некоторого простого числа, а потом с помощью полученного результата ищется ответ к исходной задаче.

Данная идея была использована, например, в статье [2] для факторизации многочленов с рациональными коэффициентами. Известен также алгоритм нахождения рациональных решений целочисленных линейных систем (см. [3]).

Также модифицированный алгоритм подъема был использован автором в статье [4] для нахождения решений полиномиальных уравнений в полях алгебраических чисел. Полученный в данной работе результат является обобщением алгоритма, описанного автором в статье [4]. Первая статья не содержала в себе оценку простого числа p , по которому требовалось производить подъем. В данной работе такая оценка имеет место быть.

Итак, пусть ω — целое алгебраическое число степени d , и

$$\mu_\omega(x) = \sum_{i=0}^d c_i x^i \in \mathbb{Z}[x],$$

где $c_d = 1$, — его минимальный многочлен. Обозначим через $\mathfrak{D}$ произвольный порядок поля $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Предлагаемый алгоритм позволяет по заданному многочлену $f(x) \in \mathfrak{D}[x]$ найти все его корни, принадлежащие $\mathfrak{D}$, а также определяет случаи, когда исходное уравнение корней не имеет.

2. Алгоритм

Предположим, что

$$f(x) = \sum_{i=0}^m \gamma_i x^i, \quad \gamma_i \in \mathfrak{D}, \quad \gamma_m \neq 0$$

— многочлен без кратных корней.

Положим $R = \gamma_m D(f)$, где $D(f)$ — дискриминант многочлена $f(x)$, $R \in \mathfrak{D}$; $N(R) \in \mathbb{Z}$ — норма R .

Обозначим через $\overline{g(x)}(p) \in \mathbb{F}_p[x]$ многочлен, получающийся из $g(x)$ заменой коэффициентов c_i их вычетами по модулю простого числа p .

Каждый элемент $\beta \in \mathfrak{D}$ представим в виде

$$\beta = b_1 \omega_1 + \dots + b_d \omega_d,$$

где $b_i \in \mathbb{Z}$. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ — базис $\mathfrak{D}$. Будем использовать обозначение

$$\|\beta\| = \max |b_i|.$$

Также обозначим через D_ω дискриминант числа ω , а через D_{spl} — дискриминант поля разложения многочлена $\mu_\omega(x)$.

Для произвольного алгебраического числа γ положим

$$|\overline{\gamma}| = \max_{1 \leq k \leq d} |\gamma^{(k)}|,$$

где $\gamma^{(k)}$ — числа, сопряженные с γ .

Через p_i будем обозначать i -ое простое число, через $\#\mathcal{M}$ — количество элементов в множестве $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{M}_i$ — i -ый элемент множества $\mathcal{M}$.

Алгоритм.

Дано: ω — целое алгебраическое число степени d ;

$\mathfrak{D}$ — порядок в поле $\mathbb{Q}(\omega)$;

$\mu_\omega(x) = \sum_{i=0}^d c_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, $c_d = 1$, — минимальный многочлен ω ;

$f(x) = \sum_{i=0}^m \gamma_i x^i$, $\gamma_i \in \mathfrak{D}$ — многочлен без кратных корней.

Найти: множество решений уравнения $f(x) = 0$ в $\mathfrak{D}$ или дать ответ, что решений нет.

1. Положить $S' = \emptyset$. [на выходе алгоритма множество S' будет состоять из решений исходного уравнения]
2. Вычислить $R = \gamma_m D(f)$, $N(R)$ и $R' \in \mathfrak{D}$, такое, что $N(R) = R \cdot R'$. [см. лемму 1]
3. Вычислить $A(x), B(x) \in \mathfrak{D}[x]$, такие, что

$$R = A(x)f(x) + B(x)f'(x).$$

[см. лемму 2]

4. Вычислить D_ω , D_{spl} .
5. Положить $W = [(4 \log |D_{spl}| + 2, 5d + 5)^2]$.
6. Для каждого i , удовлетворяющего $p_i \leq W$, выполнять следующие действия:
 - 6.1. Положить $\mathcal{M} = \emptyset$ и $K = 0$.
 - 6.2. Проверить, выполняются ли условия

$$(p_i, N(R)) = 1 \text{ и } (p_i, D_\omega) = 1.$$

Если нет, то перейти на начало шага 6.

- 6.3. Разложить многочлен $\overline{\mu_\omega(x)}(p_i)$ на неприводимые множители в поле $\mathbb{F}_{p_i}$:

$$\overline{\mu_\omega(x)}(p_i) = \mu_{i,1}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{i,r_i}(x).$$

Если $r_i = 1$, то положить $\mathcal{M} = \{\mu_{i,1}(\omega)\}$, $K = 1$, $P = p_i$ и перейти на шаг 8.

- 6.4. Если $\mathcal{M} = \emptyset$ или $\#\mathcal{M} > r_i$, то положить

$$\mathcal{M} = \{\mu_{i,1}(\omega), \dots, \mu_{i,r_i}(\omega)\}, K = r_i, P = p_i.$$

7. Если $\mathcal{M} = \emptyset$, то найти простое число $p > p_W$, такое, что

$$(p, N(R)) = 1 \text{ и } (p, D_\omega) = 1,$$

найти разложение многочлена $\overline{\mu_\omega(x)}(p)$ на неприводимые множители

$$\overline{\mu_\omega(x)}(p) = \mu_1(x) \cdot \dots \cdot \mu_r(x)$$

и положить $\mathcal{M} = \{\mu_1(\omega), \dots, \mu_r(\omega)\}$, $K = r$, $P = p$.

8. Для каждого $i = 1, \dots, K$ решить сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$, где $\mathfrak{p}_i = (P, M_i)$.
[см. замечание 1]

Если оно неразрешимо, то уравнение $f(x) = 0$ неразрешимо в $\mathfrak{D}$.

Если оно разрешимо, то обозначим через S_i множество решений сравнения, а через s_i — их количество.

Выберем ровно по одному элементу $a_i \in S_i$. Обозначим через T_k систему сравнений $x \equiv a_k \pmod{\mathfrak{p}_k}$, $1 \leq k \leq K$.

9. Если $K > 1$, то с помощью китайской теоремы об остатках получить все решения сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, решив системы T_k , где $1 \leq k \leq K$. [см. [5], гл. II §2]

10. Обозначим через S множество всех элементов из $\mathfrak{D}$, таких, что для каждого $\delta \in S$

$$f(\delta) \equiv 0 \pmod{p}.$$

[при $K = 1$ такие элементы были получены на шаге 8, а при $K > 1$ — на шаге 9]

Выбрать δ так, чтобы выполнялось $\|\delta\| \leq \frac{p}{2}$.

11. Положить $V = 1 + \lfloor \log_2(\log_p(2CU)) \rfloor$, где

$$C = d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} \lceil \omega'_j \rceil,$$

$$U = \max_{0 \leq j < m} \lceil \gamma_j \rceil \cdot \lceil \gamma_m \rceil^{d-1} + 1.$$

Здесь ω'_j — элементы базиса, взаимного к Ω .

12. Найти решение N_0 сравнения

$$N(R) \cdot x \equiv 1 \pmod{p}, x \in \mathbb{Z},$$

для которого выполняется условие $|N_0| \leq \frac{p}{2}$.

13. Для каждого $k = 1, \dots, V$ вычислить $N_k \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$N_k \equiv 2N_{k-1} - N(R)N_{k-1}^2 \pmod{p^{2^k}},$$

$$|N_k| \leq \frac{p^{2^k}}{2}.$$

14. Для каждого $\delta \in S$ выполнять следующие действия:

14.1. Положить $\delta_0 = \delta$.

14.2. Для каждого $k = 1, \dots, V$ вычислить

$$\delta_k \equiv \delta_{k-1} - f(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})R'N_k \pmod{p^{2^k}},$$

$$\delta_k \in \mathfrak{D}, \quad \|\delta_k\| \leq \frac{p^{2^k}}{2}.$$

14.3. Проверить, удовлетворяет ли число δ_V равенству

$$f(\delta_V) = 0.$$

Если равенство выполняется, то

$$S' = S' \cup \{\delta_V\}.$$

15. Если $S' = \emptyset$, то дать ответ, что уравнение $f(x) = 0$ неразрешимо в $\mathfrak{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для того, чтобы решить сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p} = (p, \mu(\omega))$, достаточно решить уравнение $f(x) = 0$ в поле $\mathbb{F}_{p^{\deg \mu(x)}}$. Алгоритмы нахождения корней многочленов в конечных полях можно найти в книге [6], гл. 3.

3. Обоснование шагов 5–7

Более подробно с теорией, изложенной в данном параграфе, можно ознакомиться в книгах [7] и [8]; определение символа Артина и формулировка теоремы 1 в более общем виде содержится в работе [9].

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что справедлива расширенная гипотеза Римана. Пусть $L \supset \mathbb{Q}$ — нормальное расширение степени n с дискриминантом D . Тогда для произвольного элемента $\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ существует простое число p , $p \nmid \Delta$, удовлетворяющее условиям $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right) = \sigma$ и $p \leq (4 \log |D| + 2, 5n + 5)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9], §8.8. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что справедлива расширенная гипотеза Римана.

Если группа Галуа многочлена $\mu_\omega(x)$ содержит цикл длины $d = \deg \mu_\omega(x)$, то найдется простое число p , удовлетворяющее условиям:

1. $p \nmid D_{spl}$.
2. Многочлен $\overline{\mu_\omega(x)}(p)$ неприводим в $\mathbb{F}_p$.
3. $p \leq (4 \log |D_{spl}| + 2, 5d + 5)^2$.

Через $E_l(B)$ будем обозначать следующее множество:

$$E_l(B) = \{g(x) = g_l x^l + \dots + g_1 x + g_0 \in \mathbb{Z}[x] \mid g_l = 1, \max(|g_0|, \dots, |g_l|) \leq B, \\ \text{Gal}(g/F) \neq S_l\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива оценка*

$$E_l(B) = \mathcal{O}(B^{l-\frac{1}{2}} \log B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что доля унитарных многочленов с целыми коэффициентами степени l , группа Галуа которых меньше, чем S_l , а коэффициенты ограничены B , составляет $\mathcal{O}\left(\frac{\log B}{\sqrt{B}}\right)$, а эта величина стремится к нулю при $B \rightarrow \infty$. Таким образом, можно ожидать, что большое количество многочленов, возникающих в качестве $\mu_\omega(x)$, имеет группу Галуа S_d , откуда следует, что $\sigma_d \in \text{Gal}(\mu_\omega/\mathbb{Q})$, и тогда при условии справедливости расширенной гипотезы Римана верны утверждения следствия 1. Тогда в алгоритме появляется возможность сократить количество вычислений, перепрыгнув с шага 6 сразу на шаг 8, а потом на шаг 10.

4. Обоснование подъема решений

ЛЕММА 1. *Существует $R' \in \mathfrak{D}$ такое, что $N(R) = R \cdot R'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11], гл. 2 §2. $\square$

ЛЕММА 2. *Существуют $A(x), B(x) \in \mathfrak{D}[x]$ такие, что $R = A(x)f(x) + B(x)f'(x)$. При этом многочлены $A(x)$ и $B(x)$ можно выписать в явном виде.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12], гл. 5 §34. $\square$

ЛЕММА 3. *При любом $k \geq 0$ для чисел N_k , определенных на шагах 12 и 13 алгоритма, выполняется сравнение*

$$N(R) \cdot N_k \equiv 1 \pmod{p^{2^k}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по k . При $k = 0$ теорема верна по построению N_0 . Пусть теперь $k \geq 1$, и сравнение выполнено для всех N_i при $i < k$.

Согласно предположению индукции,

$$N(R) \cdot N_{k-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{2^{k-1}}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (N(R) \cdot N_{k-1} - 1)^2 &= N(R) \cdot (N(R) \cdot N_{k-1}^2 - 2N_{k-1}) + 1 \equiv \\ &\equiv -N(R) \cdot N_k + 1 \equiv 0 \pmod{p^{2^k}}. \end{aligned}$$

$\square$

ТЕОРЕМА 3. При любом $k \geq 0$ для чисел δ_k , определенных на шагах 14.1 и 14.2 алгоритма, выполняется следующее сравнение:

$$f(\delta_k) \equiv 0 \pmod{p^{2^k}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по k . При $k = 0$ теорема верна по построению δ_0 . Пусть теперь $k \geq 1$, и сравнение выполнено для всех δ_i при $i < k$.

Пусть $A(x), B(x) \in \mathfrak{D}[x]$ – многочлены, построенные на шаге 3 алгоритма.

Согласно предположению индукции, $f(\delta_{k-1}) \equiv 0 \pmod{p^{2^{k-1}}}$.

Выполняется следующая цепочка сравнений по модулю p^{2^k} :

$$\begin{aligned} f(\delta_k) &\equiv f(\delta_{k-1} - f(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})R'N_k) \equiv f\left(\delta_{k-1} - \frac{f(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})R'}{N(R)}\right) \equiv \\ &\equiv f(\delta_{k-1}) - f'(\delta_{k-1})\frac{f(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})R'}{N(R)} = \frac{f(\delta_{k-1})R'}{N(R)}(R - f'(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})) = \\ &= \frac{(f(\delta_{k-1}))^2 R'}{N(R)}A(\delta_{k-1}) \equiv 0 \pmod{p^{2^k}}, \end{aligned}$$

так как по предположению индукции $(f(\delta_{k-1}))^2 \equiv 0 \pmod{(p^{2^{k-1}})^2 = p^{2^k}}$. $\square$

5. Оценка коэффициентов решения уравнения

Пусть $\alpha \in \mathfrak{D}$ – корень уравнения $f(x) = 0$. Число α имеет вид $\alpha = \sum_{i=1}^d a_i \omega_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$. В данном параграфе найдем оценку $\|\alpha\|$ через известные величины.

ЛЕММА 4. Имеет место равенство $|\alpha| \leq \frac{\max_{0 \leq i < m} |\gamma_i|}{|\gamma_m|} + 1$, где γ_i – коэффициенты многочлена $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [13], гл. 9 §39. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Имеет место неравенство

$$\|\alpha\| \leq CU,$$

где

$$C = d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} \lceil \omega'_j \rceil, \quad U = \max_{0 \leq j < m} \lceil \gamma_j \rceil \cdot \lceil \gamma_m \rceil^{d-1} + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Omega' = \{\omega'_1, \dots, \omega'_d\}$ базис, взаимный к Ω . Тогда

$$a_i = \text{Tr}(\alpha \omega'_i) = \sum_{j=1}^d \alpha^{(j)} (\omega'_i)^{(j)}.$$

Следовательно,

$$|a_i| \leq \max_{1 \leq j \leq d} |\alpha^{(j)}| \sum_{j=1}^d |(\omega'_i)^{(j)}| \leq \lceil \alpha \rceil \cdot d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} |(\omega'_i)^{(j)}| = \lceil \alpha \rceil \cdot d \cdot \lceil \omega'_i \rceil \leq \lceil \alpha \rceil \cdot d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} \lceil \omega'_j \rceil.$$

Здесь $(\omega'_i)^{(j)}$, $1 \leq i, j \leq d$ – числа, сопряженные с ω'_i , а $\alpha^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$ – числа, сопряженные к α . Они являются корнями уравнений $\gamma_m^{(j)} x^m + \dots + \gamma_0^{(j)} = 0$, где $\gamma_m^{(j)}, \dots, \gamma_0^{(j)}$ сопряжены с $\gamma_m, \dots, \gamma_0$ соответственно.

Так как $\gamma_m^{(j)}$ – целое алгебраическое число и $\gamma_m^{(j)} \neq 0$, то $N(\gamma_m^{(j)}) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно,

$$1 \leq |N(\gamma_m^{(j)})| = |\gamma_m \gamma_m^{(2)} \dots \gamma_m^{(d)}| \leq |\gamma_m^{(j)}| |\overline{\gamma_m}|^{d-1}.$$

Таким образом, $|\gamma_m^{(j)}| \geq |\overline{\gamma_m}|^{1-d}$.

По лемме 4,

$$|\alpha^{(j)}| \leq \frac{\max_{0 \leq i \leq m} |\gamma_i^{(j)}|}{|\gamma_m^{(j)}|} + 1 \leq \frac{\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil}{|\overline{\gamma_m}|^{1-d}} + 1 \leq \max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil \cdot |\overline{\gamma_m}|^{d-1} + 1.$$

Следовательно,

$$|a_i| \leq (\max_{0 \leq j \leq m} \lceil \gamma_j \rceil \cdot |\overline{\gamma_m}|^{d-1} + 1) \cdot d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} \lceil \omega'_j \rceil \leq CU.$$

□

6. Обоснование корректности работы алгоритма

ТЕОРЕМА 5. Алгоритм находит все решения уравнения $f(x) = 0$ в $\mathfrak{D}$ и возвращает пустое множество, если данное уравнение неразрешимо.

Если $\alpha \in \mathfrak{D}$ – корень многочлена $f(x)$, то на шаге 6 найдется такое число δ_0 , что $f(\delta_0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\delta_0 \equiv \alpha \pmod{p}$ и $\|\delta_0\| \leq \frac{p}{2}$. Поскольку

$$\delta_k \equiv \delta_{k-1} - f(\delta_{k-1})B(\delta_{k-1})R'N_k \pmod{p^{2^k}} \text{ и } f(\delta_{k-1}) \equiv 0 \pmod{p^{2^{k-1}}}$$

при любом $k \geq 1$, то $\delta_V \equiv \delta_0 \equiv \alpha \pmod{p}$.

По теореме 3,

$$f(\alpha) - f(\delta_V) = -f(\delta_V) \equiv 0 \pmod{p^{2^V}}.$$

Левую часть сравнения можно представить в виде

$$f(\alpha) - f(\delta_V) = (\alpha - \delta_V) \sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}).$$

Таким образом, выполняется сравнение

$$(\alpha - \delta_V) \sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}) \equiv 0 \pmod{p^{2^V}}. \quad (1)$$

Разложим (p) в произведение простых идеалов:

$$(p) = \mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_r.$$

Заметим также, что все $\mathcal{P}_i$ различны, поскольку $p \nmid D_\omega$.

Из формулы (1) следует, что

$$(\alpha - \delta_V) \sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i^{2^V}}, \quad (2)$$

где $1 \leq i \leq r$.

Так как $\delta_V \equiv \alpha \pmod{p}$, то верно, что $\delta_V \equiv \alpha \pmod{\mathcal{P}_i}$, $1 \leq i \leq r$, и, таким образом,

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}) \equiv f'(\delta_V) \pmod{\mathcal{P}_i}.$$

По лемме 2, $B(\delta_V) f'(\delta_V) \equiv R \pmod{p}$, и, следовательно,

$$B(\delta_V) f'(\delta_V) \equiv R \pmod{\mathcal{P}_i}, 1 \leq i \leq r. \quad (3)$$

Докажем от противного, что $R \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i}$, $1 \leq i \leq r$. Предположим, что это не так, и $R \in \mathcal{P}_i$. Но тогда и

$$N(R) \in \mathcal{P}_i. \quad (4)$$

Однако $N(R)$ — целое число, откуда и из условия (4) следует, что $p \mid N(R)$. Но это противоречит выбору p . Таким образом, доказано, что $R \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Теперь из выражения (3) следует, что $f'(\delta_V) \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Итак, $\mathcal{P}_i$ — простой идеал в $\mathfrak{D}$. При этом

$$(\alpha - \delta_V) \sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i^{2^V}}$$

и

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i (\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \delta_V + \dots + (\delta_V)^{i-1}) \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_i}.$$

Следовательно, $\alpha \equiv \delta_V \pmod{\mathcal{P}_i^{2^V}}$ для любого индекса $1 \leq i \leq r$, и, таким образом, $\alpha \equiv \delta_V \pmod{p^{2^V}}$.

Оценим модуль коэффициентов разности α и δ_V :

$$\|\alpha - \delta_V\| \leq \|\alpha\| + \|\delta_V\| \leq CU + \frac{p^{2^V}}{2} < p^{2^V}, \text{ так как } V > \log_2(\log_p(2CU)).$$

Но каждый коэффициент $\alpha - \delta_V$ — целое число, делящееся на p^{2^V} . Следовательно, все коэффициенты равны нулю и $\delta_V = \alpha$.

Таким образом, доказано, что каждый корень многочлена $f(x)$, лежащий в кольце $\mathfrak{D}$, содержится среди чисел, найденных на шаге 14.2 алгоритма. $\square$

7. Оценка сложности работы алгоритма

Предположим, что целое алгебраическое число ω и порядок $\mathfrak{D}$ фиксированы. Тогда можно считать, что сложность вычислений, связанных с подсчетом D_ω , D_{spl} , $\phi_R(x)$, R , R' и разложением $\mu_\omega(x)$ на множители в конечном поле, является константой. Также в таком случае можно считать, что сложность арифметических операций в данном порядке поля алгебраических чисел составляет $\mathcal{O}(1)$.

Будем вычислять сложность описанного алгоритма в зависимости от параметров многочлена $f(x) = \sum_{i=0}^m \gamma_i x^i$, а именно, его степени и коэффициентов.

ТЕОРЕМА 6. *Существует хотя бы одно простое число $p > 2$, удовлетворяющее условию*

$$p < \frac{d(2m-1)(\ln m + \frac{1}{2} \ln(2m-1) + \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))}{A},$$

Для которого верно, что $(p, N(R)) = 1$. Здесь A — константа, удовлетворяющая условию

$$\prod_{q < p} q > e^{Ap}, \quad (5)$$

где произведение берется по всем простым числам q , меньшим p (см. [14, §22.2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполняется следующее равенство:

$$N(R) = R \cdot R^{(2)} \cdot \dots \cdot R^{(d)}, \quad (6)$$

где $R^{(i)}$, $2 \leq i \leq d$ — числа, сопряженные с R .

Заметим, что R можно записать в виде

$$R = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} R(f, f'), \quad (7)$$

где $R(f, f')$ — это определитель матрицы размера $(2m-1) \times (2m-1)$, элементы которой ограничены числом $m \cdot \max_{0 \leq i \leq m} |\gamma_i|$.

Таким образом, по неравенству Адамара (см. [15, гл. 8 §7]) и формуле (7), получаем неравенство

$$|R| = |(R(f, f'))| \leq (m \cdot \max_{0 \leq i \leq m} |\gamma_i|)^{2m-1} (2m-1)^{m-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Аналогично можно показать, что верны соотношения

$$|R^{(j)}| \leq (m \cdot \max_{0 \leq i \leq m} |\gamma_i^{(j)}|)^{2m-1} (2m-1)^{m-\frac{1}{2}}, \quad 2 \leq j \leq d, \quad (9)$$

где $\gamma_i^{(j)}$ — числа, сопряженные с γ_i . Теперь из формул (6), (8) и (9) следует, что

$$|N(R)| \leq (m^2(2m-1))^{d(m-\frac{1}{2})} \max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil^{(2m-1)d}. \quad (10)$$

Предположим теперь, что p — наименьшее простое число, удовлетворяющее условию $p \nmid N(R)$. Тогда для него должно выполняться неравенство $\prod_{q < p} q \leq N(R)$. Применим

к вышеуказанному соотношению формулы (10) и (5). Получим следующую цепочку неравенств:

$$e^{Ap} < \prod_{q < p} q \leq N(R) \leq (m^2(2m-1))^{d(m-\frac{1}{2})} \max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil^{(2m-1)d},$$

откуда следует, что

$$p < \frac{d(2m-1)(\ln m + \frac{1}{2} \ln(2m-1) + \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))}{A}.$$

□

ТЕОРЕМА 7. *Наихудшая сложность алгоритма в зависимости от параметров многочлена $f(x)$ составляет*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + \\ + m^d \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)) \end{aligned}$$

арифметических операций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложность шага 2 алгоритма равна количеству операций, требуемых для вычисления определителя матрицы размера $(2m-1) \times (2m-1)$ и поэтому равна

$$\mathcal{O}(m^3). \quad (11)$$

Для шага 3 требуется вычислить m и $m-1$ определителей такого же вида, откуда сложность шага 3 получается равной

$$\mathcal{O}(m^4). \quad (12)$$

На шаге 6 требуется для каждого $p_i < W$, где W — граница, зависящая только от исходного порядка, раскладывать на множители многочлены степени d . Следовательно, временная сложность шага 6 не зависит от многочлена $f(x)$.

На шаге 7 нужно, во-первых, найти такое простое число $p > W$, что $p \nmid N(R)$ и $p \nmid D_\omega$. На это требуется

$$\mathcal{O}(\pi(p) - \pi(W))$$

операций. Из теоремы 6 и оценок Чебышева следует, что на поиск числа p нужно не больше, чем

$$\mathcal{O}\left(\frac{C_3}{\ln C_3}\right), \quad C_3 = \frac{d(2m-1)(\ln m + \frac{1}{2} \ln(2m-1) + \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))}{A} \quad (13)$$

арифметических выражений. Выражение (13) можно преобразовать с учетом того, что, по предположению, порядок $\mathfrak{D}$ фиксирован. Получим следующее:

$$\mathcal{O}\left(\frac{C_3}{\ln C_3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m \ln m + m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)}{\ln m + \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)}\right). \quad (14)$$

Во-вторых, на шаге 7 требуется разложить на неприводимые множители в конечном поле $\mathbb{F}_p$ многочлен $\mu_\omega(x)(p)$, причем $\deg(\mu_\omega(x)(p)) = d$. Здесь p — простое число, удовлетворяющее неравенству $p < C_3$. Если пользоваться алгоритмом Берлекэмпа, для этого требуется не более, чем

$$\mathcal{O}(d^3 + d^2 p)$$

арифметических операций. Из теоремы 6 теперь можно получить, что на вторую часть шага 7 нужно не более

$$\mathcal{O}(m \ln m + m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)) \quad (15)$$

операций.

На шаге 8 требуется K раз ($K \leq d$) решить уравнение $f(x) = 0$ в полях вида $\mathbb{F}_{p^l}$, где $l \leq d$. На выполнение вышеуказанных действий требуется

$$\mathcal{O}(m^2 p \ln p), p < C_3$$

арифметических операций (см. [6, гл. 3 §3]). С учетом формулы (13) можно заключить, что сложность шага 12 составляет

$$\mathcal{O}(m^3 (\ln m)^2 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)). \quad (16)$$

Поскольку по условию минимальный многочлен $\mu_\omega(x)$ фиксирован, то и на нахождение каждого решения системы T_k по китайской теореме об остатках на шаге 9 потребуются фиксированное время. Поскольку количество решений каждого уравнения на шаге 8 не превосходит m , то всего таких систем требуется решить не более чем m^K , где K — количество неприводимых сомножителей при разложении многочлена $\mu_\omega(x)(p)$ на множители в $\mathbb{F}_p$, $K \leq d$. Соответственно, в наихудшем случае сложность шага 9 составляет

$$\mathcal{O}(m^d) \quad (17)$$

арифметических операций.

Для оценки числа V , выбираемого на шаге 11, заметим, что из того, что $p > 2$, следует, что

$$V \leq 1 + \lfloor \log_2 \log_3(2CU) \rfloor. \quad (18)$$

Для выполнения шага 12 требуется применить обобщенный алгоритм Евклида для чисел $N(R)$ и p . Таким образом, сложность шага 12 составляет

$$\mathcal{O}(\ln p) = \mathcal{O}(\ln m + \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)) \quad (19)$$

арифметических операций.

Шаги 13 и 14 выполняются за $\mathcal{O}(Vm^d)$ операций. Из формулы (18) получаем, что

$$\mathcal{O}(Vm^d) = \mathcal{O}(m^d \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil)) \quad (20)$$

операций.

Объединим выражения (11), (12), (14), (15), (16), (17), (19), (20). Получим, что суммарная сложность всего алгоритма составляет

$$\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^d \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))$$

арифметических операций. $\square$

8. Заключение

Заметим, что если алгоритм попал в случай, описанный в замечании 2, то для решения сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ в $\mathfrak{D}$ достаточно будет решить уравнение $f(x) = 0$ в поле $\mathbb{F}_{p^d}$. В таком случае сложность алгоритма будет составлять

$$\mathcal{O}(m^4 + m^3 \ln m \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) + m^3 \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil) \ln \ln(\max_{0 \leq i \leq m} \lceil \gamma_i \rceil))$$

арифметических операций.

Таким образом, описанный алгоритм имеет полиномиальную сложность и может представлять практическую значимость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hensel K. Neue Grundlagen der Arithmetik // J. Reine Angew. Math. 1904. Vol. 127. P. 51–84.
2. Lenstra A. K., Lenstra H. W., Lovász L. Factoring Polynomials with Rational Coefficients // Mathematische Annalen. 1982. Vol. 261. P. 515–534.
3. Dixon J. D. Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions // Numerische Mathematik. 1982. Vol. 40. P. 137–141.
4. Зеленова М. Е. Решение полиномиальных уравнений в поле алгебраических чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2014. № 1. С. 25–29.
5. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968. 564 с.
6. Герман О. Н., Нестеренко Ю. В. Теоретико-числовые методы в криптографии. М.: Академия, 2012. 272 с.
7. Постников М. М. Теория Галуа. М.: ГИФМЛ, 1963. 220 с.
8. Cox D. A. Galois Theory. Hoboken: Wiley, 2012. 602 p.
9. Bach E., Shallit J. Algorithmic Number Theory, vol. I: Efficient Algorithms. Cambridge, London: The MIT Press, 1996. 496 p.
10. Gallagher P. X. The Large Sieve and Probabilistic Galois Theory // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1973. Vol. 24. P. 91–101.

11. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972. 496 с.
12. ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 649 с.
13. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
14. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Oxford University Press, 1985. 438 p.
15. Зорич В. А. Математический анализ, т. 1. М: ФАЗИС, 1997. 554 с.

REFERENCES

1. Hensel K. 1904, "Neue Grundlagen der Arithmetik" , *J. Reine Angew. Math.*, vol. 127, pp. 51–84.
2. Lenstra A. K., Lenstra H. W. & Lovász L. 1982, "Factoring Polynomials with Rational Coefficients" , *Mathematische Annalen*, vol. 261, pp. 515–534.
3. Dixon J. D. 1982, "Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions" , *Numerische Mathematik*, vol. 40, pp. 137–141.
4. Zelenova M. E. 2014, "Solution of Polynomial Equations in the Field of Algebraic Numbers" , *Moscow University Mathematics Bulletin*, no. 1, pp. 25–29.
5. Lang S. 1968, "Algebra" [Algebra], *Mir, Moscow*, 564 p.
6. German O. N. & Nesterenko Yu. V. 2012, "Teoretiko–chislovye metody v kriptografii" [Number Theoretic Algorithms in Cryptography], *Akademia, Moscow*, 272 p.
7. Postnikov M. M. 1963, "Teoriya Galua" [Galois Theory], *GIFML, Moscow*, 220 p.
8. Cox D. A. 2012, "Galois Theory" , *Wiley, Hoboken*, 602 p.
9. Bach E. & Shallit J. 1996, "Algorithmic Number Theory, vol. I: Efficient Algorithms" , *The MIT Press, Cambridge, London*. 496 p.
10. Gallagher P. X. 1973, "The Large Sieve and Probabilistic Galois Theory" , *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 24, pp. 91–101.
11. Borevich Z. I. & Shafarevich I. R. 1972, "Teoriya chisel" [Number Theory], *Nauka, Moscow*, 496 p.
12. van der Waerden B. L. 1976, "Algebra" [Algebra], *Nauka, Moscow*, 649 p.
13. Kurosh A. G. 1965, "Kurs vyshej algebry" [Course of Higher Algebra], *Nauka, Moscow*, 431 p.
14. Hardy G. H. & Wright E. M. 1985, "An Introduction to the Theory of Numbers" , *Oxford University Press, Oxford*, 438 p.

15. Zorich V. A. 1997, "Matematicheskij analiz, t. 1" [Mathematical Analysis I], *FAZIS, Moscow*, 554 p.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Получено 20.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 519.174

О РЕАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ
ГРАФАМИ РАССТОЯНИЙ И ДИАМЕТРОВ В
ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹

А. В. Крот, А. М. Райгородский (г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассматривается задача об отыскании пороговых вероятностей для реализации случайного графа геометрическим графом в пространстве $\mathbb{R}^d$. В случае графов диаметров доказывается асимптотика для пороговой вероятности на плоскости, а также точное по порядку выражение для $d \geq 3$.

Ключевые слова: дистанционный граф, граф диаметров, случайный граф.

Библиография: 18 названий.

ON EMBEDDING RANDOM GRAPHS INTO
DISTANCE GRAPHS AND GRAPHS OF
DIAMETERS IN EUCLIDEAN SPACES²

A. V. Krot, A. M. Raigorodskii (Moscow)

Abstract

In this paper we consider the problem of finding the probability threshold for the realization of a random graph by geometric graphs in the space $\mathbb{R}^d$. In the case of graphs of diameters we prove asymptotic behavior for the threshold probability on the plane, as well as the exact expression in the case $d \geq 3$.

Keywords: distance graph, diameter graph, random graph.

Bibliography: 18 titles.

¹Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 15-01-03530 и гранта НШ-2964.2014.1 поддержки ведущих научных школ.

²This work was supported by RFBR grant N 15-01-03530 and grant NSH-2964.2014.1 for support of leading scientific schools.

1. Введение

Настоящая статья посвящена одной задаче, лежащей на стыке комбинаторной геометрии и теории случайных графов. Напомним несколько основных определений. *Графом расстояний в пространстве $\mathbb{R}^d$* называется любой граф $G = (V, E)$, у которого $V \subset \mathbb{R}^d$, а

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\},$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — евклидово расстояние между точками. В то же время *графом диаметров для множества $V \subset \mathbb{R}^d$* называется граф $G = (V, E)$, у которого

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \text{diam } V\},$$

где $\text{diam } V = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Если множество V конечно, то можно сказать, что граф диаметров — это граф максимальных расстояний.

Графы расстояний возникают в связи с классической проблемой Нелсона–Хадви-гера о хроматическом числе пространства (см. [1]–[4]), а изучение графов диаметров мотивировано другой классической проблемой комбинаторной геометрии — проблемой Борсука о разбиении множеств в пространстве на части меньшего диаметра (см. [2]–[5]).

В дальнейшем нас будет интересовать, насколько часто в некотором смысле встречаются графы расстояний или графы диаметров среди абстрактных графов на n вершинах. Пусть $G(n, p)$ — случайный граф в биномиальной модели Эрдеша–Реньи, т.е. $G(n, p)$ — это случайный элемент со значениями во множестве всех графов на данных n вершинах без петель, кратных ребер и ориентации и с распределением $\mathbb{P}(G(n, p) = (\{1, \dots, n\}, E)) = p^{|E|}(1 - p)^{C_n^2 - |E|}$ (см. [6]).

Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого $d \in \mathbb{N}$ две “пороговых” вероятности:

$$p_{\text{dist}}^*(n, d) = \sup \{p \in [0, 1] : \mathbb{P}(G(n, p) \text{ изоморфен} \\ \text{некоторому графу расстояний в } \mathbb{R}^d) > \frac{1}{2}\},$$

$$p_{\text{diam}}^*(n, d) = \sup \{p \in [0, 1] : \mathbb{P}(G(n, p) \text{ изоморфен} \\ \text{некоторому графу диаметров в } \mathbb{R}^d) > \frac{1}{2}\}.$$

В следующем разделе мы приведем формулировки результатов — как ранее известных, так и новых.

2. Формулировки результатов

Величина $p_{\text{dist}}^*(n, d)$ была исследована ранее. Сейчас известно (см. [7]), что

$$p_{\text{dist}}^*(n, 1) \sim \frac{\sqrt[3]{6 \ln 2}}{n^{4/3}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и что для любого $d \geq 2$ имеют место неравенства

$$(1 + o(1)) \frac{1}{n} \leq p_{\text{dist}}^*(n, d) \leq (1 + o(1)) \frac{c(d)}{n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где, например,

$$c(2) = 14.797 \dots, \quad c(3) = 55.272 \dots, \quad c(4) = 164.528 \dots, \quad c(5) = 504.285 \dots,$$

$$c(6) = 1365.170 \dots, \quad c(7) = 3624.758 \dots, \quad c(8) = 8675.785 \dots$$

Для графов диаметров результатов прежде не было. Здесь случай $d = 1$ тривиален, т.к. в его рамках вовсе нет графов диаметров, которые имели бы более двух вершин. При $d = 2$ нам удалось получить асимптотику пороговой вероятности.

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$p_{\text{diam}}^*(n, 2) \sim \frac{\sqrt[6]{840 \ln 2}}{n^{7/6}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Этот результат внешне напоминает упомянутый выше результат о графах расстояний. Однако размерность на 1 больше, и метод доказательства (см. раздел 3) иной. Любопытно то, что при $d \geq 3$ также удастся получить утверждение, аналогичное указанному выше утверждению о графах расстояний в размерностях $d \geq 2$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $d \geq 3$ существуют числа $c_1(d), c_2(d)$, с которыми*

$$\frac{c_1(d)}{n} \leq p_{\text{diam}}^*(n, d) \leq \frac{c_2(d)}{n}.$$

Отметим, что существуют и некоторые другие вероятностные постановки задач о реализации графов в пространствах (см. [8]–[12]). В следующих двух разделах мы опишем доказательства теорем 1 и 2.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 распадается на несколько шагов, каждый из которых состоит в обосновании некоей леммы. Прежде всего обозначим H дерево на семи вершинах $1, 2, \dots, 7$ с ребрами $(1, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 5), (1, 6), (6, 7)$ (см. рис. 1).

ЛЕММА 1. *Не существует графа диаметров на плоскости, изоморфного дереву H .*

Данное утверждение доказывается, например, в [13]. Далее,

ЛЕММА 2. *Пусть $p = \frac{c}{n^{7/6}}$, где $c > \sqrt[6]{840 \ln 2}$. Тогда существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ случайный граф $G(n, p)$ с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, содержит дерево H .*

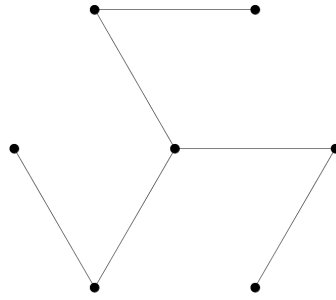


Рис. 1: Дерево на семи вершинах, не изоморфное никакому графу диаметров на плоскости.

Это прямое следствие из теоремы, которую можно найти в [6]:

ТЕОРЕМА 3. Пусть H — дерево с k вершинами и a автоморфизмами, $p = \frac{c}{n^{k/(k-1)}}$, где $c = \text{const}$, X_n — количество копий H в $G(n, p)$. Тогда X_n имеет асимптотическое распределение Пуассона с параметром $\lambda = \frac{c^{k-1}}{a}$.

В самом деле, дерево H имеет $k = 7$ вершин и у него $a = 840$ автоморфизмов. Тогда при $c > \sqrt[6]{840 \ln 2}$ имеем

$$\lambda = \frac{c^{k-1}}{a} > \ln 2,$$

откуда

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ содержит дерево } H) = \mathbb{P}(X_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) \geq 1 - e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство выполнено при больших n .

Пусть, наконец, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Обозначим K_ε объединение двух кругов радиуса ε на плоскости, расстояние между центрами которых равно 1. Пусть также W — множество всех деревьев на не более чем семи вершинах, за исключением дерева из одной вершины и дерева H .

ЛЕММА 3. Для каждого ε и каждого дерева из множества W найдется изоморфный ему граф диаметров на плоскости, вершины которого принадлежат множеству K_ε .

Для доказательства этого утверждения достаточно изобразить каждое из деревьев на плоскости так, как показано на рис. 2.—5.

Дальнейшее доказательство основной теоремы не представляет труда. Действительно, при $p = \frac{c}{n^{7/6}}$ случайный граф $G(n, p)$ с асимптотической вероятностью 1 является лесом, каждая компонента которого имеет размер не более семи. Из лемм 1 и 2 следует, что при $p = \frac{c}{n^{7/6}}$, где $c > \sqrt[6]{840 \ln 2}$, и достаточно больших n граф $G(n, p)$ содержит дерево H и, тем самым, не может быть изоморфен никакому графу диаметров на плоскости.

В случае же, когда $c < \sqrt[6]{840 \ln 2}$ и, значит, $G(n, p)$ с вероятностью, большей половины, не содержит дерево H , остается показать, что лес, каждая компонента которого

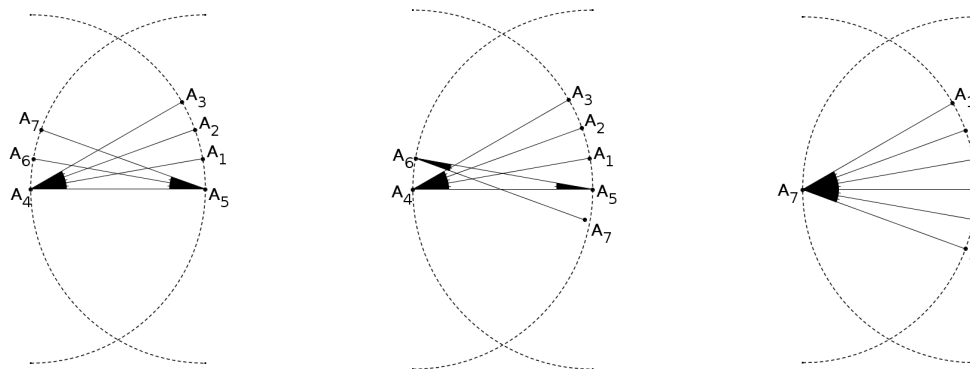


Рис. 2: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

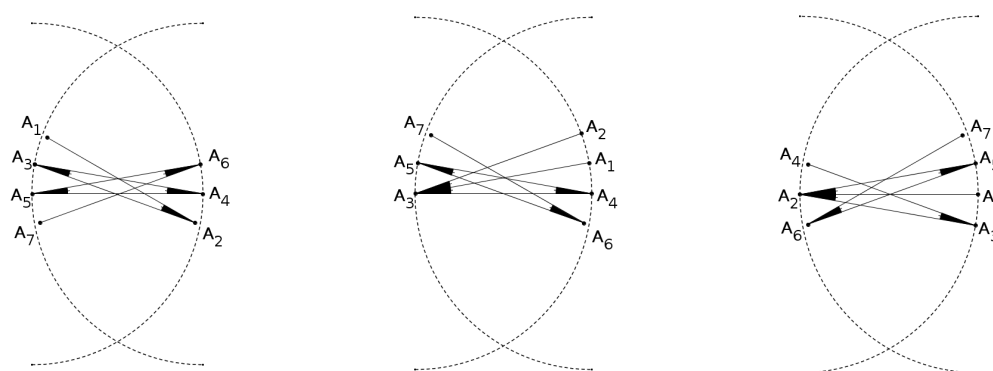


Рис. 3: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

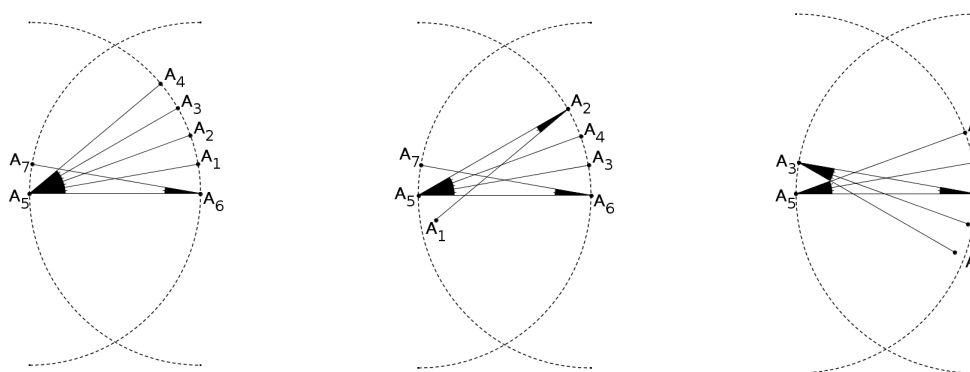


Рис. 4: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

либо изолированная вершина, либо дерево из W , изоморфен некоторому графу диаметров на плоскости.

Действительно, воспользовавшись результатом леммы 3, получаем, что каждое из деревьев множества W изоморфно некоторому графу диаметров на плоскости, верши-

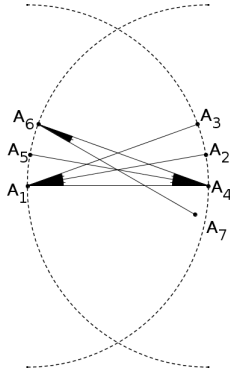


Рис. 5: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

ны которого принадлежат соответствующему множеству K_ε . Разместив полученные множества K_ε так, как показано на рис. 6, и, добавив изолированные вершины, получим требуемую реализацию.

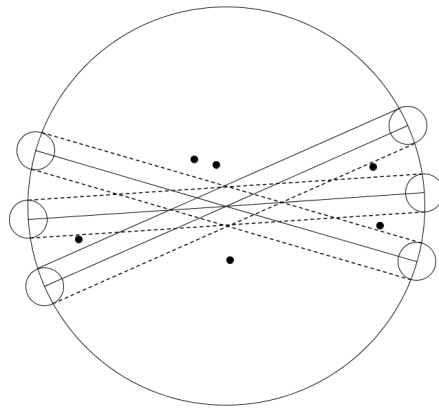


Рис. 6: Реализация рассматриваемого леса графом диаметров на плоскости.

4. Доказательство теоремы 2

Здесь так же, как и в случае теоремы 1, используются несколько вспомогательных утверждений, которые мы перечислим ниже. Мы назовем их не леммами, а фактами, т.к. каждое из них — известная теорема.

Факт 1. При $p = \frac{c}{n}$, где $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$, и достаточно больших n случайный граф $G(n, p)$ с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, является лесом.

Это простое упражнение по теории случайных графов (см., например, [14]). Дей-

ствительно, математическое ожидание количества циклов равно

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=3}^{\infty} C_n^k \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c^k}{2k} \leq \sum_{k=3}^{\infty} c^k = \frac{c^3}{1-c}.$$

Далее, используя неравенство Маркова, получаем $\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}X \leq \frac{c^3}{1-c}$. Последнее выражение меньше $\frac{1}{2}$ при $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$. Стоит отметить, что отыскание наилучшей константы — сложная задача.

Факт 2. *Всякий лес изоморфен некоторому графу диаметров в $\mathbb{R}^d$ при $d \geq 3$.*

Доказательство данного факта использует нетривиальную теорему, доказанную в [15]:

ТЕОРЕМА 4. *Множество вершин любого дерева T можно так вложить в пространство $\mathbb{R}^3$, что расстояние между любыми двумя смежными вершинами равно 1, а расстояние между не смежными вершинами меньше 1.*

Легко понять, что данное утверждение верно и в случае леса. Действительно, рассмотрим два произвольных дерева. Соединим эти два дерева в одно, добавляя цепь O_1VO_2 длины два между ними. Такое дерево, согласно теореме 4, реализуется графом диаметров в $\mathbb{R}^3$. Удалим вершину V вместе с исходящими из нее ребрами из геометрической реализации получившегося дерева. Останется геометрическая реализация исходного леса. При этом новые ребра не появятся. Последовательно объединяя таким образом деревья леса, получим необходимую реализацию.

Из фактов 1 и 2 следует, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$, и достаточно больших n случайный граф $G(n, p)$ является лесом (факт 1), который изоморфен некоторому графу диаметров в $\mathbb{R}^d$ при $d \geq 3$ (факт 2), т.е. верна нижняя оценка величины $p_{\text{diam}}^*(n, d)$.

Напомним, что *хроматическим числом* графа $G = (V, E)$ называется минимальное количество $\chi(G)$ цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы среди вершин одного цвета не было ребер. Далее, каждое множество вершин, свободное от ребер, называется *независимым*, а максимум мощности независимого множества — это *число независимости* $\alpha(G)$ графа. Очевидно, что $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Обозначим $\chi(d)$ максимальное значение хроматического числа графа диаметров в $\mathbb{R}^d$.

Факт 3. *При любом d значение $\chi(d)$ конечно. Более того, известно, что*

$$\chi(d) \leq \min \left(5d \cdot \sqrt{d} \cdot (4 + \ln d) \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{d/2}, 2^{d-1} + 1 \right).$$

Первая из двух оценок принадлежит Шрамму (см. [16]); близкое утверждение доказано также Бургейном и Линденштрауссом в [17]. Вторая из двух оценок установлена Лассаком в [18].

С помощью неравенства Маркова легко показать, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c > 2\chi(d) \cdot (1 + \ln(\chi(d)))$, и достаточно больших n хроматическое число случайного графа $G(n, p)$

с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, больше, чем $\chi(d)$. Из этого с учетом факта 3 вытекает верхняя оценка величины $p_{\text{diam}}^*(n, d)$.

Действительно, обозначим X количество независимых множеств размера $k = \left\lceil \frac{n}{\chi(d)} \right\rceil$ в случайном графе $G(n, p)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi(G(n, p)) > \chi(d)) &\geq \mathbb{P}\left(\alpha(G(n, p)) < \frac{n}{\chi(d)}\right) = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\alpha(G(n, p)) \geq \frac{n}{\chi(d)}\right) \geq 1 - \mathbb{P}(X \geq 1) \geq 1 - \mathbb{E}X. \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= C_n^k \cdot (1-p)^{C_k^2} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-p \cdot \frac{k(k-1)}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \cdot e^{-p \cdot \frac{k(k-1)}{2}} \leq e^{\frac{\ln(\chi(d))+1}{\chi(d)} \cdot n - (1+o(1)) \frac{c}{2(\chi(d))^2} \cdot n}. \end{aligned}$$

Ясно, что при $c > 2\chi(d) \cdot (1 + \ln(\chi(d)))$ последнее выражение стремится к нулю с ростом n . Таким образом, $\mathbb{P}(\chi(G(n, p)) > \chi(d)) > \frac{1}{2}$, что и требовалось.

5. Заключение

В настоящей работе мы изучили проблему реализации графов графами расстояний и диаметров в евклидовых пространствах.

Основным результатом является отыскание точных по порядку оценок для пороговых вероятностей вложимости случайного графа в соответствующих геометрический граф в пространстве. Более того, для случая плоскости и графов диаметров на ней найдена асимптотика пороговой вероятности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. A. Székely Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. 2002. Vol. 11. P. 649 – 666.
2. A. M. Raigorodskii Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 625. P. 93 – 109.
3. A. M. Raigorodskii Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. 2013. P. 429 – 460.
4. А. М. Райгородский Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107 – 146.
5. V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan Excursions into combinatorial geometry. Universitext, Springer, Berlin, 1997.

6. B. Bollobás Random Graphs. Cambridge Univ. Press, Second Edition. 2001.
7. А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 51. С. 64 – 73.
8. А. М. Райгородский, С. В. Нагаева О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности // Доклады РАН. 2009. Т. 424, № 3. С. 315 – 317.
9. А. М. Райгородский Об одной серии задач рамсеевского типа в комбинаторной геометрии // Доклады РАН. 2007. Т. 413, № 2. С. 171 – 173.
10. А. Б. Купавский, М. В. Титова Дистанционные числа Рамсея // Доклады РАН. 2013. Т. 449, № 3. С. 267 – 270.
11. N. Alon, A. Kupavskii Two notions of unit distance graphs // J. Comb. Theory, Ser. A. 2014. Vol. 125. P. 1 – 17.
12. A. B. Kupavskiy, A. M. Raigorodskii, M. V. Titova New bounds for the distance Ramsey number // Discrete Mathematics. 2013. Vol. 313, № 22. P. 2566 – 2574.
13. P. Erdős On sets of distances of n points // Amer. Math. Monthly. 1946. Vol. 53. P. 248 – 250.
14. А. М. Райгородский Модели случайных графов. М.: МЦНМО. 2011.
15. H. Maehara, J. Reiterman, V. Rödl, E. Šiňajová Embedding of trees in Euclidean spaces // Graphs and Combinatorics. 1988. Vol. 4. P. 43 – 47.
16. O. Schramm Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. Vol. 35. P. 180 – 189.
17. J. Bourgain, J. Lindenstrauss On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Lecture Notes in Math., 1469, Springer-Verlag, Berlin, 1991. P. 138 – 144.
18. M. Lassak An estimate concerning Borsuk's partition problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1982. Vol. 30. P. 449 – 451.

REFERENCES

1. Székely, L. A. 2002, "Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems", *Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer*, vol. 11, pp. 649 – 666.
2. Raigorodskii, A. M. 2014, "Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters", *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics*, vol. 625, pp. 93 – 109.

3. Raigorodskii, A. M. 2013, "Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters", *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, J. Pach ed., Springer, P. 429 – 460.
4. Raigorodskii, A. M. 2001, "The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 56, № 1, pp. 107 – 146; English transl. in *Russian Math. Surveys*, vol. 56, № 1, pp. 103 – 139.
5. Boltyanski, V. G., Martini, H. & Soltan, P. S. 1997, "Excursions into combinatorial geometry", *Universitext*, Springer, Berlin.
6. Bollobás, B. 2001, "Random Graphs", *Cambridge Univ. Press*, Second Edition.
7. Kokotkin, A. A. & Raigorodskii, A. M. 2013, "On large subgraphs of a distance graph having small chromatic numbers", *Contemp Math. Fundam. Directions*, vol. 51, pp. 64 – 73; English transl. in preparation.
8. Raigorodskii, A. M. & Nagaeva, S. V. 2009, "On the realization of random graphs as distance graphs in spaces of fixed dimension", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 424, № 3, pp. 315 – 317; English transl. in *Doklady Math.*, vol. 79, № 1, pp. 63 – 65.
9. Raigorodskii, A. M. 2007, "On a series of Ramsey-type problems in combinatorial geometry", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 413, № 2, pp. 171 – 173; English transl. in *Doklady Math.*, vol. 75, № 2, pp. 221 – 223.
10. Kupavskii, A. B. & Titova, M. V. 2013, "Distance Ramsey Numbers", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 449, № 3, pp. 267 – 270. English transl. in *Doklady Math.*
11. Alon, N. & Kupavskii, A. 2014, "Two notions of unit distance graphs", *J. Comb. Theory, Ser. A.*, vol. 125, pp. 1 – 17.
12. Kupavskiy, A. B., Raigorodskii, A. M. & Titova, M. V. 2013, "New bounds for the distance Ramsey number", *Discrete Mathematics*, vol. 313, № 22, pp. 2566 – 2574.
13. Erdős, P. 1946, "On sets of distances of n points", *Amer. Math. Monthly*, vol. 53, pp. 248 – 250.
14. Raigorodskii, A. M. 2011, "Models of random graphs", *Moscow Centre for Continuous Mathematical Education (MCCME)*, Moscow, Russia, (book in Russian).
15. Maehara, H., Reiterman, J., Rödl, V. & Šiňajová, E. 1988, "Embedding of trees in Euclidean spaces", *Graphs and Combinatorics*, vol. 4, pp. 43 – 47.
16. Schramm, O. 1988, "Illuminating sets of constant width", *Mathematika*, vol. 35, pp. 180 – 189.
17. Bourgain, J. & Lindenstrauss, J. 1991, "On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter", *Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.)*, *Lecture Notes in Math.*, 1469, Springer-Verlag, Berlin, pp. 138 – 144.
18. Lassak, M. 1982, "An estimate concerning Borsuk's partition problem", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, vol. 30, pp. 449 – 451.

Московский физико-технический институт,

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Поступило 30.04.2015

УДК 511.3

К ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ L -ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев (г. Саратов)
kuznetsovvn@info.sgu.ru, vladimir.matweev@gmail.com

Аннотация

В случае L -функций Дирихле с числовыми характеристиками разработан алгоритм определения нетривиальных нулей таких L -функций, в основе которого лежит построение полиномов Дирихле, приближающих L -функцию в любом прямоугольнике, расположенном в критической полосе, с показательной скоростью.

Для L -функций Дирихле числовых полей последний результат не имеет места, так как в противном случае степенной ряд с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле, определённый L -функцией, сходил бы к функции, голоморфной в точке 1. Но известно, что такой степенной ряд в случае числового поля, отличного от поля рациональных чисел, аналитически непродолжим за границу сходимости.

В связи с этим требуется разработать новую вычислительную схему определения нетривиальных нулей L -функций числовых полей. Изучению этой задачи и посвящена данная работа.

Показано, что существует последовательность полиномов Дирихле, приближающих в любом прямоугольнике, расположенном в критической полосе, L -функцию Дирихле числового поля со скоростью, превосходящей любую степенную функцию. В случае разложения L -функции Дирихле числового поля в произведение классических L -функций Дирихле указана явная конструкция аппроксимирующих полиномов Дирихле, нули которых в заданном прямоугольнике совпадают с нулями L -функции. Также обсуждаются вопросы, связанные с явной конструкцией таких полиномов Дирихле в случае произвольных L -функций Дирихле.

Ключевые слова: характеры Дирихле, L -функции Дирихле числовых полей, нетривиальные нули L -функций

Библиография: 11 названий.

ON A PROBLEM OF FINDING NON-TRIVIAL ZEROS OF DIRICHLET L -FUNCTIONS IN NUMBER FIELDS

V. N. Kuznetsov, V. A. Matveev
kuznetsovvn@info.sgu.ru, vladimir.matweev@gmail.com

Abstract

There is a numeric algorithm for finding non-trivial zeros of regular Dirichlet L -functions. This algorithm is based on a construction of Dirichlet polynomials which approximate these L -functions in any rectangle in the critical strip with exponential speed.

This result does not hold for Dirichlet L -functions in number fields, because if it did, a power series with the same coefficients as the Dirichlet series defining the L -function would converge to a function which is holomorphic at 1, however, it is known that such power series in case of a number field different from the field of rational numbers can't be continued analytically past its convergence boundary.

Consequently, we need to develop a new numerical algorithm for finding non-trivial zeros of Dirichlet L -functions in number fields. This problem is discussed in this paper.

We show that there exists a sequence of Dirichlet polynomials which approximate a Dirichlet L -function in a number field faster than any power function in any rectangle inside the critical strip. We also provide an explicit construction of approximating Dirichlet polynomials, whose zeros coincide with those of a Dirichlet L -function in the specified rectangle, for an L -function, if it can be split into a product of classical L -functions. Additionally we discuss some questions related to the construction of such polynomials for arbitrary Dirichlet L -functions.

Keywords: Dirichlet characters, Dirichlet L -functions in number fields, non-trivial zeros of L -functions

Bibliography: 11 titles.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = k$, $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля $\mathbb{K}$, χ — характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$, заданный на полугруппе целых идеалов кольца $\mathfrak{O}$. Рассмотрим L -функция Дирихле поля $\mathbb{K}$:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где произведение берётся по всем простым идеалам кольца $\mathfrak{O}$.

Известно [1, 2, 3], что L -функция (1) в случае неглавного характера χ определяет целую функцию, нетривиальные нули которой лежат в критической полосе $0 < \sigma < 1$. При этом имеет место расширенная гипотеза Римана о том, что такие нули располагаются на критической прямой. Известные плотностные теоремы [4] дают картину распределения нулей L -функции Дирихле (1) в критической полосе.

В работах [5, 6, 7] была разработана численная схема определения нетривиальных нулей классических L -функций Дирихле, т.е. L -функций с числовыми характерами.

В основе этой вычислительной схемы лежат результаты о взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и поведением соответствующих (с теми же коэффициентами) степенных рядов в окрестности единицы, полученные в работе [8].

Алгоритм определения нулей L -функции Дирихле в классическом случае заключается в следующем.

