Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №6

ВЛОЖЕНИЕ КРУГОВЫХ ОРБИТ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

© В. Г. ЖУРАВЛЕВ

Пусть $r_{n,\alpha}(i,t)$ — количество точек из последовательности $\{t\}$, $\{\alpha+t\}$, $\{2\alpha+t\},\ldots$, попавших в полуинтервал $[0,\{n\alpha\})$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x, n — произвольное целое число и t — любое фиксированное число. Обозначим через $\delta_{n,\alpha}(i,t)=i\{n\alpha\}-r_{n,\alpha}(i,t)$ величину отклонения ожидаемого количества попаданий $i\{n\alpha\}$ точек указанной выше последовательности в полуинтервал $[0,\{n\alpha\})$ длины $\{n\alpha\}$ от реального числа их попаданий $r_{n,\alpha}(i,t)$. Э. Гекке доказал теорему: для отклонений $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ выполняется неравенство $|\delta_{n,\alpha}(i,t)|\leqslant|n|$ для всех $t\in[0,1)$ и $i=0,1,2,\ldots$ В работе найдены условия на параметры n и α, при которых величина $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ может быть ограничена $|\delta_{n,\alpha}(i,t)|<c_\alpha$ некоторой зависящей от α константой $c_\alpha>0$, когда $|n|\to\infty$ и n пробегает бесконечное подмножество целых чисел. Если в качестве параметра n выбираются знаменатели подходящих дробей Q_m для α, то в этом случае вычислены минимальные значения констант c_α. Для доказательств используется новый метод — вложение круговых орбит в разбиения на единичной окружности.

Введение

0.1. Теорема Гекке. Пусть $S_\alpha(x)\equiv x+\alpha \bmod 1$ — вращение окружности единичной длины на угол α и $r_{n,\alpha}(i,t)$ — количество попаданий точек из последовательности

$$S_\alpha^0(t)=t,\quad S_\alpha^1(t)=\alpha+t,\ldots,\quad S_\alpha^{i-1}(t)=(i-1)\alpha+t \mod 1 \tag{0.1}$$

в полуинтервал $I_{n,\alpha}=[0,\{n\alpha\})$ длины $\{n\alpha\}$, где n — произвольное целое число и t — любое число из единичного полуинтервала $I=[0,1)$. Тогда величина

$$\delta_{n,\alpha}(i,t)=i\{n\alpha\}-r_{n,\alpha}(i,t) \tag{0.2}$$

Ключевые слова: теорема Гекке, распределение дробных долей, множества ограниченного остатка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00360.

представляет собой отклонение ожидаемого количества попаданий $i\{n\alpha\}$ точек орбиты (0.1) в полуинтервал $I_{n,\alpha}$ от реального числа их попаданий $r_{n,\alpha}(i,t)$.

Гекке в 1921 г. доказал теорему [2]: для отклонений $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ выполняется неравенство

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| \leqslant |n| \tag{0.3}$$

для всех $t \in I$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$

0.2. Границы колебаний δ-отклонения. Рассмотрим для δ-отклонения (0.2) его граничное значение

$$m_n(\alpha) = \sup_{t\in I} \sup_i |\delta_{n,\alpha}(i,t)|. \tag{0.4}$$

Для любого $\alpha \in I$ определим длину $l(\alpha)$ конечной или бесконечной цепной дроби

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

как максимальный номер l неполного частного q_l, входящего в ее разложение. Если цепная дробь бесконечная, то полагаем $l(\alpha) = +\infty$.

Пусть дано любое $\alpha \in I$ с условием $l(\alpha) \geqslant 2$ и пусть $\alpha = \alpha' + \Delta$, где $\alpha' = [0; q_1, \ldots, q_m] = \frac{P_m}{Q_m}$ — подходящая дробь для α с номером $1 \leqslant m < l(\alpha)$. Кроме того, предположим, что $n = Q_m$. При выполнении данных условий в теореме 7.1 вычислено точное значение для границы δ-отклонения (0.4):

$$m_n(\alpha) = 1 + n(n-1)|\Delta|. \tag{0.5}$$

Определим для любого целого числа n минимальную длину

$$l_\alpha(n) = \min\{s : \varepsilon_1 Q_{m_1} + \ldots + \varepsilon_s Q_{m_s} = n,\ \varepsilon_i = \pm 1\} \tag{0.6}$$

его разложений в алгебраическую сумму знаменателей Q_{m_i} подходящих дробей числа α с условием $1 \leqslant m_i < l(\alpha)$. При этом полагаем $l_\alpha(0) = 0$.

Пусть α — иррациональное число и n — произвольное целое число. Тогда с помощью формулы (0.5) из результатов теорем 7.2 и 8.1 вытекает, что для δ-отклонения (0.2) выполняются следующие неравенства:

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| < l_\alpha(n) + \sum_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{1}{q_{m_i}} \tag{0.7}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ и произвольного $t \in I$. Прямым следствием из неравенства (0.7) является оценка

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| < 2l_\alpha(n). \tag{0.8}$$

В предложении 3.2 доказывается следующий общий факт: если для любого $t \in I$ имеет место оценка вида (0.8), то найдется такое $t^* \in I$, при котором будет выполняться аналогичная оценка с половинным коэффициентом. Так, в данном случае из (0.8) вытекает более сильное неравенство

$$|\delta_{n,\alpha}(i, t^*)| < l_\alpha(n). \tag{0.9}$$

Из предложения 3.1 следует, что возможен и обратный переход от (0.9) к неравенству (0.8).

Укажем еще на теорему 7.4, где обсуждается возможность расширения допускаемых слагаемых в разложениях числа n вида (0.6).

0.3. Золотое сечение. В качестве теста точности неравенств (0.7)–(0.9) выбирается α, равное золотому сечению $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, имеющему простейшее разложение в цепную дробь

$$\tau = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

У данной дроби подходящими дробями будут $\tau^{(m)} = \frac{F_{m-1}}{F_m}$, где F_m — числа Фибоначчи

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \ldots,$$

определяемые рекуррентным соотношением $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$.

Пусть $n = n_1 + \ldots + n_s$ — некоторое минимальное разложение числа n на слагаемые вида $n_k = \pm F_{m_k}$ и, значит, $s = l_\tau(n)$. Тогда в теореме 9.2 для всех $t \in I$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$ доказаны следующие неравенства:

$$|\delta_{n,\tau}(i, t)| \leqslant c_{m_1} + \ldots + c_{m_s}, \tag{0.10}$$

где $c_m = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon_m$, при этом $\varepsilon_m = \tau^m\big(1 + \frac{(-\tau)^m}{\sqrt{5}}\big) > 0$;

$$|\delta_{n,\tau}(i, t)| \leqslant c l_\tau(n), \text{ где } c = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.45, \tag{0.11}$$

и

$$|\delta_{n,\tau}(i, t^*)| \leqslant \frac{3}{4} l_\tau(n) \tag{0.12}$$

для некоторого $t^* \in I$. Здесь переход (0.10) $\Rightarrow$ (0.11) $\Rightarrow$ (0.12) происходит по той же схеме, что и указанный ранее переход (0.7) $\Rightarrow$ (0.8) $\Rightarrow$ (0.9).

