УДК 511

**В. Г. Журавлев**

# Многоцветные динамические разбиения торов на множества ограниченного остатка

С помощью разбиений многомерных торов строятся множества ограниченного остатка, представляющие собою конечные объединения выпуклых многогранников. Для отклонений распределения точек орбит относительно сдвигов тора по указанным множествам доказывается многомерный вариант теоремы Гекке о распределении дробных долей на окружности.

Библиография: 14 наименований.

**Ключевые слова:** многомерная теорема Гекке, множества ограниченного остатка, многогранники.

DOI: 10.4213/im8003

## § 1. Введение

Э. Гекке в 1921 г. [1] доказал следующую теорему: для отклонений

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|,$$

где $r(i, X^1)$ – количество точек орбиты длины $i$ относительно вращения $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod 1$ окружности единичной длины на угол $\alpha$, попавших в отрезок $X^1$, выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leqslant h \tag{1.1}$$

при условии, что отрезок $X^1$ имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$.

И. Орен [2] перенес результат Гекке на случай, когда $X^1$ является конечным объединением интервалов $X^1$, и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{1.2}$$

Отметим, что интервалы из множества $X^1$ каждый в отдельности могут и не обладать свойством (1.2).

В общем случае, если $X^d$ принадлежит $d$-мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие (1.2), то $X^d$ называется *множеством ограниченного остатка* или, кратко, BR-*множеством.*

П. Сюс [3] построил первое семейство параллелограммов $X^2 \subset \mathbb{T}^2$, для которых выполняется оценка (1.2). Анализ конструкции Сюса позволил П. Лиарде [4] найти редукцию BR-множеств $X^d$ к аналогичным множествам $X^{d-1}$ меньшей размерности. Это был важный шаг, так как он позволил строить BR-

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00433).

множества $X^d$ для произвольной размерности $d$. Так, например, параллелограммы Сюса $X^2$ получаются подъемом отрезков Гекке $X^1$ из (1.1).

Другой подход к построению множеств $X^d$ нашли Ж. Рози [5] и С. Ференци [6]. Они связали свойство $X^d$ быть BR-множеством со свойствами соответствующего индуцированного отображения $S' = S_\alpha | X^d$ – отображения первого возвращения в $X^d$, или отображения Пуанкаре. Идея Рози–Ференци реализована в [7], где доказано общее неравенство

$$|\delta(i, X^2)| < 2 \tag{1.3}$$

для всех множеств $X^2 \subset \mathbb{T}^2$ из бесконечной последовательности самоподобных фрактальных областей Рози $\mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_n \supset \cdots$ с радиусом $\varrho(\mathcal{R}_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Глобальный подход к поиску BR-множеств предложен в [8], где впервые вместо отдельных множеств $X_k^d \subset \mathbb{T}^d$ были рассмотрены полные разбиения торов $\mathbb{T}^d_{\mathbf{c},\lambda} = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \cdots \sqcup X_s^d$ с некоторыми параметрами $\mathbf{c}$, $\lambda$. Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^d \arrow[r, "S_v"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^d \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^d \arrow[r, "S_\alpha"] & \mathbb{T}^d \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

при котором повороту тора $S_\alpha$ отвечает перекладывание $S_v$ некоторых множеств $X_0', X_1', \ldots, X_s'$ из $\mathbb{R}^d$. Если окажется, что число $s+1$ таких множеств $X_k'$ не превосходит $d+1$, то каждый из образов $X_k^d = \pi(X_k')$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR-множеством, а соответствующее объединение $T^d_{\mathbf{c},\lambda} = X_0' \sqcup X_1' \sqcup \cdots \sqcup X_s'$ из $\mathbb{R}^d$ будет торической разверткой для $\mathbb{T}^d$, т. е. фундаментальной областью в пространстве $\mathbb{R}^d$ относительно трансляций кубической решеткой $\mathbb{Z}^d$. Такие развертки $T^d$ были сконструированы в [9] с помощью перекладывающихся параллелоэдров – многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому $d$-мерного единичного куба $C^d$ и отрезков.

В [10] по схеме (1.4) были построены простейшие многомерные BR-множества $X^d = P^d$, являющиеся $d$-мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин $\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2$. Для размерностей $d = 1$ и $d = 2$ это будут множества, содержащие соответственно отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ – параллелоэдры Вороного [11], к которым относится, например, ромбический додекаэдр Федорова [12]. Для указанных BR-многогранников $X^d = P^d$ в работе [10] доказано следующее неравенство (см. также теорему 4.2 настоящей статьи):

$$|\delta(i, X^d)| \leqslant dh, \tag{1.5}$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1.1). Здесь отклонения $\delta(i, X^d)$ рассматриваются для сдвига тора $S_\beta$ на вектор $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$, где $h$ – любое натуральное число и $l$ – произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Цель настоящей работы – получить более сложные BR-множества $X^d$. Для этого применяются *многоцветные разбиения* тора $\mathbb{T}^d_{A,\mathbf{c},\lambda} = X^d_0 \sqcup X^d_1 \sqcup \dots \sqcup X^d_D$ с числом областей $D+1 > d+1$, получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений $\mathbb{T}^D_{A,\mathbf{c},\lambda} = X^D_0 \sqcup X^D_1 \sqcup \dots \sqcup X^D_D$ тора $\mathbb{T}^D$. При таком подходе возникают BR-множества $X^d$, представляющие собою конечные объединения $d$-мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого $D$-мерного многогранника из разбиения $\mathbb{T}^D_{A,\mathbf{c},\lambda}$, т. е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелоэдра $P^D$. В теореме 5.1 доказывается, что отклонения $\delta(i, X^d)$ для таких BR-множеств $X^d$ снова удовлетворяют неравенству (1.5).

В качестве примера приведем разбиения для случая размерностей $d = 2$ и $D = 3$.

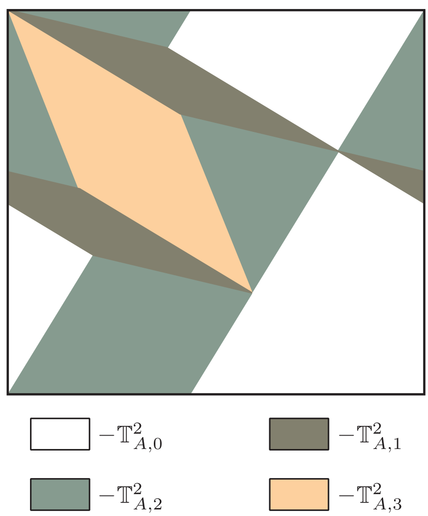


Рис. 1. Многоцветное разбиение тора $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}$

На рис. 1 изображено двумерное многоцветное разбиение $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda} = X^2_0 \sqcup X^2_1 \sqcup X^2_2 \sqcup X^2_3$, получающееся как сечение плоскостью перекладывающегося разбиения $\mathbb{T}^3_{A,\mathbf{c},\lambda} = X^3_0 \sqcup X^3_1 \sqcup X^3_2 \sqcup X^3_3$ трехмерного тора $\mathbb{T}^3$. В разбиении $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}$ каждое BR-множество $X^2 = \mathbb{T}^2_{A,k}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ покрашено в отдельный цвет и является объединением параллелограммов и треугольников.

Если же произвести сдвиг $S_t$ плоскости сечения, то получается другое разбиение $\mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$, изображенное на рис. 2. Теперь среди BR-множеств $X^2 = \mathbb{T}^2_{A_t,k}$ есть еще и пятиугольник. Отметим, что при всех сдвигах плоскости сечения площади множеств $X^2 = \mathbb{T}^2_{A_t,k}$ сохраняются.

Кроме упомянутых разбиений $\mathbb{T}^d_{A,\mathbf{c},\lambda}$ в работе строятся еще динамические разбиения $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ тора $\mathbb{T}^d$. На их основе получается новый тип ранее не рассматривавшихся *динамических множеств ограниченного остатка*, или DBR-*множеств*, $X^d$: это упорядоченные последовательности множеств, которые по

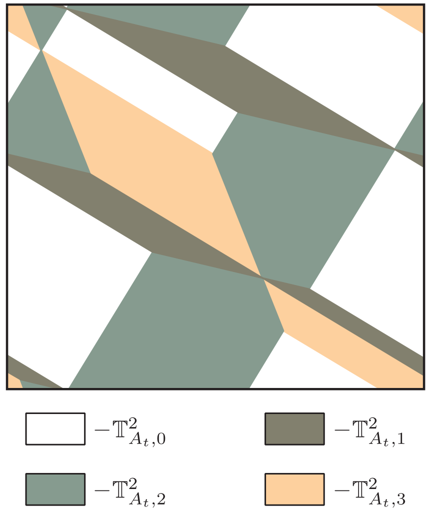


Рис. 2. Разбиение тора $\mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$, получающееся сдвигом плоскости сечения

отдельности могут и не являться BR-множествами (см. рис. 3 в § 10). Для них в теореме 8.1 также доказывается неравенство (1.5).

## § 2. Торические развертки

**2.1. Перекладывающиеся торические развертки.** Пусть дан $D$-мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L, \tag{2.1}$$

где $L$ – невырожденная решетка из векторного пространства $\mathbb{R}^D$, т. е. решетка $L$ имеет размерность $D$ над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod L. \tag{2.2}$$

*Разверткой* тора $\mathbb{T}^D$ назовем подмножество $T^D$ из $\mathbb{R}^D$ такое, что ограничение на него факторотображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mod L} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto x \mod L$$

задает биекцию

$$T^D \xrightarrow[\sim]{\mod L} \mathbb{T}^D. \tag{2.3}$$

Пусть дана торическая развертка $T^D$, удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_D \tag{2.4}$$

развертки $T^D$, что если с помощью биекции (2.3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой $T^D$, то индуцированное отображение $T^D \xrightarrow{S_v} T^D$ для сдвига тора (2.2) будет эквивалентно перекладыванию областей $T_0, T_1, \dots, T_D$ развертки $T^D$:

$$S_v(x) = x + v(x), \tag{2.5}$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T^D$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если} \quad x \in T_k, \tag{2.6}$$

при этом $v_0, v_1, \dots, v_D$ – некоторая фиксированная система векторов. Развертка $T^D$, удовлетворяющая условиям (2.3)–(2.6), называется *перекладывающейся*.

Заметим, что в силу биекции (2.3) разбиению (2.4) развертки $T^D$ отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D \tag{2.7}$$

тора $\mathbb{T}^D$ на соответствующие области $\mathbb{T}_k \equiv T_k \mod L$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в *обычном* (*строгом*) смысле – когда рассматриваются покрытия множеств $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots$ с условием $X_k \cap X_{k'} = \varnothing$ для $k \neq k'$, а также в *расширенном* смысле $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$, предполагая в данном случае, что различные множества $X_k$ не имеют общих внутренних точек.

**2.2. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига.** Из определений (2.2), (2.5) и (2.6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \mod L \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D, \tag{2.8}$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, D \tag{2.9}$$

принадлежат основной решетке периодов $L$ тора (2.1). Везде в дальнейшем будем предполагать, что $L$ является невырожденной решеткой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D], \tag{2.10}$$

порождаемой векторами (2.9) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т. е. что

$$\text{векторы } l_1, \dots, l_D \text{ имеют ранг } D \text{ над } \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

При этом условии вектор сдвига $\alpha$ можно разложить по данному базису:

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_D l_D. \tag{2.12}$$

Пусть $\alpha$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^D$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ в базисе (2.9). Определим его *ранг относительно решетки* $L$ равенством

$$\operatorname{rank}_L(\alpha) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \tag{2.13}$$

где $M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$ обозначает *модуль* над кольцом $\mathbb{Z}$, порождаемый числами $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$, и $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D]$ – размерность этого модуля над $\mathbb{Z}$. Если $\alpha' \subset \mathbb{R}^D$ – другой вектор, удовлетворяющий условию $\alpha' \equiv \alpha \mod L$, то из определения (2.13) вытекает равенство

$$\operatorname{rank}_L(\alpha') = \operatorname{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг $\operatorname{rank}_L(\alpha)$ корректно определен для векторов $\alpha$ на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. Из определения (2.13) также следуют неравенства

$$0 \leqslant \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leqslant D.$$

Назовем вектор $\alpha$ *иррациональным*, если $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*; это равносильно тому, что вектор $\alpha$ имеет рациональные координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ в базисе (2.9).

Для вектора $\alpha$ отвечающие ему сдвиг $S_\alpha$ тора (2.2) и перекладывание $S_v$ из (2.5), (2.6) будем называть соответствующим образом.

## § 3. Торические развертки и множества ограниченного остатка

**3.1. Цветные $k$-отклонения.** Пусть $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D$ – разбиение тора (2.7), отвечающее разбиению (2.4) развертки тора $T^D$. Зададим сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D \colon \quad x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \mod L \tag{3.1}$$

на вектор

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + b \circ l), \tag{3.2}$$

где $h$ – произвольное натуральное число, $b \circ l = b_1 l_1 + \dots + b_D l_D$ и $b = (b_1, \dots, b_D) \in \mathbb{Z}^D$ – целый вектор. Из определения следует, что вектор $b \circ l$ принадлежит решетке $L$. Любому сдвигу тора (3.1) можно поставить в соответствие *считающую функцию*

$$r_k(i, x_0) = \sharp\bigl\{j;\ S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k;\ 0 \leqslant j < i\bigr\}. \tag{3.3}$$

По условию $L$ – невырожденная решетка (2.10). Поэтому для ее базиса $l_1, \dots, l_D$ существует двойственный ему базис $l_1^*, \dots, l_D^*$, связанный с ним соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \tag{3.4}$$

где $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_D)$, $y = (y_1, \dots, y_D)$ из $\mathbb{R}^D$ и $\delta_{km}$ – символ Кронекера.