Пусть соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n$$

определяет функцию, голоморфную в точках $z = \pm 1$. Рассмотрим разложение $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x)$$

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} x^k$ — частичные суммы этого разложения. В работе [5] показано, что соответствующие полиномы Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^{(n)}}{k^s},$$

приближают L -функцию в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$ с показательной скоростью, то есть

$$\|L(s, \chi) - Q_n(s)\|_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right),$$

где величина $\rho > 1$ определяется модулем характера χ .

Там же ([5], [6]) показано, что в прямоугольнике D_T высоты T нули L -функции $L(s, \chi)$ являются нулями полинома Q_n , где $n = \left\lceil \frac{T}{\ln \rho} \right\rceil$. В частности, если модуль характера χ не превосходит 12, то $n = [2T] + 1$. В основе этого результата лежит информация о нулях почти периодических функций конечного класса (см. [6]), каковыми являются полиномы Дирихле, а также тот факт, что приближение L -функций полиномами Дирихле в прямоугольнике D_T осуществляется с показательной скоростью.

Как показано в [6], [9], этот алгоритм построения аппроксимирующих полиномов и его численная реализация не только говорят в пользу расширенной гипотезы Римана для классических L -функций, но и позволяют получать отличным от известного способом плотностные теоремы для нулей классических L -функций Дирихле.

В связи с этим представляет интерес разработать алгоритм, позволяющий определять нули L -функций Дирихле числовых полей, лежащих в прямоугольнике D_T высоты T .

Отметим, что в работе [10] было показано, что в случае поля $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$ степенной ряд, соответствующий L -функции (1):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

определяет функцию, аналитически непродолжимую за границу единичного круга, и в этом случае полиномы Дирихле $Q_n(s)$, определяемые частичными суммами разложения функции $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева, не могут приближать L -функцию (1) с показательной скоростью. Этот факт не позволяет перенести численную схему определения нулей в классическом случае на случай произвольного числового поля.

В данной работе исследуются вопросы, связанные с разработкой такого алгоритма, высказываются предположения в этом направлении и приводится их обоснование.

2. Аппроксимационные теоремы для L -функций Дирихле числовых полей

Рассмотрим степенной ряд (2):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Так как L -функция (1) определяет целую функцию, то, как показано в [11], у функции $g(z)$ в точке $z = 1$ существуют конечные радиальные производные вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n.$$

В этом случае известно [12, 13], что существует последовательность алгебраических полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} x^k \quad (3)$$

приближающих функцию $g(x)$ в пространстве $C[0, 1]$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.

$$\|g(x) - P_n(x)\|_{C[0,1]} = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \quad (4)$$

при любом натуральном m .

Обозначим через $Q_n(s)$ последовательность полиномов Дирихле, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами алгебраических полиномов вида (3).

При данных обозначениях имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ приближает ряд Дирихле (1) в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T$ с скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.*

$$\|L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_n(s)\|_{D_T} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу преобразования Меллина [14] ряды (1) и (2) и полиномы $P_n(x)$ и $Q_n(s)$ связаны следующими соотношениями:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 0,$$

где $g(e^{-x}) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nx}$, $\Gamma(s)$ — Γ -функция Эйлера, и

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 0.$$

Отсюда при $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$ получаем оценку вида

$$\begin{aligned} |L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_n(s)| &\leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_0^n |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx + \\ &+ \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_n^\infty e^{-\lambda x} |e^{\lambda x} (g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| x^{\sigma-1} dx, \end{aligned}$$

где $0 < \lambda < 1$.

Оценим первый интеграл:

$$\int_0^n |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \int_0^n x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \frac{n^\sigma}{\sigma_0} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Для второго интеграла для $x \in [n, \infty)$ имеем:

$$|e^{\lambda x} (g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| = |e^{(\lambda-1)x} (\tilde{g}(e^{-x}) - \tilde{P}_n(e^{-x}))| \leq C e^{(\lambda-1)x}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на отрезке $[n, \infty)$ выполняется оценка $\tilde{g}(e^{-x}) - \tilde{P}_n(e^{-x}) = O(1)$. Многократное применение формулы интегрирования по частям даёт оценку вида:

$$\begin{aligned} \int_n^\infty e^{-\lambda x} x^{\sigma-1} dx &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} + \frac{\lambda e^{-\lambda n} n^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)} + \dots = \\ &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} \left(1 + \frac{\lambda n}{\sigma+1} + \dots + \frac{(\lambda n)^k}{(\sigma+1) \dots (\sigma+k)} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} e^{\lambda n} = \frac{n^\sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_n^\infty e^{-\lambda x} |e^{\lambda x} (g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| x^{\sigma-1} dx \leq C e^{(\lambda-1)n} \frac{n^\sigma}{\sigma} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

при любом m .

Таким образом, утверждение теоремы 1 полностью доказано. $\square$

Отметим, что теорема 1 не позволяет указать соотношение между n и T , при котором в прямоугольнике D_T нули L -функции Дирихле совпадали бы с нулями полинома

Дирихле $Q_n(s)$. Ниже мы укажем класс L -функций Дирихле, для которых это удастся сделать.

Рассмотрим случай норменного характера χ числового поля $\mathbb{K}$, т.е. такого характера, для которого существует числовой характер Дирихле χ_1 , такой, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца целых элементов $\mathfrak{O}$ поля $\mathbb{K}$ имеет место равенство

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_1(N(\mathfrak{p})).$$

В работе [15] приведено описание полей $\mathbb{K}$, для которых все характеры Дирихле являются норменными. При этом в этой работе показано, что в случае норменного характера χ имеет место разложение L -функции $L(s, \chi, \mathbb{K})$ в произведение классических L -функций Дирихле:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{i=1}^l L(s, \chi_i), \quad l \leq k. \quad (5)$$

В работах [5], [6] было показано, что для классических L -функций Дирихле имеет место следующее утверждение: существует такая последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, что в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T$ имеет место оценка

$$\|L(s, \chi) - Q_n(s)\|_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \quad (6)$$

где $\rho > 1$, а константа в « O » имеет вид

$$\frac{e^T}{T}.$$

При этом там же ([5], [6]) указан численный алгоритм построения таких полиномов Дирихле.

Приведённые выше факты позволяют доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть χ — норменный характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^l}(s)$, где $l \leq k$, что для любого прямоугольника $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T$ имеет место оценка вида

$$\|L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_{n^l}(s)\|_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \quad (7)$$

где $\rho > 1$, а константа в оценке не превосходит величины $lT^{l-2}e^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство достаточно провести для случая, когда в разложении (5) присутствуют только два сомножителя. Общий случай будет следовать из случая двух сомножителей на основании индуктивных рассуждений.

Обозначим $f_1(s) = L(s, \chi_1)$ и $f_2(s) = L(s, \chi_2)$ и соответствующие последовательности полиномов Дирихле $Q_{n,1}(s), Q_{n,2}(s)$.

Пусть $Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)$. Тогда при $s \in D_T$ имеем:

$$\begin{aligned} & |f_1(s)f_2(s) - Q_{n^2}(s)| \leq \\ & \leq |f_1(s)f_2(s) - Q_{n,1}(s)f_2(s)| \cdot |Q_{n,1}(s)f_2(s) - Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)| \leq \\ & \leq \frac{Te^T}{T} \frac{1}{\rho_1^n} + \frac{Te^T}{T} \frac{1}{\rho_2^n} \leq \frac{2Te^T}{T} \frac{1}{\min\{\rho_1, \rho_2\}^n}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы 2. $\square$

3. К задаче построения аппроксимирующих полиномов

В этом параграфе обсудим вопросы, связанные с построением аппроксимирующих полиномов Дирихле, нули которых в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T$ должны совпадать с нулями L -функции числового поля $\mathbb{K}$. При изучении этой задачи наряду с теоретическими рассуждениями будут использованы результаты численного эксперимента.

Рассмотрим случай норменных характеров. Как было показано в теореме 2, существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, для которых в каждом прямоугольнике D_T высоты T имеет место оценка (7). Укажем достаточно грубое соотношение между n и T , при котором нули L -функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ должны совпадать с нулями полиномов $Q_{n^k}(s)$.

В работе [6] указано, что $Q_{n^k}(s)$ является почти периодической функцией конечного класса, и число нулей с учётом их кратности $n(T)$ такой функции в полосе $0 \leq t \leq T$ равно

$$n(T) = \frac{k \ln n}{2\pi} T + \omega(T), \quad (8)$$

где $\omega(T)$ — некоторая почти периодическая функция. Из результатов работы [6] следует, что $\omega(T) = O(T)$, и основная масса нулей $Q_{n^k}(s)$ лежит в критической полосе.

Пусть n такое, что величина отклонения $\varepsilon = \|L(s, \chi, k) - Q_{n^k}(s)\|_{D_T}$ равна величине $\frac{T}{n(T)}$. В силу (8) получаем:

$$\varepsilon = \frac{T}{n(T)} \approx \frac{\pi}{k \ln n}. \quad (9)$$

В силу (7) имеем:

$$\frac{\pi}{k \ln n} \approx \frac{e^T T^k k}{\rho^n}.$$

Отсюда получаем:

$$k \ln n \approx \frac{\pi \rho^n}{e^T T^k k}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\ln \ln n \leq \ln \pi + n \ln \rho - T - k \ln T \ln k,$$

и, следовательно,

$$n \ln \rho - T \geq 0$$

или

$$n \geq \frac{T}{\ln \rho}. \quad (10)$$

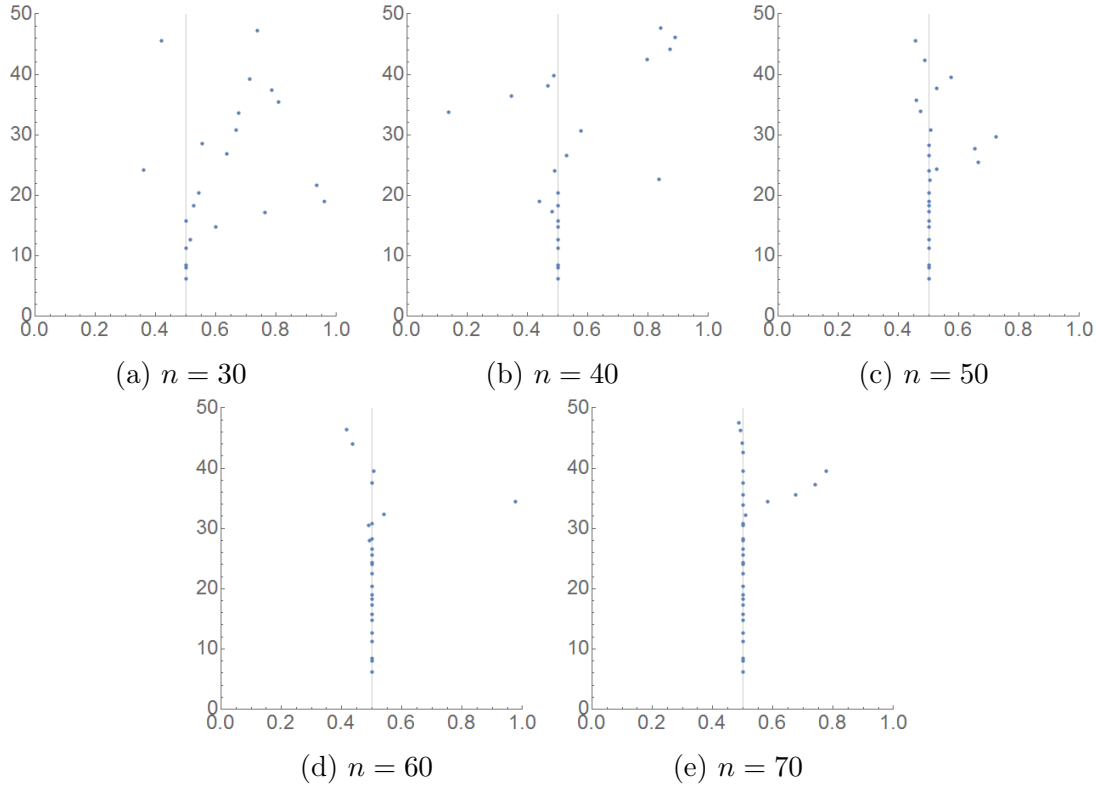
Если величина нормы модуля характера χ , не превосходит величины 12, то можно показать, что $\ln \rho \geq \frac{1}{2}$. В этом случае можно считать, что

$$n = [2T] + 1. \quad (11)$$

Таким образом, грубая оценка соотношения между величиной n аппроксимирующего полинома $Q_{n^k}(s)$, степень которого равна n^k , и величиной T такая же, как и для аппроксимирующих полиномов $Q_n(s)$ в классическом случае (см. [5], [6]).

Ниже приведены результаты вычислений в случае ряда Дирихле

$$f(s) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2),$$



где χ_1 — характер Дирихле по модулю 3, принимающий значения

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

χ_2 — характер Дирихле по модулю 5, принимающий значения

$$\chi_2(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \pmod{5}, \\ 1 & n \equiv 1 \pmod{5}, \\ i & n \equiv 2 \pmod{5}, \\ -i & n \equiv 3 \pmod{5}, \\ -1 & n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Вычисления проводились с помощью аппроксимирующих полиномов

$$Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s),$$

и с помощью аппроксимирующих полиномов, полученных в результате разложения на отрезке $[-1, 1]$ соответствующего степенного ряда по полиномам Чебышева. Наблюдается практическое совпадение нулей как в первом, так и во втором случаях.

Можно только предположить, что в случае произвольных характеров Дирихле будет эффективной численная схема определения нулей L -функций Дирихле числовых полей, связанная с разложением соответствующих степенных рядов по полиномам Чебышева. При этом величины n и T будут связаны соотношением $n > mT$, где величина m зависит от нормы модуля характера.

4. Заключение

Остановимся на вопросах, вставших в связи с приведёнными выше результатами. Во-первых, отметим, что численная схема определения нулей L -функций Дирихле числовых полей требует дальнейшей доработки. Во-вторых как показано в [9], аппроксимационный подход позволяет получить плотностные теоремы для нулей рядов Дирихле с периодическими коэффициентами. Представляет интерес на основании аппроксимационных теорем для полиномов Дирихле получить плотностные теоремы для нулей L -функций Дирихле числовых полей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейлбронн Х. Дзета-функция и L -функция // Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха — М.: изд-во «МИР», 1969. С. 310–346.
2. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: изд-во «МИР», 1966.
3. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Мир, 1972.
4. Туран П. О некоторых новых результатах в аналитической теории чисел / Проблемы аналитической теории чисел — М.: изд-во «МИР», 1975. С. 118–142.
5. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского гос. университета — Белгород: изд-во БелГУ, 2011. Вып. 24. С. 47–54.
6. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L -функции Дирихле // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 117–121.
7. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L -функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Информатика. Механика.» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 80–84.
8. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1994. Т. 36, № 6. С. 805–812.

9. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014.
10. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Кривобок В. В. Об аналитической непродолжимости за границу сходимости степенных рядов, отвечающих L -функциям Дирихле числовых полей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвузовский сборник научных трудов — Саратов: изд-во СГУ, 2009. Вып. 5. С. 31–36.
11. Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. О граничных свойствах одного класса степенных рядов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: изд-во СГУ, 2005. Вып. 3. С. 40–47.
12. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. — Л.: изд-во ЛГУ, 1973.
13. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: «Наука», 1970.
14. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: «Мир», 1967.
15. Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. К задаче о разложении в произведение L -функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сборник. 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 51–63.

REFERENCES

1. Heilbronn, H. 1969, "Zeta-function and L-function", *Algebraicheskaja teorija chisel. Pod redakciei J. Kasselsa i A. Frelikha*, "MIR", Moscow, pp. 310–346.
2. Leng, S. 1966, "Algebraic numbers", "MIR", Moscow.
3. Weil, A. 1972, "Basics of number theory", "MIR", Moscow.
4. Turan, P. 1975, "On a certain new results in analytical number theory", *Problemy analiticheskoi teorii chisel*, "MIR", Moscow, pp. 118–142.
5. Korotkov, A. E. & Matveeva, O. A. 2011, "On a particular numeric algorithm for finding zeros of entire functions which are defined by Dirichlet series with periodic coefficients", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gos. universiteta*, issue 24, pp. 47–54.
6. Matveeva, O. A. 2013, "On zeros of Dirichlet polynomials which approximate Dirichlet L -functions in the critical string", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, issue 2, pp. 117–121.
7. Matveeva, O. A. 2013, "Approximation polynomials and behavior of Dirichlet L -functions in the critical strip", *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, vol. 13, issue 4, part 2, pp. 80–84.
8. Kuznetsov, V. N. 1994, "An analog of Szego theorem for one class of Dirichlet series", *Mat. zametki*, vol. 36, no. 6, pp. 805–812.

9. Matveeva, O. A. 2014, "Analytical properties of some classes of Dirichlet series and some problems of the theory of Dirichlet L -functions", Dissertation, Ul'ianovsk.
10. Kuznetsov, V. N., Kuznetsova, T. A. & Krivobok, V. V. 2009, "On the impossibility of analytical continuation beyond the convergence boundary of power series corresponding to Dirichlet L -functions in number fields", *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov*, issue 4, pp. 31–36.
11. Kuznetsov, V. N., Krivobok, V. V. & Setsinskaia, E. V. 2005, "On the boundary properties of one class of power series", *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov*, issue 3, pp. 40–47.
12. Daugavet, I. K. 1973, "An introduction to the theory of function approximation", *LGU publishing, Leningrad*.
13. Suetin, P. K. 1970, "Classical orthogonal polynomials", *"Nauka", Moscow*.
14. Prahar, K. 1967, "The distribution of prime numbers", *"MIR", Moscow*.
15. Kuznetsov, V. N., Setsinskaia, E. V. & Krivobok, V. V. 2004, "On a problem of splitting a Dirichlet L -function in number fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, issue 3 (II), pp. 51–63.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 13.05.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 512.532+519.142+517.43

БАЗИСЫ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ф. М. Малышев (г. Москва)

Аннотация

В работе приводится обзор результатов (с разной степенью подробности) по трём различным направлениям.

Основное центральное направление относится к рекуррентным последовательностям, прежде всего к их базисным (в различном понимании) множествам.

Другое направление связано с новыми комбинаторными объектами – (v, k_1, k_2) -конфигурациями, возникающими на пути ослабления условий, определяющих известные комбинаторные объекты – (v, k, λ) -конфигурации.

Третье направление имеет дело с инвариантными дифференциалами высших порядков от нескольких гладких функций одной вещественной переменной.

В каждой из этих тем рассматриваемые вопросы связаны с комбинаторными конфигурациями в виде конечных плоскостей, а приводимые результаты получены благодаря однотипным представлениям точек соответствующих конфигураций точками многомерных локально евклидовых пространств. В случае инвариантных дифференциалов эти представления возникают естественно, а в случае рекуррентных последовательностей и (v, k_1, k_2) -конфигураций вводятся по аналогии, но уже искусственным образом.

Ключевые слова: рекуррентные последовательности, решётки, торы, комбинаторные конфигурации, инвариантные дифференциальные операторы.

Библиография: 39 названий.

BASES OF RECURRENT SEQUENCES

F. M. Malyshev (Moscow)

Abstract

This paper provides an overview of the results (with varying degrees of detail) in three different directions.

The main Central direction refers to recurrent sequences, primarily to their base (in a different sense) sets.

Another direction is related to new combinatorial objects (v, k_1, k_2) -configurations encountered on the way of weakening the determinants of well-known combinatorial objects (v, k, λ) -configuration.

The third direction deals with invariant differentials of higher orders from several smooth functions of one real variable.

In each of these themes the issues associated with combinatorial configurations in the form of finite planes, and the results obtained through the same type of views, points of the corresponding configurations of points in multidimensional locally Euclidean spaces. In the case of invariant differentials of these representations arise naturally, and in the case of recurrent sequences and (v, k_1, k_2) -configurations are introduced by analogy, but in an artificial way.

Keywords: recurrent sequences, lattices, Torah, combinatorial configuration, invariant differential operators.

Bibliography: 39 titles.

1. Введение

Основное содержание предлагаемого обзора относится к рекуррентным последовательностям. Приводимые результаты относительно порождающих множеств в рекуррентных последовательностях получены благодаря дополнительно вводимой многомерной структуре на множестве индексов, нумерующих элементы последовательности. Во введении приводится краткий обзор других примеров использования многомерных структур на дискретных нумерующих множествах, изначально мыслимых одномерными, линейно упорядоченными.

В качестве эпиграфа к настоящему обзору можно отнести высказывание со стр. 15 учебника [1] о том, что базисные векторы линейных пространств "*совершенно не обязательно*" нумеровать от 1 до n . Там подчёркивалось, что при решении конкретных задач вместо линейного упорядочения "*может оказаться важной другая структура на множестве индексов базиса*", а собственно линейная упорядоченность, добавим, может оказаться даже вредной.

Аналогичная ситуация имеет место с определениями декартова произведения семейств множеств, где также не всегда полезна линейная упорядоченность на множестве, индексирующем семейство "сомножителей" [2]. Элементы декартова произведения конечного или счётного числа множеств совсем не обязательно представлять упорядоченной последовательностью. Каждая решаемая задача, как правило, требует своей присущей именно ей какой-либо структуры на множестве индексов.

Впервые на важность этих замечаний автор обратил внимание в связи с одной из задач доклада [3] по описанию инвариантных дифференциалов

$$d(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

порядка $k + r$ от гладких вещественных функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$:

$$d(f_1(x), \dots, f_k(x)) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_k \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_k = r}} c_{i_1 \dots i_k} f_1^{(1+i_1)}(x) \dots f_k^{(1+i_k)}(x) (dx)^{k+r}, \quad (1)$$

где $c_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ – некоторые определяющие дифференциал коэффициенты. В случае гладких замен переменной $x = x(t)$ данный дифференциал $d(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))$ от функций $\varphi_j(t) = f_j(x(t))$, $j = 1, \dots, k$, следует вычислять по формуле (1), в которой вместо $f_j^{(1+i_j)}(x)$ должны быть производные $\varphi_j^{(1+i_j)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{1+i_j}(\varphi_j(t))$, а вместо $(dx)^{k+r}$, соответственно, $(dt)^{k+r}$. Но можно непосредственно в правую часть выражения (1) вместо x подставить $x(t)$ (тогда $f_j^{(1+i_j)}(x)$ заменяется на $f_j^{(1+i_j)}(x(t))$), а вместо $(dx)^{k+r}$, соответственно, $(dx(t))^{k+r} = (\dot{x}(t)dt)^{k+r} = \dot{x}(t)^{k+r}(dt)^{k+r}$. Дифференциал (1), задаваемый коэффициентами $c_{i_1 \dots i_k}$, является инвариантным, если результаты вычислений по этим двум схемам дают одинаковые выражения для любых функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$ и замен $x(t)$. Отдельное ненулевое слагаемое в (1) является инвариантным дифференциалом только при $r = 0$, поскольку дифференциал $f^{(1+i)}(x)(dx)^{1+i}$ является инвариантным только при $i = 0$. При $k = 1$, $r = 0$ дифференциал (1) инвариантен по известной теореме об инвариантности первого дифференциала. Непосредственно проверяется, что инвариантным является дифференциал

$$d(f_1(x), f_2(x)) = (f_1'(x)f_2''(x) - f_1''(x)f_2'(x))(dx)^3.$$

Необходимые и достаточные условия на коэффициенты $c_{i_1 \dots i_k}$ для инвариантности дифференциала (1) в работе [4] сформулированы на языке однородных уравнений в частных производных многочленов от k переменных. Эти условия сводятся (см. [5]) к системе из $b = \binom{k+r-1}{k}$ линейных уравнений с $v = \binom{k+r-1}{r}$ неизвестными $c_{i_1 \dots i_k}$, причём в каждом уравнении k неизвестных, а каждое неизвестное участвует в r уравнениях, $vr = bk$. Совокупность из v неизвестных образует конечную плоскость [6] с b "прямыми", состоящими из k точек. Каждая точка плоскости содержится ровно в r "прямых". Приписывание в работе [5] неизвестных $c_{i_1 \dots i_k}$ к точкам $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}^k$ высветило особенности этой системы, указывающие на способ её решения. После введения новых переменных $\tilde{c}_{i_1 \dots i_k} = i_1! \dots i_k! c_{i_1 \dots i_k}$ система предстаёт в виде

$$\sum_{j=1}^k (i_j + \delta + 1) \tilde{c}_{i_1 \dots i_{j-1}, i_j + \delta, i_{j+1}, \dots, i_k} = 0,$$

$\delta = 1, \dots, r$, $i_1 \geq 0, \dots, i_k \geq 0$, $i_1 + \dots + i_k = r - \delta$. В работе [5] доказано, что верхними оценками для размерностей пространств решений этих систем при разных k и r выступают величины $a_{k,r}$, определяемые равенством $\sum_{i \geq 0} a_{k,i} = (1+t)(1+t+t^2) \dots (1+t+\dots+t^{k-1})$. Отсюда следует, что Вронскиан $\det \left\| f_j^{(i)} \right\|_{i,j=1,\dots,k} (dx)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ является инвариантным дифференциалом для k функций самого высокого возможного порядка.

Полезная для нахождения инвариантных дифференциалов $(k-1)$ -мерная структура на номерах $(i_1, \dots, i_k)$ неизвестных $c_{i_1 \dots i_k}$ присутствует в явном виде, оставалось только её использовать.

Ситуация иная в случае рекуррентных последовательностей $x_i \in X$, $i \in \mathbb{Z}$, рассматриваемых в настоящей работе в общем виде:

$$x_{i+m} = f(x_i, x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}}), \quad (2)$$

$k \geq 3$, $0 < s_1 < \dots < s_{k-2} < m$, $\text{НОД}(s_1, \dots, s_{k-2}, m) = 1$. Алфавит X и отображение $f : X^{k-1} \rightarrow X$, задающие рекуррентное соотношение (2), могут быть произвольными.

Через v обозначаем минимальный период последовательности $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$: $x_{i+v} = x_i$, $i \in \mathbb{Z}$. При отсутствии конечного периода считаем $v = \infty$. Здесь "прямые" $\{i, i + s_1, \dots, i + s_{k-2}, i + m\}$, $i \in \mathbb{Z}_v$, образуют конечную плоскость с параметрами $b = v$, $r = k$ на множестве вычетов $\mathbb{Z}_v = \{0, 1, \dots, v-1\} = \mathbb{Z}/\langle v \rangle$. Считаем $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_\infty$.

Группы по сложению $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/\langle v \rangle$ из-за их естественных вложений соответственно в $\mathbb{R}$ и $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, обычно представляются одномерными. Но конкретные приложения рекуррентных последовательностей и удачный пример с инвариантными дифференциалами инициировали искусственное введение $(k-1)$ -мерных структур на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_v$ путём их дискретных вложений в $(k-1)$ -мерные цилиндр и тор соответственно. Такие вложения обеспечиваются эпиморфизмами

$$\varphi : \mathbb{Z}^{k-1} \rightarrow \mathbb{Z}_v, \varphi(z_0, z_1, \dots, z_{k-2}) = (mz_0 + s_1z_1 + \dots + s_{k-2}z_{k-2}) \bmod v,$$

при которых $\mathbb{Z}_v \cong \mathbb{Z}^{k-1} / \ker \varphi \subset \mathbb{R}^{k-1} / \ker \varphi$. Данные вложения позволили (см. §§ 2 – 6) определить строение всех возможных минимальных подмножеств элементов последовательности $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$, по которым каждый знак x_j , $j \geq 0$, может быть получен за конечное число применений рекуррентного соотношения (2). Такие подмножества названы базисными в [7].

Случаю $k = 3$ дополнительно посвящена работа [8]. Он рассматривается в § 7 особо. Возникающее семейство вложений $\mathbb{Z}$ в цилиндр для всех пар (s_1, m) , $0 < s_1 < m$, $(s_1, m) = 1$, устанавливает в работе [9] связь между известным разбиением на фундаментальные области верхней комплексной полуплоскости при действии модулярной группой и приёмом (в плоском случае) максимального пустого шара Делоне – Сандаковой [10].

Ещё одно приложение связано с приводимым ниже рис. 1, взятым из работы [11] по клеточным автоматам. Там на местах $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ располагаются значения $z_{i,j} \in GF(2)$ (0 – светлая клетка, 1 – тёмная) так, что $z_{i-1,j} + z_{i,j} + z_{i,j+1} = 0$. На самой нижней горизонтальной линии эти значения выбирались псевдо случайным образом.

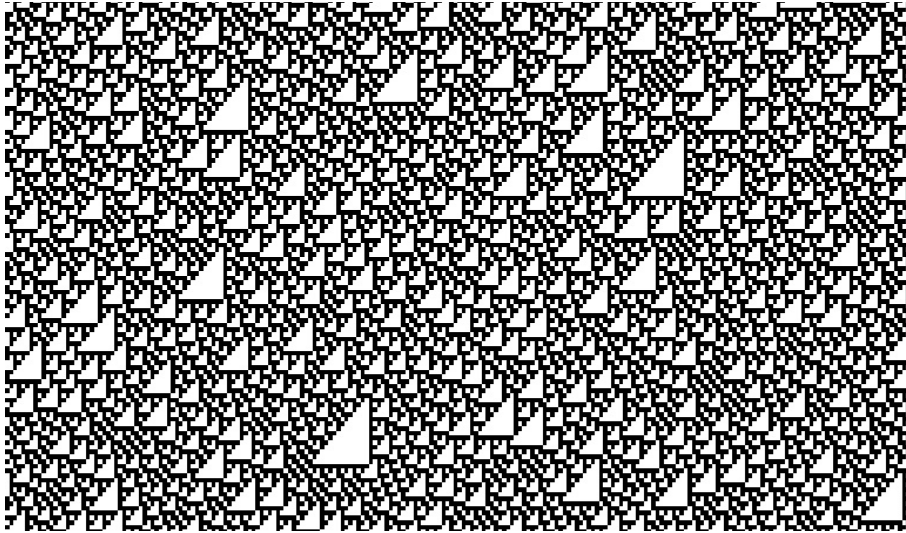


Рис. 1

Аналогичная картина будет иметь место и для рекуррентных последовательностей при $k = 3$, $X = GF(2)$, $f(x, y) = x + y$, если вложение $\mathbb{Z}$ в цилиндр таково, что номера $t, t + s_1, t + m$ знаков x_t, x_{t+s_1}, x_{t+m} оказываются соответственно на местах $(i - 1, j), (i, j), (i, j + 1)$ плоской развёртки цилиндра. Данное обстоятельство как раз и предопределило представление вычетов $\mathbb{Z}_v$ точками многомерных торов.

Наблюдаемая на рис. 1 закономерность позволила, в частности, получить теоремы о распределении в левой зоне числа единиц в булевых аналогах треугольников Паскаля [12].

В случае решёток $\Gamma \subset \mathbb{Z}^{k_1-1}$ максимального ранга вложения групп $\mathbb{Z}^{k_1-1}/\Gamma$ в торы $\mathbb{R}^{k_1-1}/\Gamma$ позволяют строить относительно новые комбинаторные объекты, так называемые (v, k_1, k_2) -конфигурации. Каждая такая конфигурация задаётся парой конечных плоскостей на одном и том же множестве из v точек с $b = v$ "прямыми", состоящими из k_1 точки в одной плоскости и из k_2 точек в другой плоскости. В первой плоскости через одну точку проходит $r_1 = k_1$ "прямых", а во второй, соответственно, $r_2 = k_2$ "прямых". Матрицы инцидентности этих плоскостей должны быть невырожденными над полем $GF(2)$ и взаимно обратными. При $k_1 = k_2 = k$ используется обозначение (v, k) -конфигурация. Если в качестве "прямых" выступают смежные классы подмножеств в группе G мощности соответственно k_1, k_2 , то (v, k_1, k_2) -конфигурацию называем (v, k_1, k_2) -группой, а при $k_1 = k_2 = k$ — (v, k) -группой.

Первоначальные примеры (v, k) -конфигураций были получены в работе [13]. При их построении привлекались известные по монографиям [14] – [18] (v, k, λ) -конфигурации, матрицы Адамара, конечные проективные плоскости, совершенные разностные множества, теоретико-числовые конструкции, графы с различными свойствами симметрии, однородные многогранники, триангуляции двумерных торов, связанные с расположением на них вычетов $\mathbb{Z}_v$, описываемыми выше в случае $k = 3$. Построением (v, k_1, k_2) -конфигураций в разное время занимались М. В. Брославский, А. М. Зубков, Е. Г. Красулина, Ф. М. Малышев, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, А. Е. Тришин, А. А. Фролов.

К настоящему времени удалось показать, что каждая связная $(v, 3)$ -конфигурация реализуется на группе $\mathbb{Z}_v$ "прямыми" $\{i, i + 1, i + 1 + v/2\}$, $i \in \mathbb{Z}_v$, при чётном v , и триангуляцией листа Мёбиуса при $v = 5$. Доказательство этого утверждения в работе [19] продемонстрировало важность отсутствия структуры линейного упорядочения на множестве из v точек соответствующих конечных геометрий, упорядоченность скрывала бы инвариантные рассуждения при доказательстве. В практических приложениях (v, k_1, k_2) -конфигурации выступают в виде их матриц инцидентности, называемых (v, k_1, k_2) -матрицами и (v, k) -матрицами при $k_1 = k_2 = k$. Роль линейной упорядоченности на v точках чисто техническая, требуется только для задания этих матриц.

В работе [20] приводится исчерпывающая классификация циклических $(v, 5)$ -групп, а в [21] – остальных абелевых $(v, 5)$ -групп. В работе [22] дана классификация циклических $(v, 3, 7)$ -групп и всех конечных $(v, 3, 5)$ -групп.

Имеется способ получения $(v, 3, k)$ -конфигураций на двумерных торах, использующий паркетирование евклидовой плоскости правильными треугольниками. В качестве "прямых" рассматриваются вершины одинаково ориентированных треугольников, закрашенных для определённости, в тёмный цвет. Вокруг каждой вершины имеет место чередование светлых и тёмных треугольников. Если группа Γ движений плоскости (см. [23]) сохраняет такое паркетирование (с учётом раскраски), то оно

переносится и на поверхность $\mathbb{R}^2/\Gamma$. В случае тора решётки $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ (см. [24]) разбиваются на два класса. Решётки одного класса предоставляют $(v, 3, k)$ -конфигурации, когда матрица инцидентности L соответствующей конечной геометрии с 3-х точечными "прямыми" на $v = |\mathbb{Z}^2/\Gamma|$ точках невырождена над полем $GF(2)$. Тогда L^{-1} будет матрицей инцидентности другой конечной геометрии на тех же v точках с некоторыми нечётными параметрами $k = r$. Для решёток другого класса, когда матрица L вырождена, вложение $\mathbb{Z}^2/\Gamma \subset \mathbb{R}^2/\Gamma$ будет отвечать описываемому в § 3 вложению, соответствующему трёхчленной рекуррентной последовательности или полилинейной рекуррентной последовательности [25], [26]. Напротив, для решёток Γ первого класса такая реализация вложения $\mathbb{Z}^2/\Gamma \subset \mathbb{R}^2/\Gamma$ невозможна. Интересно, что реальная практика криптографического синтеза давно предопределила такое разбиение: решётки первого класса предоставляют матрицы для блочных шифраторов (см., например, [27] – [30]), а решётки второго класса отвечают рекуррентным и полилинейным рекуррентным последовательностям, используемым в поточных шифраторах.

Изначально использование геометрических представлений в задачах рекуррентной природы, привлекающих для своих формулировок семейства подмножеств $i + B$, $i \in \mathbb{Z}$, с фиксированным $B = \{0, s_1, \dots, s_{k-2}, m\} \subset \mathbb{Z}$, предполагало предварительный поиск вложений $\mathbb{Z}_v \subset M$, $v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, в римановы пространства M как можно меньшей размерности, которые удовлетворяли бы следующим качественным неформальным требованиям: а) элементы $\mathbb{Z}_v$ равномерно, дискретно и достаточно плотно рассосредотачиваются по M ; б) имеется действие группы $\mathbb{Z}_v$ на M изометриями, при котором $z \cdot x = z + x$ для всех $z \in \mathbb{Z}_v$, $x \in \mathbb{Z}_v \subset M$; в) элементы подмножества $B_v = \{z(\bmod v), z \in B\}$ должны находиться в непосредственной близости друг от друга.

Такие вложения может обеспечивать следующая конструкция. Пусть имеется кристаллографическая группа G движений на одном из римановых односвязных пространств Λ постоянной кривизны [31], содержащая нормальную подгруппу Γ , свободно действующую на Λ , такую, что $G/\Gamma \cong \mathbb{Z}_v$. Требуемое вложение $G/\Gamma \subset \Lambda/\Gamma = M$ задаётся орбитой внутренней точки фундаментальной области при действии G/Γ на M . Условия а) и б) при этом выполняются. Для обеспечения свойства в) тройка $\Gamma \triangleleft G : \Lambda$ должна подбираться специальным образом. К настоящему времени использовался только случай, когда: Λ – евклидово пространство; $G \subset \Lambda$ – решётка максимального ранга [24]; $\Gamma \triangleleft G$ – подрешётка того же или на единицу меньшего ранга.

В заключении, обращаясь к началу введения, отметим, что в некоторых ситуациях бывает исключительно полезным даже отказ от искусственно вводимой линейной упорядоченности на конечных множествах. Примером этому может служить работа [32]. Там, действуя вопреки представлениям систем корней простых алгебр Ли из монографии [33], использующей линейную упорядоченность базиса, удалось описать регулярные подалгебры матричных алгебр Ли, содержащих все диагональные элементы, на языке предупорядоченностей [34] и конечных топологий [35]. В результате размерности когомологий этих подалгебр стали выражаться через числа Бетти обычных клеточных комплексов. Благодаря этому была получена большая серия ранее не известных (см. [36]) примеров так называемых жёстких разрешимых алгебр Ли. Алгебра является жёсткой, если при малом изменении её структурных констант получающаяся алгебра изоморфна исходной. К жёстким относятся прежде всего простые

и полупростые алгебры Ли.

2. Определения порождающих наборов элементов рекуррентных последовательностей

В настоящем и следующих параграфах рассматриваются последовательности $x_i \in X$, $i \in \mathbb{Z}$, заданные рекуррентными соотношениями вида

$$x_{i+m} = f(x_i, x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где $k \geq 3$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k-2} < s_{k-1} = m$, $\text{НОД}(s_1, \dots, s_{k-2}, m) = 1$. Случай, когда $\text{НОД}(s_1, \dots, s_{k-2}, m) = d > 1$, легко сводится к рассматриваемому, поскольку тогда рекуррентная последовательность разбивается на d подпоследовательностей, каждая из которых удовлетворяет соотношению вида (3).

Интересующие нас вопросы не зависят от конкретного алфавита X и отображения $f : X^{k-1} \rightarrow X$, а целиком определяются набором чисел $k, m, s_1, \dots, s_{k-2}$. Элементы рекуррентной последовательности x_i , $i \in \mathbb{Z}$, будут пониматься как переменные, принимающие значения из алфавита X .

Свойства рекуррентных последовательностей при заданном m зависят как от k , так и от конкретных значений $s_1, \dots, s_{k-2}$ [37].

Для подмножества $S \subset \mathbb{Z}$ будем обозначать через $[S] \subset \mathbb{Z}$ совокупность всех таких $i \in \mathbb{Z}$, что x_i представимо формулой (см. [38]), содержащей (кроме скобок и запятых) только символы f и x_t , $t \in S$. Построение формулы для x_i , $i \in [S]$, производится путём суперпозиции с помощью начального соотношения (3), начиная с равенства $x_i = f(x_{i-m}, x_{i-m+s_1}, \dots, x_{i-m+s_{k-2}})$. К некоторым переменным из правой части последнего равенства снова применяется соотношение (3), конечно, если номера этих переменных ещё не содержатся в S . Соотношения (3) привлекаются до тех пор, пока хотя бы один номер входящих в очередную формулу переменных не содержится в S . Полученную таким образом формулу будем записывать в виде $x_i = F_i(x_t, t \in S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $S \subset \mathbb{Z}$ назовём минимальным порождающим набором, если выполняются следующие два условия:

- а) при некотором $T \in \mathbb{Z}$ имеем: $[S] \supset \{T, T+1, T+2, \dots\}$;
- б) условие а) не выполняется ни для какого собственного подмножества множества S .

Множество S рассматривается с точностью до сдвигов на целые числа, поскольку для любых $n \in \mathbb{Z}$ и минимального порождающего набора S множество $S+n = \{s+n \mid s \in S\}$ тоже будет минимальным порождающим набором.

Случай с минимально возможным значением $m = 2$ (когда $k = 3$ и $s_1 = 1$) не является типичным (хотя к нему относится одна из наиболее известных рекуррентных последовательностей – числа Фибоначчи). При $m = 2$, $k = 3$ и $s_1 = 1$, как нетрудно убедиться, минимальными порождающими наборами являются $\{i, i+1\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Здесь всегда $|S| = m = 2$. Далее считаем $m \geq 3$.

Не является типичным и случай с максимально возможным значением $k = m+1$, когда $s_i = i$, $i = 1, \dots, m-1$. В этом случае минимальный порождающий набор тоже

только один с точностью до сдвигов, он состоит из m подряд идущих номеров. Далее считаем $3 \leq k \leq m$.

Подробные доказательства приводимых далее достаточно простых замечаний имеются в работе [7]. Это же относится и к формулируемым в этом параграфе теоремам.

Для минимального порождающего набора S представления элементов x_i , $i \in [S]$ в виде $x_i = F_i(x_t, t \in S)$, единственны. Но свойство однозначного представления x_i для всех $i \geq T$ при некотором достаточно большом T нельзя рассматривать в качестве эквивалентного определения для минимального порождающего набора. Минимальный порождающий набор существует, например, $S = \{-1, -2, \dots, -m\}$, его мощность всегда конечна — $|S| < \infty$, но при заданных параметрах $m, k, s_1, \dots, s_{k-2}$ мощность $|S|$ может быть сколь угодно большой.

Минимальный порождающий набор S минимально возможной мощности (с $|S| = m$) назовём базисным набором для рекуррентной последовательности.

Далее в § 3 теоремами 1, 2 и 3 характеризуются минимальные порождающие наборы в случае трёхчленных рекуррентных последовательностей (когда $k = 3$). При $k \geq 4$ в § 4 теоремами 4 и 5 описываются базисные наборы. В случае, когда функция f биективна по первой переменной при любой фиксации остальных переменных, имеется возможность однозначно продолжать рекурренту в обратную сторону. Тогда естественно рассматривать минимальные порождающие наборы, позволяющие получать x_{-i} для всех достаточно больших i , пользуясь при этом только соотношениями $x_i = \tilde{f}(x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}}, x_{i+m})$, $i \in \mathbb{Z}$, где используемое отображение $\tilde{f} : X^{k-1} \rightarrow X$ получается из (3) благодаря биективности f по первой переменной. Базисный набор S , который остаётся базисным набором и в этом новом смысле, называем совершенным базисным набором. Теоремы 6 и 7 в § 5 устанавливают строение совершенных базисных наборов для любых $k \geq 3$. В § 6 формулируются другие постановки задач, относящихся к порождающим множествам.

3. Минимальные порождающие наборы для трёхчленных рекуррентных последовательностей

При $k = 3$ полагаем $s_1 = s \in \{1, \dots, m-1\}$. Воспользуемся специальным расположением множества целых чисел на бесконечном двумерном цилиндре, являющемся прямым произведением окружности $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и вещественной прямой $\mathbb{R}$. Приведём подробное описание конструкции такого расположения.

Пусть $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ — гомоморфизм решётки $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на множество целых чисел $\mathbb{Z}$, заданный равенством

$$\varphi(x, y) = x(s - m) + ym. \quad (4)$$

В силу взаимной простоты чисел m и s гомоморфизм φ является эпиморфизмом. Обозначим через Γ ядро гомоморфизма φ : $\Gamma = \ker \varphi = \langle (m, m-s) \rangle$.

Векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ считаем ортонормальными в $\mathbb{R}^2$, первый считаем горизонтальным и направленным вправо, а второй — вертикальным и направленным вверх.

По теореме о гомоморфизме эпиморфизм φ естественным образом задаёт изоморфизм $\mathbb{Z}^2/\Gamma \cong \mathbb{Z}$. Коль скоро $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, то $\mathbb{Z}^2/\Gamma \subset \mathbb{R}^2/\Gamma$. Тем самым имеем требуемое

вложение множества целых чисел $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2/\Gamma$ в цилиндр $\mathbb{R}^2/\Gamma$, обозначаемый далее через Z .

Плоскость $\mathbb{R}^2$ является накрывающей поверхностью для цилиндра $\mathbb{R}^2/\Gamma$, а часть плоскости $\mathbb{R}^2$ между параллельными прямыми, перпендикулярными вектору $(m, m - s)$ и проходящими, соответственно, через точки $(0, 0)$ и $(m, m - s)$, является развёрткой этого цилиндра. Окружность на цилиндре, накрываемую отрезком плоскости с концами $(0, 0)$ и $(m, m - s)$, обозначим через C .

Проводимые ниже построения на цилиндре удобней заменять соответствующими Γ -инвариантными построениями на его накрывающей плоскости.

Расположение целых чисел на цилиндре можно задать и непосредственно. Для этого на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим три семейства параллельных прямых: e_2 -семейство состоит из прямых

$$\{(x, 0) + te_2, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, t), t \in \mathbb{R}\}, x \in \mathbb{Z};$$

$(-e_1)$ -семейство состоит из прямых

$$\{(0, y) + t(-e_1), t \in \mathbb{R}\} = \{(-t, y), t \in \mathbb{R}\}, y \in \mathbb{Z};$$

$(e_1 + e_2)$ -семейство состоит из прямых

$$\{(0, z) + t(e_1 + e_2), t \in \mathbb{R}\} = \{(t, t + z), t \in \mathbb{R}\}, z \in \mathbb{Z}.$$

Данные три семейства прямых образуют 3-сеть на плоскости $\mathbb{R}^2$, которая инвариантна относительно сдвигов на элементы подгруппы Γ в $\mathbb{R}^2$ (групповой операцией в $\mathbb{R}^2$ является обычное сложение векторов). В силу Γ -инвариантности эта 3-сеть переносится на цилиндр.

Припишем какому-либо узлу 3-сети на цилиндре целое число 0. У этого узла ткани имеется шесть соседних узлов. Паре этих узлов на проходящей через нулевой узел прямой e_2 -семейства припишем целые числа m и $-m$ соответственно. При продвижении от узла 0 к узлу m должно происходить увеличение параметра t на соответствующей прямой. Двум другим парам узлов, соседних с узлом 0, аналогичным образом приписываем целые числа $m - s$ и $s - m$, s и $-s$. Числа s и $-s$ на прямой $(e_1 + e_2)$ -семейства, а числа $m - s$ и $s - m$ на прямой $(-e_1)$ -семейства. Увеличение параметра t на соответствующих прямых должно происходить при продвижении от узла 0 к узлам s и $m - s$ соответственно. По такому же принципу соседям узла i , $i \in \mathbb{Z}$, будем приписывать целые числа $i + m, i - m, i + m - s, i - m + s, i + s, i - s$. В результате каждому узлу на цилиндре (см. рис. 2) будет приписано единственное целое число, при этом каждое целое число будет отвечать какому-то одному узлу. Это свойство следует из использованной выше теоремы о гомоморфизме, применённой к эпиморфизму φ , заданному равенством (4).

Заметим, что всего на цилиндре имеется m прямых в e_2 -семействе, $m - s$ прямых в $(-e_1)$ -семействе и s прямых в $(e_1 + e_2)$ -семействе. Вершинам сети на одной прямой приписаны целые числа с одним значением вычета по модулю m , $m - s$ и s соответственно.

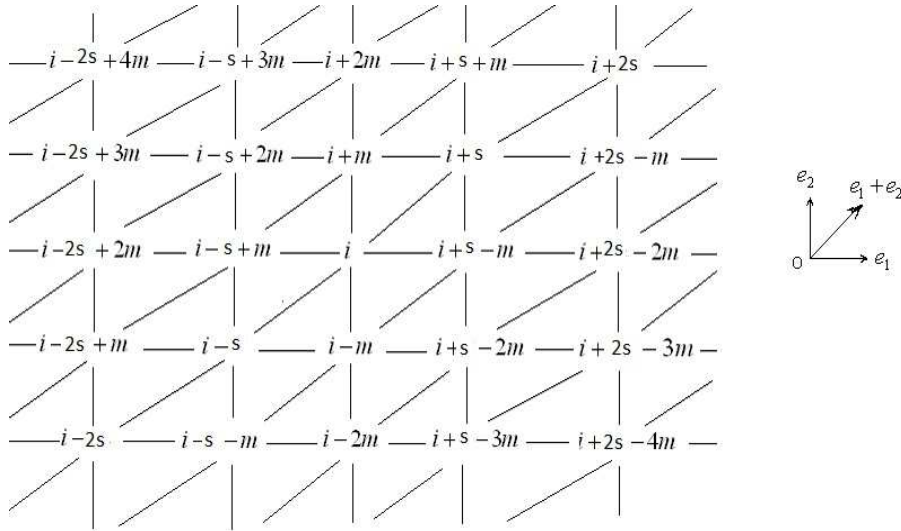


Рис. 2

Далее нам удобно картинку на рис. 2 представлять повёрнутой на 45° по часовой стрелке. Тогда отрезки $(e_1 + e_2)$ -прямых будут горизонтальными, на них параметр t увеличивается при движении направо (на развёртке цилиндра). У отрезков e_2 -прямых параметр t увеличивается при движении на “северо-восток”, а у отрезков $(-e_1)$ -прямых параметр t увеличивается при движении на “северо-запад”. Отрезки e_2 -прямых и $(-e_1)$ -прямых далее считаем наклонными.

На рис. 3 приведена развёртка цилиндра для значений параметров $m = 5$, $s = 2$. Пунктиром там указан отрезок, превращающийся в окружность C после склейки развёртки в цилиндр. (Рекомендуется представлять “шов” склейки за плоскостью рис. 3).

Прямые 3-сети на цилиндре Z (общим числом $2m$) являются винтовыми линиями. Прямые e_2 -семейства и $(e_1 + e_2)$ -семейства соответствуют правой резьбе, а прямые $(-e_1)$ -семейства закручены в противоположном направлении и соответствуют левой резьбе. Отрезки на этих прямых с концами в виде узлов сети будем называть e_2 -отрезками, $(-e_1)$ -отрезками и $(e_1 + e_2)$ -отрезками соответственно. Естественно, e_2 -отрезки и $(-e_1)$ -отрезки считать наклонными, а $(e_1 + e_2)$ -отрезки – горизонтальными. Целые числа будем отождествлять с узлами сети, называя их ещё целочисленными точками цилиндра.

За единицу длины $(e_1 + e_2)$ -отрезков (в отличие от e_2 -отрезков и $(-e_1)$ -отрезков) берётся длина вектора $e_1 + e_2$, т. е. (как и для e_2 -отрезков и $(-e_1)$ -отрезков) расстояние между двумя соседними узлами на отрезке.

Теперь мы располагаем всем необходимым для описания минимальных порождающих наборов.

Рассмотрим на цилиндре гомотопный окружности C цикл (замкнутый путь) L , состоящий из строго чередующихся горизонтальных и наклонных отрезков. Соседние отрезки образуют угол в 45° при вершине, обязательно являющейся узлом сети. Гомотопность означает непрерывную стягиваемость цикла L к окружности C . Другими словами, цикл L делает один оборот вокруг цилиндра.

На цикле L выбираем такую ориентацию, что на его горизонтальных $(e_1 + e_2)$ -отрезках она отвечает увеличению параметра t . Тогда на $(-e_1)$ -отрезках эта ориентация тоже будет отвечать увеличению t , но на e_2 -отрезках будет иметь место уменьшение параметра t .

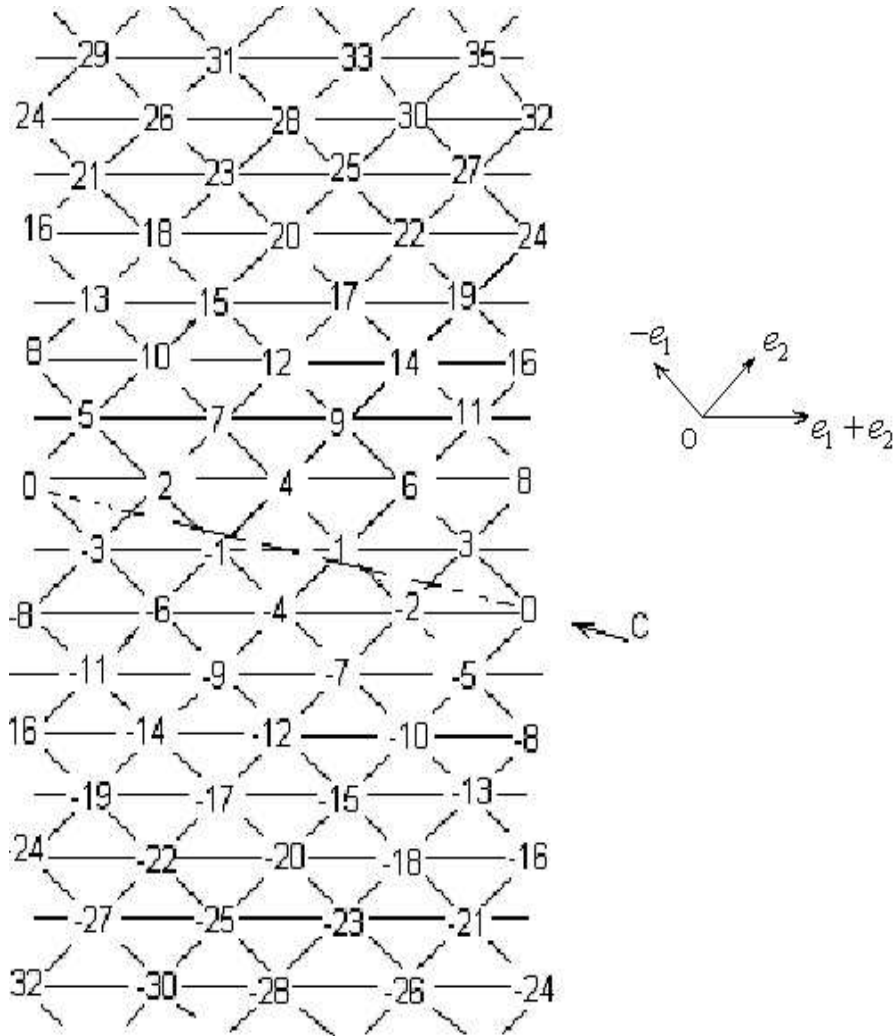


Рис. 3

Каждой точке $y \in Z \setminus L$ припишем белый или чёрный цвет. Для этого вначале в достаточно малых окрестностях $O(x)$, $x \in L \setminus \mathbb{Z}$, пересекающихся только с одним отрезком L , точки справа от L объявим белыми, а слева – чёрными. Если отрезок $[y, z]$ целиком содержится в $Z \setminus L$ и точке y приписан некоторый цвет, то точке z приписываем тот же цвет. В результате каждой точке $y \in Z \setminus L$ будет приписан белый или чёрный цвет, а некоторым точкам $Z \setminus L$ возможно будут приписаны оба цвета.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Цикл L на цилиндре Z , гомотопный окружности C и являющийся ломаной из чередующихся горизонтальных и наклонных отрезков с углами в 45° в целочисленных вершинах, назовём правильным, если каждой точке $Z \setminus L$ приписан только один цвет – белый или чёрный и каждая белая точка содержится в горизонтальном отрезке из белых точек длиной более 1.99.

Пример правильного цикла приведён на рис. 4. Там представлена накрывающая плоскость цилиндра, вертикальные прямые накрывают “шов” продольного разреза цилиндра, полоса между двумя соседними из этих прямых является развёрткой цилиндра. Концы D ломаной на рис. 4 находятся на соседних вертикалях, потому как цикл L делает один оборот вокруг цилиндра.

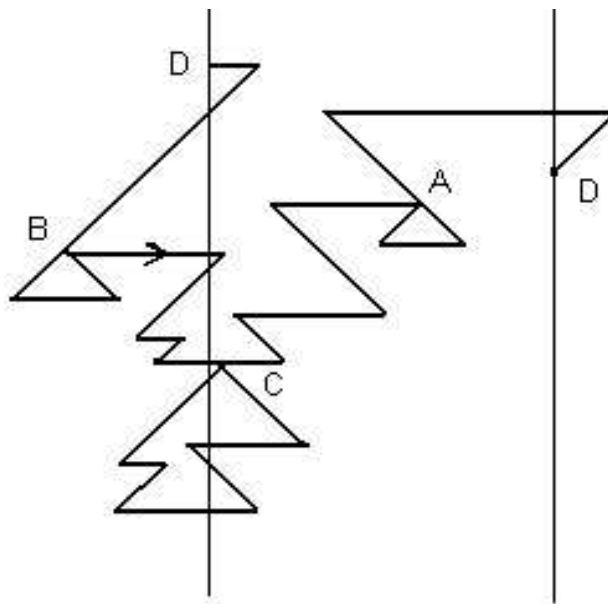


Рис. 4

Правильный цикл L не может иметь самопересечений, но может дважды проходить через некоторые целочисленные точки, которые называем точками касания.

На правильном цикле L точки касания могут быть только трёх следующих типов: а) внутренний узел $(-e_1)$ -отрезка, являющийся одновременно концевой точкой $(e_1 + e_2)$ -отрезка и начальной точкой следующего за ним e_2 -отрезка (точка A рис. 4); б) внутренний узел e_2 -отрезка, являющийся одновременно концевой точкой $(-e_1)$ -отрезка и начальной точкой следующего за ним $(e_1 + e_2)$ -отрезка (точка B рис. 4); в) узел при вершине угла в виде конечной точки $(e_1 + e_2)$ -отрезка и начальной точки e_2 -отрезка, являющийся одновременно вершиной угла в виде конечной точки $(-e_1)$ -отрезка и начальной точки $(e_1 + e_2)$ -отрезка (точка C рис. 4).

Множество белых точек, отвечающих правильному циклу L , связно неограниченно и располагается ниже L . Множество чёрных точек состоит из нескольких ограниченных односвязных областей и связной неограниченной области, располагающейся выше L .

Каждая из $2m$ прямых 3-сети на цилиндре разбивается на белые и чёрные отрезки и на два луча – один белый, другой чёрный.

Далее через M обозначим суммарную длину всех $(e_1 + e_2)$ -отрезков правильного цикла L , через K – суммарную длину всех e_2 -отрезков на L и через δ – суммарную длину всех $(-e_1)$ -отрезков на L . Тогда, очевидно, имеем: $M(1, 1) + K(0, -1) + \delta(-1, 0) = (m, m - s)$, или

$$M = m + \delta, \quad K = s + M - m = s + \delta. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – правильный цикл на цилиндре $Z = \mathbb{R}^2/\Gamma$. Тогда совокупность узлов $S = S(L)$, состоящая из внутренних узлов горизонтальных отрезков L и крайних нижних узлов наклонных отрезков, будет минимальным порождающим набором. Обратно, любой минимальный порождающий набор представляется в таком виде для некоторого правильного цикла L .

Для доказательства данной простой на первый взгляд теоремы в работе [7] потребовалось 4 страницы. По ходу доказательства устанавливается, что для правильного цикла L множество $|S(L)|$ состоит из всех целочисленных точек чёрного цвета и всех целочисленных точек, расположенных непосредственно на цикле L . Белые целочисленные точки в множество $|S(L)|$ не входят.