0.4. Сравнение с формулой Гекке. Формула Гекке (0.3) универсальна: она указывает верхнюю границу изменения значений δ-отклонения (0.2), при этом параметры $\alpha \in I$ и $n \in \mathbb{Z}$ предполагаются свободными. Эта верхняя граница неограниченно растет при $|n| \to \infty$.

В реальности же δ-отклонение $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ является сильно осциллирующей функцией от n в пределах $-n \leqslant \delta_{n,\alpha}(i,t) \leqslant n$. Доказанные в работе формулы (0.7)–(0.9) показывают, что при определенной связи между α и n величина $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ может быть ограничена

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| < c_\alpha \tag{0.13}$$

некоторой зависящей от α константой $c_\alpha > 0$ при $|n| \to \infty$, когда n пробегает бесконечное подмножество целых чисел $\mathbb{Z}_\alpha \subset \mathbb{Z}$, опреляемое условием (0.6).

В некоторых задачах (генерация хорошо сбалансированных слов [6, 11], вложение решеток в квазипериодические разбиения [13] и др.) требуется знание точных границ (0.13) для δ-отклонений. Формула (0.5) позволяет решать такие задачи, когда в качестве параметра n выбираются знаменатели подходящих дробей Q_m для α.

0.5. Метод. Доказательство приведенных выше результатов опирается на некоторую формулу двойственности, связывающую δ-отклонение (0.2) с равномерностью распределения на единичном полуинтервале I конечной круговой орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha,t)$, состоящей из точек $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \ldots \leqslant \alpha_n < 1$, где $\alpha_k = \{j_k\alpha - t\}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Изучение δ-отклонения для потенциально бесконечной последовательности (0.1) через формулу двойственности сводится к распределению конечного набора точек орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha,t) \subset I$, а эта задача геометрична по своей природе: требуется найти условия, при которых орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha,t)$ вкладывется в разбиение $\mathbf{I}_n = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ единичного полуинтервала I на более мелкие полуинтервалы вида $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$. Вкладывающиеся орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha,t)$ называются когерентными разбиению $\mathbf{I}_n$. Таким образом, задача оценки δ-отклонения сводится к чисто геометрической задаче построения конечных когерентных наборов точек на полуинтервале I.

0.6. История вопроса. К настоящуму времени при исследовании δ-отклонений сформировались несколько подходов.

Один из них применим к чисам Пизо α, на основе которых строятся инвариантные относительно вращений разбиения торов $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ размерности d. Указанный метод реализован только для квадратичных и кубических чисел Пизо. В [8, 14, 7] построены соответственно разбиения Фибоначчи, обобщенные разбиения Фибоначчи, двумерные разбиения

Рози и для составляющих данные разбиения множеств оценены границы δ-отклонений.

Другой подход опирается на оценки сумм дробных долей [1, 4] и применим только в одномерном случае. Этим методом в [15] получены точные по порядку границы для δ-отклонений.

Недавно появился еще один новый подход, который использует перекладывающиеся торические развертки. Этот метод позволил сразу же получать многомерные варианты теоремы Гекке [6, 10, 12] для δ-отклонений на торах $\mathbb{T}^d$ произвольной размерности d. Точные границы изменения δ-отклонений удалось получить для случая, соответствующего $n = 1$ в одномерной теореме Гекке (0.3).

§1. Отклонения δ и D

1.1. Отклонение и разностная функция. Определим *разностную функцию*

$$\Delta(x, y) = \{x\} - \{x - y\} \tag{1.1}$$

от переменных $x, y \in \mathbb{R}$. Она является кусочно постоянной функцией от x и ее можно также записать в виде

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \{y\} - 1, & \text{если } \{x\} < \{y\}, \\ \{y\}, & \text{если } \{x\} \geqslant \{y\}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Зададим следующую функцию:

$$\delta_{n,\alpha}(i, t) = \sum_{0 \leqslant j < i} \Delta(j\alpha + t, n\alpha) \tag{1.3}$$

для любых $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$ Поскольку согласно (1.2) выполняется соотношение

$$\Delta(j\alpha + t, n\alpha) = \begin{cases} \{n\alpha\} - 1, & \text{если } \{j\alpha + t\} < \{n\alpha\}, \\ \{n\alpha\}, & \text{если } \{j\alpha + t\} \geqslant \{n\alpha\}, \end{cases}$$

то сумму (1.3) можно переписать в виде

$$\delta_{n,\alpha}(i, t) = i\{n\alpha\} - r_{n,\alpha}(i, t), \tag{1.4}$$

где $r_{n,\alpha}(i, t)$ — *считающая функция* для количества попаданий точек из последовательности $t, \alpha+t, \ldots, (i-1)\alpha+t \bmod 1$, попавших в полуинтервал $[0, \{n\alpha\})$ длины $\{n\alpha\}$. Таким образом, из равенства (1.4) заключаем, что $\delta_{n,\alpha}(i, t)$ является отклонением ожидаемого количества попаданий $i\{n\alpha\}$ от реального $r_{n,\alpha}(i, t)$.

1.2. Случай $n > 0$**.** Кроме формулы (1.4), сумму (1.3) можно вычислить еще одним способом. Имеем

$$\begin{aligned}\delta_{n,\alpha}(i,t) &= \sum_{0\leqslant j<i} (\{j\alpha+t\} - \{j\alpha+t-n\alpha\}) \\ &= \sum_{0\leqslant j<i} \{j\alpha+t\} - \sum_{-n\leqslant j<i-n} \{j\alpha+t\}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь мы будем предполагать $i > n$. Случай $i < n$ будет рассмотрен отдельно в п. 8. Из (1.5), после сокращения, получаем равенство

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{i-n\leqslant j<i} \{j\alpha+t\} - \sum_{-n\leqslant j<0} \{j\alpha+t\}.$$

Производя замену в первой сумме $j = j' + (i-n-1)$, где $1 \leqslant j' \leqslant n$, и соответственно во второй $j = -j'$, где $1 \leqslant j' \leqslant n$, переписываем последнее равенство