Для $k = 0, 1, \dots, D$ обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k. \tag{3.5}$$

Здесь коэффициенты $a_k$ при $k = 1, \dots, D$ задаются равенствами

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k, \tag{3.6}$$

где $\alpha_k$ – координаты вектора $\alpha$ относительно базиса $l_1, \dots, l_D$ (см. (2.12)), а коэффициент $a_0$ определяется из равенства

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_D = 1. \tag{3.7}$$

Мы будем называть $\delta_k(i, x_0)$ *отклонением распределения точек орбиты*

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \mod L;\ i = 0, 1, 2, \dots\} \tag{3.8}$$

относительно области $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T}^D$ или, кратко, *$k$-отклонением* или *цветным отклонением.*

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим его крайние значения

$$\underline{m}_k(X) = \inf_{x \in X} l_k^* \cdot x, \qquad \overline{m}_k(X) = \sup_{x \in X} l_k^* \cdot x, \tag{3.9}$$

где векторы $l_1^*, \dots, l_D^*$ определены соотношением (3.4) и

$$l_0^* = -l_1^* - \cdots - l_D^*. \tag{3.10}$$

Относительно отклонений $\delta_k(i, x_0)$ в [10] доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leqslant c_k(T)\, h \tag{3.11}$$

*для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы*

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T) \tag{3.12}$$

*не зависят от $h$, $i$ и определяются исключительно размерами развертки тора $T = T^D$, определенной в* (2.4).

**3.2. Вырождение орбит.** Пусть вектор сдвига $\alpha$ будет произвольным, т. е. не обязательно иррациональным, и пусть $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ – орбита (3.8) произвольной начальной точки $x_0 \in T$ относительно сдвига $S_\beta$, где вектор сдвига $\beta$ определен равенством (3.2). Обозначим $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c$ замыкание орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)$.

Если вектор сдвига $\alpha$ максимально иррационален, т. е. имеет ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то вектор $\beta$ также будет максимально иррациональным. Известно [13], что для указанных $\beta$ имеет место соотношение $\dim \mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = D$ и, таким образом, в этом случае выполняется равенство

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = T^c. \tag{3.13}$$

В общем случае выполняется лишь включение

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subseteq T^c, \tag{3.14}$$

которое влечет за собой следующее неравенство для констант (3.12):

$$c_k(X) \leqslant c_k(T). \tag{3.15}$$

Здесь множество $X$ определяется с помощью биекции (2.3):

$$T^D \supseteq X \xrightarrow[\sim]{\bmod L} \mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subset \mathbb{T}^D. \tag{3.16}$$

Если неравенство (3.15) будет строгим, то, как следствие, в случае произвольного вектора сдвига $\alpha$ мы получим для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ усиление оценки (3.11).

В этом случае теорема 3.1 принимает следующий вид [10].

Теорема 3.2. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leqslant c_k(X)h \tag{3.17}$$

*для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы $c_k(X)$ вычисляются по формуле*

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \tag{3.18}$$

*не зависят от $h, i$ и определяются исключительно размерами множества $X$ из (3.16). Величины $\overline{m}_k(X)$ и $\underline{m}_k(X)$ определены в (3.9).*

**3.3. Единичный базис.** Константы $c_k(X)$ из теоремы 3.2 можно конкретизировать, если, полагая

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots, \quad l_D = -\mathbf{e}_D, \tag{3.19}$$

перейти от базиса (2.11) к единичному базису

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1). \tag{3.20}$$

При таком выборе базиса решетка $L$, определенная в (2.10), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \tag{3.21}$$

т. е. будет *кубической решеткой* $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Если решетка $L$ имеет вид (3.21), то справедлива следующая теорема [10].

Теорема 3.3. *Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ выбраны в виде (3.19) и $x_0$ – произвольная начальная точка из тора $\mathbb{T}^D$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *$k$-отклонения (3.5) имеют вид*

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для} \;\; k = 0, 1, \dots, D, \tag{3.22}$$

*где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$.*

2) *Если выбран вектор сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$ с произвольным натуральным $h$ и вектором $l$ из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$, то при любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leqslant c_k(X)h \tag{3.23}$$

*для всех* $i = 0, 1, 2, \dots$ *с константами* $c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X)$, *где множество* $X$ *определено в* (3.16),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup_{x\in X} \mathbf{e}_k \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = -\inf_{x\in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad \textit{для} \ \ k = 1, \dots, D$$

*и*

$$\underline{m}_0(X) = \inf_{x\in X} \mathbf{e}_0 \cdot x, \quad \overline{m}_0(X) = \sup_{x\in X} \mathbf{e}_0 \cdot x \quad \textit{для} \ \ k = 0,$$

*где* $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$.

3) *В случае* $h = 1$ *выполняются точные неравенства*:

$$x_{0k} - \sup_{x\in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leqslant \delta_k(i, x_0) \leqslant x_{0k} - \inf_{x\in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad \textit{для} \ \ k = 1, \dots, D \tag{3.24}$$

(*здесь начальная точка* $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ *записана в базисе* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$) *и*

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leqslant \delta_0(i, x_0) \leqslant \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \tag{3.25}$$

*где* $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$.

## § 4. Разбиения вытянутых параллелоэдров

**4.1. Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$.** Приведем основные понятия и результаты из [9], необходимые нам для дальнейшего. Пусть $C = C^D$ – замкнутый $D$-мерный *куб*, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Обозначим $\mathbb{R}^D_+$ *положительный конус*, состоящий из векторов $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}^D_+$ определим операцию *вытягивания* $\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ как сумму по Минковскому

$$\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}(X) = X + I\mathbf{s} = \bigcup_{t\in I} (X + t\mathbf{s}) \tag{4.1}$$

самого множества $X$ и вложенного в пространство $\mathbb{R}^D$ отрезка $I\mathbf{s} = \{t\mathbf{s};\ t \in I\}$, где $I = [0, 1]$. Условимся $\mathbf{s}$ из (4.1) называть *вытягивающим вектором.*

Применяя данную операцию к единичному кубу $C$, построим из него многогранник

$$C_{\mathbf{s}} = \mathrm{Str}_{\mathbf{s}}(C), \tag{4.2}$$

представляющий собою *вытянутый куб*, имеющий объем $\operatorname{vol} C_{\mathbf{s}} = \sigma(\mathbf{s}) + 1$. Здесь мы обозначили $\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$ для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$. Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$ обладают следующим важным для наших целей свойством [9, теорема 1.1]: *для любого вектора* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^D_+$ *имеет место разбиение пространства*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l\in L_{\mathbf{s}}} C_{\mathbf{s}}[l], \tag{4.3}$$

*где* $C_{\mathbf{s}}[l] = C_{\mathbf{s}} + l$ – *множество, полученное сдвигом куба* $C_{\mathbf{s}}$ *на вектор* $l$, *и* $L_{\mathbf{s}} = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{s}}]$ – *полная решетка, порождаемая векторами* $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ *для* $k = 1, \dots, D$.

**4.2. Вытянутые параллелоэдры $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$.** Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_{\mathbf{s}}} \mathbb{R}^D\colon \quad \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k, \qquad k = 1, \dots, D, \tag{4.4}$$

задает изоморфизм решеток $M_{\mathbf{s}}\colon L_{\mathbf{s}}^{+} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^D$ и переводит $D$-мерный единичный куб $C$ в *параллелоэдр*

$$\mathcal{C} = M_{\mathbf{s}}(C), \tag{4.5}$$

натянутый на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c}$, где вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = \mathrm{inv}(\mathbf{s}). \tag{4.6}$$

Здесь

$$\mathrm{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

представляет собою *линейно-инверсное преобразование* пространства $\mathbb{R}^D$.

Согласно (4.5) вытянутый куб $C_{\mathbf{s}}$ при отображении $M_{\mathbf{s}}$ переходит в многогранник

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}), \tag{4.7}$$

получающийся вытягиванием параллелоэдра $\mathcal{C}$ вдоль вектора $\mathbf{c}$, связанного с вектором $\mathbf{s}$ формулой (4.6). *Вытянутый параллелоэдр* $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ имеет объем

$$\mathrm{vol}\, \mathcal{C}_{\mathbf{c}} = 1, \tag{4.8}$$

и число $\sharp V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ его вершин равно $2^{D+1} - 2$.

**4.3. Вытягивающие векторы для параллелоэдров.** Согласно [14] имеет место биекция

$$\mathrm{inv}\colon \mathbf{S}_{<1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1} \tag{4.9}$$

между $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_{+}^{D}$ и множеством

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_{+}^{D};\, \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \tag{4.10}$$

где $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_D$. Множество $\mathbf{C}_{<1}$ является $D$-мерным симплексом, замыкание которого содержит $(D-1)$-мерный симплекс $\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_{+}^{D})^c;\, \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$.

В [14] доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. 1) *Множество*

$$\mathbf{C}_{\leqslant 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \tag{4.11}$$

*где* $\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_{+}^{D}; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$ *– внутренность симплекса* $\mathbf{C}_1^c$, *представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелоэдров* (4.7)*: любому вектору* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ *соответствует выпуклый параллелоэдр* $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$.

2) *Вытянутые параллелоэдры* $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ *разбивают пространство* $\mathbb{R}^D$ *на многогранники* $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l] = \mathcal{C}_{\mathbf{c}} + l$ *без общих внутренних точек*:

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]. \tag{4.12}$$

**4.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелоэдров.** Используя (4.12), определим разбиение пространства $\mathbb{R}^D$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]. \tag{4.13}$$

Обозначим

$$\partial\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^D} \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$$

множество всех границ разбиения $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$. Для любого $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, $0 < \lambda < 1$, определим множество границ $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cup [\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cap (\partial\mathcal{T}_{\mathbf{c}} - \alpha)] \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$. Границы $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ разбивают вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ на $D+1$ область без общих внутренних точек [14]:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0^c \cup \cdots \cup \mathcal{P}_D^c, \tag{4.14}$$

где $\mathcal{P}_k^c$, $k = 1,\ldots,D$, – параллелоэдры, содержащие точки $\mathbf{e}_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ (единица стоит на $k$-м месте), а $\mathcal{P}_0^{\mathbf{c}} = [\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \setminus (\mathcal{P}_1^c \cup \cdots \cup \mathcal{P}_D^c)]^c$ – вытянутый параллелоэдр вида $\mathcal{P}_0^c = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C})$.

Зададим перекладывание

$$S_v(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) \overset{\mathrm{def}}{=} S_v(\mathcal{P}_0^c) \cup S_v(\mathcal{P}_1^c) \cup \cdots \cup S_v(\mathcal{P}_D^c) \tag{4.15}$$

вытянутого параллелоэдра с разбиением (4.14), где $S_v(\mathcal{P}_k^c) = \mathcal{P}_k^c[v_k] = \mathcal{P}_k^c + v_k$ – параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}_k^c$ на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если} \quad k > 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Перекладывание $S_v$ индуцирует многозначное отображение

$$S_v\colon \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \tag{4.17}$$

определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если $x \in \mathcal{P}_k^c$.

Из [9, предложение 1.1] вытекает следующее свойство перекладывания $S_v$.

Предложение 4.1. *Вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C})$ с разбиением* (4.14) *замкнут относительно операции перекладывания* (4.15): $S_v(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$.

Из определения (4.16) векторов сдвигов $v_k$ вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^D$!!!!!!!!! для любого $k = 0,1,\ldots,D$. Отсюда и из (4.17) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \mod \mathbb{Z}^D, \tag{4.18}$$

означающее, что многозначное отображение $S_v$ становится однозначным на вытянутом параллелоэдре $S_v\colon \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$, если отображение $S_v$ рассмотреть по модулю $\mathbb{Z}^D$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D\colon \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod \mathbb{Z}^D.$$

Тогда из (4.15)–(4.18) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \arrow[r, "S_v"] \arrow[d, "\bmod \mathbb{Z}^D"'] & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \arrow[d, "\bmod \mathbb{Z}^D"] \\ \mathbb{T}^D \arrow[r, "S_\alpha"] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{4.19}$$

**4.5. Построение перекладывающихся торических разверток.** Чтобы построить для вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ с разбиением (4.14) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T^D_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathbb{R}^D$ (см. определение в п. 2.1), нам потребуется следующий $i$-алгоритм [9], определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$.

Согласно $i$-алгоритму, любая точка $x$ из вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ имеет однозначно определенный *индекс* $i(x) \in \{-1, 0, 1, \dots, D\}$. Если точка $x$ принадлежит внутренности некоторого параллелоэдра $\mathcal{P}^c_k$, то она имеет индекс $i(x) = k$. Так что смысл индекса $i(x)$ состоит в том, что он распределяет общие граничные точки между параллелоэдрами $\mathcal{P}^c_0, \mathcal{P}^c_1, \dots, \mathcal{P}^c_D$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие незамкнутые многогранники:

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\}, \qquad k = 0, 1, \dots, D. \tag{4.20}$$

Они состоят из всех внутренних точек параллелоэдров $\mathcal{P}^c_k$ и части их граничных точек. Из однозначности индекса $i(x)$ следует, что $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \varnothing$, если $k_1 \neq k_2$. Так определенные многогранники $\mathcal{P}_k$ обладают следующим свойством [9].