Поскольку на правильном цикле L имеет место строгое чередование наклонных и горизонтальных отрезков, мощность $|S(L)|$ соответствующего минимального порождающего набора $S(L)$ равна суммарной длине горизонтальных отрезков цикла L , обозначенной выше через M . Согласно условию (5) имеем: $|S| = M \geq m$.

При $m \geq 3$ мощностью минимального порождающего набора может быть любое целое, не меньшее m . В самом деле, $S_m = \{0, s, 2s, \dots, (m-1)s\}$ – не уменьшаемый порождающий набор мощности m , а для $i > m$ по индукции строится не уменьшаемый порождающий набор $S_i = (S_{i-1} \setminus \{\min S_{i-1}\}) \cup \{\min S_{i-1} - m, \min S_{i-1} - m + s\}$ мощности i .

Для базисных порождающих наборов, когда $|S| = m$, из равенств (5) получаем $\delta = 0$. Тогда на соответствующем правильном цикле нет $(-e_1)$ -отрезков, суммарная длина $(e_1 + e_2)$ -отрезков равна $M = m$, а суммарная длина e_2 -отрезков на этом цикле равна $K = s$.

Множество так устроенных правильных циклов L находится в естественной биекции с множеством ожерелий (см. [17]) из $m + s$ бусинок двух цветов – m бусинок одного цвета ($(e_1 + e_2)$ -отрезки длины один) и s бусинок другого цвета (e_2 -отрезки длины один). С учётом взаимной простоты m и s это замечание позволяет сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Число базисных наборов $N_{m,s}$ для трёхчленных рекуррентных последовательностей с параметрами $m, s, 0 < s < m, (s, m) = 1$, равно

$$N_{m,s} = \frac{1}{m+s} \binom{m+s}{s} = \frac{1}{m} \binom{m-1+s}{m-1}.$$

Как видно из этой теоремы, число базисных наборов увеличивается с увеличением s . При $s = 1$ базисный набор только один, он состоит из m подряд идущих номеров.

ТЕОРЕМА 3. Любой базисный набор для трёхчленной рекуррентной последовательности с параметрами m, s , $0 < s < m$, $(s, m) = 1$, представляется объединением упорядоченной совокупности из $r \leq s$ конечных арифметических прогрессий с разностью s : $a_i, a_i + s, \dots, b_i - s, b_i$, $i = 0, 1, \dots, r - 1$, в которой $a_{(i+1) \bmod r} < b_i + s$, $b_i + s - a_{(i+1) \bmod r} \equiv 0 \pmod m$ для всех $i = 0, 1, \dots, r - 1$, и $\sum_{i=0}^{r-1} (b_i + s - a_{(i+1) \bmod r}) = sm$. Обратно, любой набор указанного вида является базисным.

Арифметическими прогрессиями в формулировке этой теоремы являются целочисленные точки отдельных горизонтальных отрезков соответствующего правильного цикла. Число горизонтальных отрезков обозначено через r . Крайние правые точки этих отрезков из указанных арифметических прогрессий исключаются.

4. Базисные наборы в случае $k \geq 4$

Здесь нам потребуется гомоморфизм $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $\pi(z) = z \pmod m$, $z \in \mathbb{Z}$. Если $S \subset \mathbb{Z}$ – базисный набор для рекуррентной последовательности (3), то $|S| = m$ и $|S \cap \pi^{-1}(y)| = 1$ для всех $y \in \mathbb{Z}_m$. В силу этого S является образом $\mathbb{Z}_m$ при некотором отображении $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$, удовлетворяющем условию $(\sigma \circ \pi)(y) = \pi(\sigma(y)) = y$ для всех $y \in \mathbb{Z}_m$, $S = \text{Im} \sigma$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Множество $S = \text{Im} \sigma$ для отображения $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ с условием $(\sigma \circ \pi)(y) = \pi(\sigma(y)) = y$, $y \in \mathbb{Z}_m$, является базисным набором рекуррентной последовательности (3) тогда и только тогда, когда

$$\sigma(y + \pi(s_i)) \leq \sigma(y) + s_i \quad (6)$$

для всех $y \in \mathbb{Z}_m$ и $i = 1, 2, \dots, k - 2$. А в случае выполнения неравенств (6) имеем:

$$[S] = \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_m} (\sigma(y) + m\mathbb{N}_0). \quad (7)$$

При конкретном формировании базисных наборов, как и в § 3, воспользуемся представлением множества целых чисел $\mathbb{Z}$ точками $(k - 1)$ -мерного цилиндра $C^{k-1} = T^{k-2} \times \mathbb{R}$, где T^{k-2} – $(k - 2)$ -мерный тор. По аналогии с гомоморфизмом (4), рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}^{k-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi(z_0, z_1, \dots, z_{k-2}) = mz_0 + \sum_{i=1}^{k-2} s_i z_i$, являющийся эпиморфизмом, и потому $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{k-1} / \Gamma$, $\Gamma = \ker \varphi$.

Используя вложение $\mathbb{Z}^{k-1} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{k-2} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-2} = \mathbb{R}^{k-1}$, получаем вложение множества всех целых чисел $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{k-1} / \Gamma$ в $C^{k-1} = \mathbb{R}^{k-1} / \Gamma = T^{k-2} \times \mathbb{R}$. Здесь $T^{k-2} = \ker \Phi / \Gamma$, а $\Phi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) = mx_0 + \sum_{i=1}^{k-2} s_i x_i$. Точке $(z_0, z_1, \dots, z_{k-2}) + \Gamma$ на цилиндре отвечает число $\varphi(z_0, z_1, \dots, z_{k-2})$.

Прямую $\mathbb{R}$ в произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-2}$ удобно представлять направленной вертикально вверх, а пространство $\mathbb{R}^{k-2}$ считать горизонтальным.

Числа $z \in \mathbb{Z}$ будем считать приписанными к соответствующим целочисленным точкам цилиндра C^{k-1} и его односвязной накрывающей $\mathbb{R}^{k-1}$. В последнем случае одно и то же число z приписывается ко всем точкам некоторого смежного класса по подгруппе Γ . Здесь и далее целочисленными считаем точки с целочисленными координатами или смежные классы по Γ , содержащие такие точки.

Далее часто используется проекция ρ пространства $\mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-2}$ на $\mathbb{R}^{k-2}$ параллельно $\mathbb{R}$, $\rho(\alpha, x) = x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{k-2}$.

Положим $\tilde{\Gamma} = \rho(\Gamma)$, $\tilde{T}^{k-2} = \mathbb{R}^{k-2}/\tilde{\Gamma}$, $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathbb{R}^{k-2} \subset \tilde{\Gamma}$. Нетрудно убедиться, что $\Gamma_0 = \ker \psi$, где $\psi : \mathbb{Z}^{k-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\psi(z_1, \dots, z_{k-2}) = \sum_{i=1}^{k-2} s_i z_i$. В этом случае $\tilde{\Gamma} = \ker(\psi \circ \pi)$.

Пусть $\text{НОД}(s_1, \dots, s_{k-2}) = d$. Тогда $\text{Im } \psi = d\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z}^{k-2}/\Gamma_0 \cong d\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{k-2}/\Gamma_0 = C^{k-2}, \text{НОД}(d, m) = 1, \text{Im}(\psi \circ \pi) = \mathbb{Z}_m,$$

$\mathbb{Z}^{k-2}/\tilde{\Gamma} \cong \mathbb{Z}_m \subset \mathbb{R}^{k-2}/\tilde{\Gamma} = \tilde{T}^{k-2}$. Таким образом, вершинам $(i, \mathbb{Z}^{k-2})$ приписаны числа из $im + d\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$. Учитывая взаимную простоту чисел m и d , имеем: $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{d-1} (im + d\mathbb{Z})$, $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \langle (d, y) \rangle$ для некоторого $y \in \mathbb{Z}^{k-2}$.

К целочисленным точкам $(k-2)$ -мерного цилиндра $C^{k-2} = \mathbb{R}^{k-2}/\Gamma_0$, вложенного в $C^{k-1} = \mathbb{R}^{k-1}/\Gamma$ в виде винтовой гиперповерхности, приписаны числа из $d\mathbb{Z}$. Это же относится и к целочисленным точкам $(k-2)$ -мерного цилиндра $im + C^{k-2} = im + \mathbb{R}^{k-2}/\Gamma_0$, которым приписаны числа из $im + d\mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d-1$. Данные d винтовых гиперповерхностей покрывают все целочисленные точки C^{k-1} , т. е. всё множество $\mathbb{Z}$. Если точке $x \in \mathbb{R}^{k-2}$ приписано число md , то $\tilde{\Gamma} = \Gamma_0 \oplus \langle x \rangle$ и $\tilde{T}^{k-2} = \mathbb{R}^{k-2}/\tilde{\Gamma} = C^{k-2}/\langle md \rangle$.

Отображение $\rho : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-2}$ индуцирует отображение $\tilde{\pi} : C^{k-1} \rightarrow \tilde{T}^{k-2}$, при этом $z \in \mathbb{Z} \subset C^{k-1}$ переходит в $z(\text{mod } m) \in \mathbb{Z}_m \subset \tilde{T}^{k-2}$, т. е. $\tilde{\pi}|_{\mathbb{Z}} = \pi$. Отметим, что $\tilde{\pi}|_{im + C^{k-2}}$ является бесконечнолистным накрытием тора $\tilde{T}^{k-2}$ при каждом $i = 0, 1, \dots, d-1$.

Пространство $\mathbb{R}^{k-2}$ естественным образом разбивается на элементарные ячейки в виде единичных $(k-2)$ -мерных кубов с целочисленными вершинами, их рёбра параллельны главным осям. Такое разбиение переносится также на цилиндры $im + C^{k-2}$, $i = 0, 1, \dots, d-1$, и на тор $\tilde{T}^{k-2}$. Число $z \in im + C^{k-2}$ дополнительно будем вписывать в куб с вершинами $z, z + s_j$, $j = 1, \dots, k-2$. Напомним, что в соответствии с основной конструкцией число $z = im + \sum_{j=1}^{k-2} s_j z_j$ приписывалось точке $(i, z_1, \dots, z_{k-2}) + \Gamma \in im + C^{k-2} \subset C^{k-1}$, и эту точку согласно установленному вложению $\mathbb{Z} \subset C^{k-1}$ стали обозначать через z . В результате дополнительно в элементарную ячейку с вершиной z вписываем число z . Аналогично, вычет $v \in \mathbb{Z}_m \subset \tilde{T}^{k-2}$ вписываем в куб с вершинами $v, v + \pi(s_j)$, $j = 1, \dots, k-2$, (остальные $2^{k-2} - k + 1$ вершины куба по $k-1$ указанным восстанавливаются однозначно).

Замкнутую гиперповерхность M в цилиндре C^{k-2} , составленную из $(k-3)$ -мерных граней элементарных ячеек, будем называть монотонной, если она гомотопна тору $\tilde{T}^{k-3} = (\mathbb{R}^{k-2} \cap \ker \Phi)/\Gamma_0$ цилиндра C^{k-2} , разбивает этот цилиндр на две части – верхнюю и нижнюю, и для любой точки $z \in M \cap (d\mathbb{Z})$ все точки вида $z + \sum_{i=1}^{k-2} s_i t_i$, $t_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, k-2$, содержатся или на самой гиперповерхности M или в верхней части цилиндра C^{k-2} . По определению замкнутая гиперповерхность не имеет самопересечений, и окрестность любой её точки гомеоморфна окрестности $\mathbb{R}^{k-3}$ – внутренности $(k-3)$ -мерного шара. Далее $(k-3)$ -мерные грани элементарных ячеек будем называть стенками.

При наличии каких-либо d монотонных гиперповерхностей $M_0, \dots, M_{d-1}$ в C^{k-2} будем рассматривать также семейство гиперповерхностей $U = \{im + M_j | i \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, \dots, d-1\}$. Возможно совпадающие гиперповерхности этого семейства различаем по их номеру $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, d-1\}$. Каждой стенке β приписываем вес $h(\beta)$, равный числу гиперповерхностей семейства U , которым она принадлежит: $h(\beta) = |\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, d-1\} | \beta \subset im + M_j\}|$.

Семейство U является $\langle md \rangle$ -инвариантным, поэтому введенная система весов переносится на стенки $\tilde{\beta}$ тора $\tilde{T}^{k-2}$. Для $\tilde{\beta} \subset \tilde{T}^{k-2}$ имеем:

$$h(\tilde{\beta}) = \sum_{j=0}^{d-1} |[\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\beta}) \cap M_j]|.$$

(Через $||\dots||$ обозначаем число стенок в соответствующем множестве.) Систему весов на торе $\tilde{T}^{k-2}$ можно определять как и на цилиндре C^{k-2} , используя вместо U семейство $\tilde{U} = \{\tilde{\pi}(M_j) | j = 0, 1, \dots, d-1\}$, при этом нужно только учитывать, что в гиперповерхности $\tilde{\pi}(M_j)$, $j = 0, 1, \dots, d-1$, могут возникать кратные стенки $\tilde{\beta}$, накрываемые несколькими ячейками из M_j . Соответствующую кратность обозначим через $\lambda_j(\tilde{\beta}) = |[\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\beta}) \cap M_j]|$. Для стенок β в C^{k-2} кратности равны нулю или единице: $\lambda_{ij}(\beta) = 1$, если $\beta \subset im + M_j$, и $\lambda_{ij}(\beta) = 0$ иначе. В этих обозначениях для $\tilde{\beta} \subset \tilde{T}^{k-2}$ имеем: $h(\tilde{\beta}) = \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j(\tilde{\beta})$, а для $\beta \subset C^{k-2}$ соответственно имеем:

$$h(\beta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_{ij}(\beta) = \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j(\tilde{\pi}(\beta)) = h(\tilde{\pi}(\beta)).$$

Обозначим, наконец, вес стенки между ячейками v и $v + \pi(s_i)$ тора $\tilde{T}^{k-2}$ через $h_i(v)$, $i = 1, \dots, k-2$.

ТЕОРЕМА 5. Для любых d монотонных гиперповерхностей на цилиндре C^{k-2} равенства: $\sigma(0) = 0$, $\sigma(v + \pi(s_i)) = \sigma(v) + s_i - h_i(v)t$, $v \in \mathbb{Z}_m$, $i = 1, \dots, k-2$, корректным образом задают отображение $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$, для которого $\text{Im } \sigma$ является базисным набором. Обратно, любой базисный набор S после возможного сдвига на целое число может быть реализован таким способом для некоторых монотонных гиперповерхностей $M_0, M_1, \dots, M_{d-1}$ в C^{k-2} .

Доказательство этой теоремы на порядок сложнее доказательства теоремы 1, в работе [7] оно потребовало 6 страниц. Из доказательства следует, в частности, что в качестве монотонных гиперповерхностей $M_0, M_1, \dots, M_{d-1}$ на цилиндре C^{k-2} можно брать не произвольные, а только “непересекающиеся”, но, возможно, совпадающие и касающиеся друг друга по нескольким стенкам, при этом следующие друг за другом гиперповерхности $M_1, \dots, M_{d-1}$ находятся между M_0 и $M_d = md + M_0$, гиперповерхность M_i находится между M_{i-1} и M_{i+1} , $i = 1, \dots, d-1$. Гиперповерхности $\tilde{\pi}(M_0), \tilde{\pi}(M_1), \dots, \tilde{\pi}(M_{d-1})$ на торе тоже гомотопны тору $\tilde{T}^{k-3} = (\mathbb{R}^{k-2} \cap \ker \Phi) / \Gamma_0$ и следуют друг за другом, за $\tilde{\pi}(M_{d-1})$ следует $\tilde{\pi}(M_0)$.

Оценка числа базисных наборов (рассматриваемых, напомним, с точностью до сдвига) является отдельной задачей. Пока же, в соответствии с теоремой 2, можно утверждать, что при $k = 4$, $\text{НОД}(s_1, s_2) = 1$ и при достаточно больших $m \geq m(s_1, s_2)$ число базисных наборов равно $\frac{1}{s_1+s_2} \binom{s_1+s_2}{s_1}$. Если же $\text{НОД}(s_1, s_2) = d > 1$, то при $m \rightarrow \infty$ и ограниченных s_1, s_2 асимптотически число базисных наборов совпадает с $\left[\frac{d}{s_1+s_2} \binom{(s_1+s_2)/d}{s_1/d} \right]^d \frac{m^{d-1}}{d!}$. При $k \geq 5$ и ограниченных $s_1, \dots, s_{k-2}$ это число имеет порядок $O(m^{d-1})$. Если $s_1 = 1$, то при любом $k \geq 3$ базисный набор только один, состоит из m подряд идущих номеров.

5. Совершенные базисные наборы

Если в соотношении (3) отображение f является подстановочным по первой переменной при любой фиксации остальных $k - 2$ переменных, то для некоторого отображения $\tilde{f} : X^{k-1} \rightarrow X$ наряду с (3) справедливо соотношение

$$x_i = \tilde{f}(x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}}, x_{i+m}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

что указывает на возможность продолжать рекурренту в обратную сторону. В этом случае для конечного подмножества $S \subset \mathbb{Z}$, наряду с $[S] \subset \mathbb{Z}$, будем рассматривать и обозначать через $[[S]] \subset \mathbb{Z}$ совокупность всех номеров $i \in \mathbb{Z}$, для которых x_i представимо формулой, содержащей кроме скобок и запятых символы $\tilde{f}$ и x_t , $t \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для рекуррентной последовательности (3), в которой отображение f является подстановочным по первой переменной при любой фиксации остальных $k - 2$ переменных, подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ мощности m назовём совершенным базисным набором, если для некоторого достаточно большого $T \in \mathbb{N}$ имеем: $[S] \supset T + \mathbb{N}$ и $[[S]] \supset -(T + \mathbb{N})$.

Перепишав соотношение (8) в виде

$$x_{j-m} = \tilde{f}(x_{j-(m-s_1)}, \dots, x_{j-(m-s_{k-2})}, x_j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

по аналогии с теоремой 4 можно утверждать, что для множества $S = \text{Im} \sigma$, отвечающего отображению $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ с условием $\pi(\sigma(y)) = y$, $y \in \mathbb{Z}_m$, множество $[[S]]$ содержит $T - \mathbb{N} = \{T - 1, T - 2, \dots\}$ при некотором $T \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(y) - m + s_i \leq \sigma(y + \pi(s_i)) \quad (9)$$

для всех $y \in \mathbb{Z}_m$ и $i = 1, \dots, k - 2$. Также в случае выполнения неравенств (9), имеем

$$[[S]] = \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_m} (\sigma(y) - m\mathbb{N}_0). \quad (10)$$

При одновременном выполнении неравенств (6) и (9), с учётом того, что $\pi(\sigma(y) - m + s_i) = \pi(\sigma(y + \pi(s_i))) = \pi(\sigma(y) + s_i)$, $y \in \mathbb{Z}_m$, $i = 1, \dots, k - 2$, для $\sigma(y + \pi(s_i))$ имеются только две возможности: либо $\sigma(y + \pi(s_i)) = \sigma(y) + s_i$, либо $\sigma(y + \pi(s_i)) = \sigma(y) + s_i - m$. В этом случае, согласно равенствам (7) и (10), получаем: $[S] \cup [[S]] = \mathbb{Z}$, $[S] \cap [[S]] = S$.

В результате справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Множество $S = \text{Im} \sigma$ для отображения $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ с условием $\pi(\sigma(y)) = y$, $y \in \mathbb{Z}_m$, является совершенным базисным набором рекуррентной последовательности (3) тогда и только тогда, когда для всех $y \in \mathbb{Z}_m$ и $i = 1, \dots, k - 2$ либо $\sigma(y + \pi(s_i)) = \sigma(y) + s_i$, либо $\sigma(y + \pi(s_i)) = \sigma(y) + s_i - m$. В случае выполнения этого условия справедливы равенства: $[S] \cup [[S]] = \mathbb{Z}$, $[S] \cap [[S]] = S$.

В условиях теоремы 5 совершенность базисного набора равносильна, тем самым, требованиям: $h_i(v) \in \{0, 1\}$, $v \in \mathbb{Z}_m$, $i = 1, \dots, k - 2$. Другими словами, задающие отображение $\sigma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ и следующие друг за другом гиперповерхности $\tilde{\pi}(M_0)$, $\tilde{\pi}(M_1)$, $\dots$, $\tilde{\pi}(M_{d-1})$ на торе $\tilde{T}^{k-2}$ не только попарно “не пересекаются”, но и исключается

наличие стенок, принадлежащих одновременно двум и более из этих гиперповерхностей, причём ограничения $\tilde{\pi}|_{M_i}$, $i = 0, 1, \dots, d-1$, являются гомеоморфизмами между M_i и $\tilde{\pi}(M_i)$. Последнее означает, что у $\tilde{\pi}(M_i)$ нет кратных стенок.

Особенно просто совершенные базисные наборы устроены при $k = 3$. Они отождествляются с ожерельями из s и $m - s$ бусинок. Как и в случае теоремы 2 для этого достаточно обратиться к введённым в § 3 3-сетям на бесконечном двумерном цилиндре. По аналогии с теоремами 2 и 3 убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Для трёхчленной рекуррентной последовательности порядка m подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ мощности m является совершенным базисным набором тогда и только тогда, когда S находится на замкнутом гомотопном окружности S цикле, состоящем из $(e_1 + e_2)$ -отрезков и $(-e_1)$ -отрезков общей длиной m . Совокупность $(e_1 + e_2)$ -отрезков на таком цикле имеет общую длину $m - s$, а совокупность $(-e_1)$ -отрезков имеет общую длину s . Число совершенных базисных наборов, рассматриваемых с точностью до сдвигов, равно $\frac{1}{m} \binom{m}{s}$.*

Согласно теореме 3 можно также утверждать, что любой совершенный базисный набор для трёхчленной рекуррентной последовательности с параметрами m, s , $0 < s < m$, $(s, m) = 1$, представляется объединением упорядоченной совокупности из s конечных арифметических прогрессий с разностью s и общей длиной m : $a_i, a_i + s, \dots, b_i - s, b_i$; $b_i - a_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, s-1$, $\sum_{i=0}^{s-1} \left(\frac{b_i - a_i}{s} + 1 \right) = m$, в которой $b_i - a_{(i+1) \bmod s} = m - s$ для всех $i = 0, 1, \dots, s-1$. Обратно, любое конечное множество целых чисел мощности m указанного вида является совершенным базисным набором. Иначе ещё можно сказать, что совершенный базисный набор при $k = 3$ является конечной последовательностью целых чисел длины m , в которой каждый следующий член, начиная со второго, либо больше предыдущего на s , либо меньше предыдущего на $m - s$, а самый первый член в этой последовательности либо больше её последнего члена на s , либо меньше его на $m - s$.

6. Общий случай порождающих наборов рекуррентных последовательностей

Обратим внимание, что при наличии дополнительного к (3) условия (8) понятие совершенных базисных наборов, не смотря на красивое их описание, связанное с ожерельями, является несколько искусственным. С практической точки зрения логичней для подмножества $S \subset \mathbb{Z}$ рассматривать в качестве его расширения подмножество $\bar{S} \subset \mathbb{Z}$, представляющее собой совокупность всех номеров $i \in \mathbb{Z}$, для которых x_i представимо формулой, содержащей (кроме скобок и запятых) символы $f, \tilde{f}$ и x_t , $t \in S$, а базисными наборами логичней считать те подмножества S мощности m , для которых $\bar{S} = \mathbb{Z}$. Множество базисных наборов в этом смысле гораздо шире множества совершенных базисных наборов, являющегося пересечением множества наборов, определяемых неравенствами (6), и множества наборов, определяемых неравенствами (9).

Обобщая приведённую здесь точку зрения, следует рассматривать подмножество

$$\Theta \subset \{0, 1, \dots, k-2\},$$

состоящее из всех таких номеров $j \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, что отображение

$$f(x_i, x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}})$$

подстановочно по переменной x_{i+s_j} при любой фиксации остальных $k-2$ переменных. Если $j \in \Theta$, то для некоторого отображения

$$f^{(j)} : X^{k-1} \rightarrow X$$

наряду с (3) справедливо соотношение

$$x_{i+s_j} = f^{(j)}(x_i, x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{j-1}}, x_{i+s_{j+1}}, \dots, x_{i+s_{k-2}}, x_{i+m}), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Если $0 \in \Theta$, то $f^{(0)} = \tilde{f}$.

Определившись с Θ , для подмножества $S \subset \mathbb{Z}$ нужно рассматривать его расширение $\bar{S} \subset \mathbb{Z}$, представляющее собой совокупность всех номеров $i \in \mathbb{Z}$, для которых x_i представимо формулой, содержащей (кроме скобок и запятых) символы: f ; $f^{(j)}$, $j \in \Theta$; x_t , $t \in S$, а Θ -базисными наборами нужно считать такие подмножества S мощности m , что $\bar{S} \supset T + \mathbb{N}$ при некотором достаточно большом T . В этом случае, если $0 \in \Theta$, то автоматически будем получать условие $\bar{S} = \mathbb{Z}$. В настоящем параграфе рассмотрен только случай, когда $\Theta = \emptyset$. Важными, на наш взгляд, являются следующие два крайних случая: $\Theta = \{0\}$ и $\Theta = \{0, 1, \dots, k-2\}$. Следующий параграф посвящён неуменьшаемым множествам $S \subset \mathbb{Z}$, $|S| \geq m$, для которых $\bar{S} = \mathbb{Z}$, в случае $k = 3$ и $\Theta = \{0, 1\}$.

7. Минимальные порождающие наборы трёхчленных рекуррентных последовательностей с квазигрупповыми рекуррентными соотношениями

7.1. В случае трёхчленных рекуррентных последовательностей соотношение (3) предстаёт в виде: $x_{i+m} = f(x_i, x_{i+s})$, $i \in \mathbb{Z}$, $0 < s < m$, $(s, m) = 1$. Отображение $f : X^2 \rightarrow X$ здесь задаёт квазигрупповую операцию на множестве X . Неуменьшаемые порождающие множества $S \subset \mathbb{Z}$, когда $\bar{S} = \mathbb{Z}$, введённые в § 6, в настоящем параграфе рассматриваются относительно $\Theta = \{0, 1\}$. Будем называть их (m, s) -базисами множества целых чисел $\mathbb{Z}$.

Понятие (m, s) -базиса удобно связывать с частичной бинарной операцией $\varpi_{m,s}$ на множестве $\mathbb{Z}$. Значение $\varpi_{m,s}(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, определено только при $|z_1 - z_2| \in \{s, m, m-s\}$, когда имеется единственное $i \in \mathbb{Z}$ такое, что $\{z_1, z_2\} \subset \{i, i+s, i+m\}$, и тогда $\varpi_{m,s}(z_1, z_2) = \{i, i+s, i+m\} \setminus \{z_1, z_2\}$.

Для подмножества $S \subset \mathbb{Z}$ через $[S] \subseteq \mathbb{Z}$ обозначим минимальное содержащее S подмножество в $\mathbb{Z}$, замкнутое относительно операции $\varpi_{m,s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Конечное подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ назовём (m, s) -базисом, если $[S] = \mathbb{Z}$, а любое собственное подмножество S этим свойством не обладает.

Если S – (m, s) -базис, то $l + S = \{l + z \mid z \in S\}$ тоже будет (m, s) -базисом для всех $l \in \mathbb{Z}$. Базисные множества рассматриваем поэтому с точностью до сдвигов на целые числа.

В формулировке основной теоремы параграфа используется специальная функция $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Для определения $\psi(m)$, $m \in \mathbb{N}$, аргумент m зададим в виде суммы чисел Фибоначчи (см., например, [39]) φ_i , $i \geq 0$: $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 2$, $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$, $n \geq 2$. Если $m = \varphi_{n_0} + \varphi_{n_1} + \varphi_{n_2} + \dots$, $n_0 \mathbf{g} n_1 \mathbf{g} n_2 \mathbf{g} \dots$, то $\psi(m) = 2^{n_0} + 2^{n_1+1} + 2^{n_2+2} + \dots + 2^{n_i+i} + \dots$. Выражение $n_i \mathbf{g} n_{i+1}$ здесь означает, что $n_i - n_{i+1} \geq 2$, $i \geq 0$.

Представление натурального m такой суммой чисел Фибоначчи всегда существует и единственно [39]. В качестве φ_{n_0} берётся максимальное число Фибоначчи, не превосходящее m , в качестве φ_{n_1} – максимальное, не превосходящее $m - \varphi_{n_0}$, и т.д. Единственность проверяется по индукции, поскольку $\varphi_{n_0} \leq m < \varphi_{n_0+1}$. Для такой суммы используется также запись

$$m = 1c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0 = \varphi_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i \quad (11)$$

с $n = n_0 \geq 0$, в которой нет двух соседних единиц среди $c_i \in \{0, 1\}$ и обязательно $c_{n-1} = 0$. Запись (11) можно представлять ещё в виде

$$m = 1(\nu_l)1(\nu_{l-1})1 \dots 1(\nu_1)1(\nu_0), \quad (12)$$

где через (ν_j) обозначена серия нулей длины ν_j , $j = 0, 1, \dots, l$, $l \geq 0$, причём $\nu_j > 0$ для $j \geq 1$. При таком представлении m запись $\psi(m)$ в двоичной системе счисления имеет вид

$$\psi(m) = 1(\nu_l - 1)1(\nu_{l-1} - 1)1 \dots 1(\nu_1 - 1)1(\nu_0 + l). \quad (13)$$

Как видим, для получения $\psi(m)$ достаточно по одному нулю из каждой серии нулей между двумя единицами в фибоначчьевом представлении m в (12) перенести в самый конец – в область младших разрядов, а полученную в результате последовательность нулей и единиц (13) воспринимать как двоичное представление натурального числа $\psi(m)$.

Для функции $\psi(m)$ при $m \geq 2$ в работе [8] доказываются неравенства

$$0.719 m^\tau < \psi(m) < \frac{\sqrt{5}^\tau}{4} m^\tau + \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n \alpha^4(\alpha - 1)} < 0.797 m^\tau + \frac{1}{4}, \quad (14)$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\tau = \log_\alpha 2$, $\varphi_n - \varphi_{n-4} < m \leq \varphi_{n+1} + \varphi_{n-3}$ и $\varphi_i = 0$ при $i < 0$. Здесь $\sqrt{5}^\tau/4 \in (0.7967, 0.7968)$; $\alpha^2/2 \in (1.3, 1.31)$; $\alpha^4(\alpha - 1) \in (4.236, 4.2361)$.

Верхняя оценка в (14) достаточно точная, по крайней мере, для $m = \varphi_n$ значение $\psi(\varphi_n) = 2^n$ является ближайшим целым к $\frac{\sqrt{5}^\tau}{4}(\varphi_n)^\tau$. К сожалению, для нижней оценки в (14) можно утверждать лишь, что $0.721 m^\tau > \psi(m)$ для неограниченного множества значений m вида $m = \varphi_n + \varphi_{n-3} + \varphi_{n-6} + \dots + \varphi_{n-3i} + \dots$. Нам не известно

значение нижнего предела $c_* = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\psi(m)}{m^\tau} \in (0.719, 0.721)$, и мы не располагаем доказательством того, что $c_* m^\tau \leq \psi(m)$ хотя бы для достаточно больших m .

Довольно объёмная работа [8] практически целиком посвящена доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 8. *Если S – (m, s) -базис, то $m \leq |S| \leq \psi(m)$. Обратно, для любого целого n , $m \leq n \leq \psi(m)$, имеется (m, s) -базис мощности n .*

В случае квазигрупповых рекуррентных соотношений

$$x_{i+m} = f(x_i, x_{i+s_1}, \dots, x_{i+s_{k-2}}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{k-2} < s_{k-1} = m, \text{НОД}(s_1, s_2, \dots, s_{k-2}, m) = 1,$$

в работе [8] аналогичным образом определяются $(m, s_1, \dots, s_{k-2})$ -базисы и для $k \geq 4$. При $k = 4$, в отличие от сформулированной теоремы, существуют пары s_1, s_2 , при которых (m, s_1, s_2) -базисы могут иметь сколь угодно большую мощность. В то же время при любых m и $k \leq m + 1$ существуют такие наборы $s_1, s_2, \dots, s_{k-2}$, что мощности $(m, s_1, s_2, \dots, s_{k-2})$ -базисов ограничены константой, зависящей от m .

7.2. Основным средством для доказательства теоремы 8 служит 3-сеть на бесконечном цилиндре, введённая в § 3. Она предоставляет удобное правило построения множества $[S]$ для каждого конкретного подмножества $S \subset \mathbb{Z}$. Для этого заштрихуем половину треугольников, на которые цилиндр разбивается нашей 3-сетью. Заштриховываем треугольники с вершинами $\{i, i + s, i + m\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Треугольники с вершинами $\{i, i + s, i - m\}$, $i \in \mathbb{Z}$, оставляем светлыми. Светлые и заштрихованные треугольники будем называть элементарными. Можно считать их равносторонними с углами по 60° и длиной сторон 1.

Правило построения множества $[S]$ заключается в следующем. Прежде всего, $S \subset [S]$. Далее, если две вершины заштрихованного треугольника входят в $[S]$, то третья вершина этого треугольника тоже должна входить в $[S]$.

Описание возможных (m, s) -базисов начнём с введения необходимых понятий, относящихся к треугольникам. Доказательства всех используемых при этом утверждений имеются в работе [8].

Треугольники со сторонами, находящимися на прямых 3-сети, у которых внутри при угловых вершинах стоят заштрихованные элементарные треугольники, называем стандартными. Стандартный треугольник обозначаем через $\Delta_t(i)$ или Δ_t , если его угловыми вершинами являются $i, i + ts, i + tm$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$. Длину стороны стандартного треугольника Δ обозначаем через $\tau(\Delta)$: $\tau(\Delta_t(i)) = t$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$. Считаем $\Delta_0(i) = \{i\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Заштрихованными являются элементарные треугольники $\Delta_1(i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

При $t \leq m - 1$ треугольники $\Delta_t(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, располагаются на цилиндре без самопересечений. Треугольники $\Delta_t(i)$ при $t \geq m$ являются самопересекающимися на цилиндре. Уже при $t = m$ вершина $i + ms$ треугольника $\Delta_m(i)$ оказывается на противоположной стороне этого треугольника (с концами i и $i + m^2$). При $t \geq m$ треугольники $\Delta_t(i)$ охватывают цилиндр полностью, они гомологичны окружности C .

Непересекающиеся треугольники $\Delta_{t_1}(i_1)$, $\Delta_{t_2}(i_2)$ считаем близкими, если пересекаются их 0.5-окрестности. Под 0.5-окрестностью треугольника понимается объединение

всех замкнутых кругов диаметра 1 с центрами в этом треугольнике. Для близких треугольников существуют целые $z_1 \in \Delta_{t_1}(i_1)$ и $z_2 \in \Delta_{t_2}(i_2)$, расстояние между которыми равно 1. В этом случае z_1, z_2 являются соседними вершинами 3-сети.

Обратим внимание, что хотя треугольник $\Delta_{m-1}(i)$ и не является самопересекающимся, но его 0.5-окрестность уже самопересекающаяся – охватывает цилиндр полностью. Угловая вершина $i + (m-1)s$ треугольника $\Delta_{m-1}(i)$ является соседней на 3-сети для точек $i + (s-1)m$ и $i + sm$, находящихся на противоположной стороне треугольника с концами i и $i + (m-1)m$.

Последние замечания позволяют заключить, что $[\Delta_t \cap \mathbb{Z}] = \mathbb{Z}$ при $t \geq m-1$ и $[\Delta_t \cap \mathbb{Z}] = \Delta_t \cap \mathbb{Z}$ при $t \leq m-2$.

Построение множества $[S]$ происходит довольно эффективно благодаря специальной операции $*$ над парой стандартных треугольников Δ', Δ'' с $\tau(\Delta') \leq m-2$ и $\tau(\Delta'') \leq m-2$, которые пересекаются или являются близкими. Результатом операции $*$ является минимальный стандартный треугольник $\Delta = \Delta' * \Delta''$, содержащий треугольники Δ' и Δ'' . Нетрудно убедиться, что $[(\Delta' \cap \mathbb{Z}) \cup (\Delta'' \cap \mathbb{Z})] = [\Delta \cap \mathbb{Z}]$. Если $\tau(\Delta) \geq m-1$, то левая и правая части в последнем равенстве совпадают с $\mathbb{Z}$. В редких случаях, когда объединение 0.5-окрестностей треугольников Δ', Δ'' целиком охватывает цилиндр (гомологично окружности C), треугольник Δ задаётся неоднозначно, но конкретный его выбор для нас не принципиален, поскольку в каждом из двух возможных случаев $[\Delta \cap \mathbb{Z}] = \mathbb{Z}$.

7.3. Пусть вначале $S \subset \mathbb{Z}$ произвольное конечное подмножество. Введём неориентированный граф $\Gamma = \Gamma(S)$ с множеством вершин S , соединяя вершины, расстояние между которыми равно единице. Рёбрами будут единичные отрезки прямых 3-сети или, иначе, стороны заштрихованных элементарных треугольников. Если граф $\Gamma(S)$ связан и $[S] \neq \mathbb{Z}$, то $[S]$ совпадает с целочисленными точками минимального стандартного треугольника Δ , содержащего S , с длиной стороны $\tau(\Delta) \leq m-2$: $[S] = \Delta \cap \mathbb{Z}$. Множество $[S] \neq \mathbb{Z}$ тоже называем треугольником, если оно совпадает с совокупностью целочисленных точек минимального стандартного треугольника, содержащего S .

Далее до конца параграфа подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ считаем (m, s) -базисом. Пусть S_j , $j \in J$, – множества вершин связных компонент графа $\Gamma = \Gamma(S)$, $S = \bigsqcup_{j \in J} S_j$. Тогда $[S_{j'}] \cap [S_{j''}] = \emptyset$ при $j' \neq j''$.

Приведём два типа примеров связных компонент графа Γ .

Тип I. За основу берётся светлый треугольник $\{i, i+s, i+s-m\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Из вершины $i+s$ выходит ветвь из единичных отрезков. Каждый очередной отрезок параллелен одному из векторов e_2 или e_1+e_2 . Единственной точкой ветвления (инцидентной более чем двум рёбрам) на этой ветви является исходная вершина $i+s$, последняя вершина ветви инцидентна только одному ребру. Аналогичная ветвь из единичных отрезков, параллельных $(-e_1)$ или $-e_1-e_2$, выходит из вершины i . Такая же ветвь выходит и из вершины $i+s-m$ с единичными отрезками, параллельными e_1 или $-e_2$. Длина отдельной ветви может быть и нулевой: тогда ветвь отсутствует. Могут отсутствовать две и даже все три ветви. Введённые выше ветви будем называть (e_2, e_1+e_2) -ветвью, $(-e_1, -e_1-e_2)$ -ветвью и $(e_1, -e_2)$ -ветвью соответственно. Вершинами связной компоненты типа I, вместе с $i, i+s, i+s-m$, будут вершины на этих ветвях, а рёбрами, кроме $(i, i+s)$, $(i, i+s-m)$, $(i+s, i+s-m)$, будут отрезки на этих ветвях.

Тип II. За основу берётся вершина $i \in \mathbb{Z}$, из которой выходят $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвь, $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь и $(e_1, -e_2)$ -ветвь. Какие-то из этих ветвей могут отсутствовать, может не быть ни одной ветви. Вершинами и рёбрами связной компоненты типа II будут вершины и отрезки на этих ветвях. При их отсутствии связная компонента состоит из единственной вершины i . Как пример, связная компонента типа II может состоять из одной $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветви, образующей цикл, целиком охватывающий цилиндр. В этом случае конец $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветви будет находиться на расстоянии 1 от её начала i .

ТЕОРЕМА 9. Если подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ является (m, s) -базисом, то каждая связная компонента $\Gamma_0 = \Gamma(S_0)$ графа $\Gamma(S)$, $S_0 \subset S$, содержит не более m вершин и относится или к типу I или к типу II. Размер треугольника $[S_0]$ равен $|S_0| - 1$ при $|S_0| < m$. Если $|S_0| = m$, то $S = S_0$.

В случае $S = S_0$, $|S| = m$, при опоясывании цилиндра 0.5-окрестностью минимального содержащего S стандартного треугольника Δ размера $m - 1$, его угловая вершина v , принадлежащая сторонам, параллельным векторам e_1 и $e_1 + e_2$, будет находиться на расстоянии 1 от вершин v_1 и v_2 , лежащих на противоположной к v стороне. Если $v \in S$, а $\{v_1, v_2\} \cap S = \emptyset$, то $\Gamma(S)$ состоит из одной $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветви. Если бы такая ветвь заканчивалась вершиной v_1 или вершиной v_2 (при $|\{v_1, v_2\} \cap S| = 1$), то граф $\Gamma(S)$ был бы циклом, целиком охватывающим цилиндр. На этом цикле из m рёбер $m - s$ параллельны $e_1 + e_2$, а остальные s рёбер параллельны e_1 . В § 5 совокупности целочисленных точек на таких циклах отнесены к совершенным базисным наборам, отвечающим ожерельям из s и $m - s$ бусинок.

7.4. В данном пункте приводится описание строения (m, s) -базисов $S \subset \mathbb{Z}$ минимально возможной мощности m . Вначале же определим последовательность графов $\Gamma^{(0)} = \Gamma(S), \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(r)}$, связанную с произвольным (m, s) -базисом $S \subset \mathbb{Z}$, $|S| \geq m$. Вершинами графов $\Gamma^{(j)}$, $j = 1, \dots, r$, будут стандартные треугольники. Обратная последовательность $\Gamma^{(r)}, \Gamma^{(r-1)}, \dots, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(0)}$ будет задавать структуру (m, s) -базиса.

Выше связные компоненты графа $\Gamma^{(0)}$ параметризовались множеством J . По теореме 9 для дальнейшего рассмотрения представляет интерес только случай, когда $|J| \geq 2$, иначе $r = 0$.

Рассмотрим неориентированный граф $\Gamma^{(1)}$ с множеством вершин J , в котором ребро (j', j'') существует тогда и только тогда, когда треугольники $[S_{j'}]$ и $[S_{j''}]$ пересекаются или являются близкими, т. е. когда пересекаются их 0.5-окрестности. В последнем случае найдутся $v_1 \in [S_{j'}]$ и $v_2 \in [S_{j''}]$, расстояние между которыми равно 1. Эти вершины соединены отрезком 3-сети. Правильнее считать вершинами графа $\Gamma^{(1)}$ сами минимальные стандартные треугольники $[S_j]$, $j \in J$, содержащие связные компоненты графа $\Gamma = \Gamma^{(0)}$.

Вершинами графа $\Gamma^{(i)}$, $i \geq 2$, являются минимальные стандартные треугольники, содержащие связные компоненты графа $\Gamma^{(i-1)}$. Вершины $[S']$ и $[S'']$ в графе $\Gamma^{(i)}$ соединены ребром, если они сами пересекаются или пересекаются их 0.5-окрестности. Замыкающим в последовательности $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(r)}$, является граф $\Gamma^{(r)}$, $r \geq 0$, состоящий из одной связной компоненты. Задание какого-либо (m, s) -базиса сопряжено с построением цепочки этих графов, но в обратной последовательности:

$$\Gamma^{(r)}, \Gamma^{(r-1)}, \dots, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(0)}.$$

Подробное строение графов $\Gamma^{(i)}$, $i \geq 1$, при $|S| \geq m$ будет приведено в следующем п. 7.5. При $|S| = m$ потребуются два описываемых ниже типа связных компонент графов $\Gamma^{(i)}$, $i \geq 1$, вершинами которых являются стандартные треугольники размера нуль и выше.

Как и в § 3 при описании строения графов вектор $e_1 + e_2$ представляем горизонтальным, направленным вправо, а вектор $e_1 - e_2$ – направленным вниз направо, тогда вектор e_2 будет направлен вверх направо. При таком представлении угловые вершины стандартного треугольника при нижнем горизонтальном основании называем соответственно левой и правой, а третью угловую вершину – верхней, одну боковую сторону называем левой, другую – правой.

Тип А. Граф состоит из трёх ветвей, каждая из которых состоит из стандартных треугольников. Первая ветвь, называемая $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвью, выходит из вершины $i + s$, $i \in \mathbb{Z}$, и начинается стандартным треугольником $\Delta^{(1)}$ размера $t \geq 0$ с левой вершиной $i + s$. Пусть v – вершина внутри или на границе угла в 60° , образованного лучами $i + s + u(e_1 + e_2)$, $u \geq 0$, и $i + s + ue_2$, $u \geq 0$, не содержащаяся в $\Delta^{(1)}$, но находящаяся на расстоянии 1 от одной из целочисленных точек в $\Delta^{(1)}$. Для следующего стандартного треугольника $\Delta^{(2)}$ рассматриваемой ветви точка v является левой угловой вершиной. Далее, стандартные треугольники $\Delta^{(j)}$, $j \geq 3$, соотносятся с треугольниками $\Delta^{(j-1)}$ в точности так же, как треугольник $\Delta^{(2)}$ соотносится с $\Delta^{(1)}$. Из вершины i выходит аналогичная $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь, в которой i будет правой угловой вершиной первого треугольника ветви. Из вершины $i + s - m$ выходит $(e_1, -e_2)$ -ветвь, в которой $i + s - m$ будет верхней угловой вершиной первого треугольника ветви. Каждая из этих ветвей может состоять из единственного первого треугольника, один из которых, в свою очередь, может иметь нулевой размер – принадлежать $\{i, i + s, i + s - m\}$.

Тип В. За основу берётся треугольник $\Delta^{(1)}$ с угловыми вершинами $i, i + ls, i + lm$, $i \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, начиная с которого строятся $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвь, $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь и $(e_1, -e_2)$ -ветвь. Каждая из этих трёх ветвей может состоять из одного единственного треугольника $\Delta^{(1)}$.

ТЕОРЕМА 10. Если $S \subset \mathbb{Z} - (m, s)$ -базис, $|S| = m$, то связные компоненты графов $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$, относятся или к типу А или к типу В.

7.5. Для (m, s) -базиса $S \subset \mathbb{Z}$, $|S| \geq m$, в п. 7.4 была определена последовательность неориентированных графов $\Gamma^{(0)} = \Gamma(S), \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(r)}$, $r \geq 0$. Первым связным графом в указанной последовательности (с двумя и более вершинами при $r \geq 1$) является граф $\Gamma^{(r)}$. Структура графа $\Gamma^{(0)}$ была представлена в теореме 9. Приведём пять типов графов для $\Gamma^{(j)}$, $j \geq 1$.

Тип А. За основу берутся три смежных друг с другом стандартных треугольника $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \Delta_{(3)}$ таких, что каждая сторона минимального стандартного треугольника $\bar{\Delta}$, их содержащего, содержит сторону только одного треугольника из трёх исходных, причём последние не содержат угловых вершин $\bar{\Delta}$. Треугольник $\Delta_{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, (возможно нулевого размера) примыкает к стороне окаймляющего треугольника $\bar{\Delta}$, параллельной e_i при $i = 1, 2$ или $e_1 + e_2$ при $i = 3$. Пусть вершинами треугольника $\bar{\Delta}$ являются $i, i + lm, i + ls$, $i \in \mathbb{Z}$, $l > 0$. От треугольника $\Delta_{(1)}$ отходит направленная вправо $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвь $\Delta^{(0)} = \Delta_{(1)}, \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(h)}$, $h \geq 0$, из стандартных треугольников не обязательно положительного размера, определяемая следующими тремя условиями:

а) треугольники $\Delta^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, h$, не пересекаются с лучами $\{i + te_2 | t \geq 0\}$ и $\{i + t(e_1 + e_2) | t \geq 0\}$;

б) треугольник $\Delta^{(j)}$, $j = 1, \dots, h$, смежен с треугольником $\Delta^{(j-1)}$ и не смежен с треугольниками $\Delta^{(j-2)}, \Delta^{(j-3)}, \dots, \Delta^{(1)}, \Delta^{(0)} = \Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \Delta_{(3)}$;

в) стороны треугольников $\Delta^{(j)}$, $j = 1, \dots, h$, параллельные e_1 , строго монотонно удаляются от прямой $\{i + ls + te_1 | t \in \mathbb{R}\}$.

Аналогично определяется направленная вниз $(e_1, -e_2)$ -ветвь, начинающаяся с треугольника $\Delta_{(3)}$, и направленная влево $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь, начинающаяся с треугольника $\Delta_{(2)}$. Каждая из трёх ветвей в графе типа А может ограничиваться единственной вершиной $\Delta^{(0)} \in \{\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \Delta_{(3)}\}$.

Тип В. За основу берётся стандартный треугольник $\Delta_{(0)}$ и ещё три стандартных треугольника, обозначаемых как $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ и $\Delta_{(3)}$. Последние смежны с $\Delta_{(0)}$ и не смежны друг с другом. Каждая сторона минимального стандартного треугольника $\bar{\Delta}$ с угловыми вершинами $i, i + lm, i + ls$, $i \in \mathbb{Z}$, $l > 0$, содержащего $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \Delta_{(3)}$, содержит сторону только одного из этих треугольников. Треугольник $\Delta_{(0)}$ не пересекается с периметром треугольника $\bar{\Delta}$, содержится строго внутри $\bar{\Delta}$. Треугольник $\Delta_{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, примыкает к стороне треугольника $\bar{\Delta}$, параллельной соответственно e_i или $e_1 + e_2$ при $i = 3$. От треугольника $\Delta_{(1)}$ вправо отходит $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвь, от треугольника $\Delta_{(3)}$ вниз $(e_1, -e_2)$ -ветвь, от треугольника $\Delta_{(2)}$ влево $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь.

Тип С. За основу берётся стандартный треугольник $\Delta_{(0)}$ с нижним основанием на прямой $\{i + t(e_1 + e_2) | t \in \mathbb{R}\}$, $i \in \mathbb{Z}$, смежный со стандартными треугольниками $\Delta_{(1)}$ и $\Delta_{(2)}$. Треугольники $\Delta_{(1)}$ и $\Delta_{(2)}$ не смежны друг с другом. Основание минимального стандартного треугольника $\bar{\Delta}$, содержащего треугольники $\Delta_{(0)}, \Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$, находится на прямой $\{i + t(e_1 + e_2) | t \in \mathbb{R}\}$. Левая сторона треугольника $\bar{\Delta}$ пересекается только с $\Delta_{(2)}$, содержит левую сторону треугольника $\Delta_{(2)}$ и не пересекается с $\Delta_{(0)}$ и $\Delta_{(1)}$. Аналогично, правая сторона треугольника $\bar{\Delta}$ пересекается только с $\Delta_{(1)}$, содержит правую сторону треугольника $\Delta_{(1)}$ и не пересекается с $\Delta_{(0)}$ и $\Delta_{(2)}$. От треугольника $\Delta_{(1)}$ вправо отходит $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветвь, а от треугольника $\Delta_{(2)}$ влево $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь. Условия а) и б) в определении ветвей из описания графов типа А здесь несколько ослаблены, они принимают следующий вид:

а') никакая часть какого-либо треугольника из обеих ветвей не может быть ниже прямой $\{i + t(e_1 + e_2) | t \in \mathbb{R}\}$; треугольники $(e_2, e_1 + e_2)$ -ветви, начиная с $\Delta^{(0)} = \Delta_{(1)}$, не пересекаются с лучом $\{v + te_2 | t \geq 0\}$, а треугольники $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветви не пересекаются с лучом $\{w - te_1 | t \geq 0\}$, если $v = i$ и $w = i + ls$, $l > 0$, суть левая и правая вершины треугольника $\bar{\Delta}$;

б') объединение обеих ветвей и $\Delta^{(0)}$ является простой цепью.

Принципиальное условие в) сохраняется в прежнем виде.

Графы, получающиеся из описанного поворотом на 120° в одну или другую сторону, тоже относятся к типу С.

Тип D. За основу берётся стандартный треугольник $\Delta^{(0)}$ размера $l \geq 0$ с вершинами $i, i + lm, i + ls$, $i \in \mathbb{Z}$, от которого отходит $(-e_1, -e_1 - e_2)$ -ветвь. Условие на ветви а) из описания графов типа А здесь принимает вид:

а") треугольники $\Delta^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, h$, содержатся в углу с вершиной $i + ls$ и лучами $\{i + ls - te_1 | t \geq 0\}$, $\{i + ls - t(e_1 + e_2) | t \geq 0\}$, стороны треугольников $\Delta^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, h$,

могут находиться на лучах угла.

Условия б) и в) сохраняются в прежнем виде.

Графы, получающиеся из описанного поворотом на 120° в одну или другую сторону, тоже относятся к типу D.

Тип Е. Простая замкнутая цепь из стандартных треугольников

$$\Delta^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, h-1,$$

целиком охватывающая цилиндр. Смежными являются только треугольники

$$\Delta^{(j)}, \Delta^{((j+1) \bmod h)}, \quad j = 0, 1, \dots, h-1,$$

причём левая сторона треугольника $\Delta^{((j+1) \bmod h)}$ располагается строго правее левой стороны треугольника $\Delta^{(j)}$, а прямая e_2 -семейства, содержащая правую вершину треугольника $\Delta^{((j+1) \bmod h)}$ располагается строго правее прямой e_2 -семейства, содержащей правую вершину треугольника $\Delta^{(j)}$.

ТЕОРЕМА 11. Если $S \subset \mathbb{Z}$ является (m, s) -базисом, то каждая связная компонента графов $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$, относится к одному из типов A, B, C, D, а граф $\Gamma^{(r)}$ может ещё иметь тип E.

8. Заключение

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 304 с.
2. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 352 с.
3. Veblen O. Differential invariants and geometry. //Atti del Congr., Int. Mat., Bologna. 1928.
4. Кириллов А. А. Инвариантные операторы над геометрическими величинами. //Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 16. М. 1980. С. 3 – 29.
5. Малышев Ф. М. Симплициальные системы линейных уравнений. //Алгебра: Сб. ст-й. Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова. 1980. С. 53–56.
6. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М.: Наука, 1980. 320 с.
7. Малышев Ф. М. Порождающие наборы элементов рекуррентных последовательностей. //Труды по дискретной математике. 2008. Т. 11, № 2. С. 86 – 111.
8. Малышев Ф. М. Базисные множества целых чисел относительно многоместных операций сдвига. //Математические вопросы криптографии. 2011. Т. 2, № 1. С. 29 – 74.

9. Малышев Ф.М. Метрические свойства вложений множества целых чисел в цилиндр. //Математические вопросы криптографии. 2012. Т. 3, № 3. С. 57 – 79.
10. Делоне Б.Н., Сандакова Н.Н. Теория стереоэдров. //Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1961. Т. 64. С. 28 – 51.
11. Wolfram S. Cellular Automaton Supercomputing. // In High-Speed Computing. University of Illinois Press. 1988. P. 40–48.
12. Малышев Ф.М., Кутырёва Е.В. О распределении числа единиц в булевом треугольнике Паскаля. //Дискретная математика. 2006. Т.18, № 2. С. 123 – 131.
13. Малышев Ф.М., Тараканов В.Е. О (v, k) -конфигурациях. //Математический сборник. 2001. Т. 192, № 9. С. 85 – 108.
14. Холл М. Комбинаторика. //М.: Мир, 1970. 424 с.
15. Харари Ф. Теория графов. //М.: Мир, 1973. 302 с.
16. Камерон П., ван Линт Дж. Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. //М.: Наука, 1980. 144 с.
17. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. //М.: Наука, 1977. 320 с.
18. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. //М.: Наука, 1985. 192 с.
19. Малышев Ф.М., Фролов А.А. Классификация $(v, 3)$ -конфигураций. //Математические заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 741 – 749.
20. Тришин А.Е. Классификация циркулянтных $(v, 5)$ -матриц. //Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, № 2. С. 258 – 259.
21. Фролов А.А. Классификация неразложимых абелевых $(v, 5)$ -групп. //Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 1. С. 94 – 108.
22. Брославский М.В. Примеры (v, k_1, k_2) -конфигураций. //Дипломная работа. М.: в/ч 33965, 2010.
23. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. //М.: Наука, 1973. 240 с.
24. Рышков С.С., Барановский Е.П. Классические методы теории решётчатых упаковок. //Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 4(202). С. 3 – 63.
25. Kuzmin A.S., Kurakin V.L., Mikhalev A.V., Nechaev A.A. Linear recurrences over rings and modules. //J. Math. Science (Contemporary Math. and Its Appl. Thematic surveys). V. 76, № 6. P. 2793 – 2915.
26. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А. Псевдослучайные и полилинейные последовательности. //Труды по дискретной математике. 1997. Т. 1, С. 139 – 202.
27. National Institute of Standards and Technology, U.S.A., Advanced Encryption Standard (AES) FIPS – 197, 2001.

28. Specification of ARIA. National Security Research Institute (NSRI). January, 2005. <http://www.nsri.re.kr/ARIA/index-e.html>.
29. SEED Algorithm Specification. Korea Information Security Agency. 2005. <https://tools.ietf.org/draft-park-seed-01>.
30. Lu J., Ji W., Hu L., Ding J., Pyshkin A., Weinmann R. Analysis of the SMS4 Block Cipher. Proceedings of ACISP'07. LNCS 4586, 2007. P. 306 – 318.
31. Винберг Э.Б., Шварцман О.В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. //Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29. М. 1988. С. 147 – 259.
32. Малышев Ф.М. О замкнутых подмножествах корней и когомологиях регулярных подалгебр. //Математический сборник. 1977. Т. 104(146), № 1(9). С. 140 – 150.
33. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 336 с.
34. Morgado I. Note on quasi-orders, partial orders and orders. //Notes comuus mat. 1972. № 43. P. 31 – 40.
35. Krishnamurthy. On the number of topologies on a finite set. //Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 154 – 157.
36. Толпыго А.К. О когомологиях параболических алгебр Ли. //Математические заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 251 – 255.
37. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2-х томах. М.: Мир, 1988. 822 с.
38. Лупанов О.Б. Введение в математическую логику. Конспект лекций. //М.: Мех – мат МГУ им. М.В. Ломоносова. 2007. 199 с.
39. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.

REFERENCES

1. Kostrikin, A. I. & Manin, Yu. I. 1986, "Lineinaya algebra i geometriya" (Russian) [Linear algebra and geometry] Second edition. "Nauka", Moscow, 304 pp.
2. Kon, P. 1968, "Universal'naya algebra" (Russian) [Universal algebra] Translated from the English by T. M. Baranovic. Edited by A. G. Kurosh "MIR", Moscow 351 pp.
3. Veblen, O. 1928, "Differential invariants and geometry", *Atti del Congr., Int. Mat., Bologna*.
4. Kirillov, A. A. 1980, "Invariant operators over geometric quantities" (Russian) Current problems in mathematics, Vol. 16 (Russian), *Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow*, pp. 3–29, 228.
5. Malyshev, F. M. 1980, "Simpletsialnye system of linear equations", *Algebra, Moscow, Moscow University Press*, pp. 53–56.