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{1\leqslant j'\leqslant n} \{j'\alpha + i\alpha - (n+1)\alpha + t\} - \sum_{1\leqslant j'\leqslant n} \{-j'\alpha + t\}.$$

Еще раз производим замену в первой сумме $j'-(n+1) = -j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, а во второй $j' = j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда при условии $n > 0$, $i > n$ получаем следующую формулу:

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (\{i\alpha - j\alpha + t\} - \{-j\alpha + t\}). \tag{1.6}$$

Если воспользоваться разностной функцией (1.1), то формулу (1.6) можно записать в более сжатом виде

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = -\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta(-j\alpha + t, -i\alpha). \tag{1.7}$$

Определим функцию

$$\Delta_{n,\alpha}(x,t) = -\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta(-j\alpha + t, -x), \tag{1.8}$$

где согласно (1.2) под знаком суммы стоит выражение

$$\Delta(-j\alpha + t, -x) = \begin{cases} \{-x\} - 1, & \text{если } \{-j\alpha + t\} < \{-x\}, \\ \{-x\}, & \text{если } \{-j\alpha + t\} \geqslant \{-x\}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Отсюда для функции (1.8) вытекает следующая формула:

$$\Delta_{n,\alpha}(x,t) = -n\{-x\} + r_{n,\alpha}(x,t) \tag{1.10}$$

для $n > 0$, где

$$r_{n,\alpha}(x,t) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ \{-j\alpha+t\}<\{-x\}}} 1.$$

Сравнивая (1.7) с (1.8), приходим к равенству

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \Delta_{n,\alpha}(i\alpha,t), \tag{1.11}$$

где по условию $n > 0$, $i > n$.

Удобно несколько видоизменить функцию $\Delta_{n,\alpha}(x,t)$ на более геометричную функцию

$$D_{n,\alpha}(x,t) = n\{x\} - R_{n,\alpha}(x,t) \tag{1.12}$$

для $n > 0$, где

$$R_{n,\alpha}(x,t) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ \{j\alpha-t\}\leqslant\{x\}}} 1. \tag{1.13}$$

Указанные функции связаны между собою простой формулой

$$\Delta_{n,\alpha}(x,t) = D_{n,\alpha}(x,t) + Z_{n,\alpha}(t), \tag{1.14}$$

где

$$Z_{n,\alpha}(t) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ \{j\alpha-t\}=0}} 1.$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (1.14), воспользуемся тождеством $\{-x\} = 1 - \{x\}$, если $\{x\} \neq 0$, и перепишем соотношения (1.9) в виде

$$\Delta(-j\alpha+t,-x) = \begin{cases} -\{x\}, & \text{если } \{j\alpha-t\} > \{x\},\\ -\{x\}+1, & \text{если } \{j\alpha-t\} \leqslant \{x\}. \end{cases}$$

Отсюда, (1.10) и (1.12) вытекает нужная формула (1.14).

1.3. Случай $n < 0$. Из определения (1.3) следует, что формула (1.5) формально справедлива как для $n > 0$, так и для $n < 0$. С этого места предполагаем выполненым условие $n < 0$. Используя последнее равенство из (1.5), имеем

$$\begin{aligned}\delta_{n,\alpha}(i,t) &= \sum_{0\leqslant j<i} (\{j\alpha+t\} - \{j\alpha+t|n|\alpha\})\\ &= \sum_{0\leqslant j<i} \{j\alpha+t\} - \sum_{n^+\leqslant j<i+|n|} \{j\alpha+t\}.\end{aligned}$$

Если снова допустить $i > |n|$, то из последнего равенства следует

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{0\leqslant j<|n|} \{j\alpha + t\} - \sum_{i\leqslant j<i+|n|} \{j\alpha + t\}.$$

После замены $j = j' + i$ выводим формулу

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{0\leqslant j<|n|} (\{j\alpha + t\} - \{j\alpha + t + i\alpha\}) \tag{1.15}$$

для случая $n < 0$, $i > |n|$. С помощью разностной функции (1.9) формулу (1.15) можно записать в сжатом виде

$$\delta_{n,\alpha}(i,t) = \sum_{0\leqslant j<|n|} \Delta(j\alpha + t, -i\alpha). \tag{1.16}$$

Для $n < 0$ определим еще одну дополнительную функцию (ср. (1.8))

$$\Delta_{n,\alpha}(x,t) = \sum_{0\leqslant j<|n|} \Delta(j\alpha + t, -x), \tag{1.17}$$

где аналогично (1.9) для $\Delta(j\alpha + t, -x)$ находим представление

$$\Delta(j\alpha + t, -x) = \begin{cases} -\{x\}, & \text{если } \{-j\alpha - t\} > \{x\}, \\ -\{x\} + 1, & \text{если } \{-j\alpha - t\} \leqslant \{x\}. \end{cases} \tag{1.18}$$

В силу (1.16) и (1.17) снова приходим к формуле (1.11) для $n < 0$, $i > |n|$.

Чтобы сохранить единообразие со случаем $n > 0$, обозначим

$$D_{n,\alpha}(x,t) = \Delta_{n,\alpha}(x,t). \tag{1.19}$$

Здесь согласно (1.17) и (1.18) левая часть равна

$$D_{-|n|,\alpha}(x,t) = -|n| + \{x\} + R_{-|n|,\alpha}(x,t), \tag{1.20}$$

где

$$R_{-|n|,\alpha}(x,t) = \sum_{\substack{0\leqslant j<|n| \\ \{-j\alpha-t\}\leqslant\{x\}}} 1.$$

Формулу (1.11) для $n > 0$ и $n < 0$ можно распространить на случай $n = 0$, полагая в них правые и левые части равными 0. Данные формулы представляют собою *формулы двойственности*, так как они устанавливают связь между *δ-отклонением* (1.4) и *D-отклонением* (1.12), (1.20). Действительно, $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ можно рассматривать как меру отклонения от равномерности распределения для бесконечной последовательности $\{j\alpha + t\}$, где $j = 0, 1, 2, \ldots$, и соответственно $D_{n,\alpha}(x,t)$ — меру отклонения для конечных последовательностей $\{\pm j\alpha - t\}$, где $j = 1, \ldots, |n|$. Формула же двойственности (1.11) — это связь между двумя этими мерами.

Итак, получен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть* $\delta_{n,\alpha}(i,t)$ *— отклонение* (1.4) *и* $\Delta_{n,\alpha}(x,t)$ *— отклонения, определенные формулами* (1.8) *и* (1.17) *для* $n>0$ *и* $n<0$ *соответственно. Тогда имеет место формула двойственности*

$$\delta_{n,\alpha}(i,t)=\Delta_{n,\alpha}(i\alpha,t) \tag{1.21}$$

для всех $i>|n|$. *Формула двойственности* (1.21) *остается также справедливой при* $n=0$, *если левую и правую части в* (1.21) *считать равными* 0.