Теорема 4.2. *Пусть параметр* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ *определен равенством* $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, *где* $0 < \lambda \leqslant 1$ *в случае* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ *и* $0 < \lambda < 1$, *если* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. *Кроме того, пусть* $\mathcal{P}_k$ – *многогранники* (4.20). *Тогда их объединение*

$$T^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D \tag{4.21}$$

*является перекладывающейся торической разверткой из* $\mathbb{R}^D$.

Итак, любому вытянутому параллелоэдру $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ из (4.14) $i$-алгоритм ставит в соответствие перекладывающуюся торическую развертку $T^D_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением (4.21):

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \quad \Longrightarrow \quad T(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) = T^D_{\mathbf{c},\lambda}. \tag{4.22}$$

Ее роль состоит в том, что посредством биекции (2.3) она задает *каноническое разбиение* тора

$$\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{4.23}$$

на множества $\mathbb{T}^D_k \equiv \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$, являющиеся по теореме 3.1 множествами ограниченного остатка.

Последовательность шагов (4.14), (4.22) и (4.23) определяет следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}$.

***Общая схема для канонического разбиения тора*** $\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}$**:**

$$\mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \quad \Longrightarrow \quad T^D_{\mathbf{c},\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}. \tag{4.24}$$

## § 5. Теорема Гекке для BR-многогранников

**5.1. Многомерная теорема Гекке.** Пусть $T^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D$ – перекладывающаяся торическая развертка (4.21) с заданным на ней перекладыванием $S_v$ (см. определение (2.5)). Указанной развертке $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$ по схеме (4.24) соответствует разбиение тора $\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}^D_D$, на котором определен сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod \mathbb{Z}^D$. Введем обозначение (ср. (3.2))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \tag{5.1}$$

где $h$ – произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j;\ S^j_\beta(x_0) \in \mathbb{T}^D_k;\ 0 \leqslant j < i\},$$

где $S_\beta$ – сдвиг тора на вектор (5.1) и $x_0$ – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$. Относительно отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) - i \operatorname{vol} \mathbb{T}^D_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D \tag{5.2}$$

доказана следующая теорема [9].

Теорема 5.1 (многомерная теорема Гекке). 1) *Пусть $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leqslant 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Тогда в формуле (5.2)*

$$\operatorname{vol} \mathbb{T}^D_k = \alpha_k, \qquad k = 0, 1, \dots, D, \tag{5.3}$$

*и для отклонений (5.2) выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})| \leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})h \tag{5.4}$$

*при всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ вычисляются по формуле*

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = \max_{v \in V(\mathcal{C}_\mathbf{c})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathcal{C}_\mathbf{c})} \mathbf{e}_k \cdot v, \tag{5.5}$$

*где $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, D$, – единичные векторы и $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_D$. В (5.5) через $V(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_c$. Таким образом, константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ в неравенстве (5.4) не зависят от выбора множителя $h$ в определении (5.1) вектора сдвига $\beta$.*

2) *Если вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, то константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ вычисляются по формулам*

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = 1 + (D-1)c_k \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, D, \tag{5.6}$$

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = 1 + (D-1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad \text{для} \quad k = 0. \tag{5.7}$$

3) *Для констант $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ из (5.6), (5.7) выполняется общее неравенство*

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) \leqslant D \quad \text{для любого} \quad \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}. \tag{5.8}$$

**5.2.** BR**-многогранники.** Замкнутые многогранники $\mathcal{P}_k^c$ с номерами $k = 1, \dots, D$, определенные в (4.14), допускают простое описание:

$$\mathcal{P}_k^c = P_k^c + \omega. \tag{5.9}$$

Здесь $P_k^c \subset \mathbb{R}^D$ обозначает замкнутый *параллелепипед*, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' = 1, \dots, D, \quad k' \neq k, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ и $\mathbf{e}_{k'}$ – единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D-1)\mathbf{c} - \alpha, \tag{5.11}$$

где $\mathbf{e}_0 = (1, \dots, 1)$, является общей для всех многогранников $\mathcal{P}_k^c$, $k = 0, 1, \dots, D$. При этом в случае $k = 0$ многогранник $P_0^c$ также задается равенством (5.9), в котором $\omega = 0$ и $\mathcal{P}_0^c$ – вытянутый параллелоэдр вида (см. (4.7))

$$\mathcal{P}_0^c = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}). \tag{5.12}$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ и $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$, то из определения (5.10) следует, что

$$\operatorname{vol} P_k^c = \alpha_k. \tag{5.13}$$

В (4.20) были определены незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k$, содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника $\mathcal{P}_k^c$. Используя $\mathcal{P}_k$, определим соответствующие незамкнутые многогранники $P_k$ с помощью равенства (ср. (5.9))

$$\mathcal{P}_k = P_k + \omega, \qquad k = 0, 1, \dots, D. \tag{5.14}$$

Множество $X \subset \mathbb{R}^D$ назовем $\mathbb{Z}^D$*-различимым*, если оно удовлетворяет следующему условию:

$$\forall\, x, y \in X\colon \quad x - y \in \mathbb{Z}^D \quad \Longrightarrow \quad x = y. \tag{5.15}$$

Из определения (5.14) следует, что все многогранники $P_k$ являются $\mathbb{Z}^D$-различимыми, так как согласно теореме 4.1 все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$. Пусть даны произвольный вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h \in \{1, 2, 3, \dots\}$ такое, что существует вектор $\alpha$, удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \qquad \alpha \equiv h\beta \mod \mathbb{Z}^D. \tag{5.16}$$

Обозначим

$$P_k = P_{\beta,h,\lambda,k} \tag{5.17}$$

многогранники, определенные равенствами (5.14) для векторов $\alpha$ из (5.16) и $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leqslant 1$.

Для сдвига $S_\beta$ тора $\mathbb{T}^D$ и многогранника $P_k$ зададим *считающую функцию*

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \sharp\bigl\{j;\ S_\beta^j(x_0) \in P_k \mod \mathbb{Z}^D,\ 0 \leqslant j < i\bigr\},$$

где $x_0$ – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$, и, принимая во внимание равенство (5.13), определим отвечающее функции $r(i;\beta,x_0,P_k)$ *отклонение*

$$\delta(i;\beta,x_0,P_k)=r(i;\beta,x_0,P_k)-i\operatorname{vol}\mathbb{P}_k^D \tag{5.18}$$

распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ относительно области $\mathbb{P}_k^D\equiv P_k \mod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, при этом согласно (5.3) и (5.13) $\operatorname{vol}\mathbb{P}_k^D=\operatorname{vol}P_k^c=\alpha_k$ для $k=0,1,\dots,D$.

Из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение [10].

Теорема 5.2. *Пусть даны вектор сдвига $\beta\in\mathbb{R}^D$ и число $h\in\{1,2,3,\dots\}$, удовлетворяющие условиям (5.16), и пусть $\mathbf{c}=\lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha)<\lambda\leqslant 1$, и $P_k=P_{\beta,h,\lambda,k}$ – отвечающие этим параметрам многогранники (5.17). При этих условиях справедливы следующие утверждения.*

1) *Для отклонений (5.18) выполняются неравенства*

$$|\delta(i;\beta,x_0,P_k)|\leqslant h\gamma_k \tag{5.19}$$

*с константами*

$$\gamma_k=1+(D-1)c_k \quad \text{для} \quad k=1,\dots,D, \tag{5.20}$$

$$\gamma_k=1+(D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})) \quad \text{для} \quad k=0, \tag{5.21}$$

*где $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_D)$.*

2) *Для отклонений выполняется также общее неравенство*

$$|\delta(i;\beta,x_0,P_k)|\leqslant hD. \tag{5.22}$$

Как уже отмечалось, многогранники $P_k$, определенные в (5.14), являются $\mathbb{Z}^D$-различимыми, а из теоремы 5.2 следует, что относительно сдвига $S_\beta$ многогранники $P_k$, если их рассматривать как области $\mathbb{P}_k^D\equiv P_k \mod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, являются множествами ограниченного остатка. По аналогии с определением (1.2) многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, *$BR$-многогранниками.*

Для произвольной размерности $D$ многогранники $P_k$ с номерами $k=1,\dots,D$ (по своей конструкции – параллелепипеды, натянутые на векторы (5.10)) представляют собою простейший вид BR-многогранников. Многогранник $P_0$ также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора $\mathbf{c}=\lambda\alpha$, когда $\lambda=1$. Если же $\lambda<1$, то $P_0$ – параллелоэдр с числом вершин $\sharp V(P_0)=2^{D+1}-2$.

Заметим, что приведенное во введении неравенство (1.5) вытекает из неравенства (5.22).

Далее мы предполагаем построить более сложные BR-множества, являющиеся объединением нескольких многогранников, каждый их которых уже не обязан быть BR-многогранником.

## § 6. Многоцветные стационарные разбиения торов

**6.1. Вложения торов и торические обмотки.** Определим вложение

$$\mathbb{R}^d \overset{\wedge}{\hookrightarrow} \widehat{\mathbb{R}}^d \subseteq \mathbb{R}^D, \tag{6.1}$$

полагая $\widehat{x} = (x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}^d$. Здесь считаем, что $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, где $D = d + d'$.

Поскольку кубическая решетка $\mathbb{Z}^D$ также разлагается в прямое произведение $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^{d'}$, то вложение (6.1) можно факторизовать с помощью изоморфизма

$$x \mod \mathbb{Z}^d \mapsto \widehat{x} \mod \mathbb{Z}^D \tag{6.2}$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^d \overset{\wedge}{\hookrightarrow} \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \tag{6.3}$$

тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$. Так определенное вложение (6.3) согласовано

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^d \arrow[r, hook, "\wedge"] \arrow[d, "S_\alpha"', "\sim"] & \mathbb{T}^D \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}}"] \\ \mathbb{T}^d \arrow[r, hook, "\wedge"] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod \mathbb{Z}^d, \qquad S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{x}) \equiv \widehat{x} + \widehat{\alpha} \mod \mathbb{Z}^D. \tag{6.5}$$

Укажем, что в (6.5) при определении сдвига $S_\alpha$ – в отличие от п. 2.1 – мы выбираем $d$-мерный вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$.

Тор меньшей размерности $\widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D$ будем называть *торической обмоткой* в $\mathbb{T}^D$. Из (6.3) и (6.4) следует, что торическая обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d$ является инвариантным множеством относительно сдвига $S_{\widehat{\alpha}}$:

$$S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d. \tag{6.6}$$

Далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что вектор сдвига $\alpha$ тора $\mathbb{T}^d$ максимально иррациональный, т. е. $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{Z}^d) = d$.

**6.2. Автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$.** С помощью автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$ исходя из некоторой фиксированной обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ можно получить богатое семейство других торических обмоток на торе $\mathbb{T}^D$. Обозначим $\operatorname{Aut}\mathbb{T}^D$ группу автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$. Ее можно разложить в прямое произведение

$$\operatorname{Aut}\mathbb{T}^D \simeq \operatorname{Aut}_h \times \operatorname{Aut}_s$$

ее некоммутативной подгруппы гиперболических автоморфизмов $\operatorname{Aut}_h \simeq \operatorname{GL}_D(\mathbb{Z})$!!!!!!! и коммутативной подгруппы сдвигов тора $\operatorname{Aut}_s \simeq \mathbb{T}^D$. Здесь $\operatorname{GL}_D(\mathbb{Z})$ обозначает *группу унимодулярных матриц*, или, иначе, матриц с целыми коэффициентами, имеющими определитель, равный $\pm 1$.

6.2.1. *Гиперболические автоморфизмы тора* $\mathbb{T}^D$. Любая матрица $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$!!!!!!! задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ следующим образом:

$$A\colon \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D\colon \quad x^D \mod \mathbb{Z}^D \mapsto Ax^D \mod \mathbb{Z}^D. \tag{6.7}$$

Это непосредственно вытекает из свойства $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ быть группой автоморфизмов кубической решетки $\mathbb{Z}^D$: для любого $A$ из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ отображение $x^D \mapsto Ax^D$ задает изоморфизм решетки $\mathbb{Z}^D$.