6. Kartesi, F. 1980, "Vvedenie v konechnye geometrii" (Russian) [Introduction to finite geometries] Translated from the English by F. L. Varpahovskii and A. S. Solodovnikov., "Nauka", Moscow, 320 pp.
7. Malyshev, F. M. 2008, "Generating sets of elements of recurrent sequences", *Tr. discr. Mat., Fizmatlit, Moscow*, vol. 11, № 2, pp. 86 – 111.
8. Malyshev, F. M. 2011, "Bases of the set of integers with respect to multi-shift operations", *Mat. Issues. kriptogr.*, vol. 2, no. 1, pp. 29–73.
9. Malyshev, F. M. 2012, "Metric properties of the nested set of integers into a cylinder", *Mat. Issues. kriptogr.*, vol. 3, no. 3, pp. 57–79.
10. Delone, B. N. & Sandakova, N. N. 1961, "Theory of stereohedra" (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 64, pp. 28–51.
11. Wolfram, S. 1988, "Cellular Automaton Supercomputing", *In High-Speed Computing. University of Illinois Press.*, pp. 40–48.
12. Malyshev, F. M. & Kutyreva, E. V. 2006, "On the distribution of the number of ones in a Boolean Pascal's triangle" (Russian) *Diskret. Mat.*, vol. 18, no. 2, pp. 123–131; translation in *Discrete Math. Appl.*, vol. 16 (2006), no. 3, pp. 271–279.
13. Malyshev, F. M. & Tarakanov, V. E. 2001, "On (v, k) -configurations" (Russian) *Mat. Sb.*, vol. 192, no. 9, pp. 85–108; translation in *Sb. Math.*, vol. 192 (2001), no. 9–10, pp. 1341–1364.
14. Holl, M. 1970, "Kombinatorika" (Russian) [Combinatorial theory] Translated from the English by S. A. Shirokova. Edited by A. O. Gel'fond and V. E. Tarakanov, "MIR", Moscow, 424 pp.
15. Harary, F. 1973, "Teoriya grafov" (Russian) [Graph theory] Translated from the English by V. P. Kozyrev. Edited by G. P. Gavrillov., "MIR", Moscow, 300 pp.
16. Cameron, Peter J. & van Lint, Jacobus Hendricus 1980, "Teoriya grafov, teoriya kodirovaniya i blok-skhemy" (Russian) [Graph theory, coding theory and block designs] Translated from the English by B. S. Steckin. "Nauka", Moscow, 140 pp.
17. Sachkov, V. N. 1977, "Kombinatornye metody diskretnoi matematiki" (Russian) [Combinatorial methods of discrete mathematics], "Nauka", Moscow, 320 pp.
18. Tarakanov, V. E. 1985, "Kombinatornye zadachi i $(0,1)$ -matritsy" (Russian) [Combinatorial problems and $(0,1)$ -matrices], *Problemy Nauki i Tekhnicheskogo Progressa*. [Problems of Science and Technological Progress], "Nauka", Moscow, 192 pp.
19. Malyshev, F. M. & Frolov, A. A. 2012, "Classification of $(v, 3)$ -configurations", Translation of *Mat. Zametki*, vol. 91, no. 5, pp. 741–749. *Math. Notes*, vol. 91 (2012), no. 5-6, pp. 689–696.
20. Trishin, A. E. 2004, "Classification circulant $(v, 5)$ -matrices", *Review of Applied and Industrial Mathematics*, vol. 11, № 2. pp. 258 – 259.

21. Frolov, A. A. 2008, "Classification of indecomposable abelian $(v, 5)$ -groups" (Russian) *Diskret. Mat.*, vol. 20, no. 1, pp. 94–108; translation in *Discrete Math. Appl.*, vol. 18, no. 1, pp. 99–114.
22. Broslavsky, M. V. 2010, "Examples of (v, k_1, k_2) -configurations" Thesis. *Moscow, v/ch 33965* (Russian).
23. Nikulin, V. V. & Shafarevich, I. R. 1983, "Geometrii i gruppy" (Russian) [Geometries and groups], "Nauka", Moscow, 240 pp.
24. Ryshkov, S. S. & Baranovskii, E. P. 1979, "Classical methods of the theory of lattice packings" (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 34, no. 4(208), pp. 3–63, 256.
25. Kurakin, V. L., Kuzmin, A. S., Mikhalev, A. V. & Nechaev, A. A. 1995, "Linear recurring sequences over rings and modules", *Algebra, 2. J. Math. Sci.*, vol. 76, № 6, pp. 2793 – 2915.
26. Kuzmin, A. S.; Kurakin, V. L.; Nechaev, A. A. 1997, "Pseudorandom and polylinear sequences" (Russian) *Proceedings in discrete mathematics, Tr. Diskretn. Mat., Nauchn. Izd. TVP, Moscow*, vol. 1, pp. 139–202.
27. National Institute of Standards and Technology, U.S.A., Advanced Encryption Standard (AES) FIPS – 197, 2001.
28. Specification of ARIA. National Security Research Institute (NSRI). January, 2005. <http://www.nsri.re.kr/ARIA/index-e.html>.
29. SEED Algorithm Specification. Korea Information Security Agency. 2005. <https://tools.ietf.org/draft-park-seed-01>.
30. Lu J., Ji W., Hu L., Ding J., Pyshkin A., Weinmann R. Analysis of the SMS4 Block Cipher. Proceedings of ACISP'07. LNCS 4586, 2007. P. 306 – 318.
31. Vinberg, E. B. & Shvartsman, O. V. 1988, "Discrete groups of motions of spaces of constant curvature" (Russian), *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform.*, Moscow, vol. 29, pp. 147 – 259.
32. Malyshev, F. M. 1977, "Closed subsets of roots and the cohomology of regular subalgebras" (Russian), *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 104(146), no. 1, pp. 140–150, 176.
33. Burbaki, N. 1972, "Gruppy i algebrы Li. Gruppy Kokstera i sistemy Titsa. Gruppy, porozhdennye otrazheniyami. Sistemy kornei." (Russian) [Lie groups and algebras. Coxeter groups and Tits systems. Groups generated by reflections. Root systems] Translated from the French by A. I. Kostrikin and A. N. Tjurin. Edited by A. I. Kostrikin. "MIR", Moscow, 334 pp.
34. Morgado, I. 1972, "Note on quasi-orders, partial orders and orders", *Notes comuus mat.*, № 43, pp. 31 – 40.

35. Krishnamurthy, V. 1966, "On the number of topologies on a finite set", *Amer. Math. Monthly.*, vol. 73. pp. 154 – 157.
36. Tolpygo, A. K. 1972, "The cohomology of parabolic Lie algebras" (Russian) *Mat. Zametki*, vol. 12, № 3, pp. 251–255.
37. Lidl, R. & Niderraiter, G. 1988, "Konechnye polya. Tom 1" (Russian) [Finite fields. Vol. 1] Translated from the English by A. E. Zhukov and V. I. Petrov. Translation edited and with a preface by V. I. Nechaev. "MIR", Moscow, 430 pp.; Lidl, R. & Niderraiter, G. 1988, "Konechnye polya. Tom 2" (Russian) [Finite fields. Vol. 2] Translated from the English by A. E. Zhukov and V. I. Petrov. Translation edited by V. I. Nechaev. "MIR", Moscow, pp. 433–822.
38. Lupanov, O. B. 2007, "Introduction to mathematical logic. Lecture notes.", *Moscow, Mekh – mat. MGU M. V. Lomonosov*, 199 p.
39. Vorob'ev, N. N. 1978, "Chisla Fibonachchi" (Russian) [Fibonacci numbers] Fourth edition. Populyarnye Lektsii po Matematike [Popular Lectures on Mathematics], 6. "Nauka", Moscow, 142 pp.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
Поступило 30.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 512.572

О НОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Ю. Р. Пестова (г. Ульяновск)

Аннотация

При изучении разных математических структур хорошо известным и давно используемым в математике алгебраическим приемом является выделение классов объектов исследования с помощью тождеств. Класс всех линейных алгебр над некоторым полем, в которых выполнен фиксированный набор тождественных соотношений, А.И. Мальцев назвал многообразием линейных алгебр над заданным полем. Существует такое понятие как рост многообразия. В математическом анализе принято различать полиномиальный или степенной, экспоненциальный или показательный рост. В данной работе речь пойдет о свойствах некоторых многообразий в разных классах линейных алгебр над полем нулевой характеристики, имеющих почти полиномиальный рост, то есть таких многообразий, рост которых не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия полиномиален. Статья носит обзорный характер и не содержит новых результатов.

Один из разделов статьи посвящен описанию основных свойств ассоциативных, лиевых многообразий и многообразий алгебр Лейбница почти полиномиального роста над полем нулевой характеристики. В случае ассоциативных алгебр таких многообразий всего два. В классе алгебр Ли четыре многообразия исчерпывают весь набор разрешимых лиевых многообразий почти полиномиального роста, а одно многообразие является неразрешимым и вопрос о его единственности до сих пор остается открытым. В случае алгебр Лейбница существует девять многообразий почти полиномиального роста. Пять из них это упомянутые многообразия алгебр Ли, которые также являются многообразиями алгебр Лейбница. Оставшиеся четыре это многообразия по свойствам схожие с разрешимыми лиевыми многообразиями почти полиномиального роста.

Следующие два раздела мы посвятим описанию давно известных, а также полученных недавно характеристик двух лиевых многообразий почти полиномиального роста. В одном из разделов речь пойдет о найденной нами кодлине многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2 , которую образует множество всех матриц второго порядка со следом равным нулю над основным полем относительно операции коммутирования. Далее будет описан базис полилинейной части многообразия,

состоящего из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Здесь же мы представим явные формулы для вычисления его кодли и коразмерностей.

Последний раздел будет посвящен описанию базиса полилинейной части многообразия алгебр Лейбница почти полиномиального роста, определенного тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Ключевые слова: многообразие, почти полиномиальный рост, кодлина, коразмерность, базис полилинейной части.

ON NEW PROPERTIES OF SOME VARIETIES WITH ALMOST POLYNOMIAL GROWTH

Yu. R. Pestova

Abstract

In the study of different mathematical structures well known and long used in mathematics algebraic method is the selection of classes of objects by means of identities. Class of all linear algebras over some field in which a fixed set of identities takes place is called the variety of linear algebras over a given field by A.I. Malcev. We have such concept as the growth of the variety. There is polynomial or exponential growth in mathematical analysis. In this work we will speak about properties of some varieties in different classes of linear algebras over zero characteristic field with almost polynomial growth. That means that the growth of the variety is not polynomial, but the growth of any its own subvariety is polynomial. The article has a synoptic and abstract character.

One unit of the article is devoted to the description of basic properties all associative, Lie's and Leibniz's varieties over zero characteristic field with almost polynomial growth. In the case of associative algebras there are only two such varieties. In the class of Lie algebras there are exactly four solvable varieties with almost polynomial growth and is found one unsolvable variety with almost polynomial growth and the question about its uniqueness is opened in our days. In the case of Leibniz algebras there are nine varieties with almost polynomial growth. Five of them are named before Lie varieties, which are Leibniz varieties too. The last four ones are varieties which have the same properties as solvable Lie varieties of almost polynomial growth.

Next units we'll devote to famous and new characteristics of two Lie's varieties with almost polynomial growth. In the first of them we speak about found by us colength of the variety generated by three-dimensional simple Lie algebra sl_2 , which is formed by a set of all 2×2 matrices with zero trace over a basic field with operation of commutation.

Then it will be described a basis of multilinear part of the variety which consists of Lie algebras with nilpotent commutant degree not higher than two. Also we'll give formulas for its colength and codimension.

The last unit is devoted to description the basis of multilinear part of Leibniz variety with almost polynomial growth defined by the identity $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Keywords: variety, almost polynomial growth, colength, codimension, basis of multilinear part.

1. Введение

На протяжении всей статьи характеристика основного поля Φ равна нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в монографиях [1] и [2].

Напомним, что линейная алгебра является векторным пространством и ее операции являются линейными по каждому аргументу. Пусть u и v разные элементы абсолютно свободной алгебры, то есть $u \neq v$. Мы будем использовать знак равенства с тремя черточками вместо обычного равенства и называть тождеством выражение $u \equiv v$. Одно и то же тождество может выполняться в одной алгебре и не выполняться в другой. Обычное равенство мы будем понимать в привычном для нас смысле. Например, тождество коммутативности $xy \equiv yx$ выполняется в алгебре многочленов, так как для любых двух многочленов f, g выполняется равенство $fg = gf$. В то же время тождество коммутативности не выполняется в ассоциативной алгебре всех квадратных матриц.

Напомним, что линейная алгебра называется *ассоциативной*, если в ней выполняется тождество ассоциативности $(xy)z \equiv x(yz)$. Если же это тождество не выполняется в алгебре, то необходимо следить за скобочной структурой. Для удобства договоримся опускать в элементах скобки в случае левонормированного произведения, то есть $(ab)c = abc$. Алгеброй *Ли* называется линейная алгебра, в которой выполняются тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$ и тождество Якоби $xyz + yzx + zxy \equiv 0$. Хорошо известно [1], что любое произведение элементов в алгебре Ли равно линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок. Линейная алгебра называется *алгеброй Лейбница*, если в ней выполняется тождество Лейбница $xyz \equiv xzy + x(yz)$. Заметим, что понятие алгебры Лейбница является обобщением понятия алгебр Ли, так как из тождеств алгебры Ли следует, в частности, тождество Лейбница. Последние две алгебры являются примерами неассоциативных алгебр.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр (ассоциативных, Ли или Лейбница), а $\Phi(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра этого многообразия со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Множество всех полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$ в алгебре $\Phi(X, \mathbf{V})$ обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ и определим естественным способом на нем структуру модуля симметрической группы S_n . Результат действия перестановки $p \in S_n$ на полилинейном левонормированном мономе

$$x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V})$$

равен $x_{p(i_1)}x_{p(i_2)} \dots x_{p(i_n)}$. Еще в середине прошлого века в работе [3] было показано, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Таким образом, вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, так называемых, полилинейных частях многообразия. Поэтому исследование структуры S_n -модуля $P_n(\mathbf{V})$ играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым, рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ , где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n ,

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (1)$$

К важным числовым характеристикам многообразия $\mathbf{V}$ относится его последовательность коразмерностей $c_n(\mathbf{V})$, являющаяся размерностью пространства $P_n(\mathbf{V})$, кратности m_λ и последовательность кодлин

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то есть последовательность длин модулей $P_n(\mathbf{V})$.

Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля, то есть $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Понятно, что имеет место такое равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Асимптотическое поведение размерности пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Напомним, что рост многообразия называется полиномиальным, если существуют такие числа C, k , что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^k$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет почти полиномиальный рост, если рост самого многообразия не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия полиномиален. Напомним также, что экспонентой многообразия $\mathbf{V}$ называется предел

$$\exp(\mathbf{V}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$$

в случае его существования.

Целью данной работы является описание многообразий почти полиномиального роста в различных классах линейных алгебр.

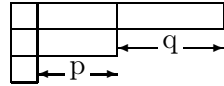
В случае ассоциативных алгебр существуют только два многообразия почти полиномиального роста. В классе алгебр Ли существует ровно четыре разрешимых многообразий почти полиномиального роста и найдено одно неразрешимое многообразие почти полиномиального роста. В случае алгебр Лейбница найдены еще четыре многообразия с аналогичным экстремальным свойством. Все эти многообразия будут представлены в первом разделе данной работы. В случае поля нулевой характеристики в работе [4] найдена формула кодлин многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2 . Этому результату будет посвящен второй раздел нашей статьи. В третьем разделе будут представлены формулы кодлин и коразмерности многообразия, состоящего из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом, а также описан базис его полилинейной части. Этот результат был опубликован в работе [5]. В последнем разделе мы опишем результат, который был представлен в работе [6], а именно базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница, определенного тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

2. Описание многообразий почти полиномиального роста в классе ассоциативных алгебр, алгебр Ли и алгебр Лейбница

В теории ассоциативных алгебр особую роль играют бесконечномерная алгебра Грассмана G и алгебра верхнетреугольных матриц порядка два UT_2 . Существует только два многообразия ассоциативных алгебр почти полиномиального роста. Они порождены алгебрами G и UT_2 соответственно. Перечислим основные свойства многообразий, порожденных этими алгебрами.

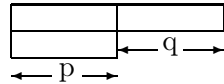
Начнем с многообразия, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц порядка два UT_2 . В работе [3] найден базис тождеств рассматриваемого многообразия, состоящий из тождества $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$. Опишем структуру полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$, о которой подробно изложено, например, в работах [7], [8]. В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$ $m_{(n)} = 1$ и $m_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$, если $\lambda_2 \geq 1$ и $\lambda_3 = 0$ или $\lambda_3 = 1$. Также $m_\lambda = 0$, если $\lambda_4 \neq 0$ или $\lambda_3 \geq 2$.

Если полилинейную часть рассматривать как S_n -модуль, то она имеет вид:



$$m_\lambda = q + 1,$$

где $\lambda = (p + q + 1, p + 1, 1)$;



$$m_\lambda = q + 1,$$

где $\lambda = (p + q, p)$, $p > 0$;



$$m_\lambda = 1,$$

где $\lambda = (n)$.

Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$ состоит из следующих множеств полилинейных элементов

$$x_1 \dots x_n \text{ и } x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \dots x_{j_s}$$

для любых i, j ; $r \geq 0$ и $s \geq 0$ таких, что $n = s + r + 2$ и $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_s$. Для многообразия, порожденного алгеброй UT_2 , укажем такие числовые характеристики как коразмерность, кодлина и экспонента:

$$c_n(\mathbf{UT}_2) = 2^{n-1}(n - 2) + 2, \quad l_n(\mathbf{UT}_2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 4, \quad \exp(\mathbf{UT}_2) = 2.$$

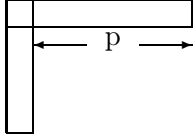
Бесконечномерной алгеброй Грассмана над полем Φ называется ассоциативная алгебра с бесконечным числом образующих $e_1, e_2, e_3, \dots$ и определяющими соотношениями $e_i e_k + e_k e_i = 0$. Многообразие, порожденное этой алгеброй, подробно исследовано, например, в работе [9]. Характер (1) полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ имеет разложение

$$\chi_n(\mathbf{G}) = \sum_{r=0}^{n-1} \chi_{(n-r, 1^r)}$$

и кратности находятся по формулам

$$m_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2 \leq 1; \\ 0, & \text{если } \lambda_2 \geq 2. \end{cases}$$

Структура полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ многообразия, порожденного бесконечномерной алгеброй Грассмана, как S_n -модуля имеет вид:



$$\begin{aligned} m_\lambda &= 1, \\ \text{где } \lambda &= (p+1, 1^{n-p-1}), \\ p &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Тождество $[[x_1, x_2], x_3] \equiv 0$ является базисом тождеств этого многообразия. Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ состоит из элементов вида

$$x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{s-1}}, x_{j_s}],$$

для любых $r \geq 0$ и $s \geq 0$ таких, что $n = s + r$ и $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_s$. Что касается основных числовых характеристик, то коразмерность $c_n(\mathbf{G}) = 2^{n-1}$, кодлина $l_n(\mathbf{G}) = n$ и экспонента $\exp(\mathbf{G}) = 2$.

Еще раз повторим, что многообразия, порожденные алгебрами G и UT_2 , единственные многообразия почти полиномиального роста в случае ассоциативных алгебр и не существует ассоциативных многообразий промежуточного роста (между полиномиальным и экспоненциальным).

В классе алгебр Ли известны пять многообразий почти полиномиального роста. Сохраним принятые для них в работе [10] обозначения $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$. Все эти многообразия подробно описаны в работах [10], [11]. Изложим основные сведения о них.

Рассмотрим матрицы второго порядка со следом нуль над основным полем нулевой характеристики относительно операции коммутирования. Множество этих матриц образует трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2 . Многообразие $\mathbf{V}_0$ порождено этой алгеброй. Оно достаточно хорошо изучено, и мы к нему еще вернемся во втором разделе, в частности, перечислим основные свойства этого многообразия, а также определим формулы для вычисления его кодлин.

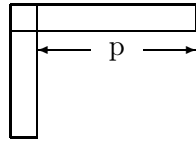
Обозначим многообразие всех нильпотентных алгебр ступени нильпотентности не выше s через $\mathbf{N}_s$, а многообразие всех абелевых алгебр — $\mathbf{A}$. Тогда их произведение $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ состоит из всех таких алгебр R , которые содержат идеал $I \in \mathbf{N}_s$ такой, что $R/I \in \mathbf{A}$. $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством $(x_1 x_2) \dots (x_{2s+1} x_{2s+2}) \equiv 0$. Таким образом, многообразие $\mathbf{N}_2 \mathbf{A}$ состоит из алгебр, имеющих нильпотентный ступени не выше двух идеал, фактор-алгебра по которому является абелевой и определяется тождеством $(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6) \equiv 0$. Многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2 \mathbf{A}$ достаточно подробно исследовано в работе [12]. Основные свойства данного многообразия мы перечислим в третьем разделе, а также предоставим новые результаты для него: построим базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2 \mathbf{A})$, найдем формулы для вычисления его кодлин и коразмерностей.

Следующим примером лиева многообразия почти полиномиального роста является многообразие $\mathbf{V}_2$, которое было построено в работе [13]. Оно порождается следующей алгеброй. Пусть G является бесконечномерной алгеброй Грассмана. Обозначим через G^0 ту же самую алгебру только относительно другого умножения, когда результат произведения любых двух ее элементов равен нулю, то есть для любых $g_1^0, g_2^0 \in G^0$ произведение $g_1^0 g_2^0 = 0$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств G^0 и G и определим на нем произведение следующим образом

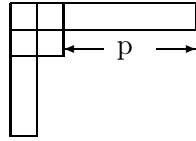
$$(g_1^0 + g_1)(g_2^0 + g_2) = (g_1^0 g_2^0)^0 - (g_2^0 g_1)^0 + [g_1, g_2],$$

где $[g_1, g_2]$ – это коммутатор в ассоциативной алгебре Грассмана. Изоморфной этой алгебре является алгебра квадратных матриц порядка два, у которой первая строка состоит из элементов алгебры Грассмана, а вторая строка нулевая, рассматриваемая относительно операции коммутирования матриц (подробности см. [1], стр. 265).

Диаграммы Юнга, для которых кратности многообразия $\mathbf{V}_2$ отличны от нуля, имеют следующий вид:



$$\begin{aligned} m_\lambda &= 1, \\ \text{где } \lambda &= (p+1, 1^{n-p-1}), \\ p &= 1, \dots, n-2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m_\lambda &= 1, \\ \text{где } \lambda &= (p+2, 2, 1^{n-p-4}), \\ p &= 0, \dots, n-4. \end{aligned}$$

Заметим, что базис тождеств этого многообразия состоит из следующих двух тождественных соотношений

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6) &\equiv 0, \\ (x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_1 x_3) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что последнее тождество отлично от тождества, определяющего многообразие $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2 \mathbf{A}$, так как оно не является полилинейным, хотя и имеет ту же скобочную структуру. Формулы для вычисления кодлин и коразмерности данного многообразия следующие: $l_n(\mathbf{V}_2) = 2n - 5$ для всех $n \geq 3$, $c_n(\mathbf{V}_2) = (n - 2)2^{n-2}$. Экспонента многообразия $\exp(\mathbf{V}_2) = 2$.

И наконец, последние два многообразия почти полиномиального роста определяются схожим образом. Многообразия $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_4$ построены в статье [11]. Пусть R – ассоциативно-коммутативное кольцо многочленов от переменной t , рассматриваемое как алгебра с нулевым умножением, то есть $R^2 = 0$. N_3 – это трехмерная нильпотентная алгебра Гейзенберга с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $ba = c$, $ab = -c$, $a^2 = b^2 = c^2 = 0$, $ac = ca = bc = cb = 0$, а M_2 – двумерная метабелева (разрешимая степени 2) алгебра Ли с базисом $\{h, e\}$ и таблицей умножения $he = h$, $eh = -h$ и $h^2 = e^2 = 0$.

Превратим R в правый N_3 -модуль, полагая

$$f(t)a = f'(t), f(t)b = tf(t), f(t)c = f(t),$$

а также в M_2 -модуль, считая, что

$$f(t)h = tf(t), f(t)e = tf'(t),$$

где штрих над многочленом обозначает, как обычно, взятие производной. Пусть N является полупрямым произведением алгебр Ли R и N_3 , а M – полупрямым произведением алгебр Ли R и M_2 . Тогда в алгебре N умножение определяется так

$$(f_1 + n_1)(f_2 + n_2) = f_1n_2 - f_2n_1 + n_1n_2,$$

где $f_1, f_2 \in R$, $n_1, n_2 \in N_3$ и в алгебре M аналогично. Алгебра N порождает многообразие $\mathbf{V}_3$, а алгебра M – многообразие $\mathbf{V}_4$.

В случае многообразий алгебр Лейбница, кроме лиевых многообразий почти полиномиального роста, построены еще четыре многообразия почти полиномиального роста $\tilde{\mathbf{V}}_1, \tilde{\mathbf{V}}_2, \tilde{\mathbf{V}}_3, \tilde{\mathbf{V}}_4$, которые по своим свойствам схожи с разрешимыми лиевыми.

Многообразие $\tilde{\mathbf{V}}_1$ исследовано в работе [8]. Это многообразие определяется тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$ и оно является аналогом многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A} = \mathbf{V}_1$. Более подробно об этом многообразии мы поговорим в четвертом разделе данной работы.

Следующее многообразие $\tilde{\mathbf{V}}_2$ представлено в работе [14] и его свойства близки к свойствам многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}_2$. Это многообразие порождается алгеброй следующего вида. Пусть G^0 бесконечномерная алгебра Грассмана с нулевым умножением. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств G^0 and G и определим произведение

$$(g_1^0 + g_1)(g_2^0 + g_2) = (g_1^0g_2^0)^0 + [g_1, g_2],$$

где $[g_1, g_2]$ – это коммутатор в ассоциативной алгебре Грассмана. При разложении n -го кохарактера (1) многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_2$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями $\tilde{m}_\lambda$ для всех $n \geq 4$ имеем

$$\tilde{m}_\lambda = \begin{cases} 2, & \text{если } \lambda = (r, 1^{n-r}), \text{ где } n > 2 \text{ и } r = 2, \dots, n-1; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n), (1^n) \text{ или } (r, 2, 1^{n-r-2}), \text{ где } r = 2, \dots, n-4; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Также для вычисления кодлинны многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_2$ верна формула $l_n(\tilde{\mathbf{V}}_2) = 3n - 5$ при $n \geq 3$. Экспонента этого многообразия равна двум $\exp(\tilde{\mathbf{V}}_2) = 2$. В работе [15] доказано, что базис тождеств здесь состоит из следующих двух тождественных соотношений:

$$x(y(zt)) \equiv 0,$$

$$z(xy)(xy) \equiv 0.$$

Многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_3$ и $\tilde{\mathbf{V}}_4$ определены следующим образом в работе [16]. Рассмотрим кольцо многочленов R от переменной t как алгебру Лейбница с нулевым умножением.

Алгебру R будем считать правым N_3 -модулем алгебры Гейзенберга N_3 со следующим действием:

$$f(t)a = f'(t), \quad f(t)b = tf(t), \quad f(t)c = f(t),$$

где штрих над многочленом обозначает взятие производной. Прямую сумму алгебр N_3 и R обозначим $\tilde{N}$ и зададим умножение следующим образом:

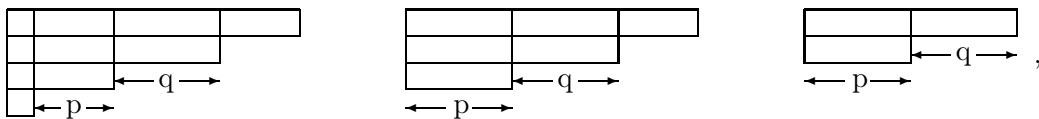
$$(x + f(t))(y + g(t)) = xy + f(t)y,$$

где $x, y \in N_3$, $f(t), g(t) \in R$. Алгебра $\tilde{N}$ порождает многообразие алгебр Лейбница $\tilde{V}_3$. Зададим действие элементов двумерной метабелевой алгебры Ли M_2 на элементы R : $f(t)e = tf'(t)$, $f(t)h = tf(t)$. Пусть $\tilde{M}$ является прямой суммой алгебр N_3 и R с заданной на ней умножением

$$(m_1 + f(t))(m_2 + g(t)) = m_1m_2 + f(t)m_2,$$

где $m_1, m_2 \in M_2$, $f(t), g(t) \in R$. Тогда эта алгебра порождает многообразие $\tilde{V}_4$.

Заметим, что экспонента многообразия $\tilde{V}_3$ равна трем, а экспонента $\tilde{V}_4$ равна двум. Скажем еще, что для многообразия $\tilde{V}_3$ ненулевые кратности существуют только для диаграмм вида



а для многообразия $\tilde{V}_4$ они выглядят следующим образом:



Многообразия $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$, $\tilde{V}_3$ и $\tilde{V}_4$ имеют почти полиномиальный рост и в случае алгебр Лейбница существование других примеров многообразий почти полиномиального роста остается открытой проблемой.

3. Кодлина многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2

Рассмотрим матрицы второго порядка со следом 0 над основным полем относительно операции коммутирования. Как мы уже говорили, множество этих матриц образует трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2 . Следуя [10], для многообразия, порожденного этой алгеброй, сохраним обозначение $\mathbf{V}_0$. Это многообразие достаточно хорошо изучено. Так, например, в работах [17], [18] доказано, что оно является шпехтовым, это значит, что оно само и любое его подмногообразие определяется конечным набором тождеств; а также получен базис тождеств данного многообразия:

$$\sum_{p \in S_4} (-1)^p x_0 x_{p(1)} x_{p(2)} x_{p(3)} x_{p(4)} \equiv 0, \quad (x_2 x_1)(x_3 x_1) x_1 \equiv 0.$$

В статье [19] получена информация о строении полилинейных частей этого многообразия как модулей симметрических групп, построены ненулевые элементы относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{V}_0$, линейаризациями которых порождаются неприводимые модули в полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_0)$. Сформулируем необходимый нам в дальнейшем результат о кратностях в виде отдельной теоремы [19].

ТЕОРЕМА 1. *В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_0)$, $n > 1$, для кратностей выполняются следующие равенства:*

$$m_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (p+q+r, p+q, p), \text{ где } p+q \neq 0 \text{ и } q \text{ или } r \text{ нечетное;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поясним, что в связи с тем, что тождества, которые выполняются в алгебре sl_2 имеют степень не менее пяти, то модуль $P_n(\mathbf{V}_0)$ при $n \leq 4$ совпадает с соответствующим модулем многообразия всех алгебр Ли и его строение хорошо известно (см., например, [1]), а именно:

$$\chi_1(\mathbf{V}_0) = \chi_{(1)}, \quad \chi_2(\mathbf{V}_0) = \chi_{(1,1)}, \quad \chi_3(\mathbf{V}_0) = \chi_{(2,1)}, \quad \chi_4(\mathbf{V}_0) = \chi_{(3,1)} + \chi_{(2,1,1)}.$$

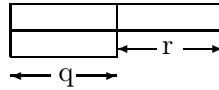
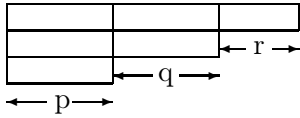
Для доказательства основной теоремы этого раздела нам понадобятся вспомогательные результаты, которые мы сформулируем в виде лемм. Все ниже изложенные результаты принадлежат автору и их доказательство опубликовано в работе [4].

ЛЕММА 1. *Для кодлин многообразия $\mathbf{V}_0$ при $n \geq 4$ верно следующее соотношение:*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = l_{n-3}(\mathbf{V}_0) + a_n + \varepsilon_n, \quad (2)$$

$$\text{где } a_n = \begin{cases} \frac{n}{4}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n+2}{4}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n = 2m+1 \end{cases} \quad \text{и } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2m; \\ 0, & \text{если } n = 2m+1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С дополнительными условиями на числа p, q, r согласно теореме 1 ненулевые кратности многообразия $\mathbf{V}_0$ могут быть получены только для диаграмм следующих видов:



Обозначим через a_n вклад в кодлину кратностей, соответствующих разбиениям на две части, то есть когда $p = 0$. В зависимости от четности степени n при рассмотрении двухстрочковых диаграмм Юнга и вычисления соответствующих им кратностей, исходя из теоремы 1, получим сумму a_n . Для диаграмм Юнга, состоящих из трех строчек, рассмотрим два случая. Сперва разберем случай, когда $p \geq 2$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ или случай, когда $p = 1$, $q \geq 1$. От диаграмм такого вида будем "отрезать" крайний столбец слева. При этом параметры q и r будут оставаться неизменными. Тогда сумма кратностей m_λ , соответствующих указанному разбиению, равна кодлине многообразия $\mathbf{V}_0$ степени $n - 3$, то есть $l_{n-3}(\mathbf{V}_0)$. Остался лишь один не подходящий нам случай, когда диаграмма Юнга состоит из трех строчек, но $p = 1$, $q = 0$ и $r = n - 3$. Тогда после удаления левого столбца получим диаграмму в виде одной строчки и соответствующее тождество выполняется в любой алгебре Ли. В этом случае кратность $m_{(n-2,1,1)}$ зависит от четности параметра r . То есть, получится, что если $n = 2t$, то кратность $m_{(n-2,1,1)}$ равна 1, если же $n = 2t + 1$, то кратность $m_{(n-2,1,1)}$ равна 0. Вклад кратностей $m_{(n-2,1,1)}$ в кодлину многообразия $\mathbf{V}_0$ обозначим ε_n .

Напомним, что по определению кодлина многообразия равна сумме кратностей по всем разбиениям числа n . Таким образом, кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формуле (2). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для кодлин многообразия $\mathbf{V}_0$ при $n \geq 4$ верно следующее соотношение:

$$l_{n+1}(\mathbf{V}_0) = l_n(\mathbf{V}_0) + e_n, \quad (3)$$

$$\text{где } e_n = \begin{cases} k, & \text{если } n = 4k; \\ 1, & \text{если } n = 4k + 1; \\ k, & \text{если } n = 4k + 2; \\ 1, & \text{если } n = 4k + 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем писать просто l_n для обозначения кодлины вместо $l_n(\mathbf{V}_0)$. Доказательство проведем методом математической индукции по степени n . Выполнимость формулы (3) для $n = 5, 6, 7, 8$ можно проверить непосредственно с помощью рассмотрений соответствующих диаграмм Юнга и вычислений. Это и будет составлять базу индукции. По предположению индукции будем считать, что в многообразии $\mathbf{V}_0$ выполняются следующие равенства:

$$l_{4k-3} = l_{4(k-1)} + k - 1, \quad l_{4k-2} = l_{4k-3} + 1 = l_{4(k-1)} + k - 1 + 1 = l_{4(k-1)} + k,$$

$$l_{4k-1} = l_{4k-2} + k - 1 = l_{4(k-1)} + 2k - 1, \quad l_{4k} = l_{4k-1} + 1 = l_{4(k-1)} + 2k.$$

Распишем значения кодлин для следующих четырех степеней n по формуле (2) и убедимся, что наше предположение верно:

$$l_{4k+1} = l_{4k-2} + \frac{4k+1-1}{2} = l_{4k} + k, \quad l_{4k+2} = l_{4k-1} + \frac{4k+2+2}{4} + 1 = l_{4k+1} + 1,$$

$$l_{4k+3} = l_{4k} + \frac{4k+3-1}{2} = l_{4k+2} + k, \quad l_{4k+4} = l_{4k+1} + \frac{4k+4}{4} + 1 = l_{4k+3} + 1.$$

Таким образом, формула (3) выполняется для всех степеней n . Лемма 2 доказана.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2. *Для всех $n \geq 4$ кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формулам:*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{16}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n^2+6n-7}{16}, & \text{если } n = 4k+1; \\ \frac{n^2+4n+4}{16}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n^2+6n-11}{16}, & \text{если } n = 4k+3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При обозначении кодлины мы, по-прежнему, как при доказательстве леммы 2, опускаем символ многообразия, то есть пишем l_n вместо $l_n(\mathbf{V}_0)$. Используя последние четыре равенства доказательства леммы 2, подставим в выражение l_{4k+4} через l_{4k+1} выражение l_{4k+1} через l_{4k} и получим

$$l_{4(k+1)} = l_{4k} + 2k + 2. \quad (4)$$

Сначала методом математической индукции по k , где $k > 0$, покажем, что для $n = 4k$, верно

$$l_{4k} = k(k+1). \quad (5)$$

Формула верна при $k = 1$, так как $l_4 = 2$. Предположим, что $l_{4k} = k(k+1)$ и сделаем индуктивный переход. Для степени $n = 4(k+1)$, используя соотношение (4), запишем

$$l_{4(k+1)} = l_{4k} + 2k + 2 = k(k+1) + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2).$$

Таким образом, равенство (5) выполняется в многообразии $\mathbf{V}_0$. Пользуясь формулами (3) и (5), получим

$$l_{4k} = \frac{n}{4} \left(\frac{n}{4} + 1 \right) = \frac{n^2 + 4n}{16}, \quad l_{4k+1} = l_{4k} + k = \left(\frac{n-1}{4} \right)^2 + 2 \frac{n-1}{4} = \frac{n^2 + 6n - 7}{16},$$

$$l_{4k+2} = l_{4k+1} + 1 = \left(\frac{n-2}{4} \right)^2 + 2 \frac{n-2}{4} + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{16},$$

$$l_{4k+3} = l_{4k+2} + k = \left(\frac{n-3}{4} \right)^2 + 3 \frac{n-3}{4} + 1 = \frac{n^2 + 6n - 11}{16}.$$

Формулы, которые мы получили для вычисления кодлины многообразия $\mathbf{V}_0$, совпадают с формулами, которые указаны в формулировке теоремы. Таким образом, теорема 2 доказана.

4. Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$

В алгебрах Ли фраза "правило дифференцирования" означает использование следующего тождественного соотношения

$$xyz \equiv xzy + x(yz), \quad (6)$$

то есть использование того факта, что умножение справа является, так называемым, внутренним дифференцированием алгебры Ли.

Многообразие алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0 \quad (7)$$

и состоит из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ было достаточно подробно исследовано в работе [12], где установлена почти полиномиальность роста этого многообразия, найдены формулы для кратностей вхождения неприводимых модулей в разложение полилинейной части, рассматриваемой как модуль симметрической группы, описаны на "языке тождеств" подмногообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

Договоримся использовать для обозначения оператора умножения справа на элемент, например y , соответствующую заглавную букву Y , то есть $xY = xy$. Это обозначение в некоторых случаях оказывается удобным. Например, левонормированное произведение $xy \dots y$ степени $m+1$ нельзя записать так xy^m , но можно записать в таком виде xY^m , где Y^m — степень линейного оператора. Кроме того, будем использовать специальный символ над образующими (звезду, черту или волну) для обозначения кососимметризации. Если же образующие в наборах совпадают, то будем говорить об альтернированных наборах образующих, так как в этом случае обычное свойство кососимметризации нарушается.

Используя тождество антикоммутативности и тождество Якоби, которые определяют алгебру Ли, можно показать, что в ней выполняются следующие тождества

$$x_1^*x_2^*f \equiv 2x_1x_2f; \quad x_1^*x_2^*x_3^*f \equiv 0; \quad (8)$$

$$x_1^*x_2^*x_3^*f \equiv 2x_1^*x_3x_2^*f; \quad 2wx_1^*x_2^*f \equiv w(x_1^*x_2^*)f,$$

где w - любой элемент алгебры, а f - произвольный ассоциативный полином от внутренних дифференцирований. Отметим, что применение нечетной перестановки к переменным, помеченным специальным символом, влечет изменение знака. Например,

$$x_4x_1^*x_2^*x_3^* = -x_4x_2^*x_1^*x_3^* = x_4x_3^*x_1^*x_2^*.$$

Фраза "проальтернируем тождество по паре образующих", например, по x и y означает получение из тождества $f(x, y, \dots) \equiv 0$ такого следствия $f(x, y, \dots) - f(y, x, \dots) \equiv 0$. При этом степень тождества по этим образующим должна быть равна единице.

Перейдем к изложению результатов о свойствах многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Выпишем некоторые тождественные соотношения, которые выполняются в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Используя тождества (8) и правило дифференцирования (6), элемент, содержащий пару альтернированных образующих, можно переписать так:

$$wx_1^*Y_1 \dots Y_mx_2^* = \frac{1}{2}w(x_1^*x_2^*)Y_1 \dots Y_m - \sum_{i=2}^m wx_1^*Y_1 \dots Y_{i-1}(x_2^*Y_i)Y_{i+1} \dots Y_m.$$

Это соображение позволяет получить такие тождественные соотношения многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$:

$$(xyx_{p(1)} \dots x_{p(k)})(zty_{q(1)} \dots y_{q(m)}) \equiv (xyx_1 \dots x_k)(zty_1 \dots y_m) \quad (9)$$

где $p \in S_k$, $q \in S_m$. Таким образом, в скобках можно менять местами любые два соседних элемента, начиная с третьей позиции.

Сформулируем полученный в работе [12] результат о кратностях многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ в виде отдельной теоремы. Для этого определим две числовые величины, которые зависят от целых неотрицательных аргументов:

$$m(p, q) = \begin{cases} [\frac{q}{2}] + 1, & \text{если } p \text{ или } q \text{ нечетное число;} \\ \frac{q}{2}, & \text{если оба параметра четные;} \end{cases}$$

$$n(p, q) = \begin{cases} [\frac{q+1}{2}], & \text{при } p = 0; \\ q + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

ТЕОРЕМА 3. В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, $n \geq 6$, для кратностей выполняются следующие равенства:

$$m_\lambda = \begin{cases} m(p, q), & \text{если } \lambda = (p + q + 1, p + 1, 1, 1), n = 2p + q + 4; \\ m(p, q), & \text{если } \lambda = (p + q + 2, p + 2, 2), n = 2p + q + 6; \\ m(p, q), & \text{если } \lambda = (p + q, p), p \geq 2, n = 2p + q; \\ n(p, q), & \text{если } \lambda = (p + q + 1, p + 1, 1), n = 2p + q + 3; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n - 1, 1); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следует пояснить, что тождество (7) имеет шестую степень, поэтому модуль $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ при $n \leq 5$ совпадает с соответствующим модулем многообразия всех алгебр Ли и его строение хорошо известно (см., например, п. 4.8.4 монографии [1]). Сформулируем новые результаты, касающиеся этого многообразия [5].

ТЕОРЕМА 4. Кодлина многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ вычисляется по следующим формулам:

$$l_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \begin{cases} \frac{5n^2 - 24n + 32}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \frac{5n^2 - 24n + 36}{8}, & \text{если } n = 4m + 2; \\ \frac{5n^2 - 24n + 35}{8}, & \text{если } n = 4m + 1 \text{ или } n = 4m + 3. \end{cases}$$

Формула получена непосредственным вычислением, используя формулы для кратностей из теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ состоит из элементов вида:

$$x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}}, \quad (10)$$

где $i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-1}$;

$$(x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}), \quad (11)$$

где $k = 2, \dots, (n - 2)$ и $i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-k-1}$, $j_1 < j_2 > j_3 > \dots > j_k$.

При $n \geq 2$ коразмерность многообразия задается формулой

$$c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n - 1) ((n - 4)2^{n-3} + 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любой полилинейный элемент равен линейной комбинации левонормированных мономов с одной и той же образующей, например x_n , на первом слева месте, а следовательно, в силу тождества антикоммутативности с одной и той же образующей на втором слева месте. Рассмотрим произвольный такой моном $x_{i_1}x_nx_{i_2}\dots x_{i_{n-1}}$. Если выполняются неравенства $i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-1}$, то это моном вида (10). Пусть в мономе $x_{i_1}x_n\dots x_ix_jx_{j_1}\dots x_{j_k}$ существует пара соседних образующих x_i, x_j с возрастающими индексами, то есть $i < j$. В этом случае воспользуемся тождеством $x(yz) \equiv xyz - xzy$, которое выполняется в любой алгебре Ли, и получим

$$x_{i_1}x_n\dots x_ix_jx_{j_1}\dots x_{j_k} \equiv x_nx_{i_1}\dots (x_ix_j)x_{j_1}\dots x_{j_k} + x_n\dots x_jx_ix_{j_1}\dots x_{j_k}.$$

Несложная индукция по числу соседних пар образующих, индексы которых возрастают, позволяет установить, что любой моном выражается через элементы вида (10) и элементы вида $x_{i_1}x_n\dots (x_ix_j)x_{j_1}\dots x_{j_k}$. Заметим, что дифференцируя последний элемент образующими $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$, получаем мономы вида (11), в которых дополнительно можно считать, что вторая слева образующая второго произведения является максимальной, то есть индекс j_2 является максимальным среди индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$. Для завершения доказательства, что элементы вида (10) и (11) порождают векторное пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, осталось заметить, что в силу тождества (9) образующие $x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k-1}}$, так же как и образующие $x_{j_3}, \dots, x_{j_k}$, в мономах вида (11) можно менять местами. Таким образом, получаем необходимые неравенства $i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-k-1}$, $j_1 < j_2 > j_3 > \dots > j_k$.

Итак, пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ является линейной оболочкой мономов вида (10) и (11). Докажем теперь, что это множество мономов является линейно независимым. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ выполнено тождество

$$\sum_{i_1=1}^{n-1} \alpha_{i_1} x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}} + \sum \beta_{I, J, i_1, j_1} (x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}}) (x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0, \quad (12)$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-k-1}\}, \quad J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

Если существует i_1 такой, что $\alpha_{i_1} \neq 0$, то подставив в (12) вместо образующей x_{i_1} образующую x , а вместо остальных образующих – y , получим в качестве следствия тождество энгелевости $xY^{n-1} \equiv 0$. Получили противоречие, так как в силу теоремы 3 кратность $m_{(n-1,1)}$ отлична от нуля. Таким образом, тождество (12) приобретает вид

$$\sum \beta_{I, J, i_1, j_1} (x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}}) (x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0, \quad (13)$$

в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_n = x$, $x_{j_2} = y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид:

$$(xy_k y_{k+1} \dots y_{n-2})(y y_1 \dots y_{k-1}).$$

Мы еще воспользовались антикоммутативностью и переставили первые пары в каждой скобке. В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1 z_2 x_1 \dots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_3 z_4 x_{k+1} \dots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s , где $s = 1, 2, \dots, n-2$. В силу тождеств (9) после произведенной подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое и полученное следствие примет вид

$$(z_1 z_2 \bar{x}_1 \dots \tilde{x}_k \bar{y}_{k+1} \dots \tilde{y}_{n-2})(z_3 z_4 \bar{y}_1 \dots \tilde{y}_k \bar{x}_{k+1} \dots \tilde{x}_{n-2}) \equiv 0.$$

Получили противоречие, так как это тождество не выполняется в многообразии $\mathbf{N}_2 \mathbf{A}$, иначе бы, например, кратность $m_{(p,p)}$ при нечетном $p > n+2$ была бы равна 0, а не 1, как было установлено в теореме 3.

Итак, все элементы вида (10) и (11) линейно независимы и образуют базис пространства $P_n(\mathbf{N}_2 \mathbf{A})$. Понятно, что количество элементов вида (10) равно $n-1$. Элементы вида (11) зависят от выбора индексов $j_1, \dots, j_k$, а также от выбора i_1, j_1 . Простые комбинаторные соображения позволяют выписать такую формулу для коразмерностей

$$c_n(\mathbf{N}_2 \mathbf{A}) = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)(n-k-1) \binom{n-1}{k}.$$

Для завершения доказательства достаточно использовать следующие равенства, касающиеся биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m, \quad \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1}, \quad \sum_{k=0}^m k^2 \binom{m}{k} = (m^2 + m) \cdot 2^{m-2},$$

доказательства которых мы опускаем. Теорема 5 доказана.

5. Базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница $\tilde{\mathbf{V}}_1$

Напомним, что алгебра Лейбница определяется тождеством Лейбница

$$xyz \equiv xzy + x(yz), \quad (14)$$

которое позволяет выразить любое произведение элементов алгебры в виде линейной комбинации левонормированных произведений. В частности,

$$x(yz) \equiv xyz - xzy.$$

Кроме того, если подставить $z = y$ в тождество Лейбница, то получим тождество

$$x(y^2) \equiv x(yy) \equiv 0,$$

линеаризация которого имеет вид

$$x(yz) \equiv -x(zy). \quad (15)$$

Пусть e_{ij} — матричные единицы, а $UT_2 = UT_2(\Phi) = \Phi e_{11} + \Phi e_{12} + \Phi e_{22}$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц размера 2×2 над основным полем Φ . Обозначим через UT_2^0 алгебру тех же матриц только относительно другого умножения, когда результат произведения двух матриц равен нулю, то есть для любых $a_1^0, a_2^0 \in UT_2^0$ произведение $a_1^0 a_2^0 = 0$ равно нулю. Пусть теперь $U = UT_2^0 \oplus UT_2$ — прямая сумма двух векторных пространств UT_2^0 и UT_2 . Зададим на U структуру алгебры, определяя произведение в ней следующим образом $(a_1^0 + a_1)(a_2^0 + a_2) = (a_1^0 a_2^0)^0 + [a_1, a_2]$, где $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$ коммутатор матриц, а

$$e_{ij}^0 e_{hl} = \begin{cases} e_{il} & , \text{ если } j = h \\ 0 & , \text{ если } j \neq h. \end{cases}$$

В работе [8] сделан вывод, что алгебра U является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие $\tilde{\mathbf{V}}_1$. Это многообразие определяется тождеством

$$x_1(x_2 x_3)(x_4 x_5) \equiv 0. \quad (16)$$

Из выше упомянутой работы (следствие 2.3 и лемма 3.3) получаем, что для ко-размерностей исследуемого многообразия верна формула $c_n(\tilde{\mathbf{V}}_1) = 2^{n-2}n(n-3) + 2n$. Таким образом, экспонента равна двум, то есть $\exp(\tilde{\mathbf{V}}_1) = 2$. Приведем также полученные в той же самой работе результаты, касающиеся кратностей и кодлинны. Для кодлинны при $n > 2$ выполнены формулы: $l_n(\tilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + 6$, если n четное, и $l_n(\tilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + \frac{11}{2}$, если n нечетное. В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\tilde{\mathbf{V}}_1)$, кратности вычисляются по следующим формулам:

$$\tilde{m}_\lambda = \begin{cases} q+1, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1, 1), (p+q+2, p+2, 2), (q+1, 1); \\ 2q+1, & \text{если } \lambda = (q+1, 1, 1); \\ 2q+2, & \text{если } \lambda = (p+q, p), p \geq 2; \\ 3q+3, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1), p > 0; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для получения основного результата этого параграфа нам потребуется такая несложная лемма.

ЛЕММА 3. В многообразии алгебр Лейбница $\tilde{\mathbf{V}}_1$ выполняются следующие тождественные соотношения, где $p \in S_k$, $q \in S_m$.

$$(xx_{p(1)} \dots x_{p(k)})(zty_{q(1)} \dots y_{q(m)}) \equiv (xx_1 \dots x_k)(zty_1 \dots y_m), \quad (17)$$

Отметим, что достаточно показать, что можно в первой скобке менять местами любые два соседних элемента, начиная со второго места, а во второй скобке — начиная с третьего.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы следует, что наличие пары альтернированных образующих начиная со второй позиции внутри первой скобки или во второй скобке, начиная с третьей позиции, влечет равенство элемента нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Тождество

$$(z_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k \bar{y}_{k+1} \dots \bar{y}_{n-2})(z_2 z_3 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k \bar{x}_{k+1} \dots \bar{x}_{n-2}) \equiv 0$$

не выполняется в алгебре U , а следовательно и в многообразии $\tilde{\mathbf{V}}_1$. Действительно, достаточно подставить $z_1 = e_{11}^0$, $z_2 = e_{11}$, $z_3 = e_{12}$, $x_s = e_{11}$, $y_s = e_{22}$, $s = 1, 2, \dots, n-2$, чтобы получить отличный от нуля результат.

Сформулируем основной результат этого раздела [6].

ТЕОРЕМА 6. Базис полилинейной части $P_n(\tilde{\mathbf{V}}_1)$ состоит из элементов вида:

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad (18)$$

где $i_2 > \dots > i_n$;

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}), \quad (19)$$

где $k = 2, \dots, (n-1)$, $i_2 > \dots > i_{n-k}$, $j_1 < j_2$ и $j_2 > j_3 > \dots > j_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любой элемент полилинейной части является линейной комбинацией левонормированных, достаточно рассмотреть левонормированный элемент $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n}$. Используя тождество Лейбница (14), получим $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n} = x_{j_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} + w$, где $i_2 > \dots > i_n$, а w является линейной комбинацией элементов вида

$$x_{j_1} \dots x_{j_m} (x_i x_j) x_{k_1} \dots x_{k_t}, \quad (20)$$

в которых $m \geq 1$, $t \geq 0$, $m+t = n-2$, а множество $\{j_1, \dots, j_m, i, j, k_1, \dots, k_t\}$ совпадает с начальным отрезком натурального ряда $\{1, \dots, n\}$. Отметим, что первое слагаемое является элементом из множества (18).

Рассмотрим элемент (20). Дифференцируя в нем образующими x_{k_s} , $s = 1, \dots, t$, получим линейную комбинацию элементов вида:

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}),$$

где $k \geq 2$ и $n-k \geq 1$. Применяя к этим элементам тождества (14) и (15), которые позволяют внутри второй скобки действовать аналогично случаю алгебр Ли, можно добиться, чтобы индекс j_2 был максимальным среди индексов $j_1, \dots, j_k$. Используя тождества из леммы 3, делаем так, чтобы в этих элементах индексы, начиная со второго в первой скобке, и начиная с третьего во второй скобке, были упорядочены по убыванию. Таким образом, мы доказали, что элементы вида (18) и (19) порождают полилинейную часть P_n как векторное пространство. Для завершения доказательства осталось установить их линейную независимость.

Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\tilde{\mathbf{V}}_1$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \alpha_i (x_s x_n \dots \hat{x}_s \dots x_1) + \\ & + \sum \beta_{I, J, i_1, j_1} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств

$$I = \{i_2, \dots, i_{n-k-1}\}, \quad J = \{j_2, \dots, j_k\},$$

а домиком, как общепринято, обозначено отсутствие в последовательности букв соответствующей образующей.

Если существует индекс s такой, что $\alpha_s \neq 0$, то подставив в (21) вместо образующей x_s квадрат x^2 , а вместо остальных образующих — y , получим, используя тождество $xy^2 \equiv 0$, в качестве следствия тождество $xxY^{n-1} \equiv 0$, из которого следует такое $xxX^n \equiv 0$. Получили противоречие, так как в разложении кохарактера многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_1$ кратность $\tilde{m}_{(n+1)}$ не равна нулю, точнее $\tilde{m}_{(n+1)} = 1$. Таким образом, все коэффициенты первой суммы равны нулю и тождество (21) приобретает вид

$$\sum \beta_{I,J,i_1,j_1} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}}) (x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0,$$

в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_{i_1} = x, x_{j_1} = y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид

$$(xy_k y_{k+1} \dots y_{n-2})(y y_1 \dots y_{k-1}).$$

В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1 x_1 \dots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_2 z_3 x_k \dots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s , где $s = 1, 2, \dots, n-2$. В силу замечания 1 в результате произведенной подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое, которое примет вид

$$(z_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k \bar{y}_{k+1} \dots \bar{y}_{n-2})(z_2 z_3 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k \bar{x}_{k+1} \dots \bar{x}_{n-2}) \equiv 0.$$

Получили противоречие, так как в силу замечания 2 это тождество не выполняется в алгебре U , а следовательно и в многообразии $\tilde{\mathbf{V}}_1$. Теорема полностью доказана.

Отметим взаимосвязь формул для коразмерностей трех многообразий: многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{UT}_2$, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц порядка два UT_2 ; многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ всех алгебр Ли, коммутанты которых нильпотентны ступени не выше двух и многообразия алгебр Лейбница $\tilde{\mathbf{V}}_1$. Для всех $n \geq 1$ выполнены равенства

$$c_n(\tilde{\mathbf{V}}_1) = n \cdot c_{n-1}(\mathbf{UT}_2) = c_{n+1}(\mathbf{N}_2\mathbf{A}).$$

В заключении выражаю искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Мищенко за предложенное направление исследований, полезные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука. 1985. 448 с.

2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI. Vol. 122. 2005. 352 p.
3. Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Математический сборник. 1950. Т. 26(68), № 1. С. 19–33.
4. Пестова Ю. Р. Кодлина многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2 // Вестник Моск. Унив-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 58–61.
5. Мищенко С. П., Фятхутдинова Ю. Р. Новые свойства многообразия алгебр Ли N_2A // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 7. С. 165–173.
6. Мищенко С.П., Пестова Ю. Р. Базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница $\tilde{V}_1$ // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3 (114). С. 72–78.
7. Berele A. Codimensions of products and of intersections of verbally prime T -ideals // Izrael J.Math. 1998. № 103. P. 17–28.
8. Mishchenko S. A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 202. P. 82–101.
9. Krakowsky A. The polynomial identities of the Grassmann algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 429–438.
10. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 25–45.
11. Мищенко С. П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1345–1348.
12. Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весці АН БССР: Сер. фіз. матем. наук. 1987. № 6. С. 39–43.
13. Воличенко И. Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весці АН БССР: Сер. фіз. матем. наук. 1980. № 1. С. 23–30.
14. Абанина Л. Е. Структура и тождества некоторых многообразий алгебр Лейбница [Текст] : дис. ... канд. физ-мат наук : 01.01.06. Ульяновск: УлГУ, 2003. 65 с.
15. Рацеев С. М. Структура и тождества некоторых алгебр лиевского типа : дис. ... канд. физ-мат наук : 01.01.06. Ульяновск: УлГУ, 2006. 101 с.
16. Абанина Л. Е. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. М.: Союз, 2002. С. 95–99.
17. Размыслов Ю. П. О конечной базирюемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 83–113.

18. Размыслов Ю. П. Конечная базиримость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 685–693.
19. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. 1980. Т. 115, № 1. С. 98–115.

REFERENCES

1. Bahturin, Yu. A. 1985, *"Identities in algebras Lie"*, Science, Moscow, 448 pp.
2. Giambruno, A. & Zaicev, M. 2005, *"Polynomial Identities and Asymptotic Methods"*, Math. Surv. and Monographs, vol. 122, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 352 pp.
3. Malcev, A. I. 1950, "On algebras with identical defining relations", *Matematicheskii Sbornik*, vol. 26(68), issue 1, pp. 19–33.
4. Pestova, Yu. R. 2015, "Colength of the variety generated by a three-dimensional simple Lie algebra", *Vestnik Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika. Mekhanika.*, issue 3, pp. 58–61.
5. Mishchenko, S. P. & Fyathutdinova, Yu. R. 2014, "New properties of the Lie algebra variety $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ ", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 197, issue 4, pp. 558–564. doi: 10.1007/s10958-014-1734-1
6. Mishchenko, S. P. & Pestova, Yu. R. 2014, "Bases of multilinear part of Leibniz algebras variety $\tilde{\mathbf{V}}_1$ ", *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, issue 3 (114), pp. 72–78.
7. Berele, A. 1998, "Codimensions of products and of intersections of verbally prime T -ideals", *Israel J. Math.*, issue 103, pp. 17–28.
8. Mishchenko, S. 2005, "A Leibniz variety with almost polynomial growth", *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 202, pp. 82–101.
9. Krakowsky, A. 1973, "The polynomial identities of the Grassmann algebra", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 181, pp. 429–438.
10. Mishchenko, S. P. 1990, "Growth of varieties of Lie algebras", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, issue 6, pp. 25–45.
11. Mishchenko, S. P. 1990, "Varieties of solvable Lie algebras", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 313, issue 6, pp. 1345–1348.
12. Mishchenko, S. P. 1987, "Varieties of Lie algebras with two-step nilpotent commutant", *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, issue 6, pp. 39–43.
13. Volichenko, I. B. 1980, "On one Lie variety connected with standard identities", *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, issue 1, pp. 23–30.
14. Abanina, L. E. 2003, *"Structure and identities of some Leibniz varieties"*, Ulyanovsk, ULSU, 65 pp.