§2. Свойства инвариантности D-отклонения

2.1. $D^{\pm}$**-отклонения.** Функция $D_{n,\alpha}(x,t)$ обладает многими неожиданными инвариантными свойствами, которые изначально не были заложены в ее конструкцию (1.12) и (1.20). Чтобы это увидеть, нужно несколько расширить определение указанной функции. С этой целью введем следующие две *модифицированные* функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$.

Так, в случае $n>0$ полагаем

$$D^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t)=|n|\{x\}-R^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t), \tag{2.1}$$

где (ср. с определением (1.12))

$$R^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t)=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant|n|\\ \{j\alpha-t\}\dot{<}\{x\}}}1. \tag{2.2}$$

Здесь $\dot{<}$ обозначает $<$ или $\leqslant$ для $R^{+}_{|n|,\alpha}(x,t)$ и $R^{-}_{|n|,\alpha}(x,t)$ соответственно. Из определения следует, что функция $D^{+}_{|n|,\alpha}(x,t)$ от x непрерывна слева, а $D^{-}_{|n|,\alpha}(x,t)$ справа. Аналогично определим для $n<0$ функцию

$$D^{\pm}_{-|n|,\alpha}(x,t)=-|n|\{x\}+R^{\pm}_{-|n|,\alpha}(x,t), \tag{2.3}$$

где (ср. с определением (1.20))

$$R^{\pm}_{-|n|,\alpha}(x,t)=\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant|n|\\ \{-j\alpha-t\}\dot{<}\{x\}}}1$$

и $\dot{<}$ имеет тот же смысл, что и в (2.2). Из определения следует, что функция $D^{+}_{-|n|,\alpha}(x,t)$ от x непрерывна слева, а $D^{-}_{-|n|,\alpha}(x,t)$ справа, т.е. как в (2.1).

Далее мы приведем список инвариантных свойств $D^{\pm}$-отклонений (2.1) и (2.3). Источники таких свойств лежат в группе изоморфизмов тора

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (сдвиги тора и умножение на ± 1) и в аналогичной группе изоморфизмов кольца целых чисел $\mathbb{Z}$.

2.2. Симметрии функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$. *Симметрии $n \to -n$ и $x \to -x$.* Пусть $\{x\} \neq 0$. Тогда справедливы формулы

$$D^{\mp}_{-|n|,\alpha}(x,t) = D^{\pm}_{|n|,\alpha}(-x,-t+\alpha), \quad D^{\pm}_{|n|,\alpha}(-x,t) = D^{\mp}_{-|n|,\alpha}(x,-t+\alpha), \tag{2.4}$$

где знаки $D^{\pm}$ означают, что функции из (2.4) имеют точки разрывов одного типа.

Доказательство. Проведем его формально, т.е. с помощью определений (2.1) и (2.3). В случае (D^+, D^-) первая формула из (2.4) равносильна тождеству

$$-|n|\{x\} + \sum_{\substack{0 \leqslant j < |n| \\ \{-j\alpha - t\} < \{x\}}} 1 = |n|\{-x\} - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant |n| \\ \{j\alpha + t - \alpha\} \leqslant \{-x\}}} 1,$$

справедливому в силу соотношения $\{x\} + \{-x\} = 1$ для любого $\{x\} \neq 0$. Случай (D^-, D^+) доказывается аналогично. Вторая формула из (2.4) получается из первой подстановкой $t \to -t + \alpha$. □

Симметрии $\alpha \to -\alpha$ и $t \to -t$. Если $\{x\} \neq 0$ и n любое, то

$$D^{\mp}_{n,-\alpha}(x,t) = -D^{\mp}_{n,\alpha}(-x,-t), \quad D^{\mp}_{n,\alpha}(x,-t) = -D^{\mp}_{n,-\alpha}(x,-t). \tag{2.5}$$

Доказательство. Первое равенство формально получается по той же самой схеме, что (2.4). Второе вытекает из первого подстановкой $t \to -t$, $\alpha \to -\alpha$. □

2.3. Аддитивность функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$. *Аддитивность по n.* Для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ выполняется формула

$$D^{\pm}_{n_1+n_2,\alpha}(x,t) = D^{\pm}_{n_1,\alpha}(x,t) + D^{\pm}_{n_2,\alpha}(x, t - n_1\alpha). \tag{2.6}$$

Доказательство. Случай $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$ вытекает непосредственно из определения (2.1) функции $D^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t)$. Если в формуле (2.6) значения будут $n_1 \leqslant 0$, $n_2 \leqslant 0$, то применяем к предыдущему случаю инвариантность (2.4): $(-|n|_1, -|n|_2) \to (|n|_1, |n|_2)$. Остальные случаи доказываются через комбинацию формул (2.1) и (2.3). □

Аддитивность по t. Для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $x, t, t' \in I$, где $I = [0,1)$ — единичный полуинтервал, имеет место формула

$$D^{\pm}_{n,\alpha}(x, t+t') = D^{\pm}_{n,\alpha}(x+t, t') - D^{\pm}_{n,\alpha}(t, t'). \tag{2.7}$$

Доказательство. Вначале докажем формулу (2.7) при $t' = 0$, т.е.

$$D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t) = D^{\pm}_{n,\alpha}(x+t,0) - D^{\pm}_{n,\alpha}(t,0). \tag{2.8}$$

Для этого достаточно проверить выполнение следующих условий, непосредственно вытекающих из определений (2.1) и (2.3): 1) углы наклонов графиков функций слева и справа совпадают; 2) функции слева и справа принимают одно и то же значение при $x = 0$; 3) указанные функции имеют одно и то же множество скачков $x = x' \in I$; 4) в каждом из скачков $x = x'$ функции имеют одинаковые виды односторонней непрерывности.