6.2.2. *Сдвиги тора* $\mathbb{T}^D$. Если элемент $t^D$ принадлежит $\mathbb{T}^D$, то отвечающий ему автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ из подгруппы $\mathrm{Aut}_s$ будет обычным сдвигом тора

$$S_{t^D}\colon \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D\colon \quad x^D \mapsto x^D + t^D \mod \mathbb{Z}^D. \tag{6.8}$$

**6.3. Согласованность сдвига $S_\alpha$ с автоморфизмами тора $\mathbb{T}^D$.** Для произвольного преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $A^\wedge$ отображение, действующее по правилу

$$A^\wedge \alpha = A\widehat{\alpha}, \tag{6.9}$$

и определим вектор сдвига $\widehat{\alpha}_A$ тора $\mathbb{T}^D$: $\widehat{\alpha}_A \equiv A^\wedge\alpha \mod \mathbb{Z}^D$, полагая при этом, что вектор $\widehat{\alpha}_A$ имеет вид

$$\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A,D}), \quad \text{где } \ 0 \leqslant \widehat{\alpha}_{A,k} < 1. \tag{6.10}$$

При автоморфизме тора (6.7) преобразование сдвига $S_{\widehat{\alpha}}$ переходит в преобразование $S_{\widehat{\alpha}_A}$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^D \arrow[r, "A", "\sim"'] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}}"', "\sim"] & \mathbb{T}^D \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_A}", "\sim"'] \\ \mathbb{T}^D \arrow[r, "A", "\sim"'] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{6.11}$$

Из диаграммы (6.11) и коммутируемости сдвигов $S_{t^D} \circ S_{\widehat{\alpha}_A} = S_{\widehat{\alpha}_A} \circ S_{t^D}$ получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^D \arrow[r, "A_{t^D}", "\sim"'] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}}"', "\sim"] & \mathbb{T}^D \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_A}", "\sim"'] \\ \mathbb{T}^D \arrow[r, "A_{t^D}", "\sim"'] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{6.12}$$

где автоморфизм $A_{t^D}$ тора $\mathbb{T}^D$ определяется как композиция

$$A_{t^D}(x^D) \equiv Ax^D + t^D \mod \mathbb{Z}^D. \tag{6.13}$$

**6.4. Стационарные разбиения тора $\mathbb{T}^d$.** Пусть $t = t^D$ и

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} = A_t^\wedge\, \mathbb{T}^d = S_t A\, \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \tag{6.14}$$

– торическая обмотка, где полагаем $A_t^\wedge(x) = A_t(\widehat{x})$. Из диаграммы (6.12) и инвариантности (6.6) торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ вытекает инвариантность

$$S_{\widehat{\alpha}_A}(\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t}) = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \tag{6.15}$$

обмотки (6.14), при этом, как нетрудно убедиться, имеют место следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^d \arrow[r, "A_t^\wedge", "\sim"'] \arrow[d, "S_\alpha"', "\sim"] & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}_A}"] \\ \mathbb{T}^d \arrow[r, "A_t^\wedge", "\sim"'] & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \end{tikzcd} \tag{6.16}$$

и

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_A}"', "\sim"] & \mathbb{T}^D \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}_A}"] \\ \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{6.17}$$

Здесь id – тождественное вложение обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ в содержащий ее тор $\mathbb{T}^D$.

Пусть вектор сдвига $\alpha$ иррационален. Для таких $\alpha$ в [14] доказано, что существуют преобразования $A$ из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, удовлетворяющие условию

$$\sigma(\widehat{\alpha}_A) < 1, \tag{6.18}$$

где $\sigma(\widehat{\alpha}_A) = \widehat{\alpha}_{A,1} + \cdots + \widehat{\alpha}_{A,D}$ для вектора (6.10). Неравенство (6.18) означает, что $\widehat{\alpha}_A$ принадлежит множеству параметров (4.10):

$$\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1}. \tag{6.19}$$

Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством

$$\widehat{\alpha}_A = \lambda\mathbf{c}, \quad \text{где} \ \ \sigma(\widehat{\alpha}_A) < \lambda \leqslant 1. \tag{6.20}$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{c}$, так же как и вектор $\widehat{\alpha}_A$, удовлетворяет условию

$$\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}. \tag{6.21}$$

Для таких векторов $\mathbf{c}$ по схеме (4.24) мы можем построить каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$:

$$\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^D_D. \tag{6.22}$$

Используя разбиение (6.22) и вложение (6.17), можно естественным образом задать разбиение торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \subset \mathbb{T}^D$, полагая

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,0} \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,1} \sqcup \cdots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,D}, \tag{6.23}$$

где $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \cap \mathbb{T}^D_k$ и множества $\mathbb{T}^D_k$ взяты из разбиения (6.22).

Теперь с помощью изоморфизма (6.2) мы можем перенести разбиение (6.23) обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t}$ на изоморфный ей тор $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^d_{A_t,0} \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,D}. \tag{6.24}$$

Разбиение $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ назовем *стационарным* разбиением тора $\mathbb{T}^d$. Такое название обусловлено тем, что в п. 8.3 мы определим другие – так называемые динамические – разбиения.

**6.5. Распределение точек орбит на торе $\mathbb{T}^D$: общий случай.** Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i;\widehat{\beta}_A,x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j;\ S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D)\in\mathbb{T}^D_k;\ 0\leqslant j<i\} \tag{6.25}$$

для сдвига тора $S_{\widehat{\beta}_A}$ на вектор $\widehat{\beta}_A = A^\wedge\beta$. Здесь $x_0^D$ – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$ и

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d), \tag{6.26}$$

где $h$ – произвольное натуральное число и $l^d$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^D$. Введем обозначение

$$\delta_k(i;\widehat{\beta}_A,x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i;\widehat{\beta}_A,x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) - i\widehat{\alpha}_{A,k}, \qquad k=0,1,\ldots,D, \tag{6.27}$$

для отклонения распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_{\widehat{\beta}_A}}(x_0)$ относительно области $\mathbb{T}^D_k$ на торе $\mathbb{T}^D$, где согласно (6.19) координаты вектора $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1},\ldots,\widehat{\alpha}_{A,D})$ удовлетворяют условиям

$$\widehat{\alpha}_{A,1}+\cdots+\widehat{\alpha}_{A,D} < 1, \qquad \widehat{\alpha}_{A,k} > 0. \tag{6.28}$$

Аналогично тому, как это было сделано в теореме 3.3, дополнительно определяем нулевую координату:

$$\widehat{\alpha}_{A,0} = 1-\widehat{\alpha}_{A,1}-\cdots-\widehat{\alpha}_{A,D} = 1-\sigma(\widehat{\alpha}_A). \tag{6.29}$$

Из (6.28) следует, что $\widehat{\alpha}_{A,0} > 0$. Тогда согласно теореме 5.1 для отклонений (6.27) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i;\widehat{\beta}_A,x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})| \leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})h \tag{6.30}$$

для всех $i=0,1,2,\ldots$ . Здесь константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ в силу (5.6) и (5.7) вычисляются по следующим формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = 1+(D-1)c_k, \quad \text{для} \ \ k=1,\ldots,D, \tag{6.31}$$
$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = 1+(D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})), \quad \text{для} \ \ k=0, \tag{6.32}$$

где вектор $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_D)$ определен в (6.20). Из формул (6.31) и (6.32) вытекает грубое неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) < D \tag{6.33}$$

для всех $k=0,1,\ldots,D$.

**6.6. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: стационарный случай.** Выберем произвольную начальную точку $x_0^d$ на торе $\mathbb{T}^d$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ из (6.15) определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j;\ S_\beta^j(x_0^d)\in\mathbb{T}^D_{A_t,k};\ 0\leqslant j<i\},\tag{6.34}$$

а также отклонение

$$\delta_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) - i\,\widehat{\alpha}_{A,k},\qquad k=0,1,\ldots,D,\tag{6.35}$$

распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0^d)$ относительно области $\mathbb{T}^D_{A_t,k}$ из разбиения тора $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$, определенного в (6.24).

Теорема 6.1. 1) *Пусть параметр* $\mathbf{c}$ *определен равенством* (6.20), *где* $\widehat{\alpha}_A\in\mathbf{C}_{\leqslant 1}$ *для некоторого преобразования* $A\in\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. *Тогда для отклонений* (6.35) *имеют место неравенства*

$$|\delta_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})|\leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})h,\qquad k=0,1,\ldots,D,\tag{6.36}$$

*где константы* $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ *определены в* (6.31) *и* (6.32).

2) *При тех же условиях, независимо от выбора параметра* $\mathbf{c}\in\mathbf{C}_{<1}$, *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})|<Dh,\qquad k=0,1,\ldots,D.\tag{6.37}$$

Доказательство. Пусть вектор сдвига $\widehat{\beta}_A$ определен согласно (6.10). Так как по условию $\beta=\frac{1}{h}(\alpha+l^d)$, где $l^d\in\mathbb{Z}^D$, то обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d\subset\mathbb{T}^D$ инвариантна относительно сдвига $S_{\widehat{\beta}}$: $S_{\widehat{\beta}}(\widehat{\mathbb{T}}^d)=\widehat{\mathbb{T}}^d$. Отсюда следует инвариантность обмотки (6.14):

$$S_{\widehat{\beta}_A}(\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t})=\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t}.\tag{6.38}$$

Пусть $x_0^D=A_t^\wedge x_0^d$. Согласно коммутативной диаграмме (6.17) имеем согласование

$$S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D)\in\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k}\quad\Longleftrightarrow\quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D)\in\mathbb{T}^D_k,$$

а в силу диаграммы (6.16) и инвариантности (6.38) – еще одно согласование:

$$S^j_\beta(x_0^d)\in\mathbb{T}^d_k\quad\Longleftrightarrow\quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D)\in\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k}.$$

Отсюда для любого $k$ выводим равносильность

$$S^j_\beta(x_0^d)\in\mathbb{T}^d_{A_t,k}\quad\Longleftrightarrow\quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D)\in\mathbb{T}^D_k.\tag{6.39}$$

Из определений (6.34), (6.35) и согласования (6.39) для любого $i$ вытекает равенство отклонений

$$\delta_k(i;\beta,x_0^d,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})=\delta_k(i;\widehat{\beta}_A,x_0^D\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})\tag{6.40}$$

для $k=0,1,\ldots,D$. Отсюда и из теоремы 5.1 следуют неравенства (6.36) и (6.37). Теорема доказана.

С помощью коммутативной диаграммы (6.17) определим подмножество $\widehat{T}^d_{A_t}$ из перекладывающейся торической развертки $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$, отвечающее при изоморфизме

$$\widehat{T}^d_{A_t} \xrightarrow[\sim]{\bmod \mathbb{Z}^D} \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \tag{6.41}$$

обмотке $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t}$ тора $\mathbb{T}^D$, определенной в (6.14). Пусть $\mathcal{P}^d_{A_t}$ обозначает замыкание множества $\widehat{T}^d_{A_t}$. Поскольку линейное отображение $A_t$ сохраняет размерность, то множество $\mathcal{P}^d_{A_t}$ имеет размерность

$$\dim \mathcal{P}^d_{A_t} = d. \tag{6.42}$$

Согласно определению (4.21) перекладывающейся торической развертки $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$ ее замыкание есть вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ из (4.22), представляющий собою многогранник размерности $D$. Отсюда и из (6.42) заключаем, что множество $\mathcal{P}^d_{A_t}$ является объединением конечного числа многогранников размерности $d$.

Используя данный факт, получаем следующее усиление неравенства (6.36) из теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где $h$ – произвольное натуральное число и $l^d \in \mathbb{Z}^d$. Предположим, что преобразование $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ таково, что $\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1}$, где $\widehat{\alpha}_A$ – вектор сдвига (6.10), и пусть вектор $\mathbf{c}$ определен равенством $\widehat{\alpha}_A = \lambda\mathbf{c}$, где $\sigma(\widehat{\alpha}_A) < \lambda \leqslant 1$. Тогда для отклонений (6.40) выполняется неравенство*

$$|\delta_k(i;\beta,x^d_0,\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})| \leqslant c_k(\mathcal{P}^d_{A_t})h \quad \textit{для} \ \ k = 0,1,\dots,D \tag{6.43}$$

*с константой $c_k(\mathcal{P}^d_{A_t})$, определенной в (5.5):*

$$c_k(\mathcal{P}^d_{A_t}) = \max_{v\in V(\mathcal{P}^d_{A_t})} \mathbf{e}_k\cdot v - \min_{v\in V(\mathcal{P}^d_{A_t})} \mathbf{e}_k\cdot v.$$

*Здесь $V(\mathcal{P}^d_{A_t})$ обозначает множество вершин объединения многогранников $\mathcal{P}^d_{A_t}$.*

Доказательство. Неравенство (6.43) вытекает из неравенства (6.36) и формулы (5.5) для константы $c_k(\mathcal{P}^d_{A_t})$.

## § 7. Свойства стационарных разбиений

### 7.1. Сдвиги стационарных разбиений.

Лемма 7.1. *Пусть $t'^D = t^D + s^D$ – новый сдвиг тора $\mathbb{T}^D$, где $s^D = A^\wedge t^d$. Тогда разбиение $\mathbb{T}^d_{A_{t'^D},\mathbf{c},\lambda}$ получается из разбиения $\mathbb{T}^d_{A_{t^D},\mathbf{c},\lambda}$ его сдвигом на вектор $t^D$:*

$$S_{t^d}\colon \mathbb{T}^d_{A_{t^D},\mathbf{c},\lambda} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{A_{t'^D},\mathbf{c},\lambda}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Заметим, что сложение векторов $t^D + s^D$ происходит в аддитивной подгруппе $A^\wedge\,\mathbb{T}^d \subseteq \mathbb{T}^D$. Поэтому соответствие (7.1) вытекает из следующего сравнения для разбиений:

$$\mathbb{T}^d_{A_{t^D},\mathbf{c},\lambda} + t^d \equiv \mathbb{T}^d_{A_{t'^D},\mathbf{c},\lambda} \mod \mathbb{Z}^d.$$

Лемма доказана.

Если при сдвиге $S_{t^d}$ тора $\mathbb{T}^d$ два его разбиения $\mathbb{T}^d_{1*}$ и $\mathbb{T}^d_{2*}$ связаны условием

$$\mathbb{T}^d_{1*} + t^d \equiv \mathbb{T}^d_{2*} \mod \mathbb{Z}^d, \tag{7.2}$$

то такие разбиения назовем *эквивалентными* относительно сдвигов тора $\mathbb{T}^d$ и будем писать $\mathbb{T}^d_{1*} \overset{S}{\sim} \mathbb{T}^d_{2*}$.