15. Ratseev, S. M. 2006, "*Structure and identities of some Lie algebras*", Ulyanovsk, UISU, 101 pp.
16. Abanina, L. E. 2002, "Some Leibniz varieteis", *Mathematical methods and applications. Proceedings of the 14th Mathematical Readings*, pp. 95–99.
17. Razmyslov, Yu. P. 1973, "On the finite basis of identities of the matrix algebra of the second order over a field of characteristic zero", *Algebra and Logiks*, vol. 12, issue 1, pp. 83–113.
18. Razmyslov, Yu. P. 1974, "Finite bases of some algebras varieties", *Algebra and Logiks*, vol. 13, issue 6, pp. 685–693.
19. Drenski, V.S. 1980, "Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras", vol. 115, issue 1, pp. 98–115.

Ульяновский государственный университет.

Получено 22.04.2015

УДК 514.133

КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕТРАЭДРОВ
С НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ГРАНЯМИ
В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина (г. Саратов)

Аннотация

Работа содержит первое исследование тетраэдров гиперболического пространства $\hat{H}^3$ положительной кривизны.

Пространство $\hat{H}^3$ реализуется на внешней относительно овальной гиперквადрики области проективного трехмерного пространства, т. е. на идеальной области пространства Лобачевского.

Все прямые пространства $\hat{H}^3$ по наличию общих точек с абсолютом могут быть эллиптическими, параболическими или гиперболическими. В зависимости от положения по отношению к абсолюту все плоскости пространства $\hat{H}^3$ относятся к трем типам: эллиптические, коевклидовы и гиперболические плоскости положительной кривизны. Углы эллиптической плоскости одного типа, плоскости коевклидовой — трех типов, а гиперболической плоскости положительной кривизны — пятнадцати типов. Также к пятнадцати типам относятся все двугранные углы пространства $\hat{H}^3$.

Всевозможные наборы типов граней определяют в пространстве $\hat{H}^3$ пятнадцать типов тетраэдров. В работе проведена классификация тетраэдров с негиперболическими гранями. Все такие тетраэдры относятся к пяти типам. Доказано, что каждое ребро тетраэдра с негиперболическими гранями принадлежит эллиптической, замкнутой в пространстве $\hat{H}^3$, прямой.

В дальнейшей классификации тетраэдров с негиперболическими гранями используем понятие α -границ тетраэдра. С каждой точкой пространства $\hat{H}^3$ связан конус касательных к абсолютной овальной гиперквадрике, названный световым конусом точки. Световой линией грани тетраэдра названа линия пересечения плоскости, содержащей данную грань, со световым конусом противоположной к данной грани вершины тетраэдра. Грань тетраэдра пространства $\hat{H}^3$ названа α -гранью, если она содержит полностью свою световую линию. Доказана теорема о количестве α -граней:

тетраэдр с негиперболическими гранями в пространстве $\hat{H}^3$ либо не содержит α -граней, либо содержит одну α -грань, либо все его грани являются α -гранями.

Количество α -граней и их типы определяют классы и роды тетраэдров с негиперболическими гранями. В работе установлены типы двугранных углов в тетраэдре каждого класса (рода).

Ключевые слова: гиперболическое пространство $\hat{H}^3$ положительной кривизны, классификация тетраэдров гиперболического пространства положительной кривизны.

Библиография: 15 наименований.

CLASSIFICATION OF TETRAHEDRONS WITH NOT HYPERBOLIC SIDES IN A HYPERBOLIC SPACE OF POSITIVE CURVATURE

L. N. Romakina

Abstract

The work contains the research of tetrahedrons of a hyperbolic space $\hat{H}^3$ of positive curvature.

The space $\hat{H}^3$ is realized by on external domain of projective three-dimensional space with respect to the oval hyperquadric, т. е. on ideal domain of the Lobachevskii space.

All lines of the space $\hat{H}^3$ on existence of the common points with the absolute can be elliptic, parabolic or hyperbolic. All planes of the space $\hat{H}^3$ depending on position with respect to the absolute belong to the three types: elliptic, coeuclidean and hyperbolic of positive curvature. The angles of the elliptic plane of one type. The angles of the coeuclidean plane of three types. The angles of the hyperbolic plane of positive curvature of fifteen types. Also all dihedral angles of the space $\hat{H}^3$ belong to fifteen types.

Various sets of types of sides define in the space $\hat{H}^3$ fifteen types of tetrahedrons. In work the classification of tetrahedrons with not hyperbolic sides is carried out. All such tetrahedrons belong to five types. It is proved that each edge of a tetrahedron with not hyperbolic sides belongs to the elliptic line. The elliptic line is the closed line in the space $\hat{H}^3$.

In further classification of tetrahedrons with not hyperbolic sides we use concept α -sides of the tetrahedron. In the space $\hat{H}^3$ the cone of tangents to absolute oval hyperquadric is connected with each point. This cone we called a light cone of a point. The curve of crossing of the side plane with a light cone of tetrahedron top, opposite to this side, is called the light curve of a side of a tetrahedron. The tetrahedron side in the space $\hat{H}^3$ is called a α -side if

it contains completely the light curve. The following theorem is proved. The tetrahedron with not hyperbolic sides in the space $\hat{H}^3$ or doesn't contain the α -sides, or supports one α -side, or all its sides are the α -sides.

Quantity α -sides and their types define classes and sorts of the tetrahedrons with not hyperbolic sides. In work the types of dihedral angles in a tetrahedron of each class (sort) are established.

Keywords: hyperbolic space $\hat{H}^3$ of positive curvature, classification of tetrahedrons of a hyperbolic space of positive curvature.

Bibliography: 4 titles.

1. Трехмерное гиперболическое пространство положительной кривизны

Трехмерное гиперболическое пространство $\hat{H}^3$ положительной кривизны рассматриваем в проективной модели Кэли – Клейна [1] на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3 , т.е. на внешней относительно овальной гиперквадрики [2] γ области проективного пространства P_3 . Пространства $\hat{H}^3$ и Λ^3 в объединении с гиперквадрикой γ образуют *расширенное гиперболическое пространство* H^3 [3 – 6].

Овальную гиперквадрику γ называют *абсолютом* каждого из пространств $\hat{H}^3$, Λ^3 и H^3 . Группу G проективных автоморфизмов овальной гиперквадрики γ — *фундаментальной группой* пространств $\hat{H}^3$, Λ^3 и H^3 .

Прямая пространства H^3 в зависимости от расположения по отношению к абсолюту может быть одного из трех типов. *Гиперболические (эллиптические)* прямые пересекают абсолютную гиперквадрику в двух вещественных (мнимо сопряженных точках); *параболические* прямые касаются абсолютной гиперквадрики.

Эллиптические прямые пространства H^3 принадлежат полностью пространству $\hat{H}^3$, их называют *эллиптическими прямыми* пространства $\hat{H}^3$. Гиперболические прямые пространства H^3 разделены абсолютом на две части. Внешнюю относительно абсолюта часть гиперболической прямой пространства H^3 называют *гиперболической прямой* пространства $\hat{H}^3$. Каждая гиперболическая прямая пространства $\hat{H}^3$ имеет две вещественные бесконечно удаленные точки. Собственные для $\hat{H}^3$ части параболических прямых пространства H^3 называют *параболическими прямыми* пространства $\hat{H}^3$. Как и евклидова прямая каждая параболическая прямая пространства $\hat{H}^3$ имеет одну бесконечно удаленную точку.

Каждая плоскость пространства P_3 пересекает овальную гиперквадрику по линии второго порядка, которая может быть невырожденной (овальной или нулевой), или вырожденной [2]. Овальная гиперквадрика пространства P_3 не содержит вещественных прямых, поэтому вырожденной линией второго порядка пересечения плоскости с овальной гиперквадрикой в P_3 может быть только пара мнимо сопряженных прямых.

Тип плоскости пространства $\hat{H}^3$ определен типом линии второго порядка, по которой данная плоскость пересекает абсолютную гиперквадрику. Плоскости пространства $\hat{H}^3$, пересекающие абсолют по нулевой (овальной) линии, являются *эллиптическими* [6 – 8] (*гиперболическими плоскостями положительной кривизны*, или плос-

костями типа $\hat{H}$ [5, 9, 10]), касательные к абсолюту плоскости — *коевклидовыми* [6 – 8, 11] плоскостями.

Эллиптические, гиперболические положительной кривизны и коевклидовы плоскости пространства $\hat{H}^3$ условимся обозначать символом E , H и C соответственно.

Расположение пары прямых по отношению к абсолюту определяет на коевклидовой плоскости три типа углов [11], на гиперболической плоскости положительной кривизны — пятнадцать типов углов [9, 12]. На плоскости эллиптической все углы одного типа.

В пространстве $\hat{H}^3$ расположение пары плоскостей относительно абсолюта определяет пятнадцать типов двугранных углов. Приведем те из них, которые потребуются в данной работе.

Пусть α и β — эллиптические плоскости пространства $\hat{H}^3$. Плоскости α , β не имеют общих вещественных точек с абсолютом и разбивают пространство P_3 , содержащее $\hat{H}^3$, на два полупространства. То из полупространств, которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранным эллиптическим псевдоуглом* (*двугранным эллиптическим углом*) между плоскостями α и β .

Пучки эллиптических плоскостей гиперболические, так как через общую прямую двух эллиптических плоскостей проходят две вещественные касательные к абсолюту плоскости. Следовательно, двугранные эллиптические углы и двугранные эллиптические псевдоуглы измеримы с помощью абсолюта, тип измерения — гиперболический.

Пусть α и β — коевклидовы плоскости пространства $\hat{H}^3$. То из полупространств пространства P_3 между плоскостями α и β , которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранной ковалианой* (*двугранной валианой*) между плоскостями α и β .

Заметим, что в отличие от плоской ковалианы, состоящей из двух связанных непесекающихся полуковалиан, двугранная ковалиана — связное множество в $\hat{H}^3$.

В образуемом коевклидовыми плоскостями α и β гиперболическом пучке плоскостей измерение вводится с помощью самих плоскостей α и β . Следовательно, двугранная ковалиана и двугранная валиана — неизмеримые углы пространства $\hat{H}^3$. Каждые две двугранные ковалианы (двугранные валианы) конгруэнтны.

Пусть α — эллиптическая, β — коевклидова плоскости пространства $\hat{H}^3$. То из полупространств пространства P_3 между плоскостями α и β , которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранным эллиптическим псевдофлагом* (*двугранным эллиптическим флагом*) между плоскостями α и β .

Грани двугранного эллиптического флага (двугранного эллиптического псевдофлага) определяют гиперболический пучок плоскостей, измерение в котором вводится с помощью касательных плоскостей к абсолюту, одна из которых совпадает с гранью. Следовательно, двугранные эллиптические флаги (двугранные эллиптические псевдофлаги) не имеют инварианта группы G , т. е. неизмеримы в $\hat{H}^3$.

Тип прямой, тип плоскости, тип плоского угла и тип двугранного угла — инварианты преобразований группы G .

2. Определение многогранника в $\hat{H}^3$

Определение многогранника в пространстве $\hat{H}^3$ дадим по аналогии с определением многогранника в копсевдоевклидовом пространстве [13] (см. для сравнения [14, 15]).

Плоским n -реберником, или *плоским многореберником*, плоскости с проективной метрикой¹ назовем совокупность n отрезков, циклически соединяющих n точек, разбивающую данную плоскость² на две связные области. Указанные отрезки (точки) назовем *ребрами* (*вершинами*), а прямые, содержащие ребра, — *сторонами* плоского n -реберника.

Два плоских многореберника с общим ребром a назовем *смежными по ребру a* , или, кратко, *смежными*.

Упорядоченную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ плоских многореберников пространства $\hat{H}^3$ назовем *соединяющей цепочкой многореберников* α_1, α_p , если для каждого числа q , $q = \overline{1, p-1}$, многореберники α_q, α_{q+1} являются смежными.

Многогранником пространства $\hat{H}^3$ назовем совокупность Ω конечного числа плоских многореберников этого пространства, удовлетворяющую условиям:

- 1) каждое ребро любого плоского многореберника совокупности Ω является ребром двух и только двух плоских многореберников данной совокупности;
- 2) для любых двух плоских многореберников совокупности Ω существует соединяющая цепочка из многореберников данной совокупности.

При выполнении условий 1), 2) многореберники совокупности Ω вместе с внутренними относительно них областями назовем *гранями*, их ребра — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника.

Ребро многогранника соответственно содержащей его прямой назовем *эллиптическим*, *гиперболическим* или *параболическим*. Ребро многогранника назовем *истинным*, если смежные по нему грани многогранника не лежат в одной плоскости.

Многогранник пространства $\hat{H}^3$, все грани которого трехреберники, назовем *тетраэдром* данного пространства.

Ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, назовем *противоположными*. Двугранные углы тетраэдра при противоположных ребрах назовем *противоположными* двугранными углами тетраэдра.

Вершину тетраэдра, не лежащую в грани, назовем *противоположной* для данной грани.

По определению все вершины и ребра тетраэдров — собственные для пространства $\hat{H}^3$ объекты. Грани тетраэдров могут содержать несобственные точки пространства $\hat{H}^3$.

¹ В случае пространства $\hat{H}^3$ рассматриваем эллиптические, коевклидовы или гиперболические плоскости положительной кривизны.

² Или некоторую компоненту плоскости, если число компонент данной плоскости больше единицы.

3. Схема классификации тетраэдров

Классификацию многогранников пространства $\hat{H}^3$ проводим по типу их расположения относительно абсолюта, описать который можно наборами следующих инвариантных относительно действий группы G характеристик многогранника: типы плоскостей, содержащих грани; типы двугранных углов; типы граней; типы ребер; типы плоских углов.

По типу плоскостей, содержащих грани тетраэдра, в пространстве $\hat{H}^3$ получаем пятнадцать типов тетраэдров. Условимся их обозначать соответственно типам плоскостей граней:

$EEEE, EEEH, EEEС, EENN, EENC, EECC, ENNN,$

$ЕССС, ENCC, ENHC, NNNH, CCCC, NHCC, NNHC, HCCC.$

В дальнейшей классификации тетраэдров пространства $\hat{H}^3$ учитываем типы граней тетраэдров. Все трехреберники эллиптической плоскости одного типа, гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны содержит конечные трехреберники десяти типов [9]. Конечные трехреберники коевклидовой плоскости относятся к трем типам: трехреберник типа $eee(I)$ ($eee(II)$) имеет три эллиптических ребра, его внутренность не содержит (содержит) вещественную точку абсолюта; трехреберник типа eer имеет два эллиптических и одно параболическое ребро.

В данной работе ограничимся классификацией тетраэдров, не содержащих грани в плоскостях типа $\hat{H}$, к ним относятся тетраэдры пяти типов: $EEEE, EEEС, EECC, ECCC, CCCC$. Все двугранные углы таких тетраэдров относятся к шести типам, описанным в п. 1.

ЛЕММА 1. *В пространстве $\hat{H}^3$ все ребра тетраэдра с негиперболическими гранями эллиптические.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в пространстве $\hat{H}^3$ F — тетраэдр с негиперболическими гранями. Каждая грань тетраэдра F принадлежит либо эллиптической, либо коевклидовой плоскости. Все прямые эллиптической плоскости эллиптические. Предположим, что тетраэдр F содержит грань $\bar{\kappa}$ в коевклидовой плоскости κ , и $\bar{a}$ — некоторое ребро этой грани. Прямая a , содержащая ребро $\bar{a}$, является либо эллиптической, не имеющей вещественных точек с абсолютом, либо параболической, проходящей через точку K касания плоскости κ с абсолютной гиперквадрикой. Если прямая a параболическая, то плоскость ς , содержащая грань тетраэдра F , смежную с гранью $\bar{\kappa}$ по ребру $\bar{a}$, имеет с абсолютом общую вещественную точку K , а значит, является либо коевклидовой плоскостью, либо плоскостью типа $\hat{H}$. Единственная коевклидова плоскость, проходящая через K , совпадает с κ . Поэтому ς может быть только гиперболической плоскостью положительной кривизны. Но это противоречит условию леммы о гранях тетраэдра F . Следовательно, a — эллиптическая прямая.

Таким образом, каждое ребро тетраэдра F эллиптическое. $\square$

С каждой точкой пространства $\hat{H}^3$ свяжем конус, образованный всеми касательными к абсолюту, проведенными через данную точку. Назовем такой конус *световым* или *изотропным* конусом данной точки, учитывая, что все касательные к абсолюту прямые являются изотропными в $\hat{H}^3$. Световой конус собственной (несобственной)

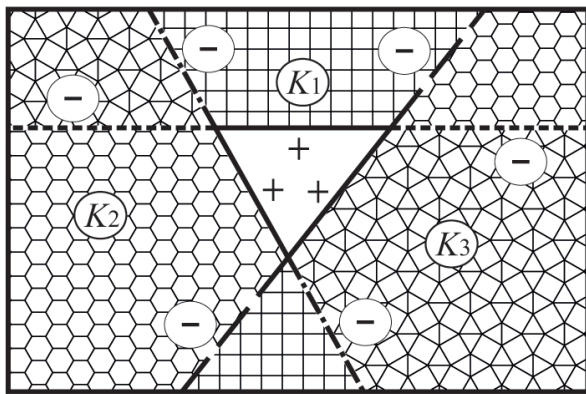
для пространства $\hat{H}^3$ точки является вещественным (мнимым). Световой конус точки абсолюта вырождается в коевклидову плоскость.

Световой линией грани тетраэдра назовем линию пересечения плоскости, содержащей данную грань, со световым конусом противоположной к данной грани вершины тетраэдра.

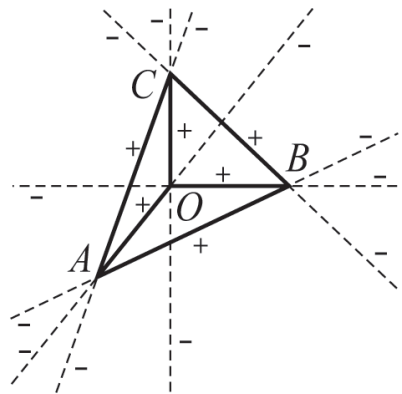
Грань тетраэдра пространства $\hat{H}^3$ назовем α -гранью, если она содержит полностью свою световую линию.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в пространстве $\hat{H}^3$ F — тетраэдр с негиперболическими гранями. Совокупность Ω граней тетраэдра F либо не содержит α -граней, либо содержит одну α -грань, либо все ее элементы являются α -гранями тетраэдра F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 каждое ребро тетраэдра F принадлежит замкнутой в пространстве $\hat{H}^3$ эллиптической прямой. Пометим ребра тетраэдра F знаком «+», а смежные с ними отрезки эллиптических прямых — знаком «-». Плоскость каждой грани тетраэдра F лежащими в ней сторонами грани разбита на четыре трехреберника. Один из них — грань тетраэдра F — имеет совокупность ребер с набором меток (+++), совокупностям ребер остальных трехреберников соответствует набор меток (+--). На рис. 1, а представлена плоскость грани тетраэдра F , узорами выделены трехреберники K_1, K_2, K_3 , не являющиеся гранями.



а



б

Рис. 1. Разбиение плоскости грани тетраэдра F лежащими в ней сторонами грани на четыре трехреберника (а); разбиение пространства $\hat{H}^3$ плоскостями граней тетраэдра F (б).

Четыре плоскости граней тетраэдра $F = OABC$ разбивают пространство $\hat{H}^3$ на восемь связных частей, назовем их *октантами* пространства $\hat{H}^3$, определенными тетраэдром F . Каждый октант³ является тетраэдром с внутренней относительно него областью пространства $\hat{H}^3$.

³ Для наглядности октанты пространства $\hat{H}^3$ можно изобразить октантами произвольной системы координат в евклидовом пространстве, помещая одну грань тетраэдра F в бесконечно удаленную плоскость. В этом случае положительные направления координатных осей Ox, Oy, Oz можно принять в качестве ребер соответственно OA, OB, OC тетраэдра F .

На рис. 1, 6 ребра тетраэдра F изображены сплошными линиями, а смежные с ними отрезки эллиптических прямых — пунктиром.

Прямые, содержащие ребра OA, OB, OC, AC, AB, BC тетраэдра F , обозначим x, y, z, u, v, w соответственно. Каждый из октантов $F, F_p, p = \overline{1, 7}$, пространства $\hat{H}^3$ можно описать упорядоченным набором меток его ребер, принадлежащих прямому x, y, z, u, v, w соответственно⁴:

$$\begin{aligned} F(+ + + + +), \quad F_1(- + + - - +), \quad F_2(- - + - + -), \\ F_3(+ - + + - -), \quad F_4(+ + - - + -), \quad F_5(- + - + - -), \\ F_6(- - - + + +), \quad F_7(+ - - - - +). \end{aligned} \quad (1)$$

Все ребра октантов F, F_p , помеченные знаком «+», принадлежат тетраэдру F . Если октант F_p из (1) имеет с F два общих ребра в одной грани, то он имеет с F и третье общее ребро этой грани. Значит, если F_p имеет с F точно два общих ребра, то эти ребра являются противоположными ребрами тетраэдра F . Следовательно, для октантов F_p по отношению к F возможны два и только два различных положения: они либо смежны с F по целой грани (октанты F_1, F_3, F_4, F_6), либо имеют с F два общих противоположных ребра (октанты F_2, F_5, F_7).

Поскольку грани тетраэдра F негиперболические, то абсолютная гиперквадрика γ пространства $\hat{H}^3$ имеет с каждой плоскостью грани не более одной общей точки, а значит, полностью принадлежит одному из октантов F, F_p . Таким образом, для гиперквадрики γ существуют три и только три различных положения по отношению к тетраэдру F :

- 1) γ принадлежит октанту, имеющему с F два общих противоположных ребра;
- 2) γ принадлежит октанту, смежному с F по целой грани;
- 3) γ принадлежит октанту F .

В первом случае ни одна грань тетраэдра F не содержит свою световую линию, поэтому не является α -гранью тетраэдра F . Во втором случае α -гранью является одна и только одна грань тетраэдра F (общая грань тетраэдра F и октанта, содержащего абсолютную гиперквадрику). В третьем случае каждая грань тетраэдра F является α -гранью.

Теорема доказана. $\square$

4. Классы тетраэдров с негиперболическими гранями

Согласно теореме 1 в пространстве $\hat{H}^3$ по количеству α -граней в каждом из типов $EEEE, EEES, EESS, ECCC, CCCC$ можно выделить по три класса тетраэдров.

⁴ На изображении в евклидовом пространстве для наглядности условимся о следующем порядке следования октантов. В используемой системе координат $Oxyz$ (см. сноску 3) выпишем сначала октанты верхнего полупространства относительно плоскости OAB , начиная с F и переходя по смежным граням октантов против часовой стрелки, затем выпишем в том же порядке октанты, симметричные первым четырем относительно плоскости OAB .

Классу тетраэдра с негиперболическими гранями присвоим номер 0, 1, 4 соответственно количеству α -граней тетраэдра.

В дальнейших рассуждениях октант F_p из (1), содержащий абсолютную гиперквадрику γ , условимся обозначать F_p^* .

4.1. Классы тетраэдров типов $EEEE$ и $CCCC$

По типу плоскостей пространства $\hat{H}^3$ все грани тетраэдра типа $EEEE$, или $CCCC$, равноправны. Поэтому классификацию тетраэдров типов $EEEE$, $CCCC$ можно провести только по количеству α -граней. Количество α -граней однозначно определяет набор двугранных углов тетраэдра типа $EEEE$, или $CCCC$.

1. Тетраэдр F класса $EEEE(0)$ ($CCCC(0)$) содержит два общих, противоположных друг другу, ребра с октантом F_p^* . Углы тетраэдра F при этих ребрах являются двугранными эллиптическими псевдоуглами (двугранными ковалианами). Углы при ребрах тетраэдра класса $EEEE(0)$ ($CCCC(0)$), не принадлежащих октанту F_p^* , являются двугранными эллиптическими углами (двугранными валианами). Таким образом, тетраэдр класса $EEEE(0)$ содержит четыре двугранных эллиптических угла и два двугранных эллиптических псевдоугла. Тетраэдр класса $CCCC(0)$ содержит четыре двугранных валианы и две двугранных ковалианы.

2. Если ребро тетраэдра класса $EEEE(1)$ ($CCCC(1)$) принадлежит α -грани, то двугранный угол при нем является двугранным эллиптическим углом (двугранной валианой), в противном случае — двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранной ковалианой).

Таким образом, тетраэдр класса $EEEE(1)$ содержит три двугранных эллиптических угла и три двугранных эллиптических псевдоугла. Тетраэдр класса $CCCC(1)$ содержит три двугранных валианы и три двугранных ковалианы.

3. Поскольку тетраэдр класса $EEEE(4)$ ($CCCC(4)$) содержит внутри себя абсолют, каждый его двугранный угол является эллиптическим двугранным псевдоуглом (двугранной ковалианой).

4.2. Классы тетраэдров типа $EEEC$

1. Все тетраэдры класса $EEEC(0)$ с точностью до типов граней и типов двугранных углов эквивалентны. Коевклидова грань тетраэдра F класса $EEEC(0)$ является трехреберником типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре этой грани, принадлежащем (не принадлежащем) октанту F_p^* , является двугранным эллиптическим псевдофлагом (двугранным эллиптическим флагом). Двугранный угол тетраэдра класса $EEEC(0)$, противоположный двугранному эллиптическому псевдофлагу (двугранному эллиптическому флагу), является двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранным эллиптическим углом).

2. Пусть тетраэдр $F = OABC$ класса $EEEC(1)$ содержит грань OAB в коевклидовой плоскости пространства $\hat{H}^3$, и эта грань образована прямыми x , y , v (см. обозначения в доказательстве теоремы 1). Из четырех октантов F_1 , F_3 , F_4 , F_6 (1), смежных с F по целой грани, октант F_4 выделяется тем, что содержит с F общую

коевклидову грань. При расположении абсолютной гиперквадрики γ в любом из октантов F_1, F_3, F_4, F_6 совокупность Ω граней тетраэдра F содержит одну α -грань. Эта грань является коевклидовой только при условии $\gamma \subset F_4$. Случаи расположения абсолюта в октантах F_1, F_3, F_6 равноправны.

Род тетраэдра класса $EEEC(1)$ обозначим $EEEC(1, E)$ ($EEEC(1, C)$), если его α -грань является эллиптической (коевклидовой).

2.1. Коевклидова грань тетраэдра рода $EEEC(1, E)$ — трехреберник типа $eee(I)$. Два двугранных угла при ребрах α -грани, не лежащих в грани коевклидовой, являются двугранными эллиптическими углами. Двугранный угол при ребре α -грани, лежащем в грани коевклидовой, является двугранным эллиптическим флагом. Двугранные углы при ребрах коевклидовой грани, не лежащих в α -грани, — двугранные эллиптические псевдофлаги. Двугранный угол тетраэдра рода $EEEC(1, E)$ при ребре, не лежащем ни в α -грани, ни в коевклидовой грани, является двугранным эллиптическим псевдоуглом.

2.2. Коевклидова грань тетраэдра рода $EEEC(1, C)$ — трехреберник типа $eee(II)$. Двугранные углы при ребрах α -грани — двугранные эллиптические псевдофлаги. Все остальные двугранные углы — двугранные эллиптические псевдоуглы.

3. Тетраэдр класса $EEEC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранные углы при ребрах коевклидовой грани — двугранные эллиптические псевдофлаги. Все остальные двугранные углы — двугранные эллиптические псевдоуглы. Коевклидова грань тетраэдра класса $EEEC(4)$ — трехреберник типа $eee(II)$.

4.3. Классы тетраэдров типа $EECC$

1. Тетраэдр F класса $EECC(0)$, в силу принятых обозначений, не имеет α -граней. Род тетраэдра F обозначим $EECC(0, 1)$ ($EECC(0, 2)$), если F имеет с октантом F_p^* два общих ребра, каждое из которых принадлежит граням одного типа (граням различных типов).

1.1. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(0, 1)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранной ковалианой). Четыре остальных двугранных угла — двугранные эллиптические флаги.

1.2. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(0, 2)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим углом (двугранной валианой). Два двугранных угла при ребрах смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра, при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

2. Тетраэдр F класса $EECC(1)$ имеет одну α -грань, обозначим его род $EECC(1, E)$ ($EECC(1, C)$), если α -грань является эллиптической (коевклидовой).

2.1. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(1, E)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней

является двугранным эллиптическим углом (двугранной ковалианой). Два двугранных угла при ребрах грани смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра, при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

2.2. Коевклидова α -грань тетраэдра рода $EECC(1, C)$ является трехреберником типа $eee(II)$, вторая коевклидова грань — трехреберник типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим углом (двугранной ковалианой). Два двугранных угла при ребрах грани смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

3. Тетраэдр класса $EECC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранный угол при ребре между коевклидовыми (эллиптическими) гранями — двугранная ковалиана (двугранный эллиптический псевдоугол). Остальные четыре двугранных угла — двугранные эллиптические псевдофлаги. Коевклидовы грани тетраэдра класса $EECC(4)$ — трехреберники типа $eee(II)$.

4.4. Классы тетраэдров типа $ECCC$

1. Каждые две пары противоположных ребер тетраэдра класса $ECCC(0)$ равноправны: одно из них является ребром смежности коевклидовых граней, а второе — принадлежит граням различных типов. Значит, по типам граней и углов равноправны каждые два тетраэдра класса $ECCC(0)$. Угол тетраэдра F класса $ECCC(0)$ при ребре между коевклидовыми гранями, принадлежащем тетраэдру F_p^* , является двугранной ковалианой, а противоположный ему угол — двугранным эллиптическим псевдофлагом. Углы при не принадлежащих тетраэдру F_p^* ребрах между коевклидовыми гранями являются двугранными валианами, а противоположные им углы — двугранными эллиптическими углами.

2. Тетраэдры класса $ECCC(1)$ различимы по типу α -грани. Род тетраэдра F класса $ECCC(1)$ обозначим $ECCC(1, E)$ ($ECCC(1, C)$), если его α -грань эллиптическая (коевклидова).

2.1. В тетраэдре рода $ECCC(1, E)$ грани в коевклидовых плоскостях — трехреберники типа $eee(I)$, углы при ребрах между коевклидовыми гранями — двугранные ковалианы, а углы при ребрах в эллиптической грани — двугранные эллиптические углы.

2.2. В тетраэдре рода $ECCC(1, C)$ грани в коевклидовых плоскостях, не принадлежащие тетраэдру F_p^* , являются трехреберниками типа $eee(I)$, α -грань — трехреберник типа $eee(II)$. Углы при ребрах между коевклидовыми гранями являются двугранными валианами, если эти ребра лежат в грани смежности с тетраэдром F_p^* . Противоположные им двугранные углы являются эллиптическими псевдофлагами. Угол между коевклидовыми гранями при ребре, не лежащем в грани смежности с тетраэдром F_p^* , является двугранной ковалианой, а противоположный ему угол — двугранным эллиптическим углом.

3. Тетраэдр класса $ECSC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранные углы между коевклидовыми гранями — двугранные ковалианы, а противоположные им углы — двугранные эллиптические псевдофлаги. Коевклидовы грани тетраэдра класса $ECSC(4)$ — трехреберники типа $eee(II)$.

5. Заключение

В работе проведена классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в пространстве $\hat{H}^3$. Классификация основана на рассмотрении типов плоскостей граней, количества α -граней и типов содержащих их плоскостей, а также типов образующих грани тетраэдров трехреберников коевклидовой плоскости.

Следующим этапом в исследовании тетраэдров пространства $\hat{H}^3$ может стать классификация тетраэдров, содержащих гиперболические грани. Она предполагает исследование всех возможных наборов трехреберников, составляющих грани в гиперболических плоскостях положительной кривизны. Число классов и родов тетраэдров с гиперболическими гранями существенно возрастет по сравнению с тетраэдрами с негиперболическими гранями. Это объясняется наличием в гиперболической плоскости положительной кривизны десяти типов трехреберников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.; Л: ОНТИ, 1936. 356 с.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971. 576 с.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955. 744 с.
5. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.
6. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003. 560 с.
7. Понарин Я. П. Геометрии с аффинной базой. Киров: Изд-во Кировского гос. пед. ун-та, 1991. 121 с.
8. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. 2-е изд., стер. М.: Едиториал УРСС, 2004. 303 с.
9. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4-х частях. Часть 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013. 244 с.
10. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4-х частях. Часть 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013. 274 с.

11. Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. 279 с.
12. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т 10. С. 393–407.
13. Ромакина Л. Н. О параболических многогранниках копсевдоевклидового пространства // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2013. № 1. С. 201–206.
14. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГТТЛ, 1950. 429 с.
15. Ашкингузе В. Г. Многоугольники и многогранники // Энциклопедия элементарной математики. М.: Физматгиз, 1963. Т. IV: Геометрия.

REFERENCES

1. Klein, F. 1936, "Non-Euclidean geomtry", *Joint Scientific and Technical Publishing House, Moscow – Leningrad*, 356 p.
2. Efimov, N. V. 1971, "The highest geometry Vysshiaia geometriia", *Nauka, Moscow*, 576 p.
3. Norden, A. P. 1976, "The spaces of affine connectivity", *Nauka, Moscow*, 432 p.
4. Rozenfeld, B. A. 1955, "Non-Euclidean geomtry", *State Publ. of Technical and Theoretical Literature, Moscow*, 744 p.
5. Rozenfeld, B. A. 1969, "Non-Euclidean spaces", *Nauka, Moscow*, 548 p.
6. Rozenfeld, B. A. & Zamakhovskii, M. P. 2003, "Geometry of groups of Lie. Symmetric, parabolic and periodic spaces", *MCCME, Moscow*, 560 p.
7. Ponarin, J. P. 1991, "Geometry with affine base", *Publishing house of the Kirov state pedagogical university, Kirov*, 121 p.
8. Yaglom, I. M., 2004, "Principle of relativity Galilee and non-Euclidean geometry", *Editorial URSS, Moscow*, 303 p.
9. Romakina, L. N. 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry", *Saratov Univ. Press., Saratov*, 244 p.
10. Romakina, L. N. 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings", *Saratov Univ. Press, Saratov*, 274 p.
11. Romakina, L. N. 2008, "Geometry of the coeuclidean and copseudoeuclidean planes", *Publishing House «Scientific Book», Saratov*, 279 p.
12. Romakina, L. N. 2013, "Analogues of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian). Available at: <http://semr.math.nsc.ru>

-
13. Romakina, L. N. 2013, "Concerning parabolic polyhedrons of copseudoeuclidean space", *Bulletin of "KSPU"*, № 1. pp. 201–206.
 14. Aleksandrov, A. D. 1950, "Convex polyhedrons", *State Publ. of Technical and Theoretical Literature, Moscow*, 429 p.
 15. Ashkinuze, V. G. 1963, "Polygons and polyhedrons", *Encyclopedia of elementary mathematics, Vol. IV: Geometry, Physical and Mathematical State Publishing House, Moscow*.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

Получено 29.04.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 514.113.5

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. И. Субботин (г. Новочеркасск)
geometry@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются связанные с симметрией свойства замкнутых выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве. Тематика работы частично относится к задаче обобщения класса правильных (платоновых) многогранников. Исторически первым таким обобщением были равноугольно-полуправильные (архимедовы) многогранники. Направление обобщения правильных многогранников, рассматриваемое автором в данной работе связано с осями симметрии выпуклого многогранника.

Выпуклый многогранник называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось симметрии. Все оси симметрии многогранника пересекаются в одной точке, которая называется центром многогранника. Все рассматриваемые в работе многогранники являются многогранниками с центром.

Ранее были перечислены все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней, а также метрически двойственные им многогранники, сильно симметричные относительно вращения многогранных углов [9] – [15]. Интересно отметить, что среди сильно симметричных многогранников есть ровно восемь таких, которые не являются даже комбинаторно эквивалентными архимедовым, или равноугольно полуправильным многогранникам.

По определению, свойство сильной симметричности многогранника требует глобальной симметричности многогранника относительно каждой оси симметрии, перпендикулярной грани многогранника. Поэтому представляет интерес нахождение более слабых условий симметрии на элементы многогранника.

Дано новое доказательство локального критерия сильной симметричности многогранника, которое основано на свойствах осей двух последовательных вращений.

Рассмотрены также два класса многогранников, обобщающих понятие сильно симметричного относительно вращения граней многогранника: класс многогранников с изолированными несимметричными гранями и класс многогранников с изолированными несимметричными поясами.

Доказано, что каждый многогранник с изолированными несимметричными гранями может быть получен путём отсечения вершин или рёбер

некоторого многогранника, сильно симметричного относительно вращения граней; а каждый многогранник с изолированными несимметричными поясами-путём надстраивания осесимметричных усечённых пирамид на некоторых гранях одного из сильно симметричных относительно вращения граней многогранника. При этом в каждом из этих классов существует многогранник с наибольшим числом граней, не считая двух бесконечных серий: усечённых призм; усечённых по двум вершинам и удлинённых бипирамид.

Ключевые слова: сильно симметричные многогранники, ось вращения, изолированные несимметричные грани, локально симметричные грани, изолированные несимметричные пояса граней.

Библиография: 15 наименований.

V. I. Subbotin

Abstract

The paper deals with the symmetry properties of the associated closed convex polyhedra in three-dimensional Euclidean space. The work relates in part to the problem of generalization class of regular (Platonic) polyhedra. Historically, the first such generalizations are equiangularly-semiregular (Archimedean) polyhedra. The direction of generalization of regular polyhedra, considered by the author in this paper due to the symmetry axes of the convex polyhedron.

A convex polyhedron is called symmetric if it has at least one non-trivial symmetry axis. All the axis of symmetry of the polyhedron intersect at one point called the center of the polyhedron. All considered the polyhedra are polyhedra with the center.

Previously we listed all polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation of faces, as well as their dual-metrically polyhedra strongly symmetric with respect to the rotation polyhedral angles [9]–[15]. It is interesting to note that among the highly symmetric polyhedra there are exactly eight of which are not even equivalent to combinatorial Archimedean or equiangularly semiregular polyhedra.

By definition, the property of strong symmetry polyhedron requires a global symmetry of the polyhedron with respect to each axis of symmetry perpendicular to the faces of the polyhedron. It is therefore of interest to find weaker conditions on the symmetry elements of the polyhedron.

We give a new proof of the local criterion of strong symmetry of the polyhedron, which is based on the properties of the axes of two consecutive rotations.

We also consider two classes of polyhedra that generalize the concept of a strongly rotationally symmetrical faces of: a class of polyhedra with isolated asymmetrical faces and the class of polyhedra with isolated asymmetrical zone.

It is proved that every polyhedron with isolated asymmetrical faces can be obtained by cutting off the vertices or edges of a polyhedron, highly symmetrical with respect to rotation faces; and each polyhedron with isolated asymmetrical zone by build axially symmetric truncated pyramids on some facets of one of the highly symmetric with respect to rotation of the faces of the polyhedron. In each of these classes there are the largest number of polyhedron faces excluding two infinite series: truncated prisms; truncated on two apex and elongated bipyramid.

Keywords: strongly symmetric polyhedrons, the axis of rotation, isolated asymmetrical face, locally symmetric faces, isolated asymmetrical zone.

Bibliography: 15 title.

1. Введение

В данной статье рассмотрены обобщения одного класса сильно симметричных выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, а именно, сильно симметричных многогранников относительно вращения граней, [9]–[15]. Эти обобщения можно рассматривать как расширения класса правильных многогранников. Другие обобщения правильных многогранников можно найти, например в работах [1]–[6], [8].

Напомним, что замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если ось вращения каждой грани, перпендикулярная ей и проходящая через её относительную внутренность, является осью симметрии всего многогранника; при этом ось вращения предполагается нетривиальной и порядок оси вращения не обязательно совпадает с порядком оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника.

В [13] приведён локальный критерий сильной симметричности многогранника в терминах симметрии звёзд граней:

для того, чтобы многогранник был сильно симметричным относительно вращения граней, необходимо и достаточно, чтобы некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, являлась осью вращения звезды этой грани.

Под звездой грани A понимается совокупность грани A и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с A ;

В данной статье приводится новое, более простое доказательство указанного локального критерия, а также даны его применения для некоторых классов многогранников, связанных с сильно симметричными.

2. О локальном критерии сильной симметричности

Доказательство приведённого выше локального критерия сильной симметричности можно провести следующим образом.

Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Сначала покажем, что все локальные оси симметрии звёзд граней проходят через одну точку. Обозначим O_1 — ось вращения некоторой грани A . Покажем, что все оси граней, принадлежащих звезде грани A , проходят через одну точку, расположенную на оси O_1 . Рассмотрим две грани B и C звезды грани A , эквивалентные относительно O_1 и третью грань D с осью вращения O_2 той же звезды, переводящую грань B в грань C . Ось O_1 переводит грань C в некоторую эквивалентную грань E . Но при помощи оси O_1 можно вращением перевести грань B в грань E . Итак, последовательные вращения, переводящие грань B в грань C при помощи оси O_2 , а затем грань C — в грань E при помощи оси O_1 , — два этих вращения эквивалентны одному вращению относительно оси O_1 . Но как известно, если два последовательных вращения относительно двух различных осей имеют результирующее вращение, то две первоначальные оси вращения пересекаются в одной точке. Таким образом, оси вращения граней, входящих в звезду грани A , пересекаются в одной точке на локальной оси вращения грани A . Рассматривая теперь грань звезды грани A , имеющую общие элементы с гранями, не входящими в звезду A , аналогичным рассуждением, последовательно переходя к соседним граням, убеждаемся, что все локальные оси вращения многогранника пересекаются в одной точке.

Далее, для того, чтобы убедиться, что локальное вращение звезды грани A приведёт к самосовмещению всего многогранника, рассмотрим совокупность (эквивалентных относительно оси вращения грани A) граней $P, Q, R, S, \dots$, принадлежащих звезде грани A .

Пусть некоторая грань M имеет общие элементы как с гранью P , так и с гранью Q . Такая грань M всегда существует при достаточно большом числе граней многогранника. Так как грани $P, Q, R, S, \dots$ тоже обладают локальными осями симметрии, то мы получаем совокупность граней $M, N, L, \dots$. По доказанному выше все локальные оси вращения пересекаются в одной точке и грани $M, N, L, \dots$ тоже по условию имеют локальные оси симметрии. Поэтому при вращении вокруг оси, проходящей через грань A , и при переходе грани P в грань Q , грани Q — в грань R и т.д., грань M переходит в N , N переходит в L , и т.д. Таким образом, при вращении вокруг оси грани A самосовмещается не только звезда грани A , но и совокупность граней $M, N, L, \dots$. Продолжая добавлять таким образом грани к уже самосовмещающейся совокупности граней, мы получим, что при вращении многогранника вокруг оси грани A многогранник самосовмещается, то есть локальная ось вращения грани A является осью вращения всего многогранника. Утверждение доказано. $\square$

Заметим, что для случая n -мерных систем Делоне известны условия симметричности и правильности, найденные в [7].

3. Многогранники с изолированными несимметричными гранями

Всюду в дальнейшем грань многогранника, через которую не проходит локальная ось вращения её звезды, будем называть несимметричной; в противном случае — симметричной. Если в звезде некоторой симметричной грани A имеется некоторая

несимметричная грань F , то под звездой грани A понимается объединение звёзд граней A и F , а сама грань A называется локально симметричной.

Далее будут рассматриваться классы многогранников, некоторые грани которых являются несимметричными и подчинены некоторым условиям. При этом устанавливается, что все такие многогранники могут быть получены из сильно симметричных многогранников. Несимметричная грань F многогранника называется изолированной, если все грани, входящие в звезду F , симметричны. Если в многограннике каждая несимметричная грань изолирована, то многогранник называется многогранником с изолированными несимметричными гранями.

Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *При условии локальной симметричности каждой симметричной грани всякий многогранник F с изолированными несимметричными гранями может быть получен путём усечения вершин или рёбер из некоторого многогранника, сильно симметричного относительно вращения граней. Существует многогранник F с максимальным числом граней 182, причём этот многогранник единственный за исключением бесконечной серии усечённых призм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскости, содержащие несимметричные грани. Будем сдвигать параллельно эти плоскости в направлении внешности многогранника; при этом будем следить за тем, чтобы локальная симметричность остальных граней не нарушалась. Осуществляя таким образом параллельные сдвиги плоскостей несимметричных граней, мы добьёмся того, что полупространства, определяемые плоскостями граней многогранника, образуют многогранник P с локально симметричными гранями. Из доказанного локального критерия сильной симметричности следует, что P является сильно симметричным относительно вращения граней. Заметим, что оси симметрии многогранника P не обязательно совпадают по числу и по порядку с осями симметрии первоначального многогранника F . Осуществляя теперь обратный параллельный сдвиг первоначальных плоскостей, мы получим данный многогранник F с изолированными симметричными гранями.

Для того, чтобы указать многогранник с изолированными симметричными гранями и с максимальным числом граней, нам необходимо выбрать сильно симметричный многогранник с наибольшим числом вершин и граней. Таким многогранником, согласно [10] является усечённый икосододекаэдр. Производя на этом многограннике наибольшее число возможных усечений вершин или рёбер, получим, что искомое число получается усечением вершин усечённого икосододекаэдра, т.е 182. Теорема доказана. $\square$

4. Многогранники с изолированными поясами

Поясом P несимметричных граней выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве называется такая последовательность несимметричных граней, что каждые две соседние грани имеют только одно общее ребро — соединительное; последняя грань пояса также имеет только одно общее ребро с первой гранью. Помимо соединительных рёбер имеются две компоненты связности множества рёбер пояса P .

Первая компонента — рёбра, которые предполагаются образующими стороны некоторой грани G . Это множество — внутренняя граница пояса.

Вторая компонента — множество рёбер, не являющихся ни соединительными, ни внутренними; рёбра второй компоненты образуют внешнюю границу пояса, которую будем предполагать плоским многоугольником, каждая сторона которого является ребром грани, не входящей ни в один пояс; причём различные рёбра внешней границы входят в границу различных граней.

Грань G многогранника при этом называется изолированной поясом P граней. Совокупность грани G и её изолирующего пояса называется островом. Звездой острова S называется остров S вместе со всеми гранями, имеющими некоторые вершины общими с вершинами S .

ТЕОРЕМА 2. *Всякий выпуклый многогранник F с максимальным числом изолированных поясов такой, что через каждую изолированную поясом грань G проходит локальная ось симметрии звезды острова, может быть получен из одного из сильно симметричных относительно вращения многогранников [15] путём последовательного надстраивания над некоторыми гранями усечённых осесимметричных пирамид. Существует ровно три таких многогранника с максимальным числом граней, равным 182, не считая бесконечные серии усечённых призм и удлинённых усечённых бипирамид.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1 рассмотрим плоскости, содержащие изолированные, но уже локально симметричные грани. Будем сдвигать параллельно эти плоскости, следя за тем, чтобы не нарушалась локальная симметричность островов. Указанным параллельными переносами мы добьёмся того, что останутся только внешние границы поясов. Каждая полученная внешняя граница, очевидно, является границей некоторой грани. Таким образом, применяя локальный критерий симметричности, видим, что полученный многогранник является сильно симметричным относительно вращения граней. Осуществляя теперь построение усечённых пирамид с осью симметрии грани, получим первоначальный многогранник. Для доказательства второй части теоремы снова рассмотрим усечённый икосододекаэдр-многогранник сильно симметричный и с максимальным числом граней. Усечённые пирамиды здесь можем надстраивать либо над 4-угольными, либо над 6-угольными, либо над 10-угольными гранями. В трёх этих случаях получаем одно и то же число граней — 182. Теорема доказана. $\square$

Заключение

Полученные классы многогранников с изолированными несимметричными гранями и изолированными несимметричными поясами расширяют класс сильно симметричных относительно вращения граней многогранников и относятся к многогранникам с центром. Условия локальной симметрии на симметричные грани полностью характеризуют эти классы в классе выпуклых многогранников. Следует отметить, что если не ограничиваться условием выпуклости многогранников с изолированными несимметричными поясами, а локальные условия симметрии оставить такими же, как

и в случае выпуклых многогранников, то получим класс симметричных невыпуклых многогранников нулевого рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коши О. Исследование о многогранниках // УМН. 1944. Т. 10. С. 5–17.
2. Coxeter H. S. M. Regular polytopes, London-NY., 1963. 648p.
3. Ефремович В. А. Трёхмерные правильные многогранники // УМН. 1947. Т. 2, вып. 5. С. 197.
4. Грек А. С. Правильные многогранники на замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой, равной -3 // Известия высших учебных заведений, сер. Математика. 1966. № 6. С. 50–53.
5. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. № 2. 220 с.
6. Стрингхем В. И. Правильные фигуры в n -мерном пространстве // УМН. 1944. № 10. С. 22–33.
7. Долбилин Н. П. Критерий кристалла и локально антиподальные множества Делоне // Труды Международной конференции “Квантовая топология”, Вестник Челябин. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 17. С. 5–16.
8. Тимофеев А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб.. 2011. Т. 12 №2, С. 118–126.
9. Субботин В. И. О вполне симметричных многогранниках // Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящ. 70-летию проф. С. С. Рышкова. М.: МГУ. 2001. С. 88–89.
10. Субботин В. И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2002. С. 77–78.
11. Субботин В. И. О двух классах симметричных многогранников // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. №3. С. 17–19.
12. Subbotin V. I. Characterization of polyhedral partitioning a space // Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev, September, 22-28, 2003. p. 46.
13. Субботин В. И. О многогранниках, сильно симметричных относительно вращения // Чебышевский сборник. 2006. Т. VII, № 2(18). С. 168–171.
14. Субботин В. И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ. 100-летию Н. В. Ефимова. М.: Макс-Пресс. 2010. С. 60–61.

15. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями // Материалы Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящ. 80-летию акад. О. Б. Лупанова. М.: МГУ, 2012. С. 398–400.

REFERENCES

1. Cauchy, O. 1944, "Recherches sur les Polyédres", *Uspechi matematicheskikh nauk*, vol. 10, pp. 5–17.
2. Coxeter, H. S. M. 1963, "Regular polytopes", *London, N-Y.*, 648p.
3. Efremovich, V. A. 1947, "Three-dimensional regular polyhedra", *Uspechi matematicheskikh nauk*, vol. 2, issue 5, p. 197.
4. Grek, A. S. 1966, "Regular polyhedra on a closed surface with the Euler characteristic equal to -3", *Izvestiya vischih uchebnykh zavedeniy, ser. Matematika*, vol. 6, pp. 50–53.
5. Zalgaller, V. A. 1967, "Convex polyhedra with regular faces", *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, 220 p.
6. Stringham, W. I. 1944, "Regular figures in n-dimensional space", *Uspechi matematicheskikh nauk*, № 10, pp. 22–33.
7. Dolbilin, N. P. 2014, "The criterion of the crystal and the locally antipodal sets Delaunay"; *Proceedings of the International Conference "Quantum Topology". Vestnik Chelyabinskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika.*, № 17, pp. 5–16.
8. Timofeenko, A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, № 2(38), pp. 118–126. (Russian).
9. Subbotin, V. I. 2001, "On Completely symmetrical polyhedra", *Megdunarudnoy konferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilozheniyam, posviash. 70-letiju prof. S. S. Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications)*, Moscow, pp. 88–89.
10. Subbotin, V. I. 2002, "The enumeration of polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation", *Trudy megdunarodnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N. V. Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis)*, Rostov-on-Don, pp. 77–78.
11. Subbotin, V. I. 2003, "On two classes of symmetric polyhedra", *Izvestiya vuzov. Sev.-kavk. region. Estestv. nauki*, №3. pp. 17–19.
12. Subbotin, V. I. 2003, "Characterization of polyhedral partitioning a space", *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations*, Kiev, p. 46.
13. Subbotin, V. I. 2006, "About polyhedra strongly symmetric with respect to rotation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. VII, №2(18), pp. 168–171.

14. Subbotin, V. I. 2010, "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnoy konferencii "Metricheskaja geometriya poverchnostey i mnogogrannikov"*, posvjachennoi 100-letiyu N. V. Efimova (Proc. Int. Conf. "Metric geometry of surfaces and polyhedra"), Moscow, pp. 60–61.
15. Subbotin, V. I. 2012, "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnogo seminara "Diskretnaja matematika i ejo prilogeniya"*, posvjachennogo 80-letiyu O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications"), Moscow, pp. 398–400.

ЮРГПУ(НПИ)

Получено 03.05.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.3

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СУММЫ И ГАУССОВА
ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ¹

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

В работе изложены основы теории арифметических сумм и осцилляторных интегралов от многочленов Бернулли, аргумент в которых является вещественной функцией с определенными дифференциальными свойствами.

Проводится аналогия с методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Во введении приведены задачи теории чисел и математического анализа, которые имеют дело с изучением указанных выше сумм и интегралов.

Исследование арифметических сумм существенно использует функциональное уравнение типа теоремы Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера.

Получены оценки индивидуальных арифметических сумм, найдены показатели сходимости их средних значений. В частности, решаются аналогии проблем Хуа Ло-кена для одномерных сумм и интегралов.

Ключевые слова: арифметические суммы, осцилляторные интегралы, многочлены Бернулли, теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера, функциональное уравнение, показатели сходимости средних значений арифметических сумм и осцилляторных интегралов, метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова, проблемы Хуа Ло-кена.

Библиография: 21 название.

THE ARITHMETIC SUM AND GAUSSIAN
MULTIPLICATION THEOREM²

V. N. Chubarikov (Moscow)

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ НК-13-01-00835

²This work was financially supported by RFBR, grant $\mathcal{N}$ НК-13-01-00835

Abstract

The paper presents the fundamentals of the theory of arithmetic sums and oscillatory integrals of polynomials Bernoulli, an argument that is the real function of a certain differential properties.

Drawing an analogy with the method of trigonometric sums I. M. Vinogradov.

The introduction listed problems in number theory and mathematical analysis, which deal the study of the above mentioned sums and integrals.

Research arithmetic sums essentially uses a functional equation type Gauss theorem for multiplication of the Euler gamma function.

Estimations of the individual arithmetic the amounts found indicators of convergence of their averages. In particular, the problems are solved analogues Hua Loo-Keng for one-dimensional integrals and sums.

Keywords: arithmetic sum oscillatory integrals, polynomials Bernoulli, Gauss theorem for multiplication of the Euler gamma function, functional equation, the average values of the convergence exponent arithmetic sums and oscillatory integrals, Vinogradov's method of trigonometric sums, problems Hua Loo-Keng.

Bibliography: 21 titles.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются арифметические суммы вида

$$\sum_{\bar{x} \in \Omega} f(\bar{x})g(P(\bar{x})),$$

где Ω — дискретное множество в $\mathbf{R}^n$, $f(\bar{x})$, $P(\bar{x})$ — функции действительного аргумента и $g(x)$ — периодическая функция с периодом 1; и осцилляторные интегралы вида

$$\int \dots \int_{\Pi} f(\bar{x})g(P(\bar{x})) d\bar{x},$$

где $\bar{x} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n$.

Типичным примером осцилляторного интеграла является преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx.$$

Обсудим идеи и задачи теории чисел и анализа, которые дают возможность исследовать арифметические суммы и осцилляторные интегралы.

1.1. Теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера

В 1812 г. К. Ф. Гаусс доказал, что при любом $x > 0$ и любом натуральном n справедлива формула

$$\Gamma(x) = n^{x-1/2} (2\pi)^{-(n-1)/2} \prod_{s=0}^{n-1} \Gamma((x+s)/n).$$

Ранее при $x = 1$ эта формула была найдена Л. Эйлером. Подобный вид имеет формула Л. Эйлера из элементарной тригонометрии

$$\sin x = 2^{n-1} \cdot \prod_{s=0}^{n-1} \sin \left(\frac{x + s\pi}{n} \right)$$

1.2. Функциональное уравнение

Теоремы умножения приводят к функциональному уравнению вида

$$F(nx) = n^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

При $s = 1$ и нецелых значениях x этому уравнению удовлетворяют следующие функции

$$F(x) = \log(2|\sin \pi x|) = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi s x}{s},$$

$$F(x) = \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi s x}{\pi s}.$$

Для любого натурального s многочлены Бернулли удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$B_s(nx) = n^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_s\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

где многочлены $B_s(x)$ определяются производящей функцией

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(x)t^s}{s!}, \quad B_s(x) = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} B_t x^{s-t}, \quad B_0(x) = 1,$$

причем числа Бернулли B_n находятся из соотношений

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!}, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \binom{n+1}{s} B_{n+1-s} = 0, \quad B_0 = 1.$$

1.3. Число классов квадратичных форм

Пусть q — простое число, $q \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда

$$H = \sum_{n=1}^{q-1} \rho\left(\frac{n^2}{q}\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{q-1} \left(1 + \left(\frac{m}{q}\right)\right) \rho\left(\frac{m}{q}\right) = -\frac{1}{2q} \sum_{m=1}^{q-1} m \left(\frac{m}{q}\right),$$

и число $2H$ будет нечетным. Действительно,

$$2Hq = \sum_N N - \sum_R R,$$

где R и N пробегают соответственно последовательности квадратичных вычетов и невычетов из приведенной системы вычетов по модулю q . Следовательно,

$$2Hq \equiv \sum_N N + \sum_R R = \frac{q(q-1)}{2} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Пусть, теперь, простое число q сравнимо с 1 по модулю 4. Тогда

$$H = \sum_{n=1}^{q-1} \log\left(2 \sin \frac{\pi n^2}{q}\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) \log\left(2 \sin \frac{\pi m}{q}\right) = \frac{1}{2} \log Q,$$

где

$$Q = \frac{\prod_N \sin \pi N/q}{\prod_R \sin \pi R/q}$$

Дирихле доказал, что $Q \neq 1$.

1.4. Нули дзета-функции Римана

Для всех $x \in [0, 1]$ определим функцию

$$G(x) = \sum_{q=1}^N \rho(qx) M(N/q),$$

где $M(X) = \sum_{n \leq X} \mu(n)$ и $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Э. Ландау доказал, что гипотеза Римана справедлива тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ имеем оценку

$$I = I(N) = \int_0^1 G^2(x) dx \ll N^{1+\varepsilon}.$$

Н. П. Романов заметил, что квазириманова гипотеза об отсутствии нулей $\zeta(s)$ в области $\Re s > \Theta$ эквивалентна оценке $I(N) \ll N^{2\Theta+\varepsilon}$. В частности, отсутствие нулей $\zeta(s)$ на единичной прямой следует из оценки $I(N) = o(N^2)$.

Дадим вариант метода Адамара доказательства отсутствия нулей дзета-функции Римана на единичной прямой $\Re s = \sigma = 1$ (по диссертации О. В. Попова).

От противного: пусть $s_0 = 1 + it_0$ — нуль $\zeta(s)$, $t_0 \neq 0$. Тогда при $\sigma \rightarrow 1 + 0$ имеем

$$\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1), \quad -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1).$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\sigma) = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \Re \frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} = O(1)$$

аналитическая функция при $\sigma > 1$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 1$.