Переходим теперь в (2.7) к произвольному $t' \in I$. По доказанной формуле (2.8) имеем равенство

$$D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t+t') = D^{\pm}_{n,\alpha}(x+t+t',0) - D^{\pm}_{n,\alpha}(t+t',0). \tag{2.9}$$

Подставляя в него соответствующие выражения из соотношений

$$D^{\pm}_{n,\alpha}(x+t,t') = D^{\pm}_{n,\alpha}(x+t+t',0) - D^{\pm}_{n,\alpha}(t',0),$$
$$D^{\pm}_{n,\alpha}(t,t') = D^{\pm}_{n,\alpha}(t+t',0) - D^{\pm}_{n,\alpha}(t',0),$$

приходим к требуемой формуле (2.7). □

Аддитивность по x. Из (2.7), после замены $t \to x'$, $t' \to t$, для любых $n \in \mathbb{Z}$ и x вытекает формула

$$D^{\pm}_{n,\alpha}(x+x',t) = D^{\pm}_{n,\alpha}(x,x'+t) + D^{\pm}_{n,\alpha}(x',t). \tag{2.10}$$

2.4. Симметрии функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$: продолжение. *Симметрия $n \to -n$* (ср. (2.4)). Пусть снова $\{x\} \neq 0$. Дополнительно к (2.4) выполняется еще одна формула

$$D^{\pm}_{-|n|,\alpha}(x,t) = -D^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t+|n|\alpha). \tag{2.11}$$

Доказательство. Из определения (2.1) следует $D^{\pm}_{0,\alpha}(x,t) = 0$. Отсюда и (2.6) вытекает формула (2.11). □

Симметрия $x \to -x$. Для $\{x\} \neq 0$ имеем

$$D^{\mp}_{|n|,\alpha}(-x,t) = -D^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,-t+(|n|+1)\alpha). \tag{2.12}$$

Доказательство. По (2.4) и (2.11) получаем равенства

$$D^{\pm}_{-|n|,\alpha}(x,t) = D^{\mp}_{|n|,\alpha}(-x,-t+\alpha) = -D^{\pm}_{|n|,\alpha}(x,t+|n|\alpha),$$

из которых вытекает формула (2.12). □

§3. Границы D-отклонений

3.1. Границы отклонений $m_n(\alpha,t)$ и $m_n(\alpha)$. Пусть $I=[0,1)$. Определим следующие *граничные значения*:

$$m_n(\alpha,t)=\sup_{x\in I}|D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)|,\quad m_n(\alpha)=\sup_{t\in I}m_n(\alpha,t). \tag{3.1}$$

В обоснование определений (3.1) заметим, что функции $D^{+}_{n,\alpha}(x,t)$ и $D^{-}_{n,\alpha}(x,t)$ отличаются лишь в точках разрывов по x. Поэтому замена $D^{+}_{n,\alpha}(x,t)$ на $D^{-}_{n,\alpha}(x,t)$ не влияет на значение $m_n(\alpha)$.

Из формул (2.4) и (2.5) для любых n, α вытекают следующие симметрии граничного значения $m_n(\alpha)$:

$$m_{-n}(\alpha)=m_n(\alpha),\quad m_n(-\alpha)=m_n(\alpha). \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Для любого $t\in I$ выполняются неравенства*

$$m_n(\alpha)\leqslant 2m_n(\alpha,t) \tag{3.3}$$

и, в частности,

$$m_n(\alpha)\leqslant 2m_n(\alpha,0). \tag{3.4}$$

Доказательство. Из формулы (2.7) вытекает неравенство

$$|D_{n,\alpha}(x,t'+t)|\leqslant|D_{n,\alpha}(x+t',t)|+|D_{n,\alpha}(t',t)|,$$

из которого и определения (3.1) выводим соотношение $m_n(\alpha,t'+t)\leqslant 2m_n(\alpha,t)$. Отсюда вытекает неравенство (3.3). □

3.2. Замыкание D-отклонений. Определим функцию

$$\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)=\overline{D}^{+}_{n,\alpha}(x,t)=\overline{D}^{-}_{n,\alpha}(x,t), \tag{3.5}$$

которая имеет график такой же, как и замыкания графиков функций $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$. Таким образом, $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ является двузначной функцией в точках разрывов x со значениями $D^{+}_{n,\alpha}(x,t)$ и $D^{-}_{n,\alpha}(x,t)$. По непрерывности доопределим функцию $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ в точке $x=1$:

$$\overline{D}_{n,\alpha}(1,t)=\lim_{x\uparrow 1}\overline{D}_{n,\alpha}(x,t).$$

Введение замыкания D-отклонений (3.5) мотивировано тем, что использование функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ приводит к заметному упрощению формул. Так, например, из определений (3.1) следует важная формула

$$m_n(\alpha,t)=\max_k\ |\overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_k,t)|, \tag{3.6}$$

где α_k — точки разрывов функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$. Формула (3.6) доставляет *алгоритм* вычисления границы $m_n(\alpha,t)$ для D-отклонения, поскольку

точки разрывов α_k легко находятся (см. (3.10)) из определений (2.1) и (2.3) функций $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$.

3.3. Границы отклонений $m^{\pm}_n(\alpha,t)$**.** Удобно детализировать величину $m_n(\alpha,t)$ введением в рассмотрение двух новых *граничных значений*

$$m^+_n(\alpha,t) = \sup_{x\in\overline{I}} \overline{D}_{n,\alpha}(x,t), \quad m^-_n(\alpha,t) = \inf_{x\in\overline{I}} \overline{D}_{n,\alpha}(x,t), \tag{3.7}$$

где $\overline{I} = [0,1]$ — замыкание полуинтервала I. Так же, как и значения (3.6), они вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} m^+_n(\alpha,t) &= \max_k \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_k,t) = \max_k D^+_{n,\alpha}(\alpha_k,t), \\ m^-_n(\alpha,t) &= \min_k \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_k,t) = \min_k D^-_{n,\alpha}(\alpha_k,t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Определим конечную *орбиту*

$$\mathrm{Orb}_n(\alpha,t) = \{\{j\alpha - t\}; j = 1,2,\dots,n\} \tag{3.9}$$

и выстроим ее точки $\alpha_k = \{j_k\alpha - t\}$ в порядке их возрастания

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \dots \leqslant \alpha_n < 1. \tag{3.10}$$

Данные точки α_k как раз и являются точками разрывов функций $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$ и $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ (см. (2.1), (2.2) и (3.5)).

Лемма 3.1. *Интервал* $Y_n(\alpha,t) = [m^-_n(\alpha,t), m^+_n(\alpha,t)]$ *является областью значений функции* $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ *от переменной* x*, т.е. для любого* $y \in Y_n(\alpha,t)$ *найдется такое* $x_y \in \overline{I}$*, что*

$$\overline{D}_{n,\alpha}(x_y,t) = y. \tag{3.11}$$

Доказательство. В силу (2.7) можем считать, что

$$0 < \alpha_1 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n < 1. \tag{3.12}$$

Случай $n > 0$. Функция $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ непрерывно растет от 0 до $m^+_1 = \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_1,t)$. Поэтому выполняется равенство

$$m^+_1 = m^+_n(\alpha,t) = \max_{x\in\overline{I}} \overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$$

или существует следующее значение:

$$m^+_2 = \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_{k_2},t)^+ > m^+_1. \tag{3.13}$$

Здесь мы предполагаем k_2 наименьшим с условием (3.13). Функция $\overline{D}_{n,\alpha}(x,t)$ непрерывно растет от m^+_1 до m^+_2 при возрастающем x от $\alpha_{k_2} - \Delta$ до α_{k_2}, где $\Delta > 0$ выбирается из условия $\alpha_{k_2-1} \leqslant \alpha_{k_2} - \Delta$.