Предложение 7.1. *Чтобы с точностью до сдвига (7.2) получить все эквивалентные разбиения тора $\mathbb{T}^d$ вида $\mathbb{T}^d_{A_{t^D},\mathbf{c},\lambda}$, определенные в (6.24), достаточно выбирать векторы $t^D \in \mathbb{T}^D$ сдвига тора $\mathbb{T}^D$ из факторгруппы*

$$\mathbb{T}^D / A^\wedge\, \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{T}^{d'}, \tag{7.3}$$

*где $d + d' = D$.*

Доказательство. Используя определение (6.9) отображения $A^\wedge$, получаем следующий изоморфизм:

$$\mathbb{T}^D / A^\wedge\, \mathbb{T}^d \simeq A^{-1}\mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d. \tag{7.4}$$

Поскольку $A^{-1}\mathbb{T}^D = \mathbb{T}^D$ в силу условия $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, то

$$A^{-1}\mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d \simeq \mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d. \tag{7.5}$$

Тор $\mathbb{T}^D$ разлагается в прямое произведение $\widehat{\mathbb{T}}^d \times \mathbb{T}^{\vee d'}$, где $\mathbb{T}^{\vee d'} \simeq \mathbb{T}^{d'}$. Поэтому $\mathbb{T}^D/\widehat{\mathbb{T}}^d \simeq \mathbb{T}^{\vee d'} \simeq \mathbb{T}^{d'}$, и, значит, в силу (7.4) и (7.5) справедлив изоморфизм (7.3). Применяя лемму 7.1, завершаем доказательство предложения.

### 7.2. Инварианты стационарных разбиений.

Лемма 7.2. *Для любого $\alpha \in \mathbb{T}^d$ такого, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d$ и $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \ldots, \widehat{\alpha}_{A,D})$ принадлежит области $\mathbf{C}_{<1}$ множества $\mathbb{T}^d_{A_t,k}$, образующие разбиение $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ из (6.24), имеют объемы*

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d}\, \mathbb{T}^d_{A_t,k} = \widehat{\alpha}_{A,k} \quad \text{для} \;\; k = 0, 1, \ldots, D, \tag{7.6}$$

*где $\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d}$ обозначает объем на торе $\mathbb{T}^d$.*

Доказательство. По условию вектор сдвига $\alpha$ имеет максимальный ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d$ (см. определение (2.13)). В этом случае

$$\dim \mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x^d_0)^c = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d.$$

Тогда из определения отклонений (6.35) и теоремы 6.1 следует нужная формула (7.6). Лемма доказана.

Замечание 7.1. Из леммы 7.2 и неравенств (6.28) следует, что координаты $\widehat{\alpha}_{A,k}$ вектора сдвига $\widehat{\alpha}_A$ можно рассматривать как частоты попадания точек $S_\alpha$-орбит в области $\mathbb{T}^d_{A_t,k} \subset \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$.

Предложение 7.2. *Пусть даны два разбиения* (6.24) *тора* $\mathbb{T}^d$,

$$\mathbb{T}^d_{A,\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^d_{A,0} \sqcup \mathbb{T}^d_{A,1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^d_{A,D}, \qquad \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^d_{A_t,0} \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,D}$$

*где* $t = t^D \in \mathbb{T}^D$ *– произвольный вектор сдвига. Тогда объемы областей, образующих данные разбиения, инвариантны относительно сдвигов* $S_t$ *тора* $\mathbb{T}^D$:

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}^d_{A_t,k} = \mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}^d_{A,k} \tag{7.7}$$

*для всех* $k = 0, 1, \ldots, D$.

Доказательство. Из (6.10) следует, что частоты $\widehat{\alpha}_{A,k}$, т. е. координаты вектора $\widehat{\alpha}_A$, не зависят от вектора сдвига $t$ тора $\mathbb{T}^D$. Из данного факта и формулы (7.6) вытекают равенства (7.7). Предложение доказано.

**7.3. Частотная универсальность стационарных разбиений.** Назовем произвольный вектор $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_D)$ из $\mathbb{R}^{D+1}_+$ *частотным распределением* точек орбиты по некоторым $D+1$ областям, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_D = 1, \qquad \nu_j > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, D. \tag{7.8}$$

Предложение 7.3. *Пусть вектор сдвига* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *иррационален, т. е.* $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) > 0$. *Тогда для любого частотного распределения* $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_D)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое преобразование* $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, *что вектор* $\widehat{\alpha}_A$ *принадлежит* $\mathbf{C}_{<1}$, *или, другими словами,* $\sigma(\widehat{\alpha}_A) < 1$, *и области* $\mathbb{T}^d_{A_t,k}$ *разбиения* $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ (*см.* (6.24)) *имеют объемы, обладающие свойством*

$$|\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}^d_{A_t,k} - \nu_k| < \varepsilon \tag{7.9}$$

*для всех* $k = 0, 1, \ldots, D$.

Доказательство. По условию вектор сдвига $\alpha$ – иррациональный. В [14] для таких векторов $\alpha$ доказано существование преобразований $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ такого, что вектор $\widehat{\alpha}_A$ принадлежит $\mathbf{C}_{<1}$ и выполняются неравенства

$$|\widehat{\alpha}_{A,k} - \nu_k| < \frac{\varepsilon}{D} \tag{7.10}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Отсюда и из формул (7.6) следуют неравенства (7.9) для таких $k$. Для $k = 0$ неравенство (7.9) также будет выполняться – в силу равенства (6.29) для $\widehat{\alpha}_{A,0}$ и аналогичного равенства для частоты $\nu_0$. Предложение доказано.

Предложение 7.3 означает, что стационарные разбиения $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ обладают свойством частотной универсальности, т. е. выполняются неравенства (7.9) и (7.10). Далее мы докажем чисто алгебраическое утверждение (предложение 7.4), которое позволит нам ответить на вопрос: какие в точности частотные распределения $\nu \in \mathbb{R}^{D+1}_+$ реализуются разбиениями вида $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ или, другими словами, когда левые части неравенств (7.9) и (7.10) обращаются в нуль.

Предложение 7.4. *Пусть* $\alpha^d=(\alpha_1^d,\dots,\alpha_d^d)\in\mathbb{R}^d$, $\alpha^D=(\alpha_1^D,\dots,\alpha_D^D)\in\mathbb{R}^D$, *где* $d\leqslant D$, *– любые фиксированные векторы, и пусть* $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha^d)=d$. *Тогда следующие два утверждения равносильны*:

1) *для некоторого* $A\in\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ *выполнено сравнение*

$$\alpha^D\equiv A\widehat{\alpha}^d \mod \mathbb{Z}^D; \tag{7.11}$$

2) *определенные после формулы* (2.13) *модули* $M(\alpha^d)$ *и* $M(\alpha^D)$ *совпадают*:

$$M(\alpha^D)=M(\alpha^d). \tag{7.12}$$

Доказательство. Непосредственно из определения модулей $M(\alpha^d)$, $M(\alpha^D)$ (см. (2.13)) видно, что сравнение (7.11) влечет за собой равенство (7.12).

Докажем обратную импликацию: (7.12) $\Longrightarrow$ (7.11). Прежде всего заметим, что из (7.12) вытекает существование матрицы $B_1\in\mathrm{Mat}_{d,D}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$\alpha^d=B_1\alpha^D \tag{7.13}$$

(здесь векторы $\alpha^d$ и $\alpha^D$ считаются столбцами). Перепишем равенство (7.13) в виде

$$\alpha_U^d=B_2\alpha_V^D, \tag{7.14}$$

где $U\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, $V\in\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, $\alpha_U^d=U\alpha^d$, $\alpha_V^D=V^{-1}\alpha^D$ и $B_2=UB_1V$. Подберем матрицы $U$, $V$ так, чтобы матрица $B_2$ стала приведенной:

$$B_2=(\mathcal{D}|0), \tag{7.15}$$

где

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}\delta_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \delta_d\end{pmatrix}$$

– диагональная матрица с целыми элементами $\delta_1,\dots,\delta_d$. Обозначим $\alpha_V^{D,d}$ вектор из первых $d$ координат вектора $\alpha_V^D$. Тогда из (7.14) и (7.15) получаем равенство

$$\alpha_U^d=\mathcal{D}\alpha_V^{D,d}, \tag{7.16}$$

или, в координатном виде,

$$\alpha_{U,1}^d=\delta_1\alpha_{V,1}^D,\quad \dots,\quad \alpha_{U,d}^d=\delta_d\alpha_{V,d}^D. \tag{7.17}$$

Отсюда получаем следующую цепочку соотношений:

$$M(\alpha^D)=M(\alpha_V^D)\supseteq M(\alpha_V^{D,d})\supseteq M(\alpha_U^d)=M(\alpha^d). \tag{7.18}$$

Сопоставляя (7.18) с условием (7.12), получаем равенство модулей

$$M(\alpha_V^{D,d})=M(\alpha_U^d), \tag{7.19}$$

и, следовательно, между рангами модулей из (7.18) существуют зависимости

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}M(\alpha_V^{D,d})=\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}M(\alpha_U^d)=\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}M(\alpha)=d+1. \tag{7.20}$$

Из равенств (7.17), (7.19) и определения модулей после формулы (2.13) следует, что

$$\mathbb{Z}[1, \alpha^D_{V,1}, \dots, \alpha^D_{V,d}] = \mathbb{Z}[1, \delta_1\alpha^D_{V,1}, \dots, \delta_d\alpha^D_{V,d}], \tag{7.21}$$

а из максимальности ранга $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha^{D,d}_V) = d+1$, вытекающей из равенств (7.20), получаем, что $\delta_1 \neq 0, \dots, \delta_d \neq 0$ и $\alpha^D_{V,1} \neq 0, \dots, \alpha^D_{V,d} \neq 0$. Теперь можем записать очевидные равенства

$$\alpha^D_{V,k} = b_k\delta_k\alpha^D_{V,k} \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, d \tag{7.22}$$

с рациональными коэффициентами $b_k = \frac{1}{\delta_k}$. В силу (7.21) существуют представления чисел $\alpha^D_{V,k}$ в виде линейных комбинаций чисел $1, \delta_1\alpha^D_{V,1}, \dots, \delta_d\alpha^D_{V,d}$ с целыми коэффициентами. Но ввиду максимальности ранга $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha^{D,d}_V) = d+1$ такие представления единственны. Отсюда и из (7.22) заключаем, что все числа $\delta_k$ равны $\pm 1$.

Итак, векторы $\alpha^d_U$ и $\alpha^D_V$ из (7.14) связаны соотношением

$$\alpha^d_U = (\mathcal{D}|0)\alpha^D_V, \quad \text{где} \ \ \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Построим матрицу $W = \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ W_1 & E_{d'} \end{smallmatrix}\right)$ с произвольным блоком $W_1 \in \operatorname{Mat}_{d',d}(\mathbb{Z})$. С помощью $W$ можно поднять (7.23) до матричного равенства

$$\begin{pmatrix} \alpha^d_U \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} = W\alpha^D_V, \tag{7.24}$$

где $\alpha^{d'} = W_1\alpha^{D,d}_V + \alpha^{D,d'}_V$ и $\alpha^{D,d'}_V$ обозначает вектор из последних $d'$ коэффициентов вектора $\alpha^D_V$. Из (7.12) и (7.18) следует равенство $M(\alpha^D_V) = M(\alpha^{D,d}_V)$, поэтому существует целая матрица $W_1$ такая, что $\alpha^{d'} \in \mathbb{Z}^{d'}$.

Принимая во внимание (7.13) и используя матрицу $W$, приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & E_{d'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^d \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} = WV^{-1}\alpha^D. \tag{7.25}$$

Если обозначить $A = VW^{-1}\left(\begin{smallmatrix} U & 0 \\ 0 & E_{d'} \end{smallmatrix}\right)$, то равенство (7.25) примет вид

$$\alpha^D = A\begin{pmatrix} \alpha^d \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} \equiv A\begin{pmatrix} \alpha^d \\ 0 \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}^D. \tag{7.26}$$

С использованием вложения (6.1) сравнение из (7.26) можно переписать в виде $\alpha^D \equiv A\widehat{\alpha}^d \mod \mathbb{Z}^D$, а поскольку из предыдущих построений следует, что матрица $A$ принадлежит группе $\operatorname{GL}_D(\mathbb{Z})$, приходим к условию (7.11). Предложение доказано.

Следствие 7.1. *Пусть дан вектор сдвига* $\alpha = \alpha^d$ *такой, что* $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha^d) = d \geqslant 1$. *В этом случае для любого частотного распределения* $\nu$, *удовлетворяющего условию* (7.8), *найдется такое преобразование* $A \in \operatorname{GL}_D(\mathbb{Z})$, *что области* $\mathbb{T}^d_{A_t,k}$ *любого разбиения* $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ (*см.* (6.24)) *имеют объемы*

$$\operatorname{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}^d_{A_t,k} = \nu_k \tag{7.27}$$

*для всех* $k = 0, 1, \dots, D$ *или, что равносильно, имеют место равенства*

$$\widehat{\alpha}_{A,k} = \nu_k, \tag{7.28}$$

*где* $\widehat{\alpha}_{A,k}$ *– координаты* (6.10) *вектора сдвига* $\widehat{\alpha}_A$, *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$M(\alpha) = M(\nu), \tag{7.29}$$

*где по аналогии с* (2.13) *полагаем* $M(\nu) = \mathbb{Z}[1, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_D]$.