Для $\sigma > 1$ определим действительную функцию

$$\varphi_2(\sigma) = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it_0)}{\zeta(\sigma + 2it_0)}.$$

При $\sigma > 1$ находим

$$\begin{aligned} \varphi_2(\sigma) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \cos(2t_0 \log n)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} (2 \sin^2(t_0 \log n)) = \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \cos(t_0 \log n))(1 + \cos(t_0 \log n)) \leq \\ &\leq 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} (1 + \cos(t_0 \log n)) = -4 \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \Re \frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} \right) = 4\varphi_1(\sigma). \end{aligned}$$

Таким образом функция $\varphi_2(\sigma)$ является аналитической при $\sigma > 1$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 1$. Это означает, что простой полюс с вычетом, равным 1, $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ уничтожается полюсом $\zeta(s + 2it_0)$ в точке $s = 1$. Но для $s = 1$ последняя функция не имеет полюса. Это противоречие доказывает, что на прямой $\Re s = 1$ дзета-функция Римана не имеет нулей. Неравенства $0 \leq \varphi_2(\sigma) \leq 4\varphi_1(\sigma)$ дают возможность получить современную границу нулей $\zeta(s)$.

1.5. Целые точки в круге и под гиперболой

Точка (x, y) с целыми координатами называется целой точкой на плоскости xOy . Число целых точек с положительными координатами под равнобочной гиперболой $xy = N$ обозначим символом $L(N)$.

Из геометрических соображений Л. Дирихле вывел

$$L(N) = \sum_{n \leq \sqrt{N}} \left[\frac{N}{n} \right] - [\sqrt{N}]^2.$$

Далее, используя формулу Эйлера суммирования значений функции по целым точкам, найдем

$$L(N) = N(\ln N + 2\gamma - 1) + \Delta_H(N) + O(1), \quad \Delta_H(N) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{N}} \rho(N/n).$$

Аналогично для числа $K(R)$ целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ имеем

$$\begin{aligned} K(R) &= 1 + 4[R] + 8 \sum_{0 < x \leq R/\sqrt{2}} [\sqrt{R^2 - x^2}] - 4[R/\sqrt{2}]^2 = \\ &= \pi R^2 + \Delta_K(R) + O(1), \Delta_K(R) = 8 \sum_{0 < x \leq R/\sqrt{2}} \rho(\sqrt{R^2 - x^2}). \end{aligned}$$

И. М. Виноградов [1], используя элементарный метод, доказал, что если на отрезке $[Q, R]$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{A} \leq |f''(x)| \leq \frac{k}{A}, A > 2, k \geq 1,$$

то имеем

$$\sum_{Q < x \leq R} \rho(f(x)) \leq (2k^2(R - Q) \ln A + 8kA)A^{-1/3}.$$

Отсюда находим $\Delta_H(N) \ll N^{1/3} \ln^2 N$, $\Delta_K(R) \ll R^{2/3} \ln R$.

1.6. Квадратурные формулы

Пусть $f(x)$ имеет неубывающую неотрицательную производную на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \rho(nx) f'(x) dx, \quad |R_n| \leq \frac{f'(1)}{8n^2}.$$

Действительно, преобразуем R_n . Находим

$$\begin{aligned} nR_n &= \int_0^1 \rho(nx) f'(x) dx = \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) - n \int_0^1 x df(x) + \int_0^1 [nx] df(x) = \\ &= \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) - nf(1) + n \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^n k \int_{(k-1)/n}^{k/n} df(x) = \\ &= \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) - nf(1) + \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^n k(f(k/n) - f((k-1)/n)) = \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k/n) - \frac{f(1) - f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Далее применим вторую теорему о среднем. Получим $|R_n| \leq \frac{f'(1)}{8n^2}$.

Перейдем к изложению результатов работы.

2. Осцилляторные интегралы

Здесь мы находим оценки интегралов от “зубчатой” функции

$$\rho(x) = 0, 5 - \{x\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x . Рассмотрим интеграл от вещественной функцией $f(x)$ вида

$$I = I(f) = \int_a^b \rho(f(x)) dx.$$

Предположим сначала, что $f(x)$ имеет монотонную производную на отрезке $[a, b]$ и при некоторой постоянной $A > 0$ на всем отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $f'(x) \geq A$. Тогда по второй теореме о среднем значении интеграла находим $|I| \leq (8A)^{-1}$.

Далее, пусть для любого x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $f''(x) \geq B > 0$. Тогда, применяя предыдущую оценку I , получим $|I| \leq \sqrt{2}B^{-1/2}$.

Автор поставил задачу о выводе подобных оценок для функций $f(x)$, имеющих производные более высокого порядка. Следующее утверждение по оценкам осцилляторных интегралов принадлежит М. Ш. Шихсадилову.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некотором $A > 0$ и некотором натуральном $n > 1$ для всех x из отрезка $[0, 1]$ имеем $|f^{(n)}(x)| \geq A$. Тогда справедлива оценка

$$|I| = \left| \int_0^1 \rho(f(x)) dx \right| \leq \min \{1; 4nA^{-1/n}\}.$$

В основе ее доказательства лежит следующий результат [4, 6].

ЛЕММА 1. Пусть при $0 < x < 1$ вещественная функция $f(x)$ имеет производную n -го порядка ($n > 1$), причем при некотором $A > 0$ для всех x из отрезка $[0, 1]$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \geq A.$$

Пусть, также, E обозначает множества точек из отрезка $[0, 1]$, для которых $|f'(x)| \leq B$. Тогда для меры $\mu = \mu(E)$ этого множества справедлива оценка

$$\mu \leq (2n - 2)(BA^{-1})^{1/(n-1)}.$$

Покажем неулучшаемость оценки теоремы 1 по параметрам A и n .

ЛЕММА 2. Пусть вещественная функция $f(x) = \alpha x^n, \alpha > 1$, задана на отрезке $[0, 1]$. Тогда для интеграла I справедлива оценка снизу

$$|I| = \left| \int_0^1 \rho(\alpha x^n) dx \right| \geq \frac{1}{6} \alpha^{-1/n}.$$

Имеем $A = n!\alpha$ и для любого x из отрезка $[0, 1]$ находим $f^{(n)}(x) = A$. Далее получаем

$$I = \int_0^1 \rho(\alpha x^n) dx = \frac{1}{n} \alpha^{-1/n} \int_0^\alpha \rho(y) \frac{dy}{y^{1-1/n}}.$$

Оценим снизу величину I . Представляя I в виде знакочередующегося ряда, имеем неравенство

$$I \geq \frac{1}{n} \alpha^{-1/n} \int_0^1 \frac{0,5 - y}{y^{1-1/n}} dy = \frac{n}{2} - \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{6}.$$

Следовательно,

$$|I| \geq \frac{1}{6} \alpha^{-1/n}.$$

□

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — вещественные числа, и пусть

$$f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!, \quad r = 1, \dots, n,$$

$$H = H(\bar{\alpha}) = H(\alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha_0) = \min_{a \leq x \leq b} \max_{1 \leq r \leq n} |\beta_r(x)|^{1/r},$$

$$J = \int_a^b \rho(f(x)) dx.$$

Тогда для интеграла J справедлива оценка

$$|J| \leq \min(b - a; 4en^2 H^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По своей схеме оно близко к доказательству утверждений из [4, 6, 16, 18].

Имеем $\beta_n(x) = \alpha_n$. Если $|\alpha_n| \geq H^n$, то на всем отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $|f^{(n)}(x)| \geq n!H^n$ и по теореме 1 находим

$$|J| \leq \min\{b - a; 4n(n!)^{-1/n} H^{-1}\} \leq \min\{b - a; 4eH^{-1}\}.$$

Предположим, что $|\alpha_n| < H^n$. Тогда рассмотрим $\beta_{n-1}(x) = n\alpha_n x + \alpha_{n-1}$.

Если для всех x из $[a, b]$ имеем, что $|\beta_{n-1}(x)| \geq H^{n-1}$, т.е. $|f^{(n-1)}(x)| \geq (n-1)!H^{n-1}$, то по теореме 1 получаем $|J| \leq \min\{b - a; 4eH^{-1}\}$.

Если же найдутся точки x из $[a, b]$, для которых $|\beta_{n-1}(x)| < H^{n-1}$, то они образуют один интервал, а оставшееся множество образует на более двух промежутков Δ , на каждом из которых имеет место искомая оценка

$$\left| \int_{\Delta} \rho(f(x)) dx \right| \leq \min(|\Delta|; 4eH^{-1}).$$

Далее, подобным образом рассуждаем с коэффициентами $\beta_{n-2}(x), \dots, \beta_1(x)$. В результате этой процедуры получим не более $2 + 3 + \dots + n < n^2$ отрезков Δ таких, что для любого Δ найдется r с условием $|\beta_r(x)| \geq H^r$.

Покажем, что для любой точки $\gamma \in (a, b)$ найдется отрезок Δ полученный в результате предыдущей процедуры, которому точка γ принадлежит.

Из определения величины H имеем $H \leq \max_{1 \leq r \leq n} |\beta_r(\gamma)|^{1/r}$, то есть найдется $s, 1 \leq s \leq n$, такое, что $|\beta_s(\gamma)| \geq H^s$. Тем самым точка γ будет принадлежать одному из отрезков Δ , построенных на s -м шаге рассматриваемой выше процедуры.

Таким образом

$$|J| \leq \sum_{\Delta \in [a, b]} \left| \int_{\Delta} \rho(f(x)) dx \right| \leq \sum_{\Delta \in [a, b]} \min(|\Delta|; 4eH^{-1}) \leq \min(b-a; 4en^2H^{-1}).$$

□

Рассмотрим среднее значение $\theta = \theta(k; \rho)$ осцилляторного интеграла от ρ -функции с многочленом в аргументе, имеющее вид

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^1 \rho(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) dx \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1 d\alpha_0.$$

Из теоремы 2 следует теорема 3 о показателе сходимости интеграла $\theta(k; \rho)$.

ТЕОРЕМА 3. Интеграл $\theta(k; \rho)$ сходится при $2k > \frac{n^2+n}{2} + 1$ и расходится при $2k \leq \frac{n^2+n}{2} + 1$.

Для показателя сходимости среднего значения интеграла от ρ -функции с “выщербленным” многочленом $f(x)$ в аргументе справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r, \dots, m, n \in \mathbf{N}, 1 \leq r < \dots < m < n, r + \dots + m + n < (n^2 + n)/2, f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_m x^m + \dots + \alpha_r x^r + \alpha_0$, и пусть $\vartheta = \vartheta(k; \rho; f) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^1 \rho(f(x)) dx \right|^{2k} d\alpha_n d\alpha_m \dots d\alpha_r d\alpha_0.$$

Тогда интеграл ϑ сходится при $2k > n + m + \dots + r$ и расходится при $2k \leq n + m + \dots + r$.

Приведем еще две оценки осцилляторных интегралов. Первая оценка является аналогом виноградовской оценки тригонометрического интеграла, а вторая — аналогом оценки кратного тригонометрического интеграла, найденной автором.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — многочлен с действительными коэффициентами, $\alpha = \max\{|\alpha_n|, \dots, |\alpha_1|\}$. Тогда для интеграла

$$I_1 = \int_0^1 \rho(f(x)) dx$$

имеем

$$|I_1| \leq \min\{1; 8e\alpha^{-1/n}\}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть α — наибольший из модулей коэффициентов $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ при $t_1 + \dots + t_r \geq 1$ многочлена

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Тогда для интеграла

$$I_r = \int_0^1 \dots \int_0^1 \rho(F(x_1, \dots, x_r)) dx_1 \dots dx_r$$

имеем

$$|I_r| \leq \min \{1; (8e)^r \alpha^{-1/n} \ln^{r-1}(\alpha + 2)\}.$$

3. Полные рациональные арифметические суммы

Далее изучим суммы с многочленом Бернулли первой степени

$$\rho(x) = 1/2 - \{x\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x . Сначала рассмотрим полные рациональные арифметические суммы вида

$$S = S\left(\frac{f(x)}{q}\right) = \sum_{x=1}^q \rho\left(\frac{f(x)}{q}\right),$$

где $q > 1$ — целое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и $(a_n, \dots, a_1, q) = 1$.

Сформулируем аналог оценки полной рациональной тригонометрической суммы, найденный Хуа Ло-кеном.

ТЕОРЕМА 7. Справедлива следующая оценка

$$|S| \ll q^{1-1/n}.$$

Для оценки модуля таких сумм весьма полезной является формула умножения для многочленов Бернулли первой степени.

ЛЕММА 3. Пусть n — натуральное число, $(a, n) = 1$. Тогда для любого вещественного числа x имеем

$$\rho(nx) = \rho(x) + \rho\left(x + \frac{a}{n}\right) + \dots + \rho\left(x + \frac{a(n-1)}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая и правая части равенства имеют период, равный $1/n$. Действительно,

$$\rho\left(n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = \rho(nx + 1) = \rho(nx);$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{am}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right),$$

поскольку am пробегает полную систему вычетов по модулю n при $(a, n) = 1$, если m пробегает полную систему вычетов по модулю n ; далее

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{1}{n} + \frac{m}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m+1}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right).$$

Поэтому достаточно доказать равенство при $0 \leq x < 1/n$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - x - \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)n - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m}{n} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - x\right)n - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2} - nx = \rho(nx). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $(q_1, q_2) = 1$, $f(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 = g(x) + a_0$ — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда справедливо равенство

$$S\left(\frac{f(x)}{q_1 q_2}\right) = S\left(\frac{q_2^{-1} g(q_2 x_1)}{q_1} + \frac{q_1^{-1} g(q_1 x_2)}{q_2} + \frac{a_0}{q_1 q_2}\right), \quad (1)$$

где x, x_1, x_2 пробегают соответственно полные системы вычетов по модулям $q_1 q_2$, q_1 , q_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1 и x_2 пробегают независимо соответственно полные системы вычетов по модулям q_1 и q_2 . Тогда x вида

$$x \equiv q_2 x_1 + q_1 x_2 \pmod{q_1 q_2}$$

пробегает полную систему вычетов по модулю $q_1 q_2$ и наоборот.

Отсюда находим

$$g(x) \equiv g(q_2 x_1) + g(q_1 x_2) \pmod{q_1 q_2},$$

что немедленно приводит к искомому равенству. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть p — простое число, $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a — корень кратности t сравнения $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$, и пусть u — наибольшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена $h(x) = g(px+a)$. Тогда число корней сравнения

$$p^{-u} h(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

с учетом их кратностей не превосходит t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, в [18], с. 55, лемма 2. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$, и пусть u — наивысшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена $g(x) = f(\lambda + px) - f(\lambda)$. Тогда имеем $1 \leq u \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [18], с. 56, лемма 3. $\square$

Пусть p — простое число, $l \geq 2$ — натуральное число,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (a_n, \dots, a_1, p) = 1.$$

Рассмотрим сначала случай, когда p превосходит степень многочлена f , то есть $p > n$.

Представим сумму $S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right)$ в виде

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) = \sum_{\xi=1}^p S_{\xi}, \quad S_{\xi} = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^l} \rho\left(\frac{f(x)}{p^l}\right). \quad (2)$$

Имеем следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть $f'(\xi) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $S_{\xi} = \rho\left(\frac{f(\xi)}{p}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} S_{\xi} &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} \rho\left(\frac{f(y + p^{l-1}z)}{p^l}\right) = \\ &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} \rho\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{f'(y)z}{p}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся леммой 3. Найдем

$$S_{\xi} = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \rho\left(\frac{f(y)}{p^{l-1}}\right).$$

Повторяя эту процедуру $l - 2$ раза, получим утверждение леммы 7. $\square$

ЛЕММА 8. Пусть $f'(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$S_{\xi} = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \rho\left(\frac{f(y)}{p^l}\right) p = p \sum_{y=1}^{p^{l-2}} \rho\left(\frac{f(\xi + py)}{p^l}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3) получим утверждение леммы 7. $\square$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $n \geq 2$ — целое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$, $p > n$ — простое число и l — натуральное число, и пусть j — наименьшая длина цепочки показателей $(u_1, u_2, \dots)$. Тогда, если $u_1 + \dots + u_j \geq l$, $u_1 + \dots + u_j + u_{j-1} = l - 1$ то имеем оценку

$$\left| S \left(\frac{f(x)}{p^l} \right) \right| \leq n^2 p^{l-j-1/2};$$

если же $u_1 + \dots + u_j \geq l$, $u_1 + \dots + u_j + u_{j-1} < l - 1$, то имеем

$$\left| S \left(\frac{f(x)}{p^l} \right) \right| \leq n p^{l-j}.$$

Пусть кратность корня ξ сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod{p}$ равна $n > m \geq 1$ и u_1 — наивысшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена

$$f(\xi + py) - f(\xi) = p^{u_1} f_1(y) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (py)^k.$$

Из леммы 6 следует, что $2 \leq u_1 \leq n$.

При $l \leq u_1$ по лемме 8 получим

$$S_\xi = p^{l-1} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} \right). \quad (4)$$

Далее, пользуясь леммой 8, при $l > u_1$ находим

$$S_\xi = p \sum_{y=1}^{p^{l-2}} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(y)}{p^{l-u_1}} \right).$$

Представим y в виде $y = z + p^{l-u_1}t$, где $1 \leq z \leq p^{l-u_1}$, $0 \leq t \leq p^{u_1-2} - 1$. Тогда сумма S_ξ примет вид

$$S_\xi = p^{u_1-1} \sum_{z=1}^{p^{l-u_1}} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}} \right).$$

При $l > u_1$ преобразуем сумму S_ξ , если $f'(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$. Имеем

$$S_\xi = p^{u_1-1} \sum_{\xi_1=1}^p S_{\xi, \xi_1}, \quad S_{\xi, \xi_1} = \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv \xi_1 \pmod{p}}}^{p^{l-u_1}} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}} \right).$$

Пусть сначала $f'_1(\xi_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда аналогично предыдущему получим

$$S_{\xi, \xi_1} = \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1-1}} + \frac{f_1(\xi_1)}{p} \right).$$

Пусть теперь $f'_1(\xi_1) \equiv 0 \pmod{p}$, кратность корня ξ_1 равна m_1 и p^{u_2} — наивысшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена

$$f_1(pt + \xi_1) - f_1(\xi_1) = p^{u_2} f_2(t).$$

Из лемм 7 и 8 имеем $2 \leq u_2 \leq u_1 \leq n, m_2 \leq m_1$.

При $l \leq u_1 + u_2$ найдем

$$S_{\xi, \xi_1} = p^{u_1-1} \sum_{t=1}^{p^{l-u_1}-1} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} \right) = p^{l-2} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} \right).$$

При $l > u_1 + u_2$ по лемме 8 получим

$$\begin{aligned} S_{\xi, \xi_1} &= \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv \xi_1 \pmod{p}}}^{p^{l-u_1}} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}} \right) = \\ &= p \sum_{t=1}^{p^{l-u_1}-2} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \frac{f_2(t)}{p^{l-u_1-u_2}} \right) = \\ &= p^{u_2-1} \sum_{t=1}^{p^{l-u_1-u_2}} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \frac{f_2(t)}{p^{l-u_1-u_2}} \right). \end{aligned}$$

Продолжая предыдущие рассуждения, получим наборы корней сравнений $(\xi, \xi_1, \dots)$ и отвечающий каждому из этих наборов единственный набор показателей $(u_1, u_2, \dots, u_t)$, где величина $t = t(\xi, \xi_1, \dots)$ определяется с помощью соотношений

$$u_1 + \dots + u_t \geq l > u_1 + \dots + u_{t-1},$$

причем из леммы 5 имеем, что количество наборов показателей $(u_1, \dots, u_t)$ не превосходит степени n многочлена $f(x)$ и справедливы неравенства

$$n \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_t \geq 2.$$

Из этих неравенств имеем $t \geq l/n$.

Собирая вместе полученные результаты, находим

$$\begin{aligned} S \left(\frac{f(x)}{p^l} \right) &= \sum_{(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{u_1 + \dots + u_s - s} \sum_{\substack{y=1 \\ f'_s(y) \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{p^{l-u_1-\dots-u_s}} 1 \times \right. \\ &\times \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \dots + \frac{f_{s-1}(\xi_{s-1})}{p^{l-u_1-\dots-u_{s-1}}} + \frac{f_s(y)}{p^{l-u_1-\dots-u_s}} \right) + \\ &\left. + p^{l-t} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1+\dots+u_t-1}} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{u_2+\dots+u_t-1}} + \dots + \frac{f_t(\xi_t)}{p} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 7, получим

$$S \left(\frac{f(x)}{p^l} \right) = \sum_{(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{u_1 + \dots + u_s - s} \sum_{\substack{y=1 \\ f'_s(y) \not\equiv 0 \pmod{p}}}^p 1 \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \dots + \frac{f_{s-1}(\xi_{s-1})}{p^{l-u_1-\dots-u_{s-1}}} + \frac{f_s(y)}{p} \right) + \\ & + p^{l-t} \rho \left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1+\dots+u_t-1}} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{u_2+\dots+u_t-1}} + \dots + \frac{f_t(\xi_t)}{p} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| S \left(\frac{f(x)}{p^l} \right) \right| & \leq \sum_{(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{u_1+\dots+u_s-s} (n-1)(\sqrt{p} \ln p + 1) + 0, 5p^{l-t} \right) \leq \\ & \leq \sum_{(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{l-t-2s} (n-1)(\sqrt{p} \ln p + 1) + 0, 5p^{l-t} \right) \leq \\ & \leq (n-1)^2 p^{l-\frac{l}{n}}. \end{aligned}$$

□

Пусть $n \geq 2$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число и $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$. Назовем *средним значением* $\sigma_p = \sigma_p(k; \rho; f)$ *полной рациональной арифметической суммы*

$$S \left(\frac{f(x)}{p^s} \right) = \sum_{x=1}^{p^s} \rho \left(\frac{f(x)}{p^s} \right)$$

выражение вида

$$\sigma_p = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} A(p^s), \quad A(p^s) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^s-1} \dots \sum_{a_1=0}^{p^s-1} \sum_{a_0=0}^{p^s-1} \left| p^{-s} S \left(\frac{f(x)}{p^s} \right) \right|^{2k}.$$

ТЕОРЕМА 9. Ряд σ_p сходится при $2k > (n^2 + n)/2 + 1$ и расходится при $2k \leq (n^2 + n)/2 + 1$.

Пусть $f_g(x) = a_n x^n + a_m x^m + \dots + a_r x^r + a_0$ — “выщербленный” многочлен с целыми коэффициентами, $1 \leq r < \dots < m < n$, $r + \dots + m + n < (n^2 + n)/2$, и пусть $\varsigma = \varsigma(k; \rho; f_g)$ — среднее значение полной рациональной арифметической суммы от ρ -функции с “выщербленным” многочленом $f_g(x)$ в аргументе, то есть

$$\varsigma_p = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \mathcal{A}(p^s), \quad \mathcal{A}(p^s) = \sum_{a_n=0}^{p^s-1} \sum_{a_m=0}^{p^s-1} \dots \sum_{a_r=0}^{p^s-1} \sum_{a_0=0}^{p^s-1} \left| p^{-s} S \left(\frac{f_g(x)}{p^s} \right) \right|^{2k}.$$

$(a_n, a_m, \dots, a_r, p) = 1$

ТЕОРЕМА 10. Ряд ς_p сходится при $2k > n + m + \dots + r$ и расходится при $2k \leq n + m + \dots + r$.

Приведем оценку модуля полной рациональной кратной арифметической суммы с ρ -функцией, аргумент которой является многочленом от нескольких переменных.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $n, \alpha \geq 2$ — натуральные числа, p — простое число,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \cdots \sum_{t_r=0}^n a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}$$

многочлен с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности с p , исключая свободный член $a(0, \dots, 0)$. Тогда имеем оценку

$$\left| S \left(\frac{F(x_1, \dots, x_r)}{p^\alpha} \right) \right| \leq l_{n,r} (\alpha + 1)^{r-1} p^{\alpha(r-1/n)}.$$

4. Средние значения арифметических сумм

Пусть $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени n . Рассмотрим сумму вида

$$S = S(\bar{\alpha}) = S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{x \leq P} \rho(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n),$$

где $P \geq 1$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ и $\{x\}$ — дробная часть числа x .

Функция $S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является периодической по каждой переменной α_s , $0 \leq s \leq n$, с периодом 1, поэтому ее достаточно рассматривать внутри $(n+1)$ -мерного единичного куба $\Pi_n = \Pi_n(h_0, h_1, \dots, h_n)$ вида

$$h_0 \leq \alpha_0 < h_0 + 1, \dots, h_n \leq \alpha_n < h_n + 1.$$

Интеграл $J = J(P; n, k)$ вида

$$J = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} \rho(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

называется средним значением суммы $S = S(\bar{\alpha})$.

Сформулируем и приведем схему доказательства следующей теоремы о среднем.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\tau \geq 0$ — целое число, $k \geq n\tau$, and $P \geq 1, M \geq 1$. Тогда

$$I = I(P; M; k) \leq DP^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \delta(\tau)}$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} (1 - 1/n)^\tau$$

и

$$D = D(\tau) = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Прежде докажем оценку снизу.

ЛЕММА 9. Для величины $J = J(P; n, k)$ справедлива оценка снизу

$$J \geq cP^{2k - \frac{n(n+1)}{2}},$$

где $c = 4^{-2k} (4(n+1))^{-n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим снизу интеграл J . Выберем область $\Pi_n(0, \dots, 0)$. Рассмотрим внутри нее область γ , определяемую неравенствами

$$0 \leq \alpha_0 < \frac{1}{4(n+1)}, \dots, 0 \leq \alpha_n < \frac{P^{-n}}{4(n+1)}.$$

Объем этой области равен $\text{meas}\{\gamma\} = (4(n+1))^{-n-1} P^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. Для любых точек $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{\alpha}' = (\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ из области γ имеем неравенство

$$|S(\bar{\alpha}) - S(\bar{\alpha}')| \leq P \sum_{s=0}^n (|\alpha_s| + |\alpha'_s|) P^s \leq (n+1) \frac{1}{4(n+1)} P = 0,25P.$$

Кроме того, $S(\bar{0}) = 0,5P$. Следовательно,

$$|S(\bar{\alpha})| \geq S(\bar{0}) - |S(\bar{\alpha}) - S(\bar{0})| \geq 0,25P.$$

Таким образом, получаем

$$J \geq \int_{\gamma} \dots \int |S(\bar{\alpha})|^{2k} d\bar{\alpha} \geq c P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}},$$

где $c = 4^{-2k} (4(n+1))^{-n-1}$. Лемма доказана. $\square$

Так как функция $\rho(x)$ является нечетной и периодической с периодом 1, то ее достаточно изучать при $0 \leq x \leq 1/2$. Для любого $M \geq 2$ имеем

$$\rho(x) = s_M(x) + R_M(x),$$

$$s_M(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^M \frac{\sin 2\pi s x}{s}, \quad |R_M(x)| \leq \sigma_M(x) = \frac{8}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi x}}$$

Представим $s_M(x)$ в виде

$$s_M(x) = \sum_{t=0}^b \sum_{Me^{-t-1} < s \leq Me^{-t}} \frac{\sin 2\pi s x}{s} = \sum_{t=0}^b A_t(x), \quad b = [\ln M].$$

Отсюда получим

$$S(\bar{\alpha}) = \sum_{t=0}^b \sum_{x=1}^P A_t(f(x)) + \sum_{x=1}^P R_M(f(x)).$$

Далее, используя при натуральных r и m , и неотрицательных вещественных $x_1, \dots, x_r$, неравенство

$$\left(\sum_{s=1}^r x_s \right)^m \leq r^{m-1} \left(\sum_{s=1}^r x_s^m \right),$$

найдем

$$|S(\bar{\alpha})|^{2k} \leq (b+2)^{2k-1} \left(\sum_{t=0}^b \left| \sum_{x=1}^P A_t(f(x)) \right|^{2k} + \left| \sum_{x=1}^P R_M(f(x)) \right|^{2k} \right)$$

Таким образом, имеем

$$J \leq (b+2)^{2k} \left(\sum_{t=0}^b J_t + R \right),$$

где

$$J_t = \int \dots \int_{\Pi_n} \left| \sum_{x=1}^P A_t(f(x)) \right|^{2k} d\bar{\alpha}, \quad R = \int \dots \int_{\Pi_n} \left| \sum_{x=1}^P R_M(f(x)) \right|^{2k} d\bar{\alpha}.$$

Теперь воспользуемся тождеством Эйлера – Фурье

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Получим, что значение $J_t(Me^{-(t+1)})^{2k}$ не превосходит числа решений $I(P; Me^{-t}; k)$ следующей диофантовой системы уравнений

$$\begin{cases} m_1 + \dots + m_k = m_{k+1} + \dots + m_{2k}, \\ m_1 x_1 + \dots + m_k x_k = m_{k+1} x_{k+1} + \dots + m_{2k} x_{2k}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ m_1 x_1^n + \dots + m_k x_k^n = m_{k+1} x_{k+1}^n + \dots + m_{2k} x_{2k}^n, \end{cases} \quad (5)$$

$$1 \leq x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k} \leq P,$$

$$Me^{-(t+1)} < m_1, \dots, m_{2k} \leq Me^{-t}.$$

ЛЕММА 10. Пусть $m_1, x_1, \dots, m_{2k}, x_{2k}$ является решением системы уравнений (5). Тогда для любого целого a набор $m_1, x_1 + a, \dots, m_{2k}, x_{2k} + a$ будет решением (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$X_0 = X_1 = \dots = X_n = 0, \quad (6)$$

где при $s = 0, 1, \dots, n$

$$X_s = m_1 x_1^s + \dots + m_k x_k^s - m_{k+1} x_{k+1}^s - \dots - m_{2k} x_{2k}^s.$$

Подставляя в предыдущую систему уравнений (6) набор $m_1, x_1 + a, \dots, m_{2k}, x_{2k} + a$, находим

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ X_1 + aX_0 = 0, \\ X_2 + \binom{2}{1} aX_1 + \binom{2}{2} a^2 X_0 = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ X_n + \binom{n}{1} aX_{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} X_1 + \binom{n}{n} a^n X_0 = 0. \end{cases}$$

Это показывает, что рассматриваемый набор является решением (6). Лемма доказана.

□

ЛЕММА 11. Пусть k, n — натуральные числа, $k \geq n$, and $P \geq 1$. Тогда найдется простое число p , принадлежащее промежутку $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ и такое, что

$$I = J(P; M; k) \leq 4k^{2(n+1)} p^{2k-2n+n(n+1)/2} P^n I(P_1; M_1; k - (n+1)) + (2n)^{2k} P^k,$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(x, m) = m\alpha_0 + m\alpha_1 x + \dots + m\alpha_n x^n$. Тогда получим

$$I = I(P; M; k) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{Me^{-1} < m_1 \leq M} \sum_{x_1 \leq P} \dots \sum_{Me^{-1} < m_1 \leq M} \sum_{x_k \leq P} e^{2\pi i(F(x_1, m_1) + \dots + F(x_k, m_k))} \right|^2 d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_r. \quad (7)$$

Наборы $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leq x_1, \dots, x_k \leq P$, разобьем на два класса A и B . Рассмотрим отображение $G = (G_0, \dots, G_n)$

$$\begin{pmatrix} G_0 = m_1 + \dots + m_k, \\ G_1 = m_1 x_1 + \dots + m_k x_k \\ \dots \dots \dots \\ G_n = m_1 x_1^n + \dots + m_k x_k^n \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица Якоби $I = I_G(\bar{x}) = \frac{D(G_1, \dots, G_n)}{D(x_1, \dots, x_k)}$ этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} m_1, \dots, m_k \\ \dots \dots \dots \\ nm_1 x_1^{n-1}, \dots, nm_k x_k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

К первому классу A отнесем те наборы $\bar{x}$, для которых матрица Якоби $I_G(\bar{x})$ хотя бы для одного простого p_s , $1 \leq s \leq r$, имеет максимальный ранг по модулю p_s , равный r . Все остальные наборы $\bar{x}$ отнесем ко второму классу.

Преобразуем (7). В понятных обозначениях находим

$$J = \int_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} + \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\bar{\alpha} \leq 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\bar{\alpha}, \quad J_2 = \int_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\bar{\alpha}.$$

Все наборы $\bar{x}$ из первого класса A разобьем на r совокупностей A_s , $s = 1, \dots, r$, причем $\bar{x}$ относится к совокупности A_s , если матрица Якоби отображения G имеет максимальный ранг по модулю p_s . При условии, если таких p_s несколько, то набор $\bar{x}$ отнесем в совокупность с наименьшим p_s . Используя предыдущую символическую запись, найдем

$$J_1 = \int_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\bar{\alpha} = \int_{\Pi_n} \left| \sum_{s=1}^r \sum_{\bar{x} \in A_s} \right|^2 d\bar{\alpha} \leq nJ_{1s},$$

3. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле. Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 6. С. 1308–1310.
4. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Мат. заметки. — 1976. — Т. 20, № 1. — С. 61–68.
5. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орел: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2013. — 464 с.
6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
7. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2006. — 640 с.
8. Vinogradov, I. M. A new method of estimation of trigonometrical sums, Math. USSR-Sb. **43**, 1936, No. 1, 175–188.
9. Hua, L.-K. An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications, Quart. J. Math., **20**, 1949, 48–61.
10. Arkhipov, G. I. A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum, Math. Notes **17**, 1975, 84–90.
11. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. Multiple trigonometric sums, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **40**, No. 1, 1976, 209–220.
12. Hua, L.-K. On an exponential sums, J. Chinese Math. Soc., **2**, 1940, 301–312.
13. Chen, J.-R. On Professor Hua's estimate on exponential sums, Acta Sci. Sinica, **20**, 1977, No. 6, 711–719.
14. Романов Н. П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов / Под общ. ред. В. Н. Чубарикова. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. — 478 с.
15. Шихсадилов, М. Ш. Об одном классе осциллирующих интегралов, Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех. **5**, 2015, 61–63.
16. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A., Chubarikov, V. N. Trigonometric integrals, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **43**, No. 5, 1979, 971–1003.
17. Titchmarsh, E. C. The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
18. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N., Karatsuba, A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis, De Gruyter expositions in mathematics; 39, Berlin, New York, 2004.
19. Hua, L.-K. Additive theory of prime numbers. Trudy MIAN SSSR., **22**, 1947, 1–179.
20. Montgomery, H. L. Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, No. 84, 1994.

21. Hua, L.-K. On the number of solutions of Tarry's problem, *Acta Sci. Sinica*, **1**, 1953, 1–76.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1981, "Osnovy teorii chisel." (Russian) [Foundations of the theory of numbers] Ninth revised edition "*Nauka*", Moscow 176 pp.
2. Vinogradov, I. M. 1980, "Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel." , (Russian) [The method of trigonometric sums in the theory of numbers] Second edition. "*Nauka*", Moscow, 144 pp.
3. Chubarikov, V. N. 1976, "On a multiple trigonometric integral" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 227, № 6, pp. 1308–1310.
4. Chubarikov, V. N. 1976, "Multiple rational trigonometric sums and multiple integrals" , *Mat. Zametki* , vol. 20, № 1 pp. 61–68.
5. Arkhipov, G. I. 2013, "Selected Works" , *Orel: Publisher Oryol State University*, 464 pp.
6. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1987, "Teoriya kratnykh trigonometricheskikh summ" , (Russian) [Theory of multiple trigonometric sums] "*Nauka*", Moscow, 368 pp.
7. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A. & Chubarikov, V. N. 2006, "Lectures on mathematical analysis" , *Drofa, Moscow*, 640 pp.
8. Vinogradov, I. M. 1936, "A new method of estimation of trigonometrical sums" , *Math. USSR-Sb.*, vol. 43, No. 1, pp. 175–188.
9. Hua, L.-K. 1949, "An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications" , *Quart. J. Math.*, vol. 20, pp. 48–61.
10. Arkhipov, G. I. 1975, "A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum" , *Math. Notes*, vol. 17, pp. 84–90.
11. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. 1976, "Multiple trigonometric sums" , *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, vol. 40, No. 1, pp. 209–220.
12. Hua, L.-K. 1940, "On an exponential sums" , *J. Chinese Math. Soc.*, vol. 2, pp. 301–312.
13. Chen, J.-R. 1977, "On Professor Hua's estimate on exponential sums" , *Acta Sci. Sinica*, vol. 20, No. 6, pp. 711–719.
14. Romanov, N. P. 2013, "Number Theory and Functional Analysis: Proceedings / Under total. Ed. V. N. Chubarikov." , *Tomsk: Publishing house of Tomsk State University*, 478 pp.

15. Shihsadilov, M. Sh. 2015, "A class of oscillating integrals", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat., Mech.* № 5, pp. 61–63.
16. Arkhipov, G.I., Karatsuba, A.A. & Chubarikov, V.N. 1979, "Trigonometric integrals", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* vol. 43, No. 5, pp. 971–1003.
17. Titchmarsh, E.C. 1986, "The Theory of the Riemann Zeta-function", 2nd ed., *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*.
18. Arkhipov, G.I., Chubarikov, V.N. & Karatsuba, A.A. 2004, "Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis", De Gruyter expositions in mathematics; 39, *Berlin, New York*.
19. Hua, L.-K. 1947, "Additive theory of prime numbers", *Trudy MIAN SSSR.*, vol. 22, pp. 1–179.
20. Montgomery, H.L. 1994, "Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis", *CBMS, Regional Conference Series in Mathematics*, No. 84.
21. Hua, L.-K. 1953, "On the number of solutions of Tarry's problem", *Acta Sci. Sinica*, vol. 1, pp. 1–76.

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 20.05.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.6

О СЛЕДАХ И ДИСТАНЦИЯХ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ В C^n И ИНТЕГРАЛАХ МАРТИНЕЛЛИ – БОХНЕРА

Р. Ф. Шамоян, С. М. Куриленко (г. Брянск)

Аннотация

В этой работе мы приводим аналоги наших многочисленных результатов о следах и дистанциях в аналитических функциональных пространствах в C^n , полученных ранее, в терминах интегралов и ядер Мартинелли – Бохнера. Это первые результаты такого типа в терминах этих интегралов и ядер. Также нами будут обсуждаться некоторые новые утверждения для интегралов типа Мартинелли – Бохнера, связанные с классами типа Гельдера и точками Лебега.

В последние годы в большом цикле работ первого автора был получен ряд новых точных результатов, связанных со следами и расстояниями в различных функциональных пространствах. Во всех этих работах важную роль играют свойства ядер типа Бергмана и интегральные представления типа Бергмана. В этой статье мы получим некоторые аналоги этих результатов в терминах более общих интегральных представлений и более общих ядер в аналитических функциональных пространствах большей размерности. Это так называемое интегральное представление Мартинелли – Бохнера и ядра Мартинелли – Бохнера в C^n .

Наша работа состоит из трех частей. В первой части мы обобщаем полученные ранее результаты по следам. Во второй части мы получаем оценки функции расстояния в терминах ядер Мартинелли – Бохнера и интегралов Мартинелли – Бохнера. В третьей части представлены результаты для интегралов Мартинелли – Бохнера, связанные с классами Гельдера и точками Лебега. Эти вопросы естественно возникают из недавней серии работ первого автора о многофункциональных аналитических пространствах и связанными с ними вопросами.

Наши доказательства модифицируют методы и рассуждения известных ранее результатов и теорем для случая интегралов и ядер типа Мартинелли – Бохнера.

Ключевые слова: Интегралы и ядра Мартинелли – Бохнера, аналитическая функция, следы, дистанции, псевдовыпуклые области.

Библиография: 20 наименований.

UDC 511.6

TRACES AND DISTANCES IN ANALYTIC FUNCTION SPACES IN C^n AND MARTINELLI — BOCHNER INTEGRALS

R. Shamoyan, S. Kurilenko (Bryansk)

Abstract

In this note we provide some analogues of our numerous recent results on traces and distances in terms of Martinelli — Bochner integrals and kernels. These are first results of this type in terms of such kernels. Some assertions for Martinelli — Bochner integrals related with Holder classes and Lebesgue points will be also discussed.

In recent years various new sharp results on traces and distances were provided in a big series of papers of the first author. In all these papers properties of Bergman-type kernels and Bergman-type integral representations are playing a critical role. The intension of this paper to find some analogues of these results in terms of or with the help of more general integral representations and more general kernels in analytic function spaces in higher dimension so-called Martinelli — Bochner integral representations and Martinelli — Bochner kernels in C^n .

Our work consists of three parts. In the first part we partially generalize our results on traces. In the second part we provide estimates of distance function in terms of Martinelli — Bochner kernels and Martinelli — Bochner integrals. In the third part we present results on Martinelli — Bochner integrals related with Holder classes and Lebesgue points. This type of issues arise naturally in view of recent series of papers and new results of the first author on multifunctional analytic spaces and related issues.

In our proofs we modify the methods of earlier results and theorems for the case of Martinelli-Bochner integrals and kernels.

Keywords: Martinelli — Bochner integrals and kernels, analytic function, traces, distances, pseudoconvex domains.

Bibliography: 20 titles.

Introduction

In recent years various new sharp results on traces and distances were provided in a big series of papers of the first author (see [4], [9], [10], [11], [12], [13]). In all these papers properties of Bergman type kernels and Bergman-type integral representations are

¹This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 13- 353 01-97508) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant 1.1704.2014K).

playing a critical role. The intension of this paper to find some analogues of these results in terms of or with the help of more general integral representations and more general kernels in analytic function spaces in higher dimension so-called Martinelly — Bochner integral representations and Martinelly — Bochner kernels in C^n (see [5]). Some new results on Martinelly — Bochner integrals related with the Lebegues points and Holder functional classes will be also presented.

1. Traces in pseudoconvex domains and Martinelly — Bochner integrals.

In this section we partially generalize our results on traces. The goal of this section is to provide a class of analytic functions on products of bounded strictly pseudoconvex domains $D \times \cdots \times D$ so that their traces allows Matrinelly-Bochner integral representation. To be more precise we first need standard definitions (see [5] and references there).

We define the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by B . Let $\tilde{U}$ be an open set in $\mathbb{C}^n$, we say $f \in C^k(\tilde{U})$ if f is complex valued function and $f^{(k)} \in C^0(\tilde{U}) = C(U)$. We denote by $H(\tilde{U})$ the set of all analytic in $\tilde{U}$ functions. $\tilde{U}^m = \tilde{U} \times \cdots \times \tilde{U}$, $m \geq 1$ is a product domain and $H(\tilde{U}^m)$ is a space of all analytic function on $(\tilde{U}^m)$ (see [4], [9], [10], [11], [3]) or D^m . Using definitions of analytic function spaces in a domain, we define analytic function spaces in product domains in a natural way (see [10]).

We denote by D in $\mathbb{C}^n$ a region with ∂D boundary of C^k class in some neighborhood of closure of D and $d\rho \neq 0$ on ∂D . The ρ function we call as usual the defining function of D (see [10]). We consider an outer differential form (Bochner-Martinelly kernel) $U(\zeta, z)$ of $(n, n-1)$ type of the following form (see [5])

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta$$

where $d\bar{\zeta}[K] = d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n$, $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$. For $n=1$ we have Cauchy kernel $U(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} \right)$. Obviously coefficients of U are harmonic in $C^n \setminus \{z\}$ and $d_\zeta U(\zeta, z) = 0$.

Moreover (see [5]) if $g(\zeta, z)$ is a fundamental solution of Laplace equation then we have

$$U(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta = (-1)^{n-1} \partial_\zeta g \wedge \sum_{k=1}^n d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta[K]$$

where $\partial = \sum_{k=1}^n \partial_{\zeta_k} \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$.

We denote various constants in estimates in this paper by C or by C with indexes, these constants are independent of functions in estimates.

THEOREM 1 (A. (see [5])). *Let D be a bounded region in $\mathbb{C}^n$ with partially-smooth boundary and let f be holomorphic in D of $C(\bar{D})$ class then*

$$\int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (1)$$

This is a Martinelly — Bochner integral representation.

This theorem was obtained by Bochner then by Bochner then by Martinelly independently and by different methods. This formula is now classical and can be seen in various textbooks on complex analysis. Note for $n = 1$ we have classical Cauchy formula, but for $n > 1$ we can easily see that the $U(\zeta, z)$ is not analytic by z or ζ . We will need the mentioned formula for Hardy spaces. We need some definitions. Below we omit the index of space if it is zero. Let D be a bounded region, $\partial D \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. We say that analytic function f belongs to Hardy space $H^p(D)$, $p > 0$ if

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon \nu(\zeta))|^p d\sigma(\zeta) < \infty,$$

where $d\sigma$ is a Lebegues measure on ∂D . And $\nu(\zeta)$ vector field of outer normals to ∂D (see [5]). For bounded pseudoconvex D domains we have another definition, for a defining function ρ , $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$; let $D_\varepsilon = \{z \in D : \rho(z) < -\varepsilon\}$ for $\varepsilon > 0$. Then

$$H^p(D) = \{f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\partial D_\varepsilon} |f(\zeta)|^p d\sigma_\varepsilon < \infty\};$$

$0 < p \leq \infty$.

We define the same space in product domains in a natural way as we define Hardy spaces in polydisk using definitions in the unit disk see [3], [4].

PROPOSITION 3 (B. (see [5]). *Let D be bounded strongly pseudoconvex domain with smooth boundary. For all $p \geq 1$ and all f , $f \in H^p(D)$ Martinelly – Bochner representation is valid.*

Proof of proposition B.

Note first (see [5]) our proposition is valid for all bounded domains with $\partial D \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. For each f , $f \in H^p$, $p \geq 1$, f has boundary values almost everywhere on ∂D so that these values are in $L^p(\partial D)$. This is a classical fact together with representation via boundary values

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) P(\zeta, z) d\sigma,$$

where P is Poisson kernel of D domain.

Note the G Green function admits representation $G(\zeta, z) = g(\zeta, z) + h(\zeta, z)$, where g is a solution of Laplace equation and where h for all fixed $z \in D$ is a harmonic function in D of $C^{1+\alpha}(\bar{D})$ class hence

$$P(\zeta, z) d\sigma = U(\zeta, z) / \partial D + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k d\zeta} [K] \wedge d\zeta / \partial D = \Phi_1 + \Phi_2$$

but note

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (f(\zeta)) \Phi_2(\zeta) &= \int_{\partial D} f(\zeta) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta} [K] \wedge d\zeta = \\ &= \int_D f(\zeta) d \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta} [K] \wedge d\zeta \right) = 0. \end{aligned}$$

This follows directly from the fact that

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial h}{d\zeta_k} d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta$$

is a closed form (see [5]). And this gives directly what we need for each $f, f \in H^p(D)$, $p \geq 1$ Martially-Bochner representation is valid. $\square$

The intention of this section to show such type results for other spaces in unit ball or general bounded strictly pseudoconvex domains D , based on our previous results and on embeddings from [1].

The natural question is the following:

Let X be a space of analytic functions, $X \subset H(D^m)$. Let also

$$Tr X = \{f(z, \dots, z), f \in X\}.$$

Can we say there is a function $g_0, g_0 \in Tr X$ so that it admits Martinelly — Bochner integral representation (1). Below we provide a general scheme of a solution for case of unit ball and bounded domains.

We define for a $\tilde{D}^\alpha$ — differential operator in pseudoconvex domain D (see [1]), $0 < p, q < \infty$ Hardy-Sobolev and Bergman–Besov spaces of analytic functions

$$H_{\alpha,\beta}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^\beta < \infty \right\}, \beta \geq 0, \alpha > 0.$$

$$A_{\delta,k}^{p,q}(D) = \left\{ f \in H(D) : \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^{r_0} \left(\int_{\partial D_r} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta \right)^{\frac{q}{p}} r^{\delta \frac{q}{p} - 1} dr < \infty \right\}, \delta > 0, \alpha > 0.$$

We define same spaces in product domains in a natural way as we did in polydisk using definitions of spaces in the unit disk see [2], [3], [4].

We give a typical result in this direction on traces. Note for case of unit ball we have (see [2], [3], [4]).

THEOREM 2 (C.).

1. Let $p \leq 1, \beta \geq \alpha \geq 0$, then $A_{nm+(\beta-\alpha)pm-n}^{p,p}(B) \subset \text{Trace } H_{\alpha,\beta}^p(B^m)$;
2. Let $p \leq 1; \alpha_j \geq 0, t \geq \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$ then $A_{mt+mn-n-\sum_{j=1}^m \alpha_j}^{p,p}(B) \subset \text{Trace } (A_{t,\beta}^{p,p}(B^m))$;
 $\beta_j = \alpha_j + 1, j = 1, \dots, m$.

Obviously we have also (see [1], [3], [4]) the following embeddings ($0 < p \leq \infty, p \geq q$ and $s_1, s_2 \geq 0$).

$$A_{p(s_2-s_1),s_2}^p(B) \subset H_{s_1}^p(B) \subset H^p(B) \subset H^q(B)$$

then we have ($A^{p,p} = A^p, H_0^p = H^p$)

$$A_{\alpha,\beta}^p(B) \subset A_{\alpha,0}^p(B) = A_\alpha^p(B), \beta \geq 0.$$

Now according to proposition B for any analytic f function, $f \in H^p(B)$, $1 \leq p < \infty$ the Martinelly — Bochner integral representation is valid. This in combination with embeddings above gives

THEOREM 3.

1. Let $p \leq 1$, $\alpha \geq \beta$ then $\text{Trace} H_{\alpha, \beta}^p(B^m)$ contains a f function for which

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z); \quad z \in D \quad (M)$$

2. Let $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j = \alpha_j + 1$, $t \geq \frac{\sum \alpha_j}{m}$, $j = 1, \dots, m$ then $\text{Trace } A_{t, \beta}^p(B^m)$ contain a f function for which (M) integral representation is valid.

REMARK 1. Note previously this assertion was known for Bergman representation and Bergman kernels.

The case of general D domains (pseudoconvex) can be considered similarly. It is based on our recent results from [11] and [12] and similar embeddings for pseudoconvex domains from [1]. Analytic Herz type spaces can be considered similarly (see [13]).

We need some definitions to formulate a theorem we need. Let $K(w)$ be entire function of one variable $w = u + iv$, $K : R \rightarrow R$, $K(u) \neq 0$ for all $u \in C$. Let

$$c_n K(\text{Im } z_n) \Phi(\zeta, z) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} \text{Im} \frac{K(i\alpha + \text{Im } z_n)}{\alpha(i\alpha + \text{Im } (\zeta_n - z_n))},$$

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} |\zeta_k - z_k|^2, \quad \alpha^2 = s + \text{Re}(\zeta_n - z_n), \quad c_n = (-1)^{n-1} (2\pi i)^n.$$

THEOREM 4 (D1. (see [5])). Let $n > 1$ then $\Phi(\zeta, z) = g(\zeta, z) + h(\zeta, z)$ where g is fundamental solution of Laplace equation, $h(\zeta, z)$ is harmonic by ζ in C^n for all fixed z .

We need an extension of Martinelly — Bochner integral to unbounded domains D in C^n then for tubular domains the same problem can be posed and solved based on our recent results on traced in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones with smooth boundary.

If $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ and if $h \in C'(\bar{D})$ and h is harmonic by ζ for all $z \in D$. Then $\bar{\mu}_{\bar{h}}$ form is closed in $\bar{D}$

$$\bar{\mu}_{\bar{h}} = \sum_{k=1}^m (-1)^{n+k-1} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta$$

and

$$\int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\mu}_{\bar{h}}(\zeta) = 0, \quad f \in H(D) \cap C(\bar{D}).$$

Note in bounded domain then we have (see [5])

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) [U(\zeta, z) + \bar{\mu}_{\bar{h}}(\zeta)], \quad z \in D \quad (G_1)$$

with coefficients $(K \times K)$ matrices $x, t \in R^m$.

REMARK 2. Note if $K \equiv 1$ then $\Phi = g$.

THEOREM 5 (**D2**. (see [5])). If D is unbounded domain in C^n , $n > 1$ with smooth boundary, $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ where $B(0, R)$ is a ball of radius R then if

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\partial D \setminus B(0, R)} f(\zeta) \Omega(\zeta, z) \right) = 0 \quad (K_0)$$

for all fixed $z \in D$ then

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \Omega(\zeta, z) \quad (K)$$

where

$$\Omega(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k} \right) d\zeta[k] \wedge d\zeta.$$

Proof.

Just use G_1 for domain $\tilde{D} \cap B(0, R)$ then pass $R \rightarrow \infty$.

To formulate our theorem 6 we will need basic facts of theory of analytic function spaces in tubular domains over symmetric cones (see [20]).

A subset Ω of $\mathbb{R}^n$ or V , so that $\dim V = n$ to be a cone if $\lambda x \in \Omega$, for all $x \in \Omega$, $\lambda > 0$, if $\lambda x + \mu y \in \Omega$ for all $x, y \in \Omega$, $\lambda, \mu > 0$ then it is convex. Let in addition $\Omega^* = \{y \in \mathbb{R}^n : (y/x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}\}$ and $\Omega^* = \Omega$. This type open cone is selfdual (Ω^* is dual cone).

Let $G(\Omega) = \{g \in Gl(\mathbb{R}^n) : g\Omega = \Omega\}$, where $Gl(\mathbb{R}^n)$ denotes the group of all linear invertible transformation of $\mathbb{R}^n$. If for all $x, y \in \Omega$, $y = gx$, for some $g \in G(\Omega)$ then our open convex cone Ω is homogeneous, if also $\Omega^* = \Omega$ then it is symmetric cone.

If the equation $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ is not possible for each $V_1 \subset \mathbb{R}^n$, $V_2 \subset \mathbb{R}^n$, then our cone is irreducible, here $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ (Ω_1, Ω_2 are symmetric cones), where also $\Omega_i \subset V_i$, $i = 1, 2$.

We need also determinant $\Delta^t(Im z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in (0, \infty)$. We fix V — a simple Euclidean Jordan algebra with rank r .

If $x \in V$, $m(x) = \min\{k > 0 : (1, x, x^2, \dots, x^k) \text{ are linearly dependent}\}$, then $1 \leq m(x) \leq \dim V$ and $r = \max\{m(x) : x \in V\}$, we say rank of V is r .

According to spectral theorem if V has rank r , then $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$; $\lambda_i \in \mathbb{R}$; c_i — are elements of so called Jourdan frame, and $\{\lambda_i\}$ are determined uniquely by x (with their multiplicities). We fix now a Peirce decomposition of $V = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$; (we formally look at V as a space of symmetric matrices (V_{ij}) , $V_{ii} = Rc_i$, where R is a special mapping, $V_{ij} = V(c_i, 1/2) \cap V(c_j, 1/2) = \{x \in V : c_i x = c_j x = \frac{x}{2}\}$, $i < j$, $\dim V_{ij} = d = 2 \frac{n(r-1)}{r-1}$). We denote by P_{ij} the orthogonal projection of V onto V_{ij} for $i \leq j$. Finally we denote by $\Delta_j(x)$, $j = 1, \dots, r$, the principal minors of $x \in V$ with respect to the fixed Jordan frame $\{c_1, \dots, c_r\}$. That is $\Delta_k(x)$ is the determinant of the projection $P_k x$ of x in the Jordan subalgebra $V^{(k)} = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$.

It is well-known that $\Omega = \{x \in V : \Delta_k(x) > 0 : k = 1, \dots, r\}$. We have also $\Delta_k(mx) = \Delta_k(x)$, $x \in V$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m > 0$. See other properties of Δ_k in [20].

We define $\Delta_s(x) = \prod_{j=1}^r \Delta_j^{s_j - s_j + 1}(x) = \Delta_1^{s_1 - s_2}(x) \dots \Delta_r^{s_r}(x)$, $x \in \Omega$, $s \in C^r$. We have

that $|\Delta_s| = \Delta(Im z)$ and $\Delta_s \sum_{i=1}^r a_i c_i = \prod_{i=1}^r a_i^{s_i}$; $a_i > 0$, $i = 1, \dots, r$.

Let Ω be an irreducible symmetric cone in the Euclidean space V , and $T_\Omega = V + i\Omega$ the corresponding tube domain in the complexified space $V^\mathbb{C}$, $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$.

As combination of this theorem D2 and theorems on traces [16] in tube we have

THEOREM 6. *Let T_Ω be tubular domain over symmetric cone, then let*

$$A_\alpha^p(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^\alpha(\text{Im } z_j) dv(z_j) < \infty \right\},$$

$0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Then $\text{Trace } A_\alpha^p = \{f(z, \dots, z), f \in A_\alpha^p(T_\Omega^m)\}$ contain a function, so that representation (K) is valid if (K_0) holds.

Similar results can be obtained based on integral representation based on second Green formula (see [5]) and our recent results on traces of Bergman harmonic function spaces in the unit ball (see [17]) $B = \{|x| < 1\} \subset R^n$ and R_+^{n+1} .

We give more detail on this integral representation.

Let in R^m , $m \geq 1$ us consider a differential operator in R^m $A = \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, where A_j are matrices of order $l \times K$ on C , $S_m = \{|x| = 1, x \in R^m\}$ if

$$A_i^* A_j + A_j^* A_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 2I_k & \text{if } i = j. \end{cases}$$

where $i, j \in [1, n]$, $A_i^* = \bar{A}_i^T$ complex conjugate of A_i , I_k is unit matrix. Then A is Dirac operator. For solutions of Dirac operator we have analogue of Martinelly — Bochner theorem

For definition of vector function space in theorem E we refer the reader to [5].

THEOREM 7 (E. (see [5]). *Let A be Dirac operator, $D \subset R^n$ is a bounded domain with smooth boundary then if $f \in [C(\bar{D}) \cap C^1(D)]^k$, $Af = 0$ then*

$$\int_{\partial D} U_A(t, x) f(t) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in D \\ 0 & \text{if } x \notin \bar{D}. \end{cases}$$

where U_A is a special Martinelly — Bochner type kernel in R^m see [5] a differential form type of $(n-1)$ type

$$U_A(t, x) = \frac{1}{\text{Vol}(S_m)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} A_j^* A_i \frac{t_j - x_j}{|t - x|^m} dt[i].$$

Details of proofs of these assertions analogues of previous theorems 3, 6 for harmonic function spaces based on theorem E we leave to readers (see [12], [13]).

2. Distance functions and Martinelly — Bochner integrals

The goal of this section to provide estimates of distance function in terms of Martinelly — Bochner kernels and Martinelly — Bochner integrals based on methods and results of [9], [10] and [11] and our earlier work cited there.

Note previously we obtained such type theorems in various spaces of analytic and harmonic functions of one and several variables in various domains in terms of Bergman kernel and Bergman-type projections (see [9], [10], [11] and various references there). The line of our proof is rather similar however to those simpler cases but it is based on some results on more general kernels as Martinelly — Bochner kernels and Martinelly — Bochner integrals (see [5] and references there).

Let D be bounded domain in C^n . X, Y be quasinormed subspaces of $H(D)$, where $H(D)$ is the space of all analytic functions in D . Let $X \subset Y$, let $f \in Y$. We search for those estimates of a function $dist_Y(f, X)$ which generalize previously known such type estimates obtained via similar Bergman type kernels.

We have the following result in this direction. First if $X \subset H^p$, $p \geq 1$ then the problem of estimates of $dist_{H^p}(f, X)$, $f \in H^p$ appears naturally. In our previous papers to role of Bergman type kernels for this problem was critical.

Let $H^p \subset X$, $X \subset H(D^m)$, then let $f \in X$. We also can consider a problem of finding estimates of function $dist_X(f, H^p)$, $1 \leq p < \infty$, $H^p = H^p(D^m)$ on product domains in terms of Martinelly — Bochner kernels or integrals.

We have following results following arguments of proofs of our previous papers [10], [11], [14], [15].

Let $X \subset H^p(D^m)$, $1 \leq p < \infty$, $m \in N$, we assume X is a quasinormed subspace of $H(D^m)$. To estimate $dist_{H^p}(f, X)$, $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$ we follow our arguments from [14] in the unit disk $\{|z| < 1\}$ and unit ball.