Снова получаем

$$m_2^+ = m_n^+(\alpha, t) = \max_{x \in \overline{I}} \overline{D}_{n,\alpha}(x, t),$$

или существует следующее значение:

$$m_3^+ = \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_{k_3}, t)^+ > m_2^+.$$

Так как количество точек разрывов α_k из (3.12) конечное, то не более чем через $i \leqslant n$ шагов получим

$$m_i^+ = \overline{D}_{n,\alpha}(\alpha_{k_i}, t) = m_n^+(\alpha, t) = \max_{x \in \overline{I}} \overline{D}_{n,\alpha}(x, t).$$

Указанный процесс порождает полное замещение

$$[0, m_1^+] \cup \ldots \cup [m_{i-1}^+, m_i^+] = [0, m_n^+(\alpha, t)]$$

множества положительных значений функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x, t)$. Чтобы заполнить множество отрицательных значений $[m_n^-(\alpha, t), 0]$, будем двигаться в обратную сторону, изменяя x от 1 к 0.

Случай $n < 0$ вытекает из рассмотренного выше случая $n > 0$ и формулы (2.4). □

Предложение 3.2. *Пусть* $m_n(\alpha, t)$, $m_n(\alpha)$ *и* $m_n^{\pm}(\alpha, t)$ *— граничные значения* (3.1) *и* (3.7) *соответственно. Тогда для любых* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $\alpha \in I$ *справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого* $t \in I$ *имеет место равенство*

$$m_n(\alpha) = m_n^+(\alpha, t) - m_n^-(\alpha, t). \tag{3.14}$$

2) *Обратно, существует* $t^* \in I$ *с условием*

$$m_n(\alpha, t^*) = \frac{1}{2} m_n(\alpha). \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть функция $D_{n,\alpha}^-(x, t)$, определенная в (2.1) и (2.3), принимает свое минимальное значение при $x = t^- \in I$, т.е. $D_{n,\alpha}^-(t^-, t) = m_n^-(\alpha, t)$. Тогда по формуле (2.7) имеем

$$D_{n,\alpha}^-(x, t^- + t) = D_{n,\alpha}^-(x + t^-, t) - D_{n,\alpha}^-(t^-, t) = D_{n,\alpha}^-(x + t^-, t) - m_n^-(\alpha, t),$$

и, следовательно, $D_{n,\alpha}^-(x, t^- + t)$ — неотрицательная функция от $x \in I$, причем $D_{n,\alpha}^-(0, t^- + t) = 0$. Отсюда и из определения (3.7) находим

$$m_n^+(\alpha, t^- + t) = m_n^+(\alpha, t) - m_n^-(\alpha, t), \quad m_n^-(\alpha, t^- + t) = 0. \tag{3.16}$$

Из (3.16) выводим формулу (3.14).

Теперь переходим к утверждению 2). Из леммы 3.1 следует, что существует $x^* \in I$ такое, что

$$\overline{D}_{n,\alpha}(x^*, t) = \frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) + m_n^-(\alpha, t)) \tag{3.17}$$

— среднее значение функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x, t)$ по переменной x. При этом x^* можем считать точкой непрерывности. Снова применяя формулу (2.7), записываем равенство

$$D_{n,\alpha}^{\pm}(x, x^* + t) = D_{n,\alpha}^{\pm}(x + x^*, t) - D_{n,\alpha}^{\pm}(x^*, t),$$

подставляя в которое соотношение (3.17), находим граничные значения функции $D_{n,\alpha}^{\pm}(x, x^* + t)$ от переменной x:

$$\begin{aligned} m_n^+(\alpha, t + x^*) &= m_n^+(\alpha, t) - \frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) + m_n^-(\alpha, t)) \\ &= \frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) - m_n^-(\alpha, t)), \\ m_n^-(\alpha, t + x^*) &= m_n^-(\alpha, t) - \frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) + m_n^-(\alpha, t)) \\ &= -\frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) - m_n^-(\alpha, t)). \end{aligned}$$

Отсюда и определения (3.1) граничного значения $m_n(\alpha, t + x^*)$ следует формула

$$m_n(\alpha, t + x^*) = \frac{1}{2}(m_n^+(\alpha, t) - m_n^-(\alpha, t)), \tag{3.18}$$

где справа стоит среднее значение функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x, t)$ по переменной x. Из (3.14) и (3.18) следует $m_n(\alpha, t + x^*) = \frac{1}{2}m_n(\alpha)$ — требуемая формула (3.15). □

По аналогии с (3.1) определим *граничные значения*

$$\mu_n(\alpha, t) = \sup_{x \in I} |\Delta_{n,\alpha}(x, t)|, \quad \mu_n(\alpha) = \sup_{t \in I} \mu_n(\alpha, t). \tag{3.19}$$

Предложение 3.3. *Для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in I$ справедливы следующие утверждения.*

1) *Граничные значения* (3.1) *и* (3.19) *связаны соотношением*

$$\mu_n(\alpha) = m_n(\alpha). \tag{3.20}$$

2) *Существует $t^* \in I$ с условием*

$$\mu_n(\alpha, t^*) = \frac{1}{2}\mu_n(\alpha). \tag{3.21}$$

Доказательство. Случай $n > 0$. Формулы (3.20) и (3.21) получаются по схеме доказательства предложения 3.2, если воспользоваться следующими равенствами

$$\Delta_{n,\alpha}(0,t) = 0, \quad \lim_{x\uparrow 1} D_{n,\alpha}(x,t) = 0 \tag{3.22}$$

и равенством

$$\Delta_{n,\alpha}(x,t) = D_{n,\alpha}(x,t), \tag{3.23}$$

справедливым для всех $t \in I$, кроме конечного числа точек.