Доказательство. Докажем необходимость. Имеем $M(\alpha) = M(\widehat{\alpha}_A)$ и, по условию (7.28), $M(\widehat{\alpha}_A) = M(\nu)$, что доказывает равенство (7.29). Докажем достаточность. Рассмотрим вектор $\alpha^D = (\nu_1, \dots, \nu_D)$. Из определения частотного распределения (см. (7.8)) следует, что $\alpha^D \in \mathbf{C}_{<1}$. Согласно условию (7.29) имеем $M(\alpha^D) = M(\alpha^d)$, отсюда и из предложения 7.4 получаем, что $\alpha^D \equiv A\widehat{\alpha}^d \mod \mathbb{Z}^D$ для некоторого преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. Из данного сравнения и включения $\alpha^D \in \mathbf{C}_{<1}$ следует равенство $\alpha^D = \widehat{\alpha}^d_A$ для вектора (6.10). Отсюда выводим (7.28). Следствие доказано.

Следствие 7.2. *Для произвольного вектора сдвига* $\alpha^D \in \mathbb{R}^D$ *ранга* $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d \geqslant 1$ *найдется такое преобразование* $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, *что*

$$\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c \equiv A\widehat{\mathbb{T}}^d \mod \mathbb{Z}^D \tag{7.30}$$

*и, следовательно, для размерности орбиты выполняется равенство*

$$\dim \mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D), \tag{7.31}$$

*т. е. в нашем случае* $\dim \mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c = d$.

Доказательство. По условию $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d$. Отсюда следует существование вектора $\alpha^d \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего условиям

$$M(\alpha^d) = M(\alpha^D), \qquad \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha^d) = d. \tag{7.32}$$

Отсюда и из предложения 7.4 получаем $\alpha^D \equiv A\widehat{\alpha}^d \mod \mathbb{Z}^D$ для некоторого $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. Поэтому

$$\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0) \equiv A\widehat{\mathrm{Orb}}_{S_{\alpha^d}}(0) \mod \mathbb{Z}^D. \tag{7.33}$$

Поскольку $\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^d}}(0)^c = \mathbb{T}^d$, то отсюда и из (7.33) выводим (7.30). Следствие доказано.

Замечание 7.2. Следствие 7.2 показывает, что вложения торов и торические обмотки из п. 6.1 представляют собою общую конструкцию для всех сдвигов $S_{\alpha^D}$ тора $\mathbb{T}^D$ при условии, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d$, где $d \leqslant D$.

## § 8. Динамические разбиения тора

**8.1. Двойственное вложение торов.** Определим для вложения (6.1) двойственное ему вложение

$$\mathbb{R}^{d'} \overset{\vee}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{d'^{\vee}} \subseteq \mathbb{R}^{D}, \tag{8.1}$$

полагая $y^{\vee} = (0, y)$ для $y \in \mathbb{R}^{d'}$. Аналогично (6.2) вложение (8.1) можно факторизовать с помощью отображения

$$y \mod \mathbb{Z}^{d'} \mapsto y^{\vee} \mod \mathbb{Z}^{D}$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^{d'} \overset{\vee}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^{d'^{\vee}} \subseteq \mathbb{T}^{D} \tag{8.2}$$

тора $\mathbb{T}^{d'} = \mathbb{R}^{d'}/\mathbb{Z}^{d'}$ в тор $\mathbb{T}^{D} = \mathbb{R}^{D}/\mathbb{Z}^{D}$. При этом вложение (8.2) согласуется с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{d'} \arrow[r, hook, "\wedge"] \arrow[d, "S_\rho"', "\sim"] & \mathbb{T}^{D} \arrow[d, "S_{\rho^\vee}", "\sim"'] \\ \mathbb{T}^{d'} \arrow[r, hook, "\wedge"] & \mathbb{T}^{D} \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\rho(y) \equiv y + \rho \mod \mathbb{Z}^{d'}, \qquad S_{\rho^\vee}(y^\vee) \equiv y^\vee + \rho^\vee \mod \mathbb{Z}^{D}. \tag{8.4}$$

**8.2. Расслоенные торические обмотки.** В дальнейшем нас будет интересовать исключительно случай, когда вектор сдвига $\rho$ из (8.4) рационален: $\rho \in \mathbb{Q}^{d'}$. При таком выборе орбита $\mathrm{Orb}_{S_\rho}(y_0^{d'})$ любой начальной точки $y_0^{d'} \in \mathbb{T}^{d'}$ является периодической и ее *период* $p$ не зависит от выбора точки $y_0^{d'}$.

Определим прямое произведение $S_\alpha \times S_\rho$ сдвигов тора (6.5) и (8.4):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{d} \times \mathbb{T}^{d'} \arrow[r, "\wedge\times\vee"] \arrow[d, "S_\alpha\times S_\rho"', "\sim"] & \mathbb{T}^{D} \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_\rho}", "\sim"'] \\ \mathbb{T}^{d} \times \mathbb{T}^{d'} \arrow[r, "\wedge\times\vee"] & \mathbb{T}^{D} \end{tikzcd} \tag{8.5}$$

где

$$\widehat{\alpha}_\rho = \alpha \times \rho = \widehat{\alpha} + \rho^\vee. \tag{8.6}$$

Рассмотрим орбиту

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_\rho = \mathrm{Orb}_{S_{\widehat{\alpha}_\rho}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) \subset \mathbb{T}^D \tag{8.7}$$

торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ относительно сдвига на вектор (8.6). Поскольку согласно (6.6) $S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d$, то имеем $\mathrm{Orb}_{S_{\widehat{\alpha}_\rho}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \mathrm{Orb}_{S_{\rho^\vee}}(\widehat{\mathbb{T}}^d)$. Поэтому орбита (8.7) имеет вид

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_\rho = \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho(0) \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho(1) \sqcup \cdots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho(p-1), \tag{8.8}$$

т. е. представляет собою объединение $p$ непересекающихся связных торических обмоток размерности $d$, где для любого $j = 0, 1, \ldots, p-1$ через $\widehat{\mathbb{T}}^d_\rho(j) = S^j_{\rho^\vee}(\widehat{\mathbb{T}}^d)$

мы обозначили связную обмотку, получающуюся сдвигом обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ на вектор $j\rho^\vee \mod \mathbb{Z}^D$. Используя изоморфизм (8.5), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_\rho}"', "\sim"] & \widehat{\mathbb{T}}^d \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}}"] \\ \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & \widehat{\mathbb{T}}^d \end{tikzcd} \tag{8.9}$$

Здесь pr обозначает проекцию

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{\mathrm{pr}} \widehat{\mathbb{T}}^d\colon (x, y) \mod \mathbb{Z}^D \mapsto \mathrm{pr}(x, y) = x \mod \mathbb{Z}^d. \tag{8.10}$$

**8.3. Определение динамического разбиения тора $\mathbb{T}^d$.** Определим вектор сдвига $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$ тора $\mathbb{T}^D$:

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} \equiv A\widehat{\alpha}_\rho \mod \mathbb{Z}^D, \tag{8.11}$$

где $\widehat{\alpha}_\rho$ – вектор (6.10), полагая при этом, что вектор $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$ выбран в виде

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} = (\widehat{\alpha}_{\rho,A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{\rho,A,D}), \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant \widehat{\alpha}_{\rho,A,k} < 1. \tag{8.12}$$

Пусть

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} = A_t \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho \subseteq \mathbb{T}^D \tag{8.13}$$

– объединение $p$ торических обмоток, получающихся из (8.8) с помощью изоморфизма $A_t = S_t A$. В силу (8.5) и (8.11) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho \arrow[r, "A_t", "\sim"'] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_\rho}"', "\sim"] & \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}_{\rho,A}}"] \\ \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho \arrow[r, "A_t", "\sim"'] & \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} \end{tikzcd} \tag{8.14}$$

и вложение

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "S_{\widehat{\alpha}_\rho}"', "\sim"] & \mathbb{T}^D \arrow[d, "\sim"', "S_{\widehat{\alpha}_\rho}"] \\ \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] & \mathbb{T}^D \end{tikzcd} \tag{8.15}$$

Пусть для некоторого преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ вектор сдвига (8.12) удовлетворяет условию

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} \in \mathbf{C}_{<1}. \tag{8.16}$$

Аналогично (6.20) определим вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ равенством

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где} \ \ \sigma(\widehat{\alpha}_{\rho,A}) < \lambda \leqslant 1. \tag{8.17}$$

По схеме (4.24) для так выбранных $\mathbf{c}$ и $\lambda$ можно построить каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$:

$$\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}^D_D, \tag{8.18}$$

ограничение которого на множество (8.13) порождает разбиение

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,0} \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,1} \sqcup \cdots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,D} \tag{8.19}$$

на множества

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,k} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t} \cap \mathbb{T}^D_k. \tag{8.20}$$

Так определенное разбиение (8.19) представляет собою объединение разбиений $p$ торических обмоток $\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t}$.

Биекция $A_t$ из диаграммы (8.14) индуцирует на множестве $\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho}$, определенном в (8.7), разбиение

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda} = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,0} \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,1} \sqcup \cdots \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,D}, \tag{8.21}$$

которое, в свою очередь, задает разбиения связных обмоток $\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho}(j) \subset \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho}$:

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j) = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,0}(j) \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,1}(j) \sqcup \cdots \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,D}(j), \tag{8.22}$$

где

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,k}(j) = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,k} \cap \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho}(j). \tag{8.23}$$

Используя (8.22), зададим на торе $\mathbb{T}^d$ разбиения

$$\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j) = \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,0}(j) \sqcup \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,1}(j) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,D}(j) \tag{8.24}$$

для $j = 0, 1, \ldots, p-1$. В разбиении (8.24) каждая из областей $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(j)$ определяется с помощью следующей биекции:

$$\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(j) \xrightarrow[\sim]{\wedge} \operatorname{pr} A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho,A_t,k}(j), \tag{8.25}$$

где $\wedge$ – вложение тора $\mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^D$, определенное в (8.2), и pr – проекция (8.10).

Пусть $k = 0, 1, \ldots, D$. Назовем периодическую последовательность разбиений

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(0) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(1) \quad \Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(p-1) \\ \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(0) \quad \Longrightarrow \quad \cdots \end{aligned} \tag{8.26}$$

*динамическим разбиением* $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ тора $\mathbb{T}^d$. Его отличие от стационарного разбиения $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ из (6.24) состоит в следующем: когда мы рассматриваем последовательность сдвигов $S^j_\alpha$, то каждому шагу $j = 1, 2, 3, \ldots$ отвечает свое разбиение $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(\overline{j})$ тора $\mathbb{T}^d$, где номер $\overline{j} = 0, 1, \ldots, p-1$ определяется сравнением $\overline{j} \equiv j \mod p$.

По определению последовательность (8.26) имеет период $p$. В следующем пункте будет выяснено, что в определении (8.26) порядок следования разбиений $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j)$ играет существенную роль.

**8.4. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: динамический случай.** Сначала рассмотрим тор $\mathbb{T}^d$. Для динамического разбиения $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ введем *считающие функции* следующим образом (ср. с определением (6.34)):

$$\mathbf{r}_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j; S_\alpha^j(x_0^d)\in\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(\bar{j}); 0\leqslant j<i\}, \tag{8.27}$$

где $x_0^d$ – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^d$. Пусть вектор сдвига $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$ имеет координаты $\widehat{\alpha}_{\rho,A}=(\widehat{\alpha}_{\rho,A,1},\dots,\widehat{\alpha}_{\rho,A,D})$ (см. (8.12)). Тогда соответствующие разности

$$\delta_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}) - i\,\widehat{\alpha}_{\rho,A,k} \tag{8.28}$$

для $k=0,1,\dots,D$ назовем *отклонениями* распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$!!!!!!!!! относительно областей динамического разбиения $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ с номером $k$.

Будем говорить, что точка $x_j^d=S_\alpha^j(x_0^d)$ из $S_\alpha$-орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$ имеет *цвет*

$$\mathrm{col}(x_j^d)=k$$

относительно динамического разбиения $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$, если $x_j^d\in\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(\bar{j})$, где $k=0,1,\dots,D$ (см. (8.26)).

Замечание 8.1. В этих терминах $\mathbf{r}_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda})$ равно количеству точек $x_j^d$, $0\leqslant j<i$, имеющих цвет $\mathrm{col}(x_j^d)=k$, а второе слагаемое $i\,\widehat{\alpha}_{\rho,A,k}$ в правой части (8.28) есть ожидаемое среднее значение числа точек, принимающих данный цвет. Таким образом, тор $\mathbb{T}^d$ на каждом шаге $j$ имеет свою окраску, определяемую динамическим разбиением $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$, и цвет точки $x_j^d$ определяется не только ее местонахождением на торе $\mathbb{T}^d$, но зависит и от шага, или времени, $j$.

Переходя к тору $\mathbb{T}^D$, определим обычным способом считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i;\widehat{\alpha}_{\rho,A},x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\big\{j;\ S^j_{\widehat{\alpha}_{\rho,A}}(x_0^D)\in\mathbb{T}^D_k;\ 0\leqslant j<i\big\} \tag{8.29}$$

для начальной точки

$$x_0^D = A_t\widehat{x}_0^d = A_t^\wedge x_0^d \tag{8.30}$$

на торе $\mathbb{T}^D$ и отвечающее (8.29) отклонение

$$\delta_k(i;\widehat{\alpha}_{\rho,A},x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i;\widehat{\alpha}_{\rho,A},x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) - i\widehat{\alpha}_{\rho,A,k} \tag{8.31}$$

для $k=0,1,\dots,D$, где $\widehat{\alpha}_{\rho,A,k}$ – координаты (8.12) вектора сдвига $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$.