Since $f \in H^p(D^m)$, then applying Martinelly — Bochner representation by each variable

$$f(z_1, \dots, z_m) = \int_{(\partial D)^m} f(\vec{\zeta}) U(\vec{\zeta}, \vec{z}) = \int_{(\partial D)} \dots \int_{\partial D} f(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z_j);$$

$z_j \in D$, $j = 1, \dots, m$ where

$$H^p(D^m) = \{f \in H(D^m) : \sup_{R>0} \int_{\partial D} \dots \int_{\partial D} |f(\vec{\zeta}_R)|^p d\sigma < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

is a Hardy space on products of D domains, $m \in N$, D is bounded in C^n , $\partial D \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ (note these are Banach spaces) and where $\vec{\zeta}_R = (\zeta_1 - R\nu(\zeta_1), \dots, \zeta_m - R\nu(\zeta_m))$, ν is a vector field of outer unit normals to ∂D .

Let $X_{\varepsilon, f}^\Psi = \{\zeta \in \partial(D^m) : \Psi(\zeta)|f(\zeta)| \geq \varepsilon\}$; $\Psi \in C^1(\partial(D^m))$ fixed. Then $f = f_1 + f_2$

$$f_1(z) = \int_{X_{\varepsilon, f}^\Psi} f(\zeta) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z); \quad f_2(z) = \int_{\partial(D^m) \setminus X_{\varepsilon, f}^\Psi} f(\zeta) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z).$$

Assuming $f_2 \in H^p$, we get

$$\text{dist}_{H^p}(f, x) \leq c \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \left\| \int_{X_{\varepsilon, f}^{\Psi}} f(\zeta) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z) \right\|_{X(D^m)} < \infty \right\}.$$

Since $\text{dist}_{H^p}(f, x) \leq c \|f - f_1\|_{H^p} = \|f_2\|_{H^p}$.

Theorem 3. Let $p \geq 1$. Let $\Psi \in C^1(\partial(D^m))$, $\Psi \geq 0$, be fixed function, let $f \in H^p(D^m)$, $\int_{\partial(D^m) \setminus X_{\varepsilon, f}^{\Psi}} f(\zeta) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z) \in H^p$. Then

$$\text{dist}_{H^p}(f, Y) \leq c \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \left\| \int_{X_{\varepsilon, f}^{\Psi}} f(\vec{\zeta}) \prod_{j=1}^m U(\zeta_j, z) \right\|_{Y(D^m)} < \infty \right\}$$

where

$$X_{\varepsilon, f}^{\Psi} = \{\zeta \in \partial(D^m) : \Psi(\zeta)|f(\zeta)| \geq \varepsilon\},$$

where $Y \subset H^p$ is a quazinormed subspace of $H^p(D^m)$ for any bounded D domain with $\partial D \in C^{\alpha+1}$, $\alpha > 0$ boundary.

REMARK 3. Similar results are valid for Martinelly – Bochner type integrals and harmonic function spaces in R_+^{n+1} and unit ball in R^m . See [17] where similar problems were solved via Bergman kernel.

Theorem 3 is a typical assertion, other assertions of such type in terms of $U(z, \zeta)$ kernels can be also formulated similarly.

3. Some remarks on Martinelly – Bochner integrals related with Holder classes and Lebegues points.

The goal of this section is among other things from [5] related with expressions like $|\Phi_f(z_1) - \Phi_f(z_2)|$ to the case of two functional similar type expressions like $|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)|$, where Φ is a certain operator, f, g are certain functional class members, $z_1, z_2 \in D$, where D is a fixed domain in C^n .

This type of issues arise naturally in view of recent series of papers and new results of the first author on multifunctional analytic spaces and related issues (see [8], [17] and various references there).

To obtain this natural transformation of known results from one functional case to two functional case we follow the proof of [5] and at the same time modify proofs from there to our case. First we provide certain equalities (A), (B), (C), (D), which can be checked directly, then use them in our proofs. We alert the reader that in those places where arguments are close or the same as in [5], we omit details making the exposition of this note rather concise we note also that our problems we considered below is an attempt to provide natural extensions of known one functional results to two functional case.

Let

$$\begin{aligned}(Mf)(z^+) &= \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z^+); \\ (Mf)(z^-) &= \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z^-); \end{aligned}$$

then we have following equalities

$$\begin{aligned}(Mf)(z^+) - (Mg)(z^-) - f(z) - g(z) &= \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) - \\ - \int_{\partial D} g(\zeta)U(\zeta, z^-) - \int_{\partial D} g(z)(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) + \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z^-) &= \quad (A) \\ = \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z))(U(\zeta, z^+) - U(\zeta, z^-)) + M(f - g)(z^-) - g(z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Mf)(\tilde{z}^+) - (Mg)(\tilde{z}^-) &= \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, \tilde{z}^+) - \\ - \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, \tilde{z}^-) + f(z^0) \int_{\partial D} (U(\zeta, \tilde{z}^+) - U(\zeta, \tilde{z}^-)) - \int_{\partial D} g(\zeta)U(\zeta, \tilde{z}^-) + \\ + \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, \tilde{z}^-) &= \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, \tilde{z}^+) - \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, \tilde{z}^-) + \\ + f(z^0) \int_{\partial D} (U(\zeta, \tilde{z}^+) - U(\zeta, \tilde{z}^-)) + M(f - g)(\tilde{z}^-); \end{aligned} \quad (B)$$

we omit technical calculations leaving them to readers. Note all equalities are based on simple properties of Martinelly — Bochner integrals (see [5]).

It can be checked directly that

$$\begin{aligned}& \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z) - \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} (g(\zeta) - g(0))U(\zeta, 0) = \\ &= \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)) + \int_{\partial D \cap B(0, \varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z) - \\ & - \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} (g(\zeta) - g(0))U(\zeta, 0) + \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, 0) = \\ &= \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))(U(\zeta, z) - U(\zeta, 0)) + \\ &+ \int_{\partial D \cap B(0, \varepsilon)} (f(\zeta) - f(0))U(\zeta, z) + \int_{\partial D \setminus B(0, \varepsilon)} ((f - g)(\zeta) - (f - g)(0))U(\zeta, 0); \\ & - \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (f(\zeta) - f(z^1))U(\zeta, z^1) + \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (f(\zeta) - g(z^2))U(\zeta, z^2) = \end{aligned} \quad (C)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))(U(\zeta, z^2) - U(\zeta, z^1)) + (f(z^1) - f(z^2)) \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} U(\zeta, z^1) + \quad (D) \\
 &+ \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))U(\zeta, z^1) - \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} f(\zeta)U(\zeta, z^1) + f(z^2) \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} U(\zeta, z^1) = \\
 &= \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))(U(\zeta, z^2) - U(\zeta, z^1)) + \\
 &+ (f(z^1) - f(z^2)) \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} U(\zeta, z^1) + A_{f,g} + B_{f,g} + C_{f,g} = \\
 &= \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))(U(\zeta, z^2) - U(\zeta, z^1)) + (f(z^1) - f(z^2)) \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} U(\zeta, z^1) + \\
 &+ \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} ((g - f)(\zeta) - (g - f)(z^2))U(\zeta, z^1);
 \end{aligned}$$

where σ_δ is arc on ∂D and $B(0, \varepsilon)$ is a standard ball in a domain.

REMARK 4. For those cases when $g = f$ all equalities (A), (B), (C), (D) can be seen in [5] (see lemma 5.3, theorem 6.1, 6.2).

Let Ω be a domain, we say f is Holder class α if $|f(\zeta) - f(z)| \leq c|\zeta - z|^\alpha$, $\zeta, z \in \Omega$, $\alpha > 0$. We consider bounded domains with smooth boundary, $f \in L^1(\partial D)$, $D = \{z \in C^n, \rho(z) < 0\}$, $\rho \in C^1(C^n)$, $d\rho \neq 0$ on ∂D . Let $V(\partial D)$ be a neighborhood of ∂D . We assume f can be extended to $V(\partial D)$. Consider integrals

$$\Phi(z) = \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z))U(\zeta, z).$$

Note if $z \notin \partial D$ then the integral has no singularity, if $z \in \partial D$, then

$$|f(\zeta) - f(z)| \times |U(\zeta, z)| \leq c|\zeta - z|^{\alpha+1-2n} d\sigma(\zeta) \quad (2)$$

if f is α Holder class function. The natural question is let f is of Holder class α in $V(\partial D)$ then can we say $\Phi(z)$ is of same class α . The answer is positive (see [5]).

The next more general question is if f, g are of Holder class α then what can we say on $|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)|$, $z_1, z_2 \in V(\partial D)$. We will use formula (D) for our proof. But first note that the following simple observation is valid.

Let $z^1, z^2 \in V(\partial D)$, $|z^1 - z^2| = \delta$, δ is small, if $B(z^1, 2\delta) \subset V(\partial D)$, $\sigma_\delta = \partial D \cap B(z^1, 2\delta)$. Then (see [5])

$$\left| \int_{\sigma_\delta} (f(\zeta) - f(z^j))U(\zeta, z^j) \right| \leq c_1 \int_{\sigma_\delta} |\zeta - z^j|^{1+\alpha-2n} d\sigma \leq c_2 \delta^\alpha, j = 1, 2.$$

This follows from (2) directly and the fact that σ_δ is smooth. So for $f = g$ case it is remains to estimate integrals by $D \setminus \sigma_\delta$ to get estimate for $|\Phi_f(z_1) - \Phi_f(z_2)|$. But for $|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)|$ we have formula (D) and estimates

$$A_f = \left| \int_{\sigma_\delta} (f(\zeta) - f(z^1))U(\zeta, z^1) \right| \leq \tilde{c}_1 \delta^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$B_g = \left| \int_{\sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))U(\zeta, z^2) \right| \leq \tilde{c}_1 \delta^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Since obviously we have

$$\begin{aligned} & |\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)| = \\ & = \left| \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z_1))U(\zeta, z_1) - \int_{\partial D} (g(\zeta) - g(z_2))U(\zeta, z_2) \right| \leq A_f + B_g + C_{f,g}; \\ & |C_{f,g}| = \left| \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (f(\zeta) - f(z_1))U(\zeta, z_1) - \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z_2))U(\zeta, z_2) \right|; \end{aligned}$$

Using (D) we have now that $c_{f,g} \leq c_g^1 + c_f^2 + c_g^3 + c_f^4 + c_f^5$. Note $c_g^3 + c_f^4 + c_f^5 = \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} ((g-f)(\zeta) - (g-f)(z^2)); U(\zeta, z^1) = \Phi_{f,g}(z_1, z_2)$.

REMARK 5. Note we also have

$$\begin{aligned} |\Phi_{f,g}(z_1, z_2)| & \leq |\Phi_{g-f}(z_2)| + \tilde{c}_{g-f}^1, \\ \tilde{c}_{g-f}^1 & = \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} ((g-f)(\zeta) - (g-f)(z^2))(U(\zeta, z^1) - U(\zeta, z^2)). \end{aligned}$$

So we have that

$$|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)| \leq c_g^1 + \tilde{c}_{g-f}^1 + c_f^2 + c\delta^\alpha + \tilde{c}|\Phi_{g-f}(z_2)|.$$

We will stop on estimate with $\Phi_{g,f}$. We have $c_f^2 \leq c\delta^\alpha$ since $|\int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (U(\zeta, z^1))| \leq 1$, see [5]. We estimate c_g^1 and $\tilde{c}_{g-f}^1$. This is based on simple estimates of $U(\zeta, z^2) - U(\zeta, z^1)$, $z_1, z_2 \in V(\partial D)$.

We have that (see [5])

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} (g(\zeta) - g(z^2))(U(\zeta, z^2) - U(\zeta, z_1)) \right| & \leq \tilde{c}\delta \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} |\zeta - z^1|^{\alpha-2n} d\sigma \leq \tilde{c}(\delta^\alpha), \\ \left| \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} ((f-g)(\zeta) - (g-f)(z^2))(U(\zeta, z^1) - U(\zeta, z^2)) \right| & \leq \\ & \leq \tilde{c}\delta \int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} |\zeta - z^1|^{\alpha-2n} d\sigma \leq \tilde{c}(\delta^\alpha). \end{aligned}$$

Since $\int_{\partial D \setminus \sigma_\delta} |\zeta - z^1|^{\alpha-2n} d\sigma \leq \bar{c}\delta^{\alpha-1}$ (see [5]).

So finally we have an estimate

$$|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)| \leq c\delta^\alpha + |\Phi_{g,f}(z_1, z_2)|, \quad 0 < \alpha < 1$$

and

$$|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)| - |\Phi_{g,f}(z_1, z_2)| \leq c\delta^\alpha.$$

Note if $f \equiv g$ this obtained in [5] and [6].

We now formulate the final result.

THEOREM 8. Let f, g be of Holder class α , $0 < \alpha < 1$ in $V(\partial D)$. Then in $V(\partial D)$ we have the following estimate

$$|\Phi_f(z_1) - \Phi_g(z_2)| \leq c\delta^\alpha + |\Phi_{g,f}(z_1, z_2)|; \quad z_1, z_2 \in V(\partial D),$$

$|z^1 - z^2| = \delta$, $\delta < \delta_0$, for some fixed δ_0 , $\delta_0 > 0$.

We assume $Mf(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z)$, $z \notin \partial D$, $f \in C^1(\bar{D})$ below.

Now we use (A), (B), (C) to obtain such type results for other mentioned assertions from [5]. Note to get the proof we must follow one functional proof from [5] modify it to use mentioned equalities (A), (B), (C).

Let D be bounded domain with C^1 boundary and $f \in L^1(\partial D)$ and $z^0 \in \partial D$ and V_{z^0} be a cone with z^0 as peak (vertex), with conic angle equal or less to $\pi/2$. Let $z \in D \cap V_{z^0}$. We say z^0 is a Lebegues point for f if (see [5])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{1-2n} \int_{\partial D \cap B(z^0, \varepsilon)} |f(\zeta) - f(z^0)| d\sigma = 0.$$

We will be using (C) and arguments from proof of theorem 5.2 [5]. We note first (see [5])

$$\left| \int_{\partial D \cap B(0, \varepsilon)} |f(\zeta) - f(0)| U(\zeta, z) \right| \leq K \int_{\partial D \cap B(0, \varepsilon)} |f(\zeta) - f(0)| d\sigma \rightarrow 0;$$

$$K = \frac{c_2}{\varepsilon^{2n-1}} \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

This and (C) lead to theorem.

So based on (C) we have the following.

THEOREM 9. Let $z \in D \cap V_{z^0}$ be Lebegues point for f and g , $f, g \in L^1(\partial D)$. Then

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow z^0 \\ z \in V_{z^0}}} \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z) - \int_{\partial D \setminus B(z^0, |z - z^0|)} (g(\zeta) - g(z^0))U(\zeta, z^0) = \\ = \lim_{\substack{z \rightarrow z^0 \\ z \in V_{z^0}}} \int_{\partial D \setminus B(z^0, |z - z^0|)} ((f - g)(\zeta) - (f - g)(z^0))U(\zeta, z^0). \end{aligned}$$

Using (A) and (B) and following the proof of theorem 6.1, 6.2 (see [5]). We can have assertions concerning

$$\lim_{z \pm \rightarrow z^0} Mf(z^+) - Mg(z^-) - f(z^0) - g(z^0),$$

where, $f, g \in L^1(\partial D)$, z^0 is a Lebegues point of f and g simultaneously and

$$\int_{\partial D} |Mf(\tilde{z}^+) - Mg(\tilde{z}^-) - f(z) - g(z)|^p d\sigma$$

if D is bounded, $\partial D \in C^1$, $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 1$, $\nu(\zeta)$ is a unit vector of outer normal to ∂D on ζ , $\tilde{z}^+ = z - \varepsilon\nu(z)$, $\tilde{z}^- = z + \varepsilon\nu(z)$. We omit details here.

So based on (B) we have the following

THEOREM 10. Let z^0 be Lebegues point of f and g , $f \in L^1(\partial D)$, $g \in L^1(\partial D)$, $z^+ \in V_{z_0} \cap D$, $z^- = V_{z_0} \cap (C^n \setminus \bar{D})$, $a|z^+ - z^0| \leq |z^- - z^0| \leq b|z^+ - z^0|$, $a, b \in R$, $a \leq b$, $z_0 \in \partial D$, D is bounded, $\partial D \in C^1$, z^0 is a peak of cone V_{z_0} , cone angle is $\beta < \pi/2$. Then

$$\lim_{z^\pm \rightarrow z^0} (Mf(z^+) - Mg(z^-)) = f(z_0) + \lim_{z^\pm \rightarrow z^0} (M(f - g)(z^-)).$$

REMARK 6. For $f = g$ this is a theorem from [5].

Based on (A) we have the following theorem 11.

THEOREM 11. Let D be a bounded domain with smooth boundary. Let $f, g \in L^p(\partial D)$, $p \geq 1$. Let $\tilde{z}^+$, $\tilde{z}^-$ belong to D and $C^n \setminus \bar{D}$ for ε small enough. Then

$$\begin{aligned} A_{f,g} &= \int_{\partial D} |Mf(z - \varepsilon\nu(z)) - Mg(z + \varepsilon\nu(z))|^p d\sigma \leq \\ &\leq c \int_{\partial D} |f|^p d\sigma + \int_{\partial D} |M(f - g)(z^-)|^p d\sigma; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D} |Mf(z - \varepsilon\nu(z)) - Mg(z + \varepsilon\nu(z)) - f(z) - g(z)|^p d\sigma &\leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M(f - g)(z^-)\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

REMARK 7. At the end of this paper we find interesting to suggest another idea related from one hand to Martinelly–Bochner integrals from the other hand to our recent work on traces in analytic functions Bergman spaces. In [7] the role of expanded Bergman projection based on expanded Bergman kernel was crucial for solution of certain problems related with traces of analytic functions in polyballs. It will be nice to study their analogues expanded Martinelly–Bochner kernels and based on them expanded Martinelly–Bochner integrals based in particular on the following simple idea.

Let as usual $g(\zeta, z) = c_n \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}$, $n > 1$, ρ be defining function of $D \subset C^n$, $D = \{\rho < 0\}$, $d\rho \neq 0$ on ∂D , $\rho \in C^1$.

$P_{k,s}$ be a complete orthonormal system of homogeneous harmonic polynomials in $L^2(S)$,

$*$ is well-known Hodze operator for differential forms see [5] $\sigma(\zeta) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta$.

We suggest to study kernels of type on product domains (expanded Martinelly – Bochner kernels)

$$U(\zeta, z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \prod_{j=1}^m g(\zeta, z_j) d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta$$

$$\tilde{U}(\zeta, z_1, \dots, z_m) = \frac{(n-1)!}{\pi^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} \prod_{j=1}^m \frac{(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_j^k)}{|\zeta - z_j|} d\sigma$$

$$\bar{U}(\zeta, z_1, \dots, z_m) = \left(- \sum_{k,s} \frac{P_{k,s}(z_1)}{n+k-1} \left[* \partial \frac{\overline{P_{k,s}(\zeta)}}{|\zeta|^{2n+2k-2}} \right] \right)$$

$$\dots \left(- \sum_{k,s} \frac{P_{k,s}(z_m)}{n+k-1} \left[{}^*\partial \frac{\overline{P_{k,s}(\zeta)}}{|\zeta|^{2n+2k-2}} \right] \right)$$

Note for $m = 1$ these kernels coincide with classical Martinelli—Bochner integrals (see [5]). Same idea used for Bergman kernel in series of papers of first author (see [7] and references there).

$$B(z_1, \dots, z_m, w) = \prod_{j=1}^m \frac{(1 - |z_j|)^{\alpha_j}}{(1 - \bar{z}_j w)^{\alpha_j+2}}, \quad \alpha_j > -1, \quad z_j, w \in D, \quad j = 1, \dots, m.$$

These types of extensions of Bergman kernel was considered by author in [7].

4. Conclusion.

In our paper we got some analogues of our numerous recent results on traces and distances in terms of Martinelli — Bochner integrals and kernels. These are first results of this type in terms of such kernels. We also discussed some assertions for Martinelli — Bochner integrals related with Holder classes and Lebesgue points.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Ortega, J. Fabrega Mixed-norm spaces and interpolation // Studia Math. 1994. Vol. 109, № 3. P. 234–254.
2. R. Shamoyan On some characterizations of Carleson type measure in the unit ball // Banach J. Math. Anal. 2009. Vol. 3, № 2. P. 42–48.
3. R. Shamoyan, O. Mihic On traces of holomorphic functions on the unit polyball // Appl. Anal. Discrete Math. 2009. Vol. 3. P. 198–211.
4. R. Shamoyan, O. Mihic On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces on polyballs // Siauliai. Math. Seminar. 2010. Vol. 5, issue 13. P. 101.
5. А.М. Кытманов Интеграл Мартинелли – Бохнера и его приложения. Новосибирск: Наука. 2002. 240 с.
6. Е. М. Чирка Аналитическое представление CR-функций // Мат. сборник. 1975. Т. 98(140), № 4(12). С. 591–623.
7. R. Shamoyan, O. Mihic, On traces of holomorphic functions on the unit polyball // Appl. Anal. Discrete Math. 2009. Vol. 3. P. 198–211.
8. M. Arsenovic, R. Shamoyan On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces // Kragujevac Math. Journal. 2013. Vol. 37. No. 1. P. 45–64.
9. R. Shamoyan, M. Arsenovic On distance estimates and atomic decompositions in spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains // Bulletin of the Korean Mathematical Society. 2015. Vol. 52, No. 1. P. 85—103.

10. R. F. Shamoyan, S. M. Kurilenko On a sharp estimate for a distance function in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of second type // *Mathematica Montisnigri*. 2014. Vol. XXX. P. 5–16.
11. R. F. Shamoyan, S. M. Kurilenko On extremal problems in tubular domains over symmetric cones // *Issues of Analysis*. 2014. Vol. 3(21), N. 1. P. 44–65.
12. R. Shamoyan, O. Mihic On Traces in Some Analytic Spaces in Bounded Strictly Pseudoconvex Domains // *Journal of Function Spaces*. 2015. Vol. 2015, 10 p.
13. R. Shamoyan, S. Kurilenko On traces of Herz type and Bloch type spaces on pseudoconvex domains // *Issues of Analysis*, Petrozavodsk, 2015.
14. R. Shamoyan, O. Mihic On new estimates for distances in analytic function spaces in the unit disk, the polydisk and the unit ball // *Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana*. 2010. Vol. XVII, No. 2. P. 89–103.
15. R. Shamoyan, O. Mihic, On new estimates for distances in analytic function spaces in unit disk, polydisk, and unit ball // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2009. Т. 6. С. 514–517.
16. R. Shamoyan, E. Povprits Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2013. Т. 6(4). С. 527–538.
17. M. Arsenovic, R. Shamoyan Trace theorems in harmonic function spaces on $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems // *Kragujevac Journal of Mathematics*. 2011. P. 411–430.
18. Dariush Ehsani, The ∂ -Neumann problem on product domains in C^n // *Math. Ann.* 2007. Vol. 337, № 4. P. 797–816.
19. Debraj Charabarta, Mei-Chi Shaw, The Cauchy-Riemann equations on product domains // *Math. Ann.* 2011. Vol. 349, issue 4. P. 977–998.
20. D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. Peloso, F. Ricci Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint. Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis, Yaounde. 2001. 75 p.

REFERENCES

1. Ortega, J. & Fabrega, J. 1994, "Mixed-norm spaces and interpolation", *Studia Math.*, vol. 109, no. 3, pp. 234–254.
2. Shamoyan, R. 2009, "On some characterizations of Carleson type measure in the unit ball", *Banach J. Math. Anal.*, vol. 3, no. 2, pp. 42–48.
3. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2009, "On traces of holomorphic functions on the unit polyball", *Appl. Anal. Discrete Math.*, vol. 3, pp. 198–211.

4. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2010, "On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces on polyballs", *Siauliau. Math. Seminar*, vol. 5, issue 13, p. 101.
5. Kytmanov, A. 2002, "Martinelly — Bochner integral and its applications", *Nauka, Novosibirsk*, 240 p. (in Russian)
6. Chirka, E. 1975, "Analytic representation of CR functions", *Mat. Sbornik*, vol. 98(140), № 4(12), pp. 591—623.
7. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2009, "On traces of holomorphic functions on the unit polyball", *Appl. Anal. Discrete Math.*, vol. 3, pp. 198—211.
8. Arsenovic, M. & Shamoyan, R. 2013, "On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces", *Kragujevac Math. Journal*, vol. 37, no. 1, pp. 45—64.
9. Shamoyan, R. & Arsenovic, M. 2015, "On distance estimates and atomic decompositions in spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains", *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 52, no. 1, pp. 85—103.
10. Shamoyan, R. F. & Kurilenko, S. M. 2014, "On a sharp estimate for a distance function in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of second type", *Mathematica Montisnigri*, vol. XXX, pp. 5—16.
11. Shamoyan, R. F. & Kurilenko, S. M. 2014, "On extremal problems in tubular domains over symmetric cones", *Issues of Analysis*, vol. 3(21), no. 1, pp. 44—65.
12. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2015, "On traces of Bergman spaces in pseudoconvex domains, preprint", *Journal of Function Spaces*, vol. 2015, 10 p.
13. Shamoyan, R. & Kurilenko, S. 2015, "On traces of Herz type and Bloch type spaces on pseudoconvex domains", *Issues of Analysis, Petrozavodsk*.
14. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2010, "On new estimates for distances in analytic function spaces in the unit disk, the polydisk and the unit ball", *Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana*, vol. XVII, no. 2, pp. 89—103.
15. Shamoyan, R. & Mihic, O. 2009, "On new estimates for distances in analytic function spaces in unit disk, polydisk, and unit ball", *Siberian Mathematical Reports*, vol. 6, pp. 514—517.
16. Shamoyan, R. & Povprits, E. 2013, "Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones", *Journal Siberian Federal University*, vol. 6(4), pp. 527—538.
17. Arsenovic, M. & Shamoyan, R. 2011, "Trace theorems in harmonic function spaces on $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems", *Kragujevac Journal of Mathematics*, pp. 411—430.
18. Ehsani, Dariush 2007, "The ∂ -Neumann problem on product domains in C^n ", *Math. Ann.*, vol. 337, no. 4, pp. 797—816.

19. Charabarta, Debraj & Shaw, Mei-Chi 2011, "The Cauchy-Riemann equations on product domains", *Math. Ann.*, vol. 349, issue 4, pp. 977–998.
20. Bekolle, D., Bonami, D., Garrigos, G., Nana, C., Peloso, M. & Ricci, F. 2001, "Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint", *Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis, Yaounde*, 75 p.

Bryansk State University

Received 22.03.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 514.11 + 514.87

О РАЦИОНАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ

М. И. Штогрин (г. Москва)
stogrin@mi.ras.ru

Аннотация

Исследуются рациональные и иррациональные вращения для множества рациональных направлений в плоской точечной решетке. Доказано, что в случае рациональных вращений порядок некристаллографического поворота может быть равен только 8 или 12. Множество рациональных направлений в прямоугольной точечной решетке с метрической квадратичной формой $x^2 + \lambda^2 y^2$ и в произвольной ее центрировке обладает иррациональным вращением, если и только если число λ^2 рационально.

Ключевые слова: решетка, примитивная ячейка, рациональное направление, вращение, угол, тангенс.

Библиография: 3 наименования.

ON RATIONAL DIRECTIONS IN THE FLAT LATTICE

M. I. Shtogrin (Moscow)

Abstract

Rational and irrational rotations for the set of rational directions in the flat point lattice are considered. It is proved that in the case of rational rotations an order of noncrystallographic turn can be only 8 or 12. The set of rational directions in the rectangular point lattice with metric quadratic form $x^2 + \lambda^2 y^2$ and arbitrary its centering has irrational rotation if and only if the number λ^2 is rational.

Keywords: lattice, unit cell, rational direction, rotation, angle, tangent.

Bibliography: 3 titles.

Введение

Теория точечных решеток в $\mathbb{R}^n$ подробно изложена в книге С. С. Рышкова [1]. Для точечных решеток в $\mathbb{R}^3$ в статье А. В. Гадолина [2] было введено понятие равенства направлений и при допущении закона рационального отношения между параметрами найдены все так называемые точечные группы симметрии кристалла, или 32 кристаллографических класса. Для плоской сетки, или точечной решетки в $\mathbb{R}^2$, ниже будут исследованы все те вращения плоскости, при которых все рациональные направления в произвольной точечной решетке, расположенной в двумерной плоскости, остаются рациональными.

1. Плоская сетка

В двумерной евклидовой плоскости рассмотрим произвольный параллелограмм. Построим разбиение плоскости на конгруэнтные и параллельные ему параллелограммы, в котором смежные параллелограммы пересекаются по целым сторонам (такое разбиение мы называем нормальным). Все прямые, на которых расположены стороны параллелограммов, составляют плоскую сетку. Точки пересечения этих прямых называют узлами. Узлы, или вершины данного разбиения, составляют *точечную решетку*, или просто *решетку*, см. [1]. Всякий параллелограмм разбиения называют основным параллелограммом, или *примитивной ячейкой*, плоской точечной решетки.

Каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одному параллелограмму рассматриваемого разбиения, а любая достаточно малая ее окрестность принадлежит

- 1) одному параллелограмму разбиения, если она расположена внутри него,
- 2) двум параллелограммам разбиения, если расположена внутри стороны,
- 3) четырем параллелограммам разбиения, если она расположена в вершине.

Следовательно, решетка является дискретной системой точек. Точки произвольной точечной решетки изолированы друг от друга и никакая точка плоскости не является предельной точкой для последовательности точек, или узлов, принадлежащих решетке.

Примем вершину одного из параллелограммов построенного нормального разбиения за начало координат, а ребра параллелограмма, выходящие из начала, примем за единичные отрезки двух координатных осей. Тогда все вершины разбиения и только они будут иметь целочисленные координаты. Таким образом, точечная решетка может быть определена как совокупность точек с целочисленными координатами в каком-то репере, который называют *основным репером* решетки. В качестве начала координат может быть взята любая точка решетки. Если взять какой-то вектор с началом и концом в точках данной решетки, то параллельный ему вектор с началом в точке решетки будет иметь конец в точке этой же решетки. Параллельный перенос на *вектор решетки*, обладающий целочисленными координатами в ее основном репере, совмещает всю решетку с собой. Таким образом, любая точечная решетка обладает свойством параллельной переносности.

В силу дискретности и параллельной переносности решетки порядок n поворота, совмещающего решетку с собой, не может быть любым. В [2] доказано, что порядок n не больше 6 и не равен 5, т.е. $n \leq 6$ и $n \neq 5$. В самом деле, выберем в плоскости

точку решетки, ближайшую к центру поворота и не совпадающую с ним. Размножив эту точку решетки всеми поворотами вокруг центра вращения, совмещающими решетку с собой, получим выпуклый правильный n -угольник, все вершины которого принадлежат решетке. Пусть $n \geq 3$. Тогда на двух смежных сторонах n -угольника построим ромб. Три вершины ромба совпадают с вершинами n -угольника и поэтому принадлежат решетке. Значит, четвертая вершина ромба также должна принадлежать решетке. Однако при $n = 5$ и $n \geq 7$ четвертая вершина ромба не расположена в центре вращения и является более близкой к центру, чем вершина n -угольника. Но этого не может быть, так как вершина n -угольника была взята ближайшей к центру вращения точкой решетки. Значит, порядок поворота двумерной решетки находится среди целых чисел 1, 2, 3, 4, 6. Он кристаллографический. В итоге получена

ТЕОРЕМА 1. *Правильные многоугольники с вершинами в точках решетки — это правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник.*

Рассмотрим выпуклый правильный n -угольник при $n = 5$ или $n \geq 7$. Одну из вершин n -угольника соединим прямолинейными отрезками со всеми остальными его вершинами. Рассмотрим всевозможные линейные комбинации полученной совокупности векторов с целочисленными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Концы всех этих векторов составляют параллельно переносную систему точек. Однако она не является решеткой. В самом деле, четвертая вершина ромба, упомянутого выше, не расположена в центре n -угольника и является более близкой к центру, чем вершина n -угольника. Все четвертые вершины из n таких ромбов являются вершинами меньшего правильного n -угольника. Повторяя эти рассуждения вновь и вновь, мы получаем, что центр n -угольника является предельной точкой для построенного параллельно переносного множества точек, содержащего вершины n -угольника. Следовательно, оно не является точечной решеткой, см. выше и [1], [2].

Произвольная плоская точечная решетка центрально-симметрична с центром симметрии в точке решетки и с центром симметрии в середине отрезка с концами в ее точках.

Если имеется поворот плоскости, совмещающий точечную решетку с собой и не оставляющий ни одной ее точки на том же месте, то имеется такой же поворот, совмещающий решетку с собой и оставляющий некоторую ее точку на том же месте. В самом деле, если при повороте каждая точка решетки заняла новое положение, то посредством параллельного переноса решетки одно из новых положений точки можно вернуть в старое положение. Значит, результирующий поворот будет происходить вокруг старого положения точки решетки. Таким образом, если двумерная точечная решетка обладает поворотом какого-то порядка, совмещающим решетку с собой, то она обладает точно таким же поворотом вокруг точки решетки. Группу поворотов плоскости вокруг точки решетки, совмещающих решетку с собой, называют точечной группой данной решетки. Группу всех поворотов плоскости вокруг точки решетки, совмещающих решетку с собой, то есть максимальную точечную группу решетки, называют *голоэдрией*. Голоэдриа может обладать поворотами 1-го и 2-го рода; поворотом 2-го рода служит зеркальное отражение от прямой.

В $\mathbb{R}^2$ существуют всего четыре различные голоэдрии. Одна из них имеет два целочисленно неэквивалентные представления в виде группы целочисленных (2×2) -матриц. Если представления голоэдрий целочисленно эквивалентны, то решетки от-

носятся к одному *типу Браве*. Имеются пять типов Браве плоских решеток. Эти решетки соответственно имеют названия косоугольная, прямоугольная примитивная, прямоугольная центрированная, квадратная и гексагональная, см. [3].

2. Рациональное направление

Рассмотрим поворот порядка n , $n \geq 5$, вокруг точки решетки O . Возьмем прямолинейный отрезок OA , который имеет рациональное направление в решетке. Значит, найдется точка A' , принадлежащая решетке и расположенная на луче OA , т.е. расположенная внутри отрезка OA , на его продолжении или совпадающая с A . Пусть при повороте вокруг точки O на угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ отрезок OA переходит в отрезок OB , отрезок OB переходит в OC , OC переходит в OD , OD в OE , $\dots$, причем все они имеют рациональные направления. Тогда их концы $A, B, C, D, E, \dots$ являются вершинами правильного многоугольника, расположенного в плоскости решетки. Рассмотрим три соседних отрезка OA, OB и OC . Отрезок OB направлен по биссектрисе угла между OA и OC . Так как отрезок OB имеет рациональное направление в решетке, то найдется точка B' , принадлежащая решетке и расположенная на луче OB , т.е. расположенная внутри отрезка OB , на его продолжении или совпадающая с B . Построим ромб с диагональю OB' , противоположные стороны которого коллинеарны соответственно отрезкам OA и OC . Все четыре стороны ромба рациональны, так как они проходят через точки A и B' , принадлежащие рассматриваемой точечной решетке, и имеют в ней рациональные направления. Значит, все вершины ромба рациональны. А так как две вершины ромба, расположенные на лучах OA и OC , имеют рациональные координаты и они равноудалены от вершины O , то на лучах OA и OC имеются точки решетки, равноудаленные от вершины O . Для их получения достаточно координаты имеющихся двух вершин ромба умножить на (наименьшее) общее кратное их знаменателей.

Точно так же, отрезок OD направлен по биссектрисе угла между отрезками OC и OE . Следовательно, на лучах OC и OE имеются точки решетки, равноудаленные от вершины O . Таким образом, в данном случае на луче OC получится какая-то точка решетки. В предыдущем случае на этом же луче OC могла получиться совсем другая точка решетки. Возьмем на луче OC точку, расстояние которой от O кратно расстояниям от O в этих двух случаях. На этом расстоянии имеются точки решетки на всех трех лучах OA, OC и OE . Итак, на лучах OA, OC и OE имеются точки решетки, равноудаленные от O .

Повторяя эти рассуждения вновь и вновь, сделаем полный обход вокруг точки O или же сделаем вокруг точки O два полных обхода. В итоге мы получим одно из двух: либо существует правильный $\frac{n}{2}$ -угольник при четном n , либо существует правильный n -угольник при нечетном n . В обоих случаях вершины многоугольника принадлежат точечной решетке. Однако при нечетном $n \geq 5$ такого не может быть, см. выше и [2]. При четном n возможно лишь $\frac{n}{2} = 3, 4, 6$, т.е. $n = 6, 8, 12$. В итоге нами получена следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если совокупность рациональных направлений в решетке совмещается с собой некристаллографическим поворотом, то его порядок равен 8 или 12.*

Осталось выяснить, бывают ли повороты 8-го и 12-го порядков. Если бывают, то решетка должна содержать вершины квадрата или гексагона, см. выше.

Пусть рациональные направления заданы единичными векторами, выпущенных из одной и той же точки. Тогда их концы будут расположены на единичной окружности с центром в этой точке. Наша дальнейшая цель — исследовать некристаллографические повороты множества рациональных направлений в плоской точечной решетке, как множества точек на окружности.

Поворот 8-го порядка. В ортонормированном репере точки с координатами

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, 0), \quad (0, -1),$$

а также точки с координатами

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

расположены на единичной окружности с центром в начале координат и имеют рациональные направления в квадратной решетке, построенной на упомянутом репере. Совокупность восьми радиус-векторов этих точек совмещается с собой поворотом 8-го порядка вокруг начала координат. Правда, поворот 8-го порядка не совмещает решетку с собой.

Радиус-векторы двух точек $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ данной решетки составляют основной репер другой квадратной решетки, которая является подрешеткой исходной решетки. Она подобна ей с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$ и поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$. Обе квадратные решетки имеют одну и ту же совокупность рациональных направлений, задаваемых точками единичной окружности. Поворот 8-го порядка вокруг начала совмещает эту совокупность с собой.

Поворот 12-го порядка. В ортонормированном репере точки с координатами

$$(1, 0), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (-1, 0), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

а также точки с координатами

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right), \quad (0, 1), \quad \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right), \\ \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right), \quad (0, -1), \quad \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

расположены на единичной окружности с центром в начале координат и имеют рациональные направления в гексагональной решетке, построенной на первых шести точках — вершинах правильного 6-угольника. Совокупность двенадцати радиус-векторов упомянутых точек совмещаются с собой поворотом 12-го порядка вокруг начала координат. Поворот 12-го порядка не совмещает решетку с собой. Радиус-векторы двух точек

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

заданной гексагональной решетки составляют основной репер другой гексагональной решетки, которая является подрешеткой исходной решетки. Она подобна ей с коэффициентом подобия $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ и поворотом на угол $\frac{\pi}{6}$. Обе гексагональные решетки имеют одну и ту же совокупность рациональных направлений, задаваемых точками единичной окружности. Поворот 12-го порядка вокруг начала совмещает эту совокупность с собой.

Таким образом, некристаллографическими поворотами обладает совокупность рациональных направлений квадратной решетки и произвольной ее центрировки, а также гексагональной решетки и произвольной ее центрировки. На этом исследование рациональных вращений, т.е. поворотов конечного порядка, завершено.

3. Иррациональное вращение

Продолжим исследование множества рациональных направлений в решетке. Порядок некристаллографического поворота может быть равен 8 или 12, см. выше, если он конечен. Теперь нас интересуют повороты бесконечного порядка.

Луч, выпущенный из точки решетки, имеет рациональное направление в решетке, если на нем имеется еще хотя бы одна точка этой решетки. Значит, таких точек бесконечно много. Рациональное направление в решетке можно задавать примитивным вектором решетки, т.е. вектором с взаимно простыми целыми координатами в основном ее репере.

Из точки O произвольной плоской точечной решетки выпустим два неколлинеарных примитивных вектора. Их концы A и B являются точками решетки. Предположим, что отрезки OA и OB соизмеримы и их общую меру обозначим через e . Тогда $|OA| = ae$, $|OB| = be$, где $a, b \in \mathbb{N}$. Гомотетично увеличив отрезок OA с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии b , получим отрезок OA' , $|OA'| = b|OA| = b(ae)$. Так как b целое, то точка A' принадлежит решетке. Точно так же на луче OB получаем точку B' , $|OB'| = a|OB| = a(be)$, которая также принадлежит решетке. Точки A' и B' равноудалены от O . Построим ромб с вершинами O , A' и B' . Его четвертая вершина также принадлежит решетке. Значит, диагонали ромба являются векторами решетки. Они перпендикулярны.

Таким образом, из соизмеримости длин двух неколлинеарных векторов решетки следует наличие в ней прямоугольной подрешетки. А сама решетка является некоторой центрировкой (см. [1]) прямоугольной решетки, если она не совпадает с ней. Множество рациональных направлений в решетке и ее подрешетке всегда является одним и тем же.

Примем ортогональные примитивные векторы прямоугольной решетки за единичные векторы координатных осей. Пусть, для определенности, длина примитивного вектора вдоль оси абсцисс равна 1, а длина примитивного вектора вдоль оси ординат равна λ . Тогда квадрат длины вектора с координатами x и y будет равен $x^2 + \lambda^2 y^2$.

В данной системе координат точки с целыми координатами составляют прямоугольную решетку. Радиус-векторы двух точек с координатами (p, q) и $(-\lambda^2 q, p)$ перпендикулярны друг другу и отношение их длин равно отношению длин единичных отрезков на осях координат. Если $p, q \in \mathbb{N}$, то точка (p, q) принадлежит прямоугольной решетке с метрической квадратичной формой $x^2 + \lambda^2 y^2$. Однако вторая точка

имеет рациональные координаты, если и только если λ^2 рационально. (В противном случае в решетке имеются лишь два ортогональные рациональные направления.) В таком случае для радиуса-вектора произвольной точки (p, q) прямоугольной решетки имеется перпендикулярный ему радиус-вектор другой точки $(-\lambda^2 qd, pd)$ этой же решетки, где через d обозначен знаменатель рационального числа λ^2 .

Ясно, что угол α между радиус-векторами точек $(1, 0)$ и (p, q) является углом поворота вокруг начала $O(0, 0)$, при котором множество рациональных направлений решетки совмещается с собой. Этот угол, очевидно, можно удвоить, утроить, ... А так как прямоугольная решетка зеркально симметрична относительно координатных осей, то угол $-\alpha$ между радиус-векторами точек $(1, 0)$ и $(p, -q)$, противоположный углу α , также является углом поворота вокруг начала $O(0, 0)$, при котором множество рациональных направлений решетки совмещается с собой. Значит, это множество совмещается с собой при поворотах на угол $z\alpha$, где $z \in \mathbb{Z}$ и $\alpha = \arctg\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$. Таким образом, нами получена следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если λ^2 рационально, то угол $\alpha = \arctg\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$ порождает группу поворотов с углами $z\alpha$, $z \in \mathbb{Z}$, совмещающих с собой множество рациональных направлений прямоугольной решетки, соответствующей метрической квадратичной форме $x^2 + \lambda^2 y^2$.*

Напомним, что любой примитивный вектор решетки задает в ней рациональное направление. Однако рациональные направления можно задавать единичными векторами, выпущенными из одной и той же точки. Их концы расположены на единичной окружности с центром в этой точке. Любой их поворот задается вещественным числом $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Не нарушая общности, мы будем считать, что $\lambda^2 \in \mathbb{N}$ и более подробно остановимся на следующих трех случаях: $\lambda^2 = 1$, $\lambda^2 = 3$ и $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$, где сомножители p_i являются простыми при каждом $i = 1, 2, \dots, k$, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$ и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$.

СЛУЧАЙ $\lambda^2 = 1$. Все точки в $\mathbb{R}^2$ с целочисленными координатами в ортонормированном репере составляют квадратную решетку. Решетка обладает поворотом 4-го порядка (поворотом 2-го порядка обладает каждая решетка); поворот 3-го или 6-го порядка у нее отсутствует. Любой примитивный вектор решетки задает в ней рациональное направление. Множество всех рациональных направлений в квадратной решетке обладает поворотом 8-го порядка, см. выше. Более того, множество рациональных направлений произвольной центрировки квадратной решетки совпадает с множеством рациональных направлений самой квадратной решетки, значит, оно также обладает поворотом 8-го порядка. Поворотом 12-го порядка оно не обладает.

Так как в исходной квадратной решетке радиус-векторы точек (p, q) и $(-q, p)$ перпендикулярны и имеют одну и ту же длину, то они составляют основной репер квадратной подрешетки данной решетки. А так как множество рациональных направлений в решетке и подрешетке одно и то же, то оно совмещается с собой при тех же поворотах. Все остальные повороты, существующие по теореме 3, имеют бесконечный порядок. В итоге имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если $p, q \in \mathbb{N}$ и $q \neq p$, то число $u = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{q}{p}\right)$ иррационально.*

Случай $\lambda^2 = 3$. В случае метрической формы $x^2 + 3y^2$ центрированная прямоугольная решетка содержит не только вершины нормального разбиения на прямоугольники, но и центры всех этих прямоугольников. В итоге она является гексагональной решеткой. Она совмещается с собой поворотом 6-го порядка. Поэтому множество рациональных направлений в данной прямоугольной решетке обладает поворотом 6-го порядка. Оно обладает некристаллографическим поворотом 12-го порядка, см. выше. (В данной группе поворотов 12-го порядка поворот 2-го, 3-го или 6-го порядка является кристаллографическим, однако поворот 4-го порядка не является кристаллографическим, что вполне согласуется с [2].) Множество рациональных направлений произвольной центрировки этой прямоугольной решетки совпадает с множеством рациональных направлений самой прямоугольной решетки, значит, также обладает поворотом 12-го порядка. Поворотом 8-го порядка оно не обладает. Все остальные повороты имеют бесконечный порядок. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $q \neq p \neq 3q$. Тогда число $v = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{q\sqrt{3}}{p} \right)$ является иррациональным.

Случай $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$. Здесь все p_i простые, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$ и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$. При данном λ^2 прямоугольная решетка с метрической формой $x^2 + \lambda^2 y^2$ (здесь, в частности, при $k = 1$ число λ^2 является простым, отличным от 3) обладает только поворотом 2-го порядка, значит, не обладает поворотом 3-го, 4-го или 6-го порядка. Множество рациональных направлений в этой прямоугольной решетке не обладает поворотом 8-го или 12-го порядка. То же самое можно сказать о множестве рациональных направлений произвольной центрировки рассматриваемой прямоугольной решетки. Все остальные повороты имеют бесконечный порядок. Следовательно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$, где все p_i простые и разные и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$. Тогда число $w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda q}{p} \right)$ является иррациональным.

Заключение

Таким образом, если в плоской решетке нет двух неколлинеарных радиус-векторов, чьи длины соизмеримы, то решетка *косоугольная*. В любой другой плоской решетке имеются два ортогональных радиус-вектора. В ней может быть либо только одна пара ортогональных примитивных векторов (*особая* прямоугольная решетка), либо таких пар бесконечно много. В последнем случае угол между любыми двумя радиус-векторами решетки является углом поворота вокруг ее точки $O(0, 0)$, совмещающим множество рациональных направлений решетки с собой. Среди них встречаются *общая* прямоугольная решетка (см. теорему 6) и произвольная ее центрировка (более густая решетка — надрешетка прямоугольной подрешетки, см. [1]), а также два *частных* случая прямоугольной решетки и произвольных ее центрировок (см. теорему 4 и теорему 5). К ним относятся *квадратная* решетка и произвольная ее центрировка, а также *гексагональная* решетка и произвольная ее центрировка. В общем случае число λ^2 может принимать различные простые значения, отличные от 3. Во всех этих случаях множество рациональных направлений решетки обладает различными поворотами бесконечного порядка.

Все полученные таким образом бесконечные группы поворотов являются подгруппами одной из известных семи предельных групп Кюри, см. [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рышков С. С. Основы теории точечных решеток и систем Делоне. М.: Издательство МГУ, 2014. 142 с.
2. Гадолин А. В. Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала // Записки Императорского С.-Петербургского Минералогического Общества. Вторая серия. Часть четвертая. 1867. С. 112–200.
3. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972. 339 с.

REFERENCES

1. Ryshkov, S. S. 2014, "Fundamentals of the theory of point lattices and systems Delone", *Moscow, Publishing house of the Moscow State University*, 142 p.
2. Gadolin, A. B. 1867, "Displays all crystallographic systems and their units of one common origin", *Notes of the Imperial St. Petersburg Mineralogical Society.*, The second series. Part Four. pp. 112–200.
3. Shubnikov, A. V. & Koptsik, V. A. 1974. "Symmetry in Science and Art" Ed. by David Harker. *New York and London: Plenum Press*. 420 p.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Получено 08.05.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

СОЗДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ В *TikZ*¹

Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян (Тула)

Аннотация

При решении геометрических задач, написании пособий и книг по геометрии для средней школы и вуза приходится заниматься техническим рисованием. И даже если чертеж представляется совсем ясно и четко, для многих людей перенос его из "головы" на бумагу является довольно непростым делом. Помочь в этом могут разнообразные графические редакторы, например, *GeoGebra* — свободно распространяемая графическая и вычислительная система для изучения и преподавания математики в школах.

Но существует и иной подход. Геометрические чертежи можно создавать, используя систему *TikZ* [2], являющуюся пакетом расширений $\text{\TeX}$ / $\text{\LaTeX}$. С помощью *TikZ*, не выходя из $\text{\LaTeX}$, и не прибегая к сторонним графическим редакторам, легко пишется код для вывода как простых, так и весьма сложных схем, диаграмм, графиков и геометрических чертежей.

В предлагаемой статье обсуждаются характерные особенности написания фрагментов кода *TikZ* для вывода чертежей при решении типовых задач планиметрии, связанных с замечательными точками в треугольнике. А именно, при создании геометрических чертежей часто по тем или иным данным приходится вычислять и выводить замечательные точки треугольников, к которым относятся: "центроид (центр масс, центр тяжести)" — точка пересечения медиан, "ортоцентр" — точка пересечения высот, "центр описанной окружности" — точка пересечения "серединных" перпендикуляров (перпендикуляров к серединам сторон треугольника), "инцентр" — центр вписанной окружности, являющийся точкой пересечения биссектрис. Ниже показывается, как вычисляются и выводятся эти точки с помощью *tikz*-кода. Рассмотрены также коды для решения ряда вспомогательных задач таких, как проведение: биссектрисы угла; прямой, проходящей через заданную точку параллельно другой прямой; окружности с центром в конкретной точке, касающейся заданной прямой и т. п.

Ключевые слова: $\text{\TeX}$, $\text{\LaTeX}$, *TikZ*, *GeoGebra*.

Библиография: 2 названия.

¹Работа выполнена по гранту РФФФ № 15-01-01540а.

THE CREATION OF THE GEOMETRICAL DRAWINGS IN *TikZ*

N. M. Dobrovolsky, A. R. Esayan (Tula)

Abstract

When solving geometric problems, writing manuals and books on geometry for secondary school and University we have to deal with technical drawings. And even if the drawing is represented quite clearly, move its from the "head" to a paper is quite difficult for many people. To this can help a variety of graphic editors, for example, *GeoGebra* — the free system of a graphics and calculations which is used for study and teaching of mathematics in schools.

However, there is another approach. Geometric drawings can be created using the *TikZ* system [2], which is an extension package of $\text{\TeX}$ / $\text{\LaTeX}$. Using *TikZ*, not walking out of $\text{\LaTeX}$, and without resorting to third-party graphical editors, easily write code to output both simple and very complex diagrams, charts, graphs and geometrical drawings.

The article discusses the specific of writing code of fragments *TikZ* to output the drawings for solving typical tasks on planimetry associated with remarkable points in a triangle. Namely, when creating some geometric drawings on those or other data often necessary to calculate and display remarkable points of a triangle, which include: "the centroid (center of mass, centre of gravity)" — the point of intersection of medians; "the orthocenter" — the point crossing heights; "the circle circumscribed around triangle" — the point of intersection "middle" perpendiculars (perpendicular to the midpoints of the sides of the triangle); "the incenter" — the center of the inscribed circle, which is the point of intersection of the bisectors. The following shows how are calculated and returned these points with *tikz*-code. Also discussed codes for the solution of some auxiliary tasks such as conducting: bisector of an angle; a line which passing through the given point and parallel to the line; a circle with a center at a particular point tangent to a given straight line, etc.

Keywords: $\text{\TeX}$, $\text{\LaTeX}$, *TikZ*, *GeoGebra*.

Bibliography: 2 titles.

1. Введение

При выводе геометрических чертежей часто по различным данным приходится вычислять и выводить замечательные точки треугольников, к которым относятся:

- центроид (центр масс, центр тяжести) — точка пересечения медиан;
- ортоцентр — точка пересечения высот;
- центр описанной окружности — точка пересечения "серединных" перпендикуляров (перпендикуляров к серединам сторон треугольника);

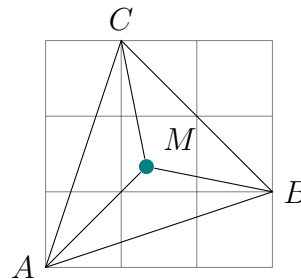
- инцентр — центр вписанной окружности, являющийся точкой пересечения биссектрис.

Ниже показывается, как вычисляются и выводятся эти точки с помощью *tikz*-кода. Рассмотрены также примеры решения ряда вспомогательных задач.

2. Центроид

Если A , B и C — вершины треугольника ABC , то центроид M можно найти по формуле $(A)!.5!(B)!.1/3!(C)$, которая означает следующее. Берется точка $X = (A)!.5!(B)$, делящая отрезок AB пополам, и на медиане XC находится точка $M = (X)!.1/3!(C)$, делящая ее в отношении 1:2. В нашем случае $\triangle ABC$ вместе с координатной сеткой выводится макросом `\tria`. Далее находится центроид и именуется буквой M . Наконец, точка M соединяется с каждой из вершин $\triangle ABC$.

```
\usetikzlibrary{calc}
\newcommand{\tria}{
\draw[help lines](0,0) grid (3,3);
\coordinate[label=left:$A$] (A)at(0,0);
\coordinate[label=right:$B$] (B)at(3,1);
\coordinate[label=above:$C$] (C)at(1,3);
\draw (A)--(B)--(C)--cycle;
\begin{tikzpicture}
\tria
\node[fill=teal, circle, inner sep=2pt,
label=above right:$M$] (M)
at ($(A)!.5!(B)!.1/3!(C)$) {};
\draw (A)--(M)--(B) (M)--(C);
\end{tikzpicture}
```



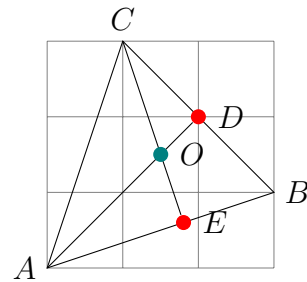
3. Ортоцентр

Здесь $\triangle ABC$ выведен макросом `\tria`, определенным в I. Далее, находятся ортогональная проекция D точки A на сторону CB и ортогональная проекция E точки C на сторону AB . Ортоцентр является точкой пересечения прямых AD и CE . Для его нахождения отрезки AD и CE получают соответственно имена $h1$ и $h2$. По ним и определяется точка O пересечения AD и CE . Последней командой `\node` полученный ортоцентр выводится в виде небольшого темно-зеленого кружка вместе с надписью O .

```

%\usetikzlibrary{calc, intersections}
\begin{tikzpicture}
\triar
\node[fill=red, circle, inner sep=2pt,
      label= right:$D$] (D)
      at ($(C)!(A)!(B)$) {};
\node[fill=red, circle, inner sep=2pt,
      label= right:$E$] (E)
      at ($(A)!(C)!(B)$) {};
\draw [name path=h1] (A)--(D);
\draw [name path=h2] (C)--(E);
\draw [name intersections=
      {of=h1 and h2, by=O}];
\node[fill=teal, circle, inner sep=2pt,
      label=right:$O$] at (O) {};
\end{tikzpicture}

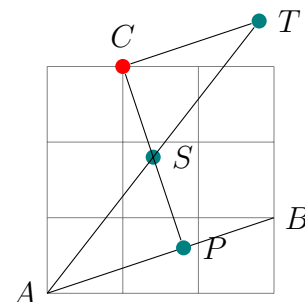
```



4. Прямая, проходящая через точку $\parallel$ другой прямой

Считаем, что прямая AB задана парой несовпадающих точек A и B и через точку C требуется провести прямую, параллельную AB . Для того чтобы построить требуемую прямую, на ней достаточно отыскать еще одну точку T , отличную от C . А сделать это можно последовательностью действий, описание которых приведено слева от рисунка:

- найти ортогональную проекцию P точки C на прямую AB : $P = (A)!(C)!(B)$;
- найти точку S , являющуюся серединой отрезка CP : $S = (C)!0.5!(P)$;
- найти на прямой AS такую точку T , чтобы отрезки AS и ST оказались равными: $T = (A)!2!(S)$;
- соединить точки (T) и $(C)!$ (точка находится на прямой CT на таком же расстоянии от C , как и T , но с другой ее стороны).

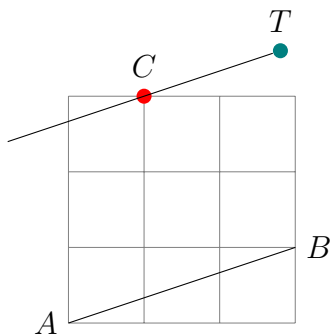


Теперь уже написание кода, решающего задачу, труда не составляет.

```

\usetikzlibrary{calc}
\begin{tikzpicture}
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[label=left:$A$] (A) at (0,0);
  \coordinate[label=right:$B$] (B) at (3,1);
  \coordinate[fill=red, circle, inner sep=2pt,
    label=above:$C$] (C) at (1,3);
  \draw (A)--(B);
  \coordinate[fill=teal, circle, inner sep=2pt,
    label=above:$T$] (T)
    at ($(A)!2!($(C)!0.5!($(A)!(C)!(B)$)$)$);
  \draw (T)--($(C)!-1!(T)$);
\end{tikzpicture}

```

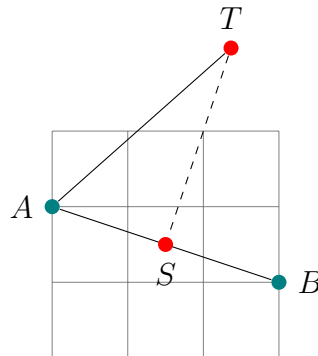


Другой вариант решения данной задачи получается, если вторую точку T на искомой прямой находить как образ точки P при повороте отрезка CP вокруг точки C на 90° : $T = (C)!1!90:(P)$. Соответствующий код можно сформировать из предыдущего кода, заменив в его последней команде `\coordinate` фрагмент после слова `at` на `$(C)!1!90:($(A)!(C)!(B)$)$);`.