Случай $n < 0$. Формула (3.20) вытекает из определений (1.19) и (3.19), а (3.21) — из формулы (3.15). □

3.4. Амплитуда и ее свойства. Определим *амплитуду* $\mathrm{am}_n(\alpha,t)$ как максимальный размах графика функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$:

$$\mathrm{am}_n(\alpha,t) = m^+_n(\alpha,t) - m^-_n(\alpha,t). \tag{3.24}$$

Из определения (3.1) следует неравенство

$$m_n(\alpha,t) \leqslant am_n(\alpha,t), \tag{3.25}$$

так как $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$ — возрастающие функции в окрестности 1 из полуинтервала I и $\lim_{x\nearrow 1} D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t) = 0$. Из формулы (3.14) вытекает, что амплитуда $\mathrm{am}_n(\alpha,t)$ не зависит от $t \in I$. Поэтому можем определить

$$\mathrm{am}_n(\alpha) = \mathrm{am}_n(\alpha,t) \text{ для любого } t \in I. \tag{3.26}$$

Сопоставляя (3.1) и (3.26), приходим к равенству

$$m_n(\alpha) = \mathrm{am}_n(\alpha), \tag{3.27}$$

показывающему, что граничное значение (3.1) и амплитуда (3.26) по сути представляют собой одно и то же. Из (3.27) и предложения 3.2 следует существование $t^* \in I$ с условием

$$m_n(\alpha,t^*) = \frac{1}{2}\mathrm{am}_n(\alpha). \tag{3.28}$$

§4. Вложение орбит и D-отклонение

4.1. Когерентные орбиты. Для единичного интервала $I = [0,1)$ зададим *разбиение*

$$\mathbf{I}_n = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n \tag{4.1}$$

на полуинтервалы $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$. Орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha,t)$, определенная в (3.9), *вкладывается* в разбиение $\mathbf{I}_n$:

$$\mathrm{Orb}_n(\alpha,t) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n, \tag{4.2}$$

если выполняются включения $\alpha_k \in I_k^{\mathrm{int}} = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ элементов (3.10) для всех $k = 1, \dots, n$. При выполнено условия (4.2) будем говорить, что орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t)$ *когерентна* разбиению $\mathbf{I}_n$.

4.2. Связь D-отклонения с когерентностью орбиты. Начиная с этого места и до п. 7 будем полагать $t = 0$.

Теорема 4.1. *Пусть $D_{n,\alpha}(x,t)$ — функция* (1.12) *для $n > 0$. Тогда неравенство*

$$|D_{n,\alpha}(x,0)| < 1 \tag{4.3}$$

выполняется для любого $x \in I$ тогда и только тогда, когда орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ когерентна (4.2) *разбиению $\mathbf{I}_n$.*

Доказательство. 1. Из условия (4.3) следует неравенство

$$\left|D_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right)\right| < 1 \tag{4.4}$$

для всех $0 \leqslant a < n$. Применяя формулу (1.12), находим

$$D_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right) = n\left\{\frac{a}{n}\right\} - R_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right) = a - R_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right) \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$D_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right) = 0 \tag{4.6}$$

для всех $0 \leqslant a < n$, а тогда из (4.5) и (4.6) вытекает формула

$$R_{n,\alpha}\left(\frac{a}{n}, 0\right) = n\left\{\frac{a}{n}\right\} = a,$$

равносильная включениям $\alpha_k \in I_k^{\mathrm{int}}$ для всех $k = 1, \dots, n$.

2. Обратно, пусть орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ вкладывается (4.2) в разбиение $\mathbf{I}_n$. Тогда, используя снова (1.12), приходим к формуле

$$R_{n,\alpha}(x,0) = [nx] + \theta(x), \tag{4.7}$$

выполняющейся при всех $x \in I$, где $\theta(x)$ принимает значения 0 или 1, причем

$$\theta\left(\frac{a}{n}\right) = 0 \tag{4.8}$$

для всех $0 \leqslant a < n$. Из формул (1.12) и (4.7) следует

$$D_{n,\alpha}(x,0) = n\{x\} - [nx] - \theta(x) = \{nx\} - \theta(x),$$

откуда и (4.8) вытекает неравенство (4.3). □

4.3. Пример когерентных орбит. Если выбрать $\alpha = \frac{1}{n+1}$, то очевидно, что для таких α отвечающая им орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ вкладывется $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$ в разбиение (4.1). Поэтому в силу теоремы 4.1 для любого $x \in I$ выполняется неравенство

$$|D_{n,\alpha}(x, 0)| < 1, \text{ если } \alpha = \frac{1}{n+1}. \tag{4.9}$$

Теперь заметим, что для $\alpha = \frac{1}{n+1}$ и любого другого $\alpha' = \frac{a}{n+1}$, где $a = 1, \ldots, n$ и $(a, n+1) = 1$, имеет место совпадение их орбит

$$\mathrm{Orb}_n(\alpha', 0) = \mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \tag{4.10}$$

и, значит, выполняется вложение $\mathrm{Orb}_n(\alpha', 0) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$. Из формулы (1.12) следует тождество $D_{n,\alpha'}(x, 0) = D_{n,\alpha}(x, 0)$. Отсюда и (4.9) вытекает неравенство

$$|D_{n,\alpha}(x, 0)| < 1 \text{ для всех } \alpha = \frac{a}{n+1}, \tag{4.11}$$

где $a = 1, \ldots, n$ и $(a, n+1) = 1$.

Полагая $\alpha = \frac{1}{n+1}$ в формуле (3.8), вычисляем граничные значения функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x, 0)$:

$$m^+_n(\alpha, 0) = D^+_{n,\alpha}(\alpha_1, 0) = \frac{n}{n+1}, \quad m^-_n(\alpha, 0) = D^-_{n,\alpha}(\alpha_n, 0) = -\frac{n}{n+1}, \tag{4.12}$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{n+1}$, $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$. Отсюда получаем $m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1}$, если $\alpha = \frac{1}{n+1}$, а тогда в силу (4.10) находим $m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1}$ для всех $\alpha = \frac{a}{n+1}$, где $a = 1, \ldots, n$ и $(a, n+1) = 1$.