Теорема 8.1. 1) *В условиях теоремы 6.2 для отклонений (8.31) имеют место неравенства*

$$|\delta_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda})|\leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) \quad \text{для}\ \ k=0,1,\dots,D, \tag{8.32}$$

*где константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ определены в (6.31), (6.32).*

2) *Независимо от выбора параметра $\mathbf{c}\in\mathbf{C}_{<1}$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda})|<D \quad \text{для}\ \ k=0,1,\dots,D. \tag{8.33}$$

Доказательство. Из диаграмм (8.9), (8.14) и (8.15) следует согласованность отклонений

$$\delta_k(i;\alpha,x_0^d,\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda})=\delta_k(i;\widehat{\alpha}_{\rho,A},x_0^D,\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}),$$

откуда вытекают утверждения теоремы.

## § 9. Свойства динамических разбиений тора

Динамическое разбиение $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ представляет собою единую систему (8.26) – последовательность из $p$ обычных стационарных разбиений $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j)$ тора $\mathbb{T}^d$. Далее мы увидим, что динамическое разбиение $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ обладает некоторыми новыми свойствами, отсутствующими у составляющих его стационарных разбиений $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j)$.

**9.1. Множества ограниченного остатка.** В нетривиальном случае, когда период $p$ больше 1, множества $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(j)$, $k=0,1,\dots,D$, образующие стационарное разбиение $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}(j)$, не являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига $S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d$. Согласно теореме 8.1, таковой является только периодическая последовательность из $p$ разбиений (8.26).

Если нециклической подстановкой $\sigma$ переставить стационарные разбиения в последовательности (8.26) и, тем самым, переставить соответствующим образом разбиения в последовательности (8.26), то для нового динамического разбиения $\sigma\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ теорема 8.1 уже не будет выполняться (см. пример из п. 10.3).

**9.2. Частоты и объемы областей.** Согласно теореме 8.1, частота $\nu_k$, с которой точки $x_j^d$ из орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$ принимают цвет $\mathrm{col}(x_j^d)=k$, равна

$$\nu_k=\widehat{\alpha}_{\rho,A,k}. \tag{9.1}$$

Но тогда из определений (8.29), (8.30) и теоремы 8.1 будет следовать формула

$$\frac{1}{p}\big(\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(0)+\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(1)+\dots+\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(p-1)\big)=\widehat{\alpha}_{\rho,A,k}, \tag{9.2}$$

где $\mathrm{vol}=\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d}$ – объем на торе $\mathbb{T}^d$. Это означает, что в отличие от стационарных разбиений, когда

$$\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^d_{A_t,k}=\nu_k=\widehat{\alpha}_{A,k}, \tag{9.3}$$

для динамических разбиений $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ лишь среднее значение (9.2) объема всех областей $\mathbb{T}^d_{\rho,A_t,k}(j)$, $j=0,1,\dots,p-1$, равно частоте $\nu_k$ (см. рис. 3).

**9.3. Переход от вектора сдвига $\alpha$ к вектору $\beta$.** Если заменить вектор сдвига $\alpha$ на вектор $\beta$, то неравенство (8.32) в теореме 8.1 в общем случае перестает быть верным. Указанное свойство отличает динамические разбиения $\mathcal{D}^d_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}$ от стационарных $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$. Однако при некоторых дополнительных ограничениях на знаменатель $h$ в определении (6.26) вектора $\beta$ неравенство (8.32) все же удается сохранить.

Теорема 9.1. *Пусть* $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, *где* $l^d \in \mathbb{Z}^d$ *и* $h$ *удовлетворяет условию* $h \equiv 1 \mod p$. *Тогда если выполнены условия теоремы* 6.2, *то для* $k$*-отклонений* (8.31) *имеют место неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathcal{D}^d_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda})| \leqslant c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h, \qquad k = 0, 1, \ldots, D. \tag{9.4}$$

Доказательство. По определению (8.6) имеем $\widehat{\beta}_\rho = \widehat{\beta} + \rho^\vee$. Отсюда и из определения (8.7) следует, что множество $\widehat{\mathbb{T}}^d_\rho$ остается инвариантным $S_{\widehat{\beta}_\rho}(\widehat{\mathbb{T}}^d_\rho) = \widehat{\mathbb{T}}^d_\rho$ и относительно действия сдвига $S_{\widehat{\beta}_\rho}$, а следовательно, инвариантным будет и множество $\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho, A_t}$ из (8.13):

$$S_{\widehat{\beta}_{\rho, A}}(\widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho, A_t}) = \widehat{\mathbb{T}}^d_{\rho, A_t}. \tag{9.5}$$

Чтобы получить неравенство (9.4), мы хотим применить теорему 5.1, доказательство которой, в свою очередь, основывается на одном сравнении, которое в нашем случае будет иметь вид

$$h\widehat{\beta}_{\rho, A} \equiv \widehat{\alpha}_{\rho, A} \mod \mathbb{Z}^D. \tag{9.6}$$

По условию $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, поэтому сравнение (9.6) равносильно более простому сравнению

$$h\widehat{\beta}_\rho \equiv \widehat{\alpha}_\rho \mod \mathbb{Z}^D. \tag{9.7}$$

Здесь $\widehat{\alpha}_\rho = \widehat{\alpha} + \rho^\vee$ и $\widehat{\beta}_\rho = \widehat{\beta} + \rho^\vee$ для вектора сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, определенного в (5.1). Имеем

$$h\widehat{\beta}_\rho \equiv h\widehat{\beta} + h\rho^\vee \equiv \widehat{\alpha} + \widehat{l}^D + h\rho^\vee \mod \mathbb{Z}^D,$$

где вектор $\widehat{l}^D$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^D$. Поэтому (9.7) можно переписать в виде сравнения $h\rho^\vee \equiv \rho^\vee \mod \mathbb{Z}^D$, справедливого в силу условия $h \equiv 1 \mod p$, где $p\rho \in \mathbb{Z}^{d'}$, поскольку согласно соглашению из п. 8.2 $p$ – период сдвига $S_{\rho^\vee}$ тора $\mathbb{T}^D$.

Теперь неравенства (9.4) вытекают из теоремы 5.1, инвариантности (9.5) и сравнения (9.6). Теорема доказана.

## § 10. Двумерные многоцветные разбиения тора

**10.1. Перекладывающиеся торические развертки $T^3_{\mathbf{c},\lambda}$.** Согласно (4.5) в случае размерности $D = 3$ параллелепипед $\mathcal{C}$ натянут на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}}$, $\mathbf{e}_{2,\mathbf{c}}$, $\mathbf{e}_{3,\mathbf{c}}$, а вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C})$, определенный в (4.7), для $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ представляет собою ромбический додекаэдр, имеющий 14 вершин:

$$\begin{array}{rlrl}
0, & & \mathbf{e}_0 - 2\mathbf{c}, & \\
\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}}, & 1 \leqslant k \leqslant 3, & \mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} + \mathbf{e}_{k',\mathbf{c}}, & 1 \leqslant k < k' \leqslant 3, \\
\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} + \mathbf{c}, & 1 \leqslant k \leqslant 3, & \mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} + \mathbf{e}_{k',\mathbf{c}} + \mathbf{c}, & 1 \leqslant k < k' \leqslant 3.
\end{array} \tag{10.1}$$

Пусть вектор сдвига $\alpha$ определен равенством $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда ввиду (4.14) параллелоэдр $\mathcal{C}_c$ допускает разбиение

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}^c_0 \cup \mathcal{P}^c_1 \cup \mathcal{P}^c_2 \cup \mathcal{P}^c_3. \tag{10.2}$$

Здесь $\mathcal{P}_k^c$ – многогранники, однозначно определяемые условиями $0 \in \mathcal{P}_0^c$, $\mathbf{e_k} \in \mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, 2, 3$. При этом многогранники $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, 2, 3$ являются параллелепипедами, а $\mathcal{P}_0^c = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C})$ является ромбическим додекаэдром, как и параллелоэдр $\mathcal{C}_\mathbf{c}$. Поскольку точка $\omega = \mathbf{e}_0 - 2\mathbf{c} - \alpha$ является общей вершиной всех многогранников $\mathcal{P}_k^c$ из (10.2), то их можно явно задать следующим образом:

$$\mathcal{P}_k^c = \mathcal{C}_\mathbf{c} \cap \mathbf{T}_k \quad \text{для всех} \ \ 0 \leqslant k \leqslant 3, \tag{10.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_0 = T(\omega, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), \qquad &&\mathbf{T}_1 = T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), \\ &\mathbf{T}_2 = T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), &&\mathbf{T}_3 = T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2) \end{aligned} \tag{10.4}$$

– трехгранные углы с общей вершиной $\omega$ и лучами, определяемыми соответствующими векторами в (10.4).

Теперь, используя разбиение (10.2) и теорему 4.1, построим в пространстве $\mathbb{R}^3$ перекладывающуюся торическую развертку

$$T^3_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 \sqcup \mathcal{P}_3 \tag{10.5}$$

с векторами перекладывания $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - \mathbf{e}_1$, $v_2 = \alpha - \mathbf{e}_2$, $v_3 = \alpha - \mathbf{e}_3$. Здесь $\mathcal{P}_k$ обозначает незамкнутый многогранник, состоящий из всех внутренних точек многогранника $\mathcal{P}_k^c$ и некоторых его граничных точек, определяемых через индекс $i$ (см. (4.20)). Из $i$-алгоритма п. 4.5 следует, что грани определенной размерности либо целиком принадлежат многограннику $\mathcal{P}_k$, либо не пересекаются с ним. Так как в дальнейшем граничные точки многогранников $\mathcal{P}_k$ нам не понадобятся, то мы не будем их здесь явно описывать.

Пусть точка $x$ принадлежит развертке $T^3_{\mathbf{c},\lambda}$ и не является граничной точкой ни одного из многогранников $\mathcal{P}_k^c$. Если при этом $x$ принадлежит трехгранному углу $\mathbf{T}_k$, то в силу равенства (10.3) она принадлежит многограннику $\mathcal{P}_k$ и, значит, мы можем найти ее образ

$$S_v(x) = x + v_k \tag{10.6}$$

при перекладывании (4.16).

**10.2. Двумерные стационарные разбиения.** Пусть $d = 2$ и вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет координаты, например, $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$. В качестве унимодулярной матрицы (6.9) выберем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

Для нее вектор

$$\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \widehat{\alpha}_{A,2}, \widehat{\alpha}_{A,3}), \qquad \text{где} \ \ 0 \leqslant \widehat{\alpha}_{A,k} < 1, \tag{10.8}$$

удовлетворяющий сравнению $\widehat{\alpha}_A \equiv A^\wedge \alpha \mod \mathbb{Z}^3$, будет иметь координаты

$$\widehat{\alpha}_{A,1} = 5 - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}, \qquad \widehat{\alpha}_{A,2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \qquad \widehat{\alpha}_{A,3} = -3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \tag{10.9}$$

Их приближенные значения с точностью до двух знаков после запятой таковы: $\widehat{\alpha}_{A,1} \approx 0.12$, $\widehat{\alpha}_{A,2} \approx 0.31$, $\widehat{\alpha}_{A,3} \approx 0.14$.

Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством $\widehat{\alpha}_A = \lambda\mathbf{c}$, где $\lambda = 1$. Согласно (10.9), он удовлетворяет условию $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$. Поэтому для такого вытягивающего вектора $\mathbf{c}$ можно построить перекладывающуюся торическую развертку $T^3_{\mathbf{c},\lambda}$ из (10.5), а с ее помощью по схеме (4.24) можем определить каноническое разбиение

$$\mathbb{T}^3_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^3_0 \sqcup \mathbb{T}^3_1 \sqcup \mathbb{T}^3_2 \sqcup \mathbb{T}^3_3 \tag{10.10}$$

тора $\mathbb{T}^3$. Используя изоморфизм (6.2), мы можем перенести разбиение (10.10) на тор $\mathbb{T}^2$ и построить на нем соответствующее стационарное разбиение (см. рис. 1)

$$\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^2_{A,0} \sqcup \mathbb{T}^2_{A,1} \sqcup \mathbb{T}^2_{A,2} \sqcup \mathbb{T}^2_{A,3}. \tag{10.11}$$

Рассмотрим теперь неоднородный случай: выберем вектор сдвига $t^3 = t = (t_1, t_2, t_3)$ с координатами $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0$. Тогда для тех же $\alpha$ и $A$ получаем еще одно стационарное разбиение тора $\mathbb{T}^2$ (см. рис. 2):

$$\mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^2_{A_t,0} \sqcup \mathbb{T}^2_{A_t,1} \sqcup \mathbb{T}^2_{A_t,2} \sqcup \mathbb{T}^2_{A_t,3}. \tag{10.12}$$

В нашем случае вектор сдвига $t^3 = t$ не принадлежит факторгруппе $\mathbb{T}^3/A^\wedge\,\mathbb{T}^2$, поэтому разбиение $\mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ не может быть получено из разбиения $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}$ параллельным сдвигом тора $\mathbb{T}^2$. Это можно увидеть непосредственно, если сравнить рис. 1 и рис. 2. Однако эти разбиения согласно формуле (7.7) обладают общим свойством: их области с одинаковыми номерами имеют равные площади:

$$\operatorname{sq}\mathbb{T}^2_{A_t,k} = \operatorname{sq}\mathbb{T}^2_{A,k} = \widehat{\alpha}_{A,k} \quad \text{при любом } t \in \mathbb{T}^3. \tag{10.13}$$

В п. 5.2 для размерности $d = 2$ мы нашли многоугольники ограниченного остатка: специальные параллелограммы и шестиугольники. Стационарные разбиения (10.11) и (10.12) значительно расширяют класс фигур ограниченного остатка. Например, область $\mathbb{T}^2_{A_t,2}$ (см. рис. 2) состоит из объединения параллелограмма, пятиугольника и двух треугольников, рассматриваемых по модулю $\mathbb{Z}^2$. Однако нужно заметить, что параллельными сдвигами они могут быть совмещены снова в один параллелограмм.