5. Медиатрисса (серединный перпендикуляр)

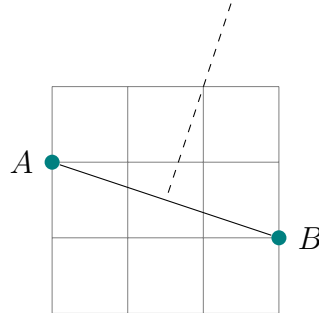
Отрезок AB задан двумя точками A и B . Провести серединный перпендикуляр к отрезку AB . Решить задачу можно следующей последовательностью действий:

- найти точку T как образ B при повороте отрезка AB вокруг точки A на 60° :
 $T = (A)!1!60:(B)$;
- соединить точки (A) и (B) ;
- соединить точку T с ее ортогональной проекцией S на отрезок AB ;



Поскольку не обязательно выводить все вспомогательные линии и точки, то код и вывод по нему могут быть, например, такими:

```
\usetikzlibrary{calc}
\begin{tikzpicture}[
  sty/.style={fill=teal,
               circle, inner sep=2pt}]
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[sty,label=left:$A$]
    (A) at (0,2);
  \coordinate[sty,label=right:$B$]
    (B) at (3,1);
  \draw (A)--(B);
  \coordinate (T) at ($(A)!\!1!60:(B)$);
  \draw [dashed] (T)--($(A)!(T)!(B)$);
\end{tikzpicture}
```

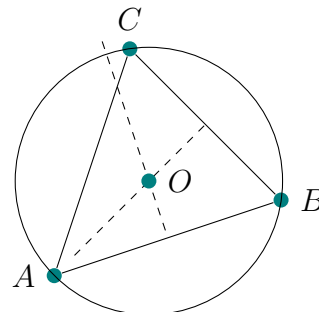


6. Центр описанной окружности

В треугольнике ABC найти центр описанной окружности и провести эту окружность. Нам достаточно провести серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника и найти точку их пересечения. Сделать это можно так, как это описано в предыдущем примере. Код для решения задачи может быть следующим:

```
\usetikzlibrary{calc, intersections}
\begin{tikzpicture}[
  sty/.style={fill=teal, circle, inner sep=2pt}]
  \coordinate[sty,label=left:$A$] (A) at (0,0);
  \coordinate[sty,label=right:$B$] (B) at (3,1);
  \coordinate[sty,label=above:$C$] (C) at (1,3);
  \draw (A)--(B)--(C)--(A);

  \coordinate (T) at ($(A)!\!1!60:(B)$);
  \draw [name path=h1, dashed]
    (T)--($(A)!(T)!(B)$);
  \coordinate (T) at ($(B)!\!1!60:(C)$);
  \draw [name path=h2, dashed]
    (T)--($(B)!(T)!(C)$);
  \draw [name intersections=
    {of=h1 and h2, by=O}];
  \node[sty, label=right:$O$] at (O) {};
  \draw (O) let \p1=($(O)-(A)$)
    in circle ({veclen(\x1,\y1)});
\end{tikzpicture}
```



Дадим пояснения к коду:

1. по трем начальным командам `\coordinate` именуются и выводятся вместе с надписями три точки A , B , C — вершины треугольника;
2. `\draw (A)--(B)--(C)--(A)` — рисуется треугольник;
3. `\coordinate (T) at ($(A)!1!60:(B)$)` — определяется, но не выводится, точка T как образ B при повороте отрезка AB на 60° вокруг точки A ;
4. `\draw [name path=h1, dashed] (T)--($(A)!(T)!(B)$)` — выводится серединный перпендикуляр к AB . Он получает имя $h1$;
5. `\coordinate (T) at ($(B)!1!60:(C)$)` — определяется, но не выводится, точка T как образ C при повороте отрезка BC на 60° вокруг точки B ;
6. `\draw [name path=h2, dashed] (T)--($(B)!(T)!(C)$)` — выводится серединный перпендикуляр к BC . Он получает имя $h2$;
7. `\draw [name intersections={of=h1 and h2, by=O}]` — находится точка O пересечения серединных перпендикуляров к AB и BC ;
8. `\node[sty, label=right:$O$] at (O) {}` — выводится точка O в виде небольшого темно-зеленого кружка и ее надпись;
9. последней командой `\draw` с использованием оператора `let` выводится окружность, описанная около $\triangle ABC$.

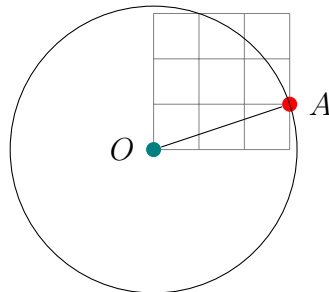
7. Вспомогательные задачи

Точки в задачах A – C заданы своими абсолютными координатами.

Задача А. Заданы две точки O и A . Нарисовать окружность с центром в точке O , проходящую через точку A .

Решение задачи А. Здесь известен центр окружности, а ее радиус можно вычислить по точкам O и A с помощью оператора `let`. Это и делается приведенным ниже кодом. В нем при определении стиля `sty` используется неопределенный параметр `#1` для раскраски точек O и A разными цветами.

```
\usetikzlibrary{calc}
\begin{tikzpicture}[scale=0.6,
  sty/.style={fill=#1, circle,
    inner sep=2pt}]
\draw[help lines](0,0) grid (3,3);
\coordinate[sty=teal, label=left:$O$]
(O) at (0,0);
\coordinate[sty=red, label=right:$A$]
(A) at (3,1);
\draw (A)--(O) let \p1=($(O)-(A)$)
  in circle ({veclen(\x1,\y1)});
\end{tikzpicture}
```



Заметим, что имеется библиотека *through*, в которой определена единственная опция *circle through*. Если данная библиотека открыта (`\usetikzlibrary{through}`), то ту же самую задачу мы могли бы решить предыдущим кодом, заменив в нем последнюю команду `\draw` следующими командами:

```
\node [draw, circle through={(A)}] at (O) {};
\draw (A)--(O); .
```

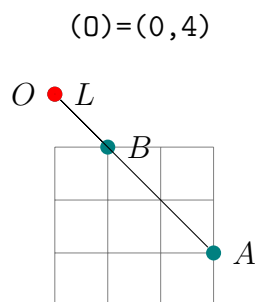
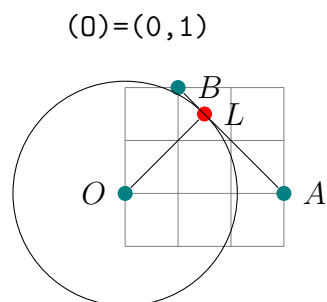
Задача В. Задана точка O и прямая AB двумя точками A и B . Нарисовать окружность с центром в точке O , касающуюся линии AB .

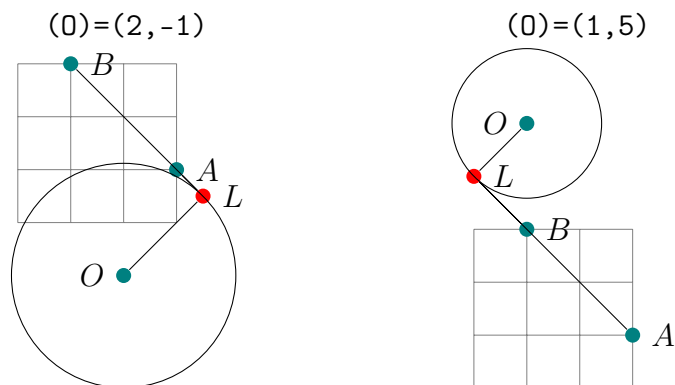
Решение задачи В. Решать задачу можно так:

1. определить имена O , A , B точек по их абсолютным координатам и вывести эти точки вместе с надписями;
2. найти ортогональную проекцию L точки O на прямую AB , и вывести точку L вместе с надписью;
3. соединить отрезками точку L с точками A , B и O (необязательно);
4. используя оператор *let*, провести окружность с центром в O , проходящую через точку L .

Код, реализующий указанные действия, представлен ниже. Вывод показан при различных положениях точки O : $(0,1)$, $(0,4)$, $(2,-1)$ и $(1,5)$.

```
\usetikzlibrary{calc}
\begin{tikzpicture}[scale=0.7,
  sty/.style={fill=teal, circle, inner sep=2pt}]
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[sty, label=left:$O$] (O) at (0,1);
  \coordinate[sty, label=right:$A$] (A) at (3,1);
  \coordinate[sty, label=right:$B$] (B) at (1,3);
  \coordinate[sty, fill=red, label=right:$L$] (L)
    at ($(A)!(O)!(B)$);
  \draw (A)--(L)--(B) (L)--(O);
  \draw (O) let \p1=($(O)-(L)$)
    in circle ({veclen(\x1,\y1)});
\end{tikzpicture}
```

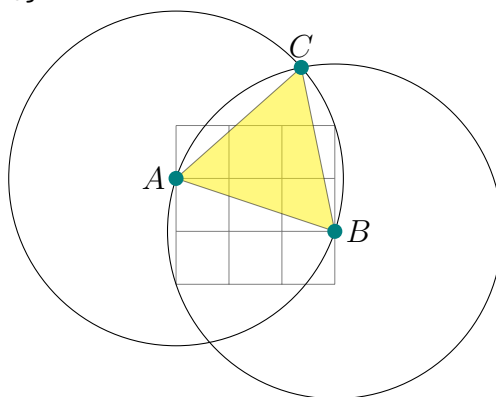




Задача С. Заданы две точки A и B . Нарисовать равносторонний треугольник ABC , одна из сторон которого является отрезком AB .

Решение задачи С. Возможным решением задачи может служить такой код:

```
\usetikzlibrary{calc, intersections}
\begin{tikzpicture}[scale=0.7]
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[label=left:$A$] (A) at (0,2);
  \coordinate[label=right:$B$] (B) at (3,1);
  \path [name path=h1, draw]
    let \p1=($(A)-(B)$), \n1={vecclen(\x1,\y1)}
    in (A) circle (\n1);
  \path [name path=h2, draw]
    let \p1=($(A)-(B)$), \n1={vecclen(\x1,\y1)}
    in (B) circle (\n1);
  \draw [name intersections={of=h1 and h2, by=C}];
  \draw [fill=yellow, opacity=0.5] (A)--(C)--(B)--cycle;
  \coordinate[label=above:$C$] (C) at (C);
  \foreach \t in {A,B,C}{
    \coordinate[fill=teal, circle, inner sep=2pt]
      (\t) at (\t);}
\end{tikzpicture}
```



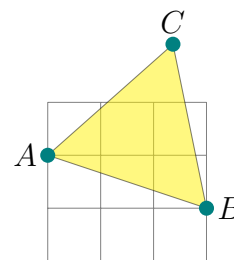
Дадим краткий комментарий к коду:

1. первыми двумя командами `\coordinate` заданные точки получают имена A и B и такие же надписи. Надписи выводятся;
2. первой командой `\path` проводится окружность с центром в точке A и радиусом AB . Эта окружность получает имя $h1$;
3. второй командой `\path` проводится окружность с центром в точке B и радиусом AB . Эта окружность получает имя $h2$;
4. `\draw [name intersections={of=h1 and h2, by=C}]` — находится, получает имя C и выводится одна из точек пересечения окружностей;
5. `\draw[fill=yellow, opacity=0.5] (A)--(C)--(B)--cycle` — рисуется требуемый равнобедренный треугольник и заполняется желтым цветом с непрозрачностью 0.5;
6. `\coordinate[label=above:$C$] (C) at (C)` — точка с именем C получает надпись C , которая и выводится;
7. `\foreach ...` — вершины треугольника выводятся небольшими кружками темно-зеленого цвета.

Рассмотрим еще один вариант решения задачи, не требующий подключения библиотеки *intersections*. Точку C можно определить как образ точки A при вращении отрезка BA вокруг точки B на угол -60° (на 60° по часовой стрелке), то есть C — это точка $(B)!1!-60:(A)$. Далее все очевидно.

```
\usetikzlibrary{calc}
\begin{tikzpicture}[scale=0.7]

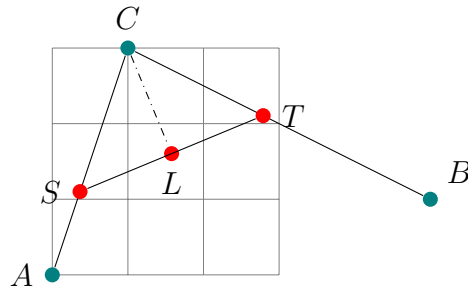
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[label=left:$A$] (A) at (0,2);
  \coordinate[label=right:$B$] (B) at (3,1);
  \coordinate[label= $C$] (C)
    at ($(B)!1!-60:(A)$);
  \draw [fill=yellow, opacity=0.5]
    (A)--(C)--(B)--cycle;
  \foreach \t in {A,B,C}{\coordinate[fill=teal,
    circle, inner sep=2pt] (\t) at (\t);}
\end{tikzpicture}
```



8. Биссектриса угла

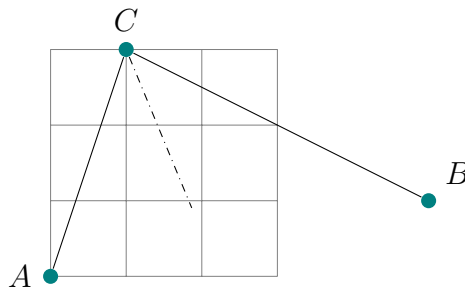
Задан угол ACB двумя сторонами CA и CB . Провести биссектрису этого угла. Решить задачу можно следующей последовательностью действий:

1. найти точку S на прямой CA такую, чтобы $CS = r \text{ cm}$ (например, $r = 2$):
 $S = (\$(C)!2\text{cm}!(A)\$)$;
2. найти точку T на прямой CB такую, чтобы $CT = r \text{ cm}$:
 $T = (\$(C)!2\text{cm}!(B)\$)$;
3. найти точку L — середину отрезка ST ;
4. соединить точку C с L . CL и есть биссектриса $\angle ACB$.



Поскольку необязательно выводить все вспомогательные линии и точки, то код и вывод по нему могут быть, например, такими:

```
\begin{tikzpicture}[
  sty/.style={fill=teal, circle, inner sep=2pt}]
\draw[help lines](0,0) grid (3,3);
\coordinate[sty, label=left:$A$] (A) at (0,0);
\coordinate[sty, label=above right:$B$] (B) at (5,1);
\coordinate[sty, label=above:$C$] (C) at (1,3);
\draw (A)--(C)--(B);
\draw[dashdotted] (C)--(\$(\$(C)!3\text{cm}!(A)\$)!0.5!(\$(C)!3\text{cm}!(B)\$)\$);
\end{tikzpicture}
```



9. Инцентр

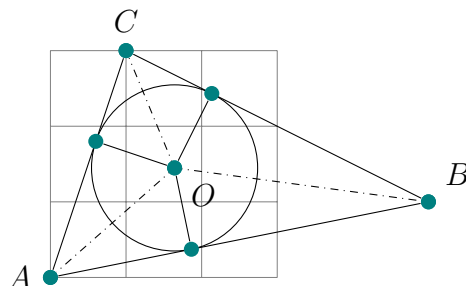
В треугольнике ABC найти центр O вписанной окружности, соединить O с вершинами $\triangle ABC$, опустить из O перпендикуляры на стороны $\triangle ABC$ и вывести вписанную окружность:

Все перечисленные действия можно реализовать по такому коду:

```

\usetikzlibrary{calc, intersections, through}
\begin{tikzpicture}
  \sty/.style={fill=teal, circle, inner sep=2pt}
  \def\r{5}
  \draw[help lines](0,0) grid (3,3);
  \coordinate[sty, label=left:$A$] (A) at (0,0);
  \coordinate[sty, label=above right:$B$] (B) at (5,1);
  \coordinate[sty, label=above:$C$] (C) at (1,3);
  \draw (A)--(C)--(B)--(A);
  \path[name path=h1]
    (C)--($($C$!\r cm!(A)$)!0.5!($C$!\r cm!(B)$)$);
  \path[name path=h2]
    (A)--($($A$!\r cm!(C)$)!0.5!($A$!\r cm!(B)$)$);
  \draw[name intersections={of=h1 and h2, by=O}];
  \node[sty, label=below right:$O$] at (O) {};
  \coordinate (X) at ($($A$)!(O)!(B)$);
  \coordinate (Y) at ($($A$)!(O)!(C)$);
  \coordinate (Z) at ($($B$)!(O)!(C)$);
  \node[draw, circle through={X}] at (O) {};
  \foreach \t in {A,B,C}{\draw[dashdotted] (O)--(\t);}
  \foreach \t in {A,B,C,O,X,Y,Z}{\coordinate[sty] (\t) at (\t);}
  \foreach \t in {X,Y,Z}{\draw (O)--(\t);}
\end{tikzpicture}

```



Получить решение задачи можно построением биссектрис двух углов треугольника. Далее остается лишь найти точку их пересечения. Как проводить биссектрисы углов, описано в предыдущем пункте. Однако необходимо позаботиться о том, чтобы отрезки (тропы), представляющие биссектрисы, пересекались. Для этого мы должны строить их достаточно протяженными. Кратко опишем представленный выше код:

1. `\def\r{5}` — определяет макрос `\r`, равный 5. Именно это значение `\r` (в сантиметрах) мы и откладываем на сторонах угла при построении биссектрис. Величина r должна быть достаточной для того, чтобы тропы, представляющие биссектрисы, пересекались;

2. первыми тремя командами `\coordinate` заданные точки получают имена A , B и C и такие же надписи. И точки, и надписи выводятся;
3. `\draw (A)--(C)--(B)--(A)` — рисуется $\triangle ABC$;
4. следующие две команды `\path` определяют, но не выводят, отрезки для биссектрис $\angle BAC$ и $\angle ACB$ и задают им имена $h1$ и $h2$ соответственно;
5. команда `\draw[name intersections={of=h1 and h2, by=O}]` определяет, но не выводит, точку O пересечения биссектрис;
6. команда `\node[sty, label=below right:$O$] at (O) {}` выводит точку O и ее надпись;
7. следующие три команды `\coordinate` определяют ортогональные проекции X , Y и Z точки O на стороны треугольника;
8. команда `\node[draw, circle through={(X)}] at (O) {}` выводит требуемую вписанную окружность;
9. первой командой `\foreach` точка O соединяется штрих-пунктирными линиями с вершинами треугольника (биссектрисы углов);
10. второй командой `\foreach` точки A , B , C , O , X , Y , Z рисуются в виде небольших кружков темно-зеленого цвета;
11. третьей командой `\foreach` точка O соединяется со своими ортогональными проекциями X , Y , Z на стороны треугольника.

10. Заключение

Из представленного материала вытекает, что средства графического пакета *TikZ*, встроенного в научно-издательскую систему $\text{T}_\text{E}\text{X}/\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$, позволяют достаточно просто писать код для формирования и вывода чертежей геометрических задач планиметрии и с успехом могут быть использованы для создания качественных рисунков при написании соответствующих курсовых работ, дипломных работ, диссертаций, пособий, монографий и книг.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. <http://www.ctan.org/pkg/> - перечень пакетов расширений *LaTeX* хранилища CTAN (Comprehensive *TeX* Archive Network)
2. Tantau T. TikZ and PGF Packages, manual for Version 3.0 / Till Tantau, Dec. 20, 2013. p. 1165, <http://www.ctan.org/pkg/pgf>

REFERENCES

1. <http://www.ctan.org/pkg/> - перечень пакетов расширений *LaTeX* хранилища CTAN (Comprehensive *TeX* Archive Network)
2. Tantau T. TikZ and PGF Packages, manual for Version 3.0 / Till Tantau, Dec. 20, 2013. p. 1165, <http://www.ctan.org/pkg/pgf>

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 24.03.2015

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 539.12.01

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ИНВЕРСИЯ И ВРЕМЕННОЙ ХАОС ВСЕЛЕННОЙ

М. Б. Челноков (г. Москва)

Аннотация

В настоящей работе устанавливается соответствие между пространственной и временной инверсией и переходом от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой в рамках специальной теории относительности. Выясняется, что если происходят два события, то при переходе от одной ИСО к другой возможен как вариант, когда их последовательность во времени одинакова в обеих ИСО, так и вариант, когда их последовательность взаимно противоположна в этих ИСО. В последнем случае мы говорим о временной инверсии. Получены условия, при которых временная инверсия имеет место.

Анализируются результаты, вытекающие из введенных представлений. Основной результат заключается в том, что во Вселенной в целом нет единого направления времени, в ней царит временной хаос. А потому теряют свой смысл такие понятия, как возраст Вселенной и ряд других.

Разумеется, при нерелятивистских скоростях и относительно малых расстояниях мы возвращаемся к обычному представлению об однонаправленном течении времени.

Выкладки и расчеты, приведенные в настоящей работе, основаны на специальной теории относительности, и потому представляются несомненными. Тем не менее, было бы интересно провести эксперимент для проверки временной инверсии. Схема такого эксперимента представляется следующей.

Одна ИСО связывается с Землей, другая ИСО – с двумя спутниками, имеющими одинаковую скорость и находящимися на расстоянии друг от друга. Со спутников посылаются сигналы на Землю – сначала с одного, затем с другого. На Земле эти сигналы принимаются в обратной последовательности. Рассчитаны параметры такого эксперимента и показано, что он реализуем на сегодняшний момент.

В конце работы даны краткие выводы и рассмотрены возможные направления продолжения данной работы. Одним из таких направлений является анализ изменений, которые должны быть внесены в предлагаемые

представления с учетом неинерциальности реальных объектов Вселенной и гравитационных эффектов.

Ключевые слова: инверсия, Вселенная, космология, система отсчета, пространство, время, мир Минковского, события, сигнал, временной хаос.

Библиография: 18 названия.

INVERSION OF SPACE AND TIME AND CHAOS OF TIME ON THE UNIVERSE

M. B. Chelnokov (Moscow)

Abstract

This article establishes the connection between the spatial inversion and the inversion of time and the transition from one inertial reference system (IRS) to another one within the framework of the special theory of relativity. It turns out that if two events occurs that in the case of the transition from one IRS to another two variants are possible. The first one is when their sequence in time is the same in both IRS. The second variant is when their sequence in time is mutually opposite. In the latter case we speak about the inversion of time. The conditions under which the inversion of time takes place have been drawn.

The results arising from the introduced concepts are being analyzed. The idea is that on the whole in the Universe there is no single direction of time, the chaos of time reigns in it. Therefore such notions as the age of the Universe and some others notions lose their sense.

Thus, in non-relativistic velocities and relatively short distances we return to the usual point of view of the unidirectional flow of time.

The calculations and the results introduced in this work are based on the special theory of relativity, and therefore they are considered obvious. Nevertheless, it would be interesting to carry out an experiment to test the inversion of time. The scheme of the experiment is the following.

One IRS is connected with the Earth, the other IRS – with two satellites which have the equal velocities and which located at some distance from each other. Signals are sent from satellite to Earth at first from the first satellite and then from the other one. On Earth, these signals are received in the reverse order. The parameters of such experiment have been calculated and it has been proved that it can be carried out at the present moment.

At the end of the paper brief summery are given and possible ways of continuing of this work are considered. On these ways is the analysis of the changes which must be made in the proposed presentation taking into account non-inertial of the real objects of the Universe and gravitational effects.

Keywords: inversion, Universe, cosmology, reference systems, space, time, Minkowski world, events, signal, chaos of time.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

В предыдущей работе автора [1] рассматривались проблемы зеркальной асимметрии, пространственной инверсии и несохранения P -четности. Настоящая работа является, в определенной мере, продолжением предыдущей и посвящена, в первую очередь, временной инверсии.

Вопросы симметрии пространства-времени и, в частности, вопросы пространственно – временной инверсии и связанные с ними проблемы сохранения или несохранения различных видов четности, уже давно привлекают пристальное и неизменное внимание. Ни в коей мере не претендуя на какую-либо полноту обзора, сошлемся, например, на источники [2–16].

До сих пор считалось, что можно говорить о едином направлении времени во Вселенной в целом – от прошлого к будущему. Да, сегодня хорошо известно, что в рамках специальной теории относительности (СТО) время имеет разную «скорость» в разных инерциальных системах отсчета (ИСО) и даже может «двигаться» в противоположных направлениях, а в рамках общей теории относительности время замедляет свой ход вблизи гравитирующих тел.

Тем не менее, это не мешало рассматривать единый ход времени во Вселенной в целом – так, например, время жизни Вселенной с момента Большого взрыва оценивается в 13 млрд. лет.

В этой работе мы покажем, что если быть до конца последовательным при анализе времени в рамках СТО, то представление о едином направлении времени во Вселенной теряет смысл, так же, как, например, представление об абсолютной одновременности.

Кроме того, выясняется, что известная операция инверсии (как пространственной, так и временной) оказывается при некоторых условиях эквивалентной операции перехода от одной ИСО к другой в рамках СТО.

2. Временная инверсия

Введем следующее разумное, как нам представляется, определение разного направления времени:

Пусть в некоторой ИСО K событие 2 происходит после события 1, а в ИСО K' , наоборот, событие 1 происходит после события 2. Тогда мы говорим, что в этих двух ИСО время течет в противоположных направлениях.

В обеих этих системах время течет от прошлого к будущему, но то, что является будущим для ИСО K , является прошедшим для ИСО K' , а то, что является прошедшим для ИСО K , является будущим для ИСО K' .

Пусть у нас есть два события: событие 1 и событие 2 (или 3). Рассмотрим их с точки зрения ИСО K и ИСО K' (Рис.1). Система отсчета K' движется относительно системы отсчета K вдоль совпадающих осей x и x' вправо со скоростью V , или, что то же, система отсчета K движется относительно системы отсчета K' влево, т.е. со скоростью $-V$.

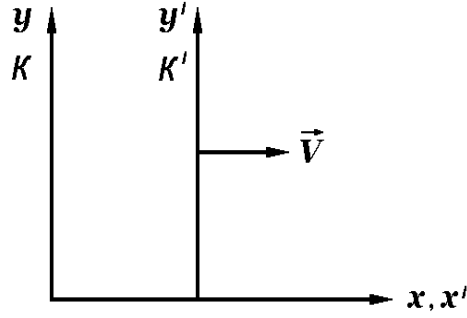


Рис. 1: Две инерциальные системы отсчета в СТО

Как известно [17, 18], в СТО имеют место следующие формулы преобразования промежутков времени.

Переход ИСО $K' \rightarrow$ ИСО K :

$$c\Delta t = c(t_2 - t_1) = \gamma [c(t'_2 - t'_1) + \beta(x'_2 - x'_1)] \quad (1)$$

Переход ИСО $K \rightarrow$ ИСО K' :

$$c\Delta t = c(t'_2 - t'_1) = \gamma [c(t_2 - t_1) + \beta(x_2 - x_1)] \quad (2)$$

Здесь введены обычные обозначения:

c – скорость света;

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Штрихованные величины относятся к ИСО K' , а нештрихованные – к ИСО K .

Начнем рассмотрение с формулы (1). Пусть в ИСО K' событие 2 происходит после события 1, т.е. $t'_2 > t'_1$ или $t'_2 - t'_1 > 0$. Тогда для временной инверсии необходимо, чтобы $t_2 - t_1 < 0$, а потому второе слагаемое в правой части формулы (1) должно быть отрицательным, т.е. $x'_2 - x'_1 < 0$ и, кроме того, должно выполняться неравенство:

$$\beta(x'_1 - x'_2) > c(t'_2 - t'_1) \quad (3)$$

Рассмотрим величину v с размерностью скорости:

$$v = \frac{x'_1 - x'_2}{t'_2 - t'_1} > \frac{c}{\beta} \quad (4)$$

Как видим, эта величина должна быть больше скорости света, что невозможно, а потому временная инверсия возможна только для двух событий, не связанных между собой причинно-следственной связью.

Рассмотрим теперь формулу (2). Пусть в ИСО K событие 2 происходит после события 1, т.е. $t_2 > t_1$. Тогда для временной инверсии необходимо, чтобы $t'_2 - t'_1 < 0$, а потому второе слагаемое в правой части формулы (2) должно быть отрицательным, т.е. $x_2 - x_1 > 0$ и, кроме того, должно выполняться неравенство:

$$\beta(x_1 - x_2) > c(t_2 - t_1) \quad (5)$$

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, величину v с размерностью скорости:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > \frac{c}{\beta} \quad (6)$$

Эта величина опять-таки больше скорости света, а потому временная инверсия возможна только для двух событий, не связанных между собой причинно-следственной связью.

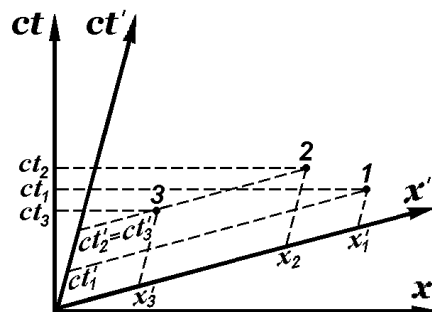


Рис. 2: Картина временной инверсии в мире Минковского. Переход от ИСО K' к ИСО K .

Дадим геометрическую интерпретацию рассмотренного явления с точки зрения мира Минковского. Рассмотрим переход ИСО $K' \rightarrow$ ИСО K (Рис.2). В исходной ИСО K' сначала происходит событие 1, а затем – событие 2 (или 3). Случай, когда неравенство (3) не выполняется, соответствует точке 2. Здесь и в ИСО K , как и в исходной ИСО K' , событие 2 происходит после события 1, т.е. инверсии нет.

Случай, когда неравенство (3) выполняется, соответствует точке 3. Здесь в ИСО K событие 3 происходит, в отличие от ИСО K' , перед событием 1, т.е. имеет место временная инверсия. (Или же, если неравенство (3) превращается в равенство, то событие 3 происходит одновременно с событием 1).

Рассмотрим теперь переход ИСО $K \rightarrow$ ИСО K' (рис.3). В исходной ИСО K сначала происходит событие 1, а затем – событие 2 (или 3). Случай, когда неравенство (5) не выполняется, соответствует точке 2. Здесь в ИСО K' , как и с исходной ИСО K , событие 2 происходит после события 1, т.е. инверсии нет.

Случай, когда неравенство (5) выполняется, соответствует точке 3. Здесь в ИСО K' событие 3 происходит, в отличие от ИСО K , перед событием 1, т.е.

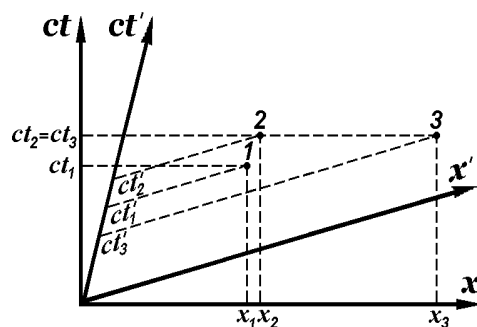


Рис. 3: Картина временной инверсии в мире Минковского. Переход от ИСО K к ИСО K' .

имеет место временная инверсия. (Или же, если неравенство (5) превращается в равенство, то событие 3 происходит одновременно с событием 1).

3. Анализ результатов

Итак, условия, при которых имеет место временная инверсия, или, говоря иначе, взаимно противоположное направление течения времени для двух ИСО, связаны с тремя следующими факторами:

1. Относительной скоростью ИСО.
2. Пространственным расстоянием между двумя точками.
3. Промежутком времени.

Рассмотрим всевозможные пары ИСО, связанные с реальными телами Вселенной. В некоторых из этих пар (и в некоторых парах точек) время течет в одинаковых направлениях, а в некоторых – в противоположных. Таким образом, представление о едином направлении времени во Вселенной теряет свой смысл. Прошлое и будущее относительно. Во Вселенной царит временной хаос. Теряет смысл и вопрос о возрасте Вселенной. Таким образом, можно сказать, что применения в космологии общей теории относительности, в определенном смысле, противоречат специальной теории относительности.

Конечно, здесь возникает естественный вопрос о согласовании введенных представлений со всей совокупностью известных в космологии экспериментальных данных: Большой взрыв и возраст Вселенной, расширение Вселенной, реликтовое излучение, темная материя и темная энергия. Нам кажется, что все эти явления могут быть интерпретированы в рамках новых представлений, однако какие-то акценты при этом могут быть изменены.

Можно провести аналогию. Когда-то в XIX веке многие явления интерпретировались в рамках представлений об эфире. И даже когда появились уравнения

Максвелла, они интерпретировались в тех же представлениях. Но затем эфир закончил свое существование, а все эти явления остались.

Нам кажется, что так же будет и в данном случае: отпадет представление о едином направлении времени во Вселенной, а все наблюдаемые явления будут трактоваться в рамках представления о временном хаосе.

Когда появилась специальная теория относительности Эйнштейна, одним из самых громких и неожиданных её результатов была относительность одновременности. Теперь вступает в свои права и относительность направления времени для двух событий, если они разноместны, не связаны друг с другом причинно-следственной связью и для них выполняется формула (3).

Оценим порядок величин, характеризующих разнонаправленность времени во Вселенной. Будем использовать при этом формулу (3). Характерное расстояние, начиная с которого Вселенная может считаться однородной, и для которого полагалось справедливым динамическое решение Фридмана – это примерно 100 Мпк. Возьмем его в качестве расстояния между точками, в которых происходят два события. Пусть при этом относительная скорость двух систем отсчета (например, двух галактик) равна 0,1 скорости света.

Тогда для осуществления инверсии времени промежуток времени между двумя событиями в одной системе отсчета не должен превышать 30 млн. лет. То есть, если с точки зрения системы отсчета, связанной с одной из галактик, событие 1 происходит раньше события 2 на 30 млн. лет, то с точки зрения системы отсчета, связанной с другой галактикой, событие 1 происходит позже события 2 на 30 млн. лет. Разумеется, ни о какой стреле времени здесь уже не приходится говорить.

Не составляет труда подобрать во Вселенной такие параметры, при которых инверсионная разность времени превысит величину, которая сегодня считается возрастом Вселенной (13 млрд. лет).

Как известно, радиус Вселенной составляет примерно 12000 Мпк. Возьмем в качестве расстояния между точками, в которых происходят два события, 10000 Мпк и относительную скорость систем отсчета, близкую световой. Тогда интересующая нас разность времени равна 30 млрд. лет. Эта цифра явно свидетельствует о том, что понятие возраста Вселенной утрачивает свой смысл.

Подчеркнем, что приведенные здесь расчеты временной инверсии основаны на специальной теории относительности, и потому представляются несомненными. Тем не менее, может представлять интерес постановка эксперимента, подтверждающего временную инверсию. Схема такого эксперимента может быть следующей.

Пусть штрихованная ИСО K' связана с Землей, а нештрихованная ИСО K – с двумя спутниками, которые имеют нулевую скорость относительно друг друга и находятся на некотором расстоянии друг от друга. Часы, находящиеся на этих спутниках, синхронизированы. Со спутников посылаются сигналы – сначала с одного, затем – с другого. На Земле эти сигналы принимаются в обратной последовательности.

Рассчитаем параметры такого эксперимента. Для осуществления временной инверсии второе слагаемое в формуле (2) должно быть отрицательным и большим по модулю, чем первое слагаемое.

Возьмем скорость спутников относительно Земли $V = 10 \text{ км/с} = 10^4 \text{ м/с}$, $\Delta x = x_2 - x_1 = 10^3 \text{ км} = 10^6 \text{ м}$ – это примерно 2,5% от длины экватора Земли.

Тогда по формуле (5):

$$\Delta t = t_2 - t_1 < \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1) \approx 10^{-7} \text{ с} = 100 \text{ нс}.$$

Возьмем $\Delta t = 0,3 \cdot 10^{-7} \text{ с} = 30 \text{ нс}$. Тогда промежуток времени между этими сигналами, регистрируемыми на Земле, находится по формуле (2) и его численное значение есть $\Delta t = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ с} = 80 \text{ нс}$. При этих параметрах эксперимент на сегодня представляется реализуемым.

4. Пространственная инверсия

Рассмотрим теперь вопрос о пространственной инверсии в рамках представления о переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Как известно, в СТО имеют место следующие формулы преобразования разности координат.

Переход ИСО $K' \rightarrow$ ИСО K :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + V(t'_2 - t'_1)] \quad (7)$$

Переход ИСО $K \rightarrow$ ИСО K' :

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1)] \quad (8)$$

Начнем анализ с перехода ИСО $K' \rightarrow$ ИСО K . Пусть в ИСО K' событие 1 происходит в момент времени t'_1 в точке x'_1 , а событие 2 (или 3) – соответственно в момент времени t'_2 в точке x'_2 (или t'_3 в точке x'_3). Тогда из формулы (7) следует, что условие пространственной инверсии имеет вид:

$$t'_2 < t'_1; V(t'_1 - t'_2) > x'_2 - x'_1 \quad (9)$$

Эта картина с точки зрения мира Минковского изображена на Рис. 4. В точке 2 инверсии нет, а в точке 3 – есть.

Рассмотрим теперь переход ИСО $K \rightarrow$ ИСО K' . Условие пространственной инверсии, как следует из формулы (8), имеет вид:

$$t_2 > t_1; V(t_2 - t_1) > x_2 - x_1 \quad (10)$$

Как и прежде, начальная точка – точка 1, а конечная – точка 2 (или 3). Это условие с точки зрения мира Минковского изображено на рис. 5. В точке 2 пространственной инверсии нет, а в точке 3 – есть.

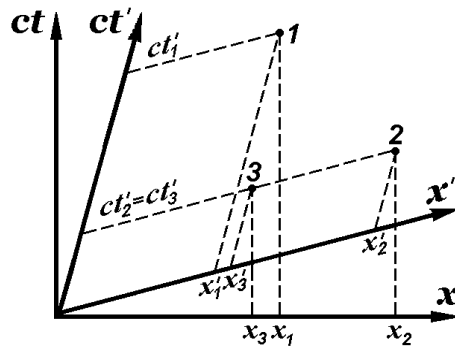


Рис. 4: Картина пространственной инверсии в мире Минковского. Переход от ИСО K' к ИСО K .

5. Заключение

Итак, основные выводы настоящей работы следующие:

1. Временная и пространственная инверсия (зеркальное отражение) в определенной мере эквивалентны переходу от одной ИСО к другой. Таким образом, можно до некоторой степени моделировать и временную инверсию и зеркальное преобразование.
2. Во Вселенной в целом отсутствует единое направление времени. Назовем это временным хаосом Вселенной.

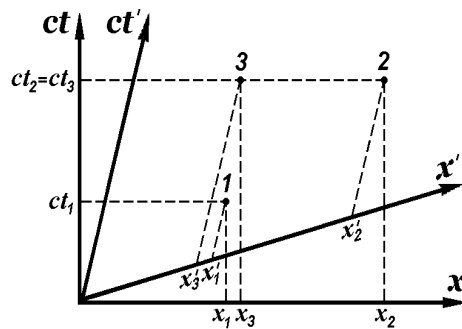


Рис. 5: Картина пространственной инверсии в мире Минковского. Переход от ИСО K к ИСО K' .

Дальнейшее развитие данной работы нам видится в следующих направлениях:

1. Экспериментальный поиск несохранения четности в процессах, обусловленных сильным и электромагнитным взаимодействием.

2. Разработка методов описания свойств и поведения большой системы (Вселенной), в которой время не динамично, а хаотично. И статические, и динамические представления здесь не работают, они должны быть заменены чем-то другим.
3. Согласование введенных здесь представлений со всей совокупностью известных в космологии экспериментальных данных.
4. Анализ изменений, которые должны быть внесены в предлагаемую картину, с учетом неинерциальности реальных объектов Вселенной и гравитационных эффектов.
5. Анализ инверсионных эффектов с точки зрения трех и более ИСО. Не исключено, что здесь может появиться многомерное время.
6. Анализ реальной схемы возможного эксперимента (и его постановка), подтверждающего введенные здесь представления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челноков М. Б. Несимметричное зазеркалье // Чебышевский сборник. 2015, Т. 16, вып. 1, С. 281–290.
2. Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., Терентьев М. В. Замечания о Т-нечетных мультиполях // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 466–469.
3. Хриплович И. Б. Несохранение четности в атомных явлениях. М.: Наука. 1988. 288 с.
4. Коркин Р. В. Эффекты несохранения четности в реакции фоторасщепления поляризованных дейтронов // Ядерная физика. 2004. Т. 67, № 8. С. 1–6.
5. Liu C. P., Hyun C. S., Desplanques B. Parity nonconservation in the photodisintegration of the deuteron at low energy // Phys. Rev.. 2003. Vol. 68. P. 045501–045512.
6. Fujiwara M., Titov A. I. Parity violation in deuteron photo-disintegration // Phys. Rev.. 2004. Vol. 69. P. 065503–065524.
7. Khriplovich I. B., Korokin R. V. P-Odd asymmetry in the deuteron disintegration by circularly polarized photons // Nucl. Phys.. 2001. Vol. 690. P. 610–619.
8. Минковский Г. Пространство и время. Принцип относительности // Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат. 1973. С. 167–180.

9. Пенроуз Р. Сингулярности и асимметрия по времени // Общая теория относительности, М.: Мир. 1983. С. 233–295.
10. Рейхенбах Г. Направление времени. Пер. с англ. — М.: ИЛ. 1962. 396 с.
11. Gibson W. M., Pollard B. R. Symmetry Principles in Elementary Particle Physics. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1976. 344 p.
12. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука. 1980. 320 с.
13. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука. 1984. 600 с.
14. Лобашев В. М. Эксперименты по обнаружению несохранения четности в ядерных силах // Вестник РАН. 1969. № 2, С. 58–64.
15. Челноков М. Б. О спине фундаментальных частиц // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2010. № 3 (38), С. 22–34.
16. Челноков М. Б. О проекции спина фундаментальных частиц и проблеме несохранения СР-четности // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2010. 4 (39). С. 73–85.
17. Угаров В. А. Специальная теория относительности. М.: Наука. 1977. 384 с.
18. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ. 1955. 504 с.

REFERENCES

1. Chelnokov, M. B. 2015, "Asymmetry Through the Looking Glass", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 281–290.
2. Kobzarev, I. Y., Okun, L. B. & Terentiev M. V. 1965, "Remarks about T-odd multipole". *Letters in JETP*, vol. 2, pp. 466–469.
3. Hriplovich, I. B. 1988, *Nesohranenie chetnosti v atomnih yavleniyah* [Parity nonconservation in atomic phenomena], Nauka, Moscow, 288 p.
4. Korkin, R. V. 2004, "The effects of parity nonconservation in the reaction photodisintegration polarized deuterons", *Nuclear Physics*, vol. 67, no. 8, pp. 1–6.
5. Liu, C. P., Hyun, C. S. & Desplanques, B. 2003, "Parity nonconservation in the photodisintegration of the deuteron at low energy". *Phys.Rev.*, vol. 68, pp. 045501–045512.

6. Fujiwara, M. & Titov, A. I. 2004, "Parity nonconservation in deuteron photo-disintegration", *Phys.Rev.*, vol. 69, pp. 065503–065524.
7. Khriplovich, I. B. & Korkin, R. V. 2001, "P-Odd asymmetry in the deuteron disintegration by circularly polarized photons", *Nuclear Physics*, vol. 690, pp. 610–619.
8. Minkovsky, G. 1973, *Prostranstvo i Vremya. Princip otnositelnosti [Space and time. The principle of relativity]: Sat.works special theory of relativity*, Atomizdat, Moscow, pp.167-180.
9. Penrouz R. 1983, *Singulyarnosti i Assimetriya po vremeni // Obshaya teoriya otnositelnosti [Singularity and the asymmetry of time // General Theory of Relativity]*, MIR, Moscow, pp. 233- 295.
10. Reyhenbah, G. 1962, *Napravlenie vremeni [The direction of time]*, Foreign Literature, Moscow, 396 p.
11. Gibson, W. M. & Pollard, B. R. 1976, "Symmetry Principles in Elementary Particle Physics", *Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne*, 344 p.
12. Bogolyubov, N. N. & Shirkov, D. V. 1980, "Kvantovie polya." , [*Quantum Fields*], Nauka, Moskva, 320 p.
13. Bogolyubov, N. N. & Shirkov, D. V. 1984, "Vvedenie v teoriyu kvantovih poley." , [*Introduction in Theory of Quantum Fields*], Nauka, Moskva, 600 p.
14. Lobashov, V. M. 1969, "Experiments to detect parity violation in nuclear forces". *Vestnik RAN*, no. 2, pp. 58–64.
15. Chelnokov, M. B. 2010, "On Spin of Fundamental Particles", *Vestnik MGTU. Estestvennye Nauki*, no. 3 (38), pp. 22–34.
16. Chelnokov, M. B. 2010, "About a spin projection of fundamental particles and about a problem nonconservation CP-parity", *Vestnik MGTU. Estestvennye Nauki*, no. 4 (39), pp. 73–85.
17. Ugarov, V. A. 1977, "Specialnaya Teoriya Otnositelnosti" [Special Relativity Theory], Nauka, Moscow, 384 p.
18. Fok, V. A. 1955, "Teoriya Prostranstva, Vremeni i Tyagoteniya" [Theory of space, time and gravitation], GITTL, Moscow, 504 p.

Московский Государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Получено 24.05.2015

60 ЛЕТ МИХАИЛУ ВЛАДИМИРОВИЧУ ЗАЙЦЕВУ



Редакционная коллегия поздравляет профессора кафедры высшей алгебры Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук Михаила Владимировича Зайцева с шестидесятилетием.

Михаил Владимирович родился в Подмоскowie и его незаурядные математические способности проявились с ранних школьных лет. После восьмого класса он был принят в школу-интернат № 18 при МГУ имени М. В. Ломоносова (в настоящее время СУНЦ), который Михаил Владимирович окончил в 1972 году. Его дальнейшее становление как профессионала также связано с Московским государственным университетом. Он выпускник механико-математического факультета и аспирантуры Отделения математики МГУ.

Куратором группы первокурсников, в которой учился М. В. Зайцев, был Ю. А. Бахтурин, в то время молодой сотрудник кафедры высшей алгебры. Может быть этот факт и повлиял в конце второго курса при выборе научного руководителя. Так, с третьего курса Михаил Владимирович увлекся основным делом своей жизни — научно-исследовательской работой в области линейных алгебр и их тождественных соотношений. В настоящее время его научные интересы разнообразны, а результаты научно-исследовательской работы впечатляющие. Решены важные задачи в классах ассоциативных алгебр с градуировками и без, алгебр и супералгебр Ли, альтернативных и йордановых алгебр, а также в неклассическом случае линейных алгебр над полем. Им опубликовано более

сотни статей практически во всех престижных журналах алгебраического профиля как российских, так и зарубежных.



В 2000-е годы он занимал посты заведующего кафедрой и декана в Московском государственном университете коммерции. В настоящее время Михаил Владимирович работает профессором кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова. В своей педагогической деятельности имеет высокий авторитет как среди своих коллег и руководства, так и среди студентов и аспирантов механико-математического факультета. Он является членом двух диссертационных советов. Им подготовлено около десяти кандидатов физико-математических наук.



Желаем своему коллеге крепкого здоровья, творческих успехов, талантливых учеников, счастья и удачи!

Дорогой Сергей Петрович!

Коллектив кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского университета сердечно поздравляет Вас с замечательным юбилеем — шестидесятилетием со дня рождения.

Вся Ваша жизнь связана с мехматом МГУ, где Вы учились как студент, аспирант и докторант, и всегда поддерживали связь с нашей кафедрой.. Ваша научная деятельность получила заслуженное признание как в нашей стране, так и за рубежом. Вы являетесь основоположником целого ряда новых перспективных направлений современной алгебры. Вы также являетесь ярким и талантливым педагогом. Ваши многочисленные ученики, среди которых есть и кандидаты и доктора наук, занимают лидирующие позиции в теории алгебр с тождественными соотношениями.

За долгие годы работы в системе высшего образования Вы проявили себя и как талантливый администратор не только на посту заведующего кафедрой, но и на посту декана, особое внимание уделяя интересам и нуждам подчиненных и коллег.

Желаем Вам, дорогой Сергей Петрович, крепкого здоровья, семейного счастья, новых творческих успехов, энергии и вдохновения!

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Том 16 Выпуск 2

Абросимова Альбина Андреевна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа, Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

e-mail: albina.abrosimowa@yandex.ru

Батхин Александр Борисович — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

e-mail: batkhin@gmail.com

Брюно Александр Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

e-mail: abruno@keldysh.ru

Бунькова Елена Юрьевна — кандидат физико-математических наук, математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: elenanetay@gmail.com, bunkova@mi.ras.ru

Бухштаб Виктор Матвеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, доцент, профессор Московского педагогического государственного университета.

e-mail: elena.deza@gmail.com

Деза Мишель — доктор физико-математических наук, профессор, директор научных исследований в Национальном Центре научных исследований Франции.

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

Дютур Сикирич Матье — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института Босковича, Загреб, Хорватия.

e-mail: Mathieu.Dutour@gmail.com

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Журавлев Владимир Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, Владимирский государственный университет им. братьев Столетовых.

e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Зеленова Мария Евгеньевна — аспирант кафедры теории чисел Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mezelenova@gmail.com

Крот А. В. — аспирант кафедры теории чисел Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail:

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Куриленко Сергей Михайлович — лаборант-исследователь НИЛ "Функционального и комплексного анализа", Брянский государственный университет.

e-mail: SergKurilenko@gmail.com

Малышев Фёдор Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Матвеев Владимир Алексеевич — аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: vladimir.matweev@gmail.com

Пестова Юлия Рямильевна — аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет.

e-mail: fyathut28@rambler.ru

Райгородский Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mraigor@yandex.ru

Ромакина Людмила Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: romakinaln@mail.ru

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт).

e-mail: geometry@mail.ru

Челноков Михаил Борисович — кандидат технических наук, доцент кафедры "Физика" МГТУ им. Н. Э. Баумана.

e-mail: l-chelnok@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: chubarik2009@live.ru

Шамоян Роми Файзоевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЛ "Функционального и комплексного анализа", Брянский государственный университет.

e-mail: rshamoyan@gmail.com

Штогрин Михаил Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: stogrin@mi.ras.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Volume 16 Issue 2

Abrosimova Albina Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer of the chair of mathematical analysis, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs.

e-mail: albina.abrosimowa@yandex.ru

Batkhin Alexander Borisovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.

e-mail: batkhin@gmail.com

Bruno Alexander Dmitrievich — doctor of physico-mathematical Sciences, professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.

e-mail: abruno@keldysh.ru

Bunkova Elena Yurievna — candidate of physical and mathematical sciences, V. A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: elenanetay@gmail.com, bunkova@mi.ras.ru

Buchstaber Viktor Matveevich — doctor of physico-mathematical Sciences, professor, correspondent member of RAS, V. A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical Science, associate Professor, Professor the Moscow pedagogical state University.

e-mail: elena.deza@gmail.com

Deza Michel (France) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of scientific research in the French National Centre for Scientific Research.

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

Dutour Sikirić Mathieu — candidate of physical and mathematical sciences (PhD in Mathematics), leading researcher of Boscovic Institute, Zagreb, Croatia.

e-mail: Mathieu.Dutour@gmail.com

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zhuravlev Vladimir Georgievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs.

e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Zelenova Maria Evgenievna — PhD student, chair of theory of numbers, the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mezelenova@gmail.com

Krot A. V. — PhD student, chair of theory of numbers, the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail:

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Kurilenko Sergey Michailovich — Laboratory Assistant-Researcher, Laboratory of functional and complex analysis, Bryansk State University.

e-mail: SergKurilenko@gmail.com

Malyshev Fedor Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher, V. A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Matveev Vladimir Alekseevich — PhD student, Department of computer algebra and number theory, the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: vladimir.matweev@gmail.com

Pestova Yuliya Ryamilevna — PhD student, Department of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk state university.

e-mail: fyathut28@rambler.ru

Raigorodskii Andrew Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mraigor@yandex.ru

Romakina Ludmila Nikolaevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: romakinaln@mail.ru

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, South Russia State Polytechnic University (Novocherkassk Polytechnic Institute) the M. I. Platov.

e-mail: geometry@mail.ru

Chelnokov Mikhail Borisovich — candidate of Technical Sciences, associate professor of "Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University.

e-mail: l-chelnok@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2009@live.ru

Shamoyan Romi Faizoevich — candidate of physico-mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of functional and complex analysis, Bryansk State University.

e-mail: rshamoyan@gmail.com

Stogrin Mikhail Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher, V. A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: stogrin@mi.ras.ru

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 16 Выпуск 2

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Пихтильков Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Оренбургского государственного университета.
e-mail: pikhtilkov@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики

Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Голод Евгений Соломонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, декан механико-математического факультета Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Шмелькин Альфред Львович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: dmitri.shmelkin@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Деза Мишель (Франция) — доктор физико-математических наук, профессор, директор научных исследований в Национальном Центре научных исследований Франции.

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН.
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

THE EDITORIAL BOARD

Volume 16, Issue 2

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Pihtilkov Sergey Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Orenburg State University.

e-mail: pikhtilkov@mail.ru

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Golod Evgeny Solomonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniylar.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. V. A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics, dean of the mechanics and mathematics faculty of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maksim Aleksandrovich — doctor of physico-mathematical Sciences, senior researcher at the Mathematical Institute. V. A. Steklov mathematical Institute RAS

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of the algebro-geometric computations of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yuriy Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Fomin Alexander Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of algebra chair of the Moscow Pedagogical State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Shmelkin Alfred Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M.V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: dmitri.shmelkin@gmail.com

Bernik Vasiliy Ivanovich (Belarus) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of The Institute of Mathematics of NAS of Belarus.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Deza Michel (France) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of scientific research in the French National Centre for Scientific Research.

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

- 1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в аннотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

- 1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

- 1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.

- 1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.
- 1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

- 2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе $\text{LaTeX}_2\epsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.
- 2.2. При подготовке статьи в $\text{LaTeX}_2\epsilon$ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице <http://cheb.tsput.ru>
- 2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края страницы. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.
- 2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера A4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.
- 2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.
- 2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом (см. раздел 4 данных правил).

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.
2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1. С. 41—53.
3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325—339.
5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12—13.
6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов, поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.
- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard

Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.
- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).
- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.

- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.
- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках", начиная с первого слова.
- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.
- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.
- Название статьи переводят на английский язык.
- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.
- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.
- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.
- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.
- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:
part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;
Abstract of the dissertation;
International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);
Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013;
monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;
Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;
First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;
Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;
International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.;
Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе", *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной*, том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks", *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil", *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange", *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at:

www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining", *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930.

doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор АА Год, "Заглавие", Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J. 2002, "Managing small teams", Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia", Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing", *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazotdachi"*

(*Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"*), Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style", 2011, Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).

5. Шаблон структуры статьи

Задание колонтитулов

```
\levkolonttl{ И. О. ФАМИЛИЯ}

\prvkolonttl{НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }

\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
```

Заголовок на русском

```
УДК ?????
\begin{center}
{\Large\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }\footnote
{Работа выполнена по гранту РФФИ
.....}

\medskip
{\large
И. О. Фамилия (г. ????????) }
\end{center}
```

Аннотация на русском

```
\begin{abstract}
В данной работе .....

\medskip
{\it Ключевые слова:} .

\medskip
{\it Библиография:} ?? названий.
\end{abstract}
```

Заголовок на английском

```
\begin{center}
{\Large\bf ?????????}

\medskip
{\large
I. O. Family (???????????) }
\end{center}
```

Аннотация на английском

```
\begin{engabstract}
In~this paper .....

\medskip
{\it Keywords:} .....

\medskip
{\it Bibliography:} ?? titles.
\end{engabstract}
```

Текст статьи на русском или английском

```
\section{Введение}
\section{}
.....
\section{Заключение}
\begin{thebibliography}{19}
\bibitem{Gru1} Оформляется по ГОСТу.
\end{thebibliography}
\begin{engbibliography}{19}
\bibitem{eGru1} Оформляется по Гарвардскому стандарту.
\end{engbibliography}
\noindent Организация.

\noindent Поступило 30.04.2015
```

6. Пример оформления статьи

```
\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}
\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}
\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
%
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
```

```

{\large O.~A.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
%
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Ключевые слова}: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули
полиномов Дирихле.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Библиография:} 21 название.
\end{abstract}
%
\begin{center}
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
IN THE CRITICAL STRIP}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}
%

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Keywords}: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions,
zeros of Dirichlet polynomials.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Bibliography:} 21 titles.
\end{engabstract}
%
\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена

```

вычислительная схема построения полиномов Дирихле $Q_n(s)$, $s = \sigma + it$, которые в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ аппроксимируют целые функции, заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны, известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.

%

\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле}

Рассмотрим L-функцию Дирихле

\begin{equation}

$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, $\text{quad } s = \sigma + it$,

\end{equation}

и соответствующий степенной ряд

\begin{equation}\label{powerseries}

$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) t^n$.

\end{equation}

.....

Для оценки величины $\text{eqref{Meq10}}$ сверху необходимо применить численную схему, которая связана с вычислением полиномов $Q_n(s)$.

.....

\section{Заключение}

В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

.....

Оформление списка цитированной литературы по ГОСТу

\begin{thebibliography}{99}

\bibitem{KorotkovMatveeva} А. Е. Коротков, О. А. Матвеева \, Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. --- Белгород: Изд-во НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47--53.

.....

\bibitem{Prahar}

Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар. --- М.: Мир, 1967. --- 513 с.

.....
`\end{thebibliography}`

Оформление раздела REFERENCES по Гарвардскому стандарту

```
\begin{engbibliography}{99}
\bibitem{eKorotkovMatveeva} Korotkov, A. E. \& Matveeva, O. A.
2011, "On a numerical algorithm for determining zeros of
entire functions defined by series Dirichlet series with
periodic coefficients"\,, {\it Scientific statements
Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics.
--- Belgorod Univ. NIU "Belgu"\,, issue 24, № 17(112),
pp. 47--53.
.....
\bibitem{ePrahar}
Prahar, K. 1967, "{\cyr Raspredelenie prostykh chisel.}"\,,
(Russian) [Distribution of prime numbers]
Translated from the German by A. A. Karacuba.
Edited by A. I. Vinogradov.
With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov,
and N. M. Korobov {\it Izdat. 'Mir'', Moscow} 511 pp.
\end{engbibliography}
%
\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.
% пустая строка здесь обязательна
\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции: г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комната 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tspu.tula.ru, pikhtilkov@mail.ru

TABLE OF CONTENTS

Volume 16 Issue 2

СОДЕРЖАНИЕ	4
A. A. Abrosimova BR-sets	8
A. B. Batkhin Structure of discriminant set of real polynomial.....	23
A. D. Bruno Universal generalization of the continued fraction algorithm	35
V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova The universal formal group that defines the elliptic function of level 3	66
M. Deza, E. I. Deza, M. Dutour Sikirić Polyhedral structure associated with quasi- metrics	79
V. G. Zuravlev Multi-colour bounded remainder sets	93
M. E. Zelenova Solution of polynomial equations in arbitrary orders	117
A. V. Krot, A. M. Raigorodskii On embedding random graphs into distance graphs and graphs of diameters in Euclidean spaces	133
V. N. Kuznetsov, V. A. Matveev On a problem of finding non-trivial zeros of Dirichlet L -functions in number fields	144
F. M. Malyshev Bases of recurrent sequences	155
Yu. R. Pestova On new properties of some varieties with almost polynomial growth	186
L. N. Romakina Classification of tetrahedrons with not hyperbolic sides in a hyperbolic space of positive curvature	208
V. I. Subbotin О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников 222	
V. N. Chubarikov The arithmetic sum and Gaussian multiplication theorem..	231
R. Shamoyan, S. Kurilenko Traces and distances in analytic function spaces in C^n and Martinelly – Bochner integrals	254
M. I. Shtogrin On rational directions in the flat lattice	273

COMPUTING & INFORMATION TECHNOLOGY IN MATHEMATICS

N. M. Dobrovolsky, A. R. Esayan The creation of the geometrical drawings in TikZ	282

MATHEMATICAL MIXTURE

M. B. Chelnokov Inversion of space and time and chaos of time on the universe	296

CONGRATULATIONS TO THE JUBILEE

60 years Mikhail Vladimirovich Zaitsev	308

60 years Sergey Petrovich Mishchenko	310

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	311

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	314

РЕДКОЛЛЕГИЯ	317

THE EDITORIAL BOARD	321

MANUSCRIPT FORMATTING GUIDELINES	325