Для полученных разбиений оценим величины отклонений. Выберем начальную точку $x_0^2 = (0,0)$ на торе $\mathbb{T}^2$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}$ из (10.11) рассмотрим определенные в (6.35) отклонения

$$\delta_k(i;\alpha,x_0^2,\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i;\alpha,x_0^2,\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}) - i\,\widehat{\alpha}_{A,k} \tag{10.14}$$

распределения точек орбиты $\operatorname{Orb}_{S_\alpha}(x_0^2)$ относительно областей $\mathbb{T}^2_{A,k}$ из разбиения $\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda}$. По теореме 5.1 для отклонений (10.14) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i;\alpha,x_0^2,\mathbb{T}^2_{A,\mathbf{c},\lambda})| \leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}), \tag{10.15}$$

где $k = 0,1,2,3$ и $i = 0,1,2,\dots$, с константами $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$, определенными в (6.31) и (6.32). Используя координаты (10.9) и равенство $\mathbf{c} = \widehat{\alpha}_A$, находим для констант

$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ их численные значения:

$$\begin{aligned} &c_0(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = -1 + 2\sqrt{2} < 1.9, && c_1(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 11 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 1.3, \\ &c_2(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1.7, && c_3(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = -5 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1.3. \end{aligned} \tag{10.16}$$

По теореме 5.1 отклонения $\delta_k(i; \alpha, x_0^2, \mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda})$ для разбиения (10.11) имеют ограничения (10.15) с теми же самыми константами (10.16). Причем согласно предложению 7.2 этим же свойством будут обладать все разбиения вида (10.12) при любых сдвигах $S_t$ тора $\mathbb{T}^3$ и для произвольных начальных точек $x_0^2 \in \mathbb{T}^2$.

При фиксированном векторе $\alpha$ выбор матрицы $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ однозначно определяет частоты $\widehat{\alpha}_{A,k}$ в (10.14). Согласно следствию 7.1 любое частотное распределение $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}^{D+1}_{<1}$ реализуется как $\nu_k = \widehat{\alpha}_{A,k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, через выбор матрицы $A$ тогда и только тогда, когда модуль $M(\nu)$ совпадает с модулем

$$M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \alpha_2] = \mathbb{Z}[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

В случае $M(\nu) = M(\alpha)$ найдется такая матрица $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, что области $\mathbb{T}^2_{A_t,k}$ из разбиения (10.12) будут иметь площади $\mathrm{sq}\,\mathbb{T}^2_{A_t,k} = \nu_k$ для всех $k = 0, 1, 2, 3$.

**10.3. Двумерные динамические разбиения.** Имеем $D = d + d'$, где в нашем случае $d = 2$, $d' = 1$. Снова предполагаем, что вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет координаты $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$. Если выбрать $\varrho = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^1$, то сдвиг $S_\varrho$ будет иметь период $p = 3$, тогда в силу (8.6) имеем $\widehat{\alpha}_\varrho = (\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{3})$. Для такого вектора $\widehat{\alpha}_\varrho$ выберем унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

Для нее вектор (см. определение (8.12))

$$\widehat{\alpha}_{\varrho,A} = (\widehat{\alpha}_{\varrho,A,1}, \widehat{\alpha}_{\varrho,A,2}, \widehat{\alpha}_{\varrho,A,3}), \quad \text{где } 0 \leqslant \widehat{\alpha}_{\varrho,A,k} < 1, \tag{10.18}$$

удовлетворяющий сравнению $\widehat{\alpha}_{\varrho,A} \equiv A^\wedge \alpha_\varrho \mod \mathbb{Z}^3$, будет иметь координаты

$$\widehat{\alpha}_{\varrho,A,1} = 4\frac{2}{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, \qquad \widehat{\alpha}_{\varrho,A,2} = 1\frac{2}{3} - \sqrt{2}, \qquad \widehat{\alpha}_{\varrho,A,3} = -1\frac{1}{3} + \sqrt{2}, \tag{10.19}$$

приближенные значения которых таковы: $\widehat{\alpha}_{\varrho,A,1} \approx 0.1$, $\widehat{\alpha}_{\varrho,A,2} \approx 0.25$, $\widehat{\alpha}_{\varrho,A,3} \approx 0.08$.

Снова определим вектор $\mathbf{c}$ равенством $\widehat{\alpha}_{\varrho,A} = \lambda\mathbf{c}$, где $\lambda = 1$. Согласно (10.19), вектор $\mathbf{c}$ принадлежит области $\mathbf{C}_{<1}$, поэтому для него можно построить перекладывающуюся торическую развертку $T^3_{\mathbf{c},\lambda}$ вида (10.5). С ее помощью по схеме (4.24) можем определить каноническое разбиение $\mathbb{T}^3_{\mathbf{c},\lambda}$ вида (10.10) и по нему, используя (10.17), задать на торе $\mathbb{T}^2$ разбиения

$$\mathbb{T}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}(j) = \mathbb{T}^2_{\rho,A,0}(j) \sqcup \mathbb{T}^2_{\rho,A,1}(j) \sqcup \mathbb{T}^2_{\rho,A,2}(j) \sqcup \mathbb{T}^2_{\rho,A,3}(j) \tag{10.20}$$

для $j = 0, 1, 2$. Из данных разбиений собираем периодические последовательности

$$\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(0) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(1) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(0) \quad \Longrightarrow \quad \cdots, \tag{10.21}$$

порождающие динамическое разбиение $\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}$ тора $\mathbb{T}^2$ (см. рис. 3).

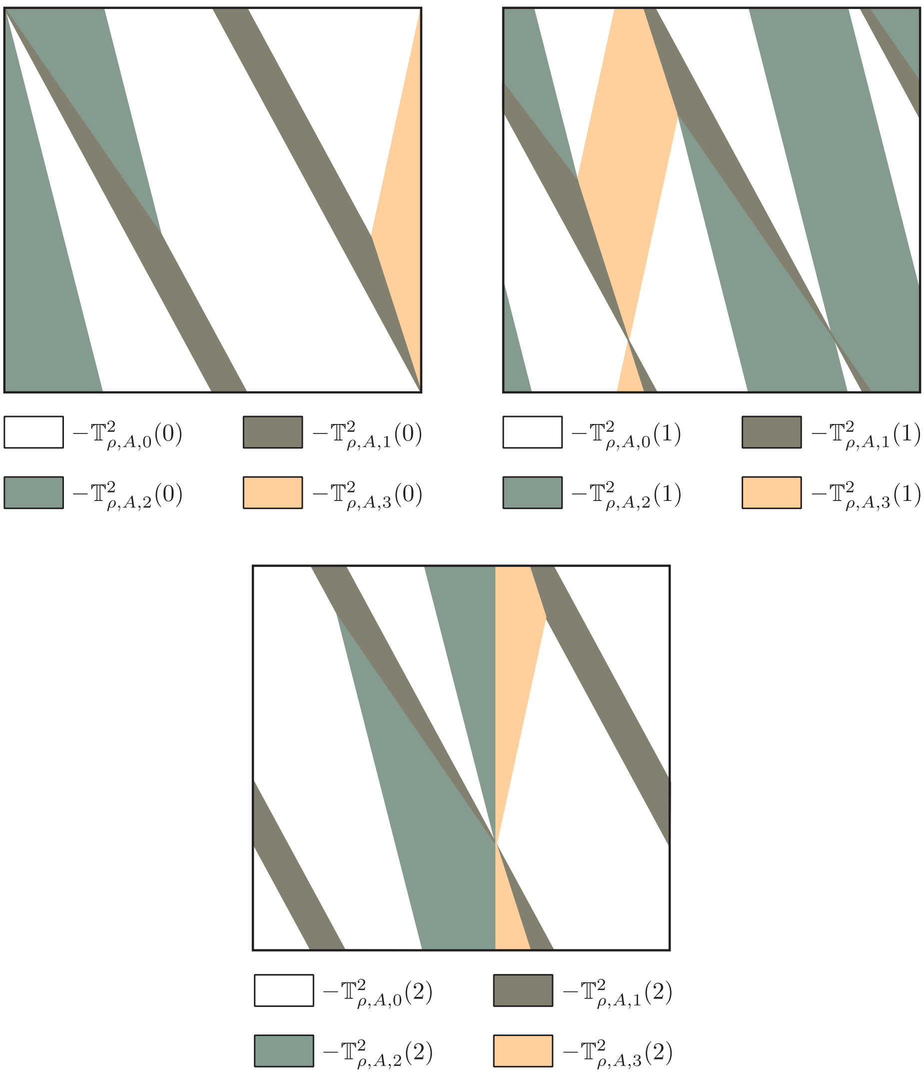


Рис. 3. Динамическое разбиение тора $\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}$

Теперь для размерности $d = 2$ мы имеем возможность сравнить стационарные разбиения $\mathbb{T}^2_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ и динамические разбиения $\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}$. Прежде всего заметим (см. рис. 3), что для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, 3$ множества

$\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(0)$, $\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(1)$ и $\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(2)$ имеют различные площади, никак по отдельности не связанные с координатами или частотами $\widehat{\alpha}_{\varrho,A,k}$. Лишь для среднего значения площадей указанных множеств такая связь имеет место:

$$\frac{1}{3}\big(\mathrm{sq}\,\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(0)+\mathrm{sq}\,\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(1)+\mathrm{sq}\,\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(2)\big)=\widehat{\alpha}_{\rho,A,k}. \tag{10.22}$$

Перейдем к оценке отклонений. По определению (8.28) отклонения распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x^2_0)$ относительно областей $\mathbb{T}^2_{\rho,A,k}(j)\subset\mathbb{T}^2$, $j=0,1,2$, динамического разбиения $\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}$ задаются равенствами

$$\delta_k(i;\alpha,x^d_0,\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda})=\mathbf{r}_k(i;\alpha,x^2_0,\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda})-i\,\widehat{\alpha}_{\rho,A,k} \tag{10.23}$$

для $k=0,1,2,3$. По теореме 8.1 для этих отклонений выполняются неравенства

$$|\delta_k(i;\alpha,x^2_0,\mathcal{D}^2_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda})|\leqslant c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}), \tag{10.24}$$

где константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ определены в (6.31) и (6.32). Используя координаты (10.19) и равенство $\mathbf{c}=\widehat{\alpha}_{\rho,A}$, находим для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ их численные значения:

$$\begin{aligned} &c_0(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})=-7+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}<2.2, && c_1(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})=10\frac{1}{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}<1.3,\\ &c_2(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})=4\frac{1}{3}-2\sqrt{2}<1.6, && c_3(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})=-1\frac{2}{3}+2\sqrt{2}<1.2. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Из неравенств (10.24) следует, что свойством ограниченного остатка обладают объединения всех одноцветных множеств из периодической последовательности (10.21). С другой стороны, численные расчеты показывают, что, например, $S_\alpha$-орбиты на множествах $\mathbb{T}^d_{\rho,A,2}(0)$ и $\mathbb{T}^d_{\rho,A,3}(0)$, представляющих собою треугольники (см. рис. 3, a), допускают отклонения, на два порядка превышающие значения (10.25).

## Список литературы


1. E. Hecke, “Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1**:1 (1922), 54–76.
2. I. Oren, “Admissible functions with multiple discontinuities”, *Proceedings of the Special Seminar on Topology*, т. I (Mexico City, 1980/1981), Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City, 1981, 217–230.
3. R. Szüsz, A. Rényi, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5**:1-2 (1954), 35–39.
4. P. Liardet, “Regularities of distribution”, *Compositio Math.*, **61**:3 (1987), 267–293.
5. G. Rauzy, “Ensembles à restes bornés”, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1983–1984 (Talence, 1983/1984), Exp. No. 24, Univ. Bordeaux I, Talence, 1984, 12 pp..
6. S. Ferenczi, “Bounded remainder sets”, *Acta Arith.*, **61**:4 (1992), 319–326.
7. В. Г. Журавлев, “Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 83–106; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:2 (2006), 4658–4672.

8. В. Г. Журавлев, “Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей”, *Алгебра и анализ*, **24**:1 (2012), 95–130; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Multi-dimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:1 (2013), 71–97.
9. В. Г. Журавлев, “Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 26, Зап. научн. сем. ПОМИ, **392**, ПОМИ, СПб., 2011, 95–145; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **184**:6 (2012), 716–745.
10. В. Г. Журавлев, “Многогранники ограниченного остатка”, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения А. А. Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Bounded remainder polyhedra”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280**:, suppl. 2 (2013), S71–S90.
11. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1952, 391 с.
12. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Изд-во АН СССР, М., 1953, 410 с.
13. H. Weyl, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352.
14. В. Г. Журавлев, “Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова”, *Алгебра и анализ*, **24**:4 (2012), 97–136; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:4 (2013), 601–629.

Владимир Георгиевич Журавлев
(Vladimir G. Zhuravlev)
Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
*E-mail*: vzhuravlev@mail.ru

Поступило в редакцию
04.06.2012
06.03.2015