Предложение 4.1. *Для любых $\alpha = \frac{a}{n+1}$, где $n > 0$, $a = 1, \ldots, n$ и $(a, n+1) = 1$, имеет место вложение орбит*

$$\mathrm{Orb}_n(\alpha, t) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n \tag{4.13}$$

и максимумы модулей $D^{\pm}$-отклонений (3.1) *равны*

$$m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1}, \quad m_n(\alpha) = \frac{2n}{n+1}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Вложение орбит (4.13) и первое равенство из (4.14) уже были доказаны выше. В силу (4.12) имеем $\mathrm{am}_n(\alpha) = \frac{2n}{n+1}$. Отсюда и из формулы (3.27) вытекает второе равенство из (4.14). □

§5. Локальные минимумы функции $m_n(\alpha, 0)$

5.1. Условие локального минимума.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены следующие условия*:
1) $\alpha \in I$ — *локальный минимум функции* $m_n(\alpha, 0)$ $(n \geqslant 2)$, *т.е.*

$$m_n(\alpha, 0) \leqslant m_n(\alpha + \Delta, 0) \tag{5.1}$$

для любого $\Delta \in [-\Delta', \Delta']$ *и некоторого* $\Delta' > 0$;
2)

$$m_n(\alpha, 0) < 1. \tag{5.2}$$

Тогда существуют такие точки $\alpha_{k_1} \neq \alpha_{k_2}$ *из орбиты* $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$, *в которых функции* (2.1) *отличаются друг от друга лишь знаком, т.е.*

$$D^+_{n,\alpha}(\alpha_{k_1}, 0) = -D^-_{n,\alpha}(\alpha_{k_2}, 0). \tag{5.3}$$

Доказательство. *Случай* 1. Пусть $\alpha_{k_1} \neq \alpha_{k_2}$, т.е. выполняются условия на точки α_k из орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$:

$$0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < 1. \tag{5.4}$$

По формуле (2.1) имеем

$$D^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha + j_k\Delta, 0) = n\{j_k\alpha + j_k\Delta\} - R^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha + j_k\Delta, 0), \tag{5.5}$$

где

$$R^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha + j_k\Delta, 0) = \sum_{j:\{j\alpha+j\Delta\} \dot{<} \{j_k\alpha+j_k\Delta\}} 1.$$

Напомним, здесь $\dot{<}$ обозначает $<$ или $\leqslant$ для R^+_* или R^-_* соответственно. В силу условия (5.4) можем записать, что

$$\{j_k\alpha + j_k\Delta\} = \{j_k\alpha\} + j_k\Delta. \tag{5.6}$$

При достаточно малом Δ имеем

$$R^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha + j_k, \Delta, 0) = R^\pm_{n,\alpha}(j_k\alpha, 0),$$

поэтому в силу (5.5) и (5.6) получаем

$$D^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha + j_k\Delta, 0) = D^\pm_{n,\alpha+\Delta}(j_k\alpha, 0) + nj_k\Delta$$

для всех k и $\Delta \in [-\Delta', \Delta']$ и некоторого $\Delta' > 0$, зависящего от n, α, k. По условию теоремы $\alpha \in I$ — локальный минимум функции $m_n(\alpha, 0)$. Тогда из формул (3.7) и (3.8) следует существование двух α_{k_1} и α_{k_2} с условием (5.3).

Случай 2. Пусть существуют два $\alpha_k = \alpha_{k'}$ с индексами $k \neq k'$ и, значит, $k' = k + 1$. Тогда, используя формулу (2.1), получаем $m^+_n(\alpha_k, 0) \geqslant 1$ или

$m_n^-(\alpha_k, 0) \leqslant -1$, что противоречит условию (5.2). Следовательно, случай 2 невозможен.

Случай 3. Если $\alpha_1 = 0$, то $D_{n,\alpha}^-(\alpha_1, 0) = D_{n,\alpha}^-(0, 0) = -1$, и снова получаем противоречие с условием (5.2).

Итак, приходим к выводу: из условия (5.2) вытекает, что расположение точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ возможно только, как в случае 1, для которого теорема уже доказана. □

Пусть снова $n \geqslant 2$ и $\alpha \in I$ — локальный минимум функции $m_n(\alpha, 0)$. По (2.1) имеем $D_{n,\alpha}^{\pm}(x, 0) = n\{x\} - R_{n,\alpha}^{\pm}(x, 0)$. Отсюда и теоремы 5.1 согласно равенству (5.3) будет выполняться соотношение

$$n\{\alpha_{k_1}\} - R_{n,\alpha}^+(\alpha_{k_1}, 0) = -n\{\alpha_{k_2}\} - R_{n,\alpha}^-(\alpha_{k_2}, 0)$$

для некоторых $\alpha_{k_1} \neq \alpha_{k_2}$ из орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$, из которого вытекает сравнение $n\alpha_{k_1} \equiv -n\alpha_{k_2} \bmod 1$ или иначе $n(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \equiv 0 \bmod 1$. Подставляя в последнее сравнение $\alpha_{k_1} \equiv j_1\alpha \bmod 1$ и $\alpha_{k_2} \equiv j_2\alpha \bmod 1$, где $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n$, можем переписать его в виде сравнения $n(j_1 + j_2)\alpha \equiv 0 \bmod 1$, из которого выводим $\alpha = \frac{a}{nJ}$, где $J = j_1 + j_2$, $j_1 \neq j_2$. Отсюда вытекает теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $\alpha \in I$ — локальный минимум функции $m_n(\alpha, 0)$, $n \geqslant 2$, и пусть $m_n(\alpha, 0) < 1$. Тогда*

$$\alpha = \frac{a}{nJ}, \tag{5.7}$$

где $J = j_1 + j_2$, $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n$, $j_1 \neq j_2$, и, следовательно,

$$3 \leqslant J \leqslant 2n - 1. \tag{5.8}$$

5.2. Необходимые условия локального минимума $\frac{n}{n+1}$. Пусть α — локальный минимум функции $m_n(\alpha, 0)$ такой, что

$$m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1}. \tag{5.9}$$

В силу формул (2.1) и (3.8) существует некоторое $j = 1, \ldots, n$ с условием

$$m_n(\alpha, 0) = D_{n,\alpha}^+(j\alpha, 0) = n\{j\alpha\} - R_{n,\alpha}^+(j\alpha, 0).$$

Отсюда вытекает сравнение $m_n(\alpha, 0) \equiv nj\alpha \bmod 1$, из которого, условия (5.9) и теоремы 5.2 получаем

$$\frac{aj}{J} \equiv \frac{n}{n+1} \mod 1. \tag{5.10}$$

Так как $(n, n+1) = 1$, то из (5.10) следует $J = k(n+1)$, $k = 1, 2, \ldots$ Учитывая при этом неравенство (5.8), выводим $J = n+1$, $(aj, n+1) = 1$. Отсюда следует теорема.

Теорема 5.3. *Пусть $\alpha \in I$ — локальный минимум функции $m_n(\alpha, 0)$, $n \geqslant 2$, и пусть*

$$m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1}. \tag{5.11}$$

Тогда такой локальный минимум α необходимо имеет представление в виде дроби

$$\alpha = \frac{a}{n(n+1)}, \tag{5.12}$$

где $1 \leqslant a < n(n+1)$, $(a, n+1) = 1$.

5.3. Достаточные условия: регулярные числа. Вначале рассмотрим более простые α из (5.12), когда $d = (a, n) = n$ или $a = na_1$, при этом $(a_1, n+1) = 1$. Они образуют множество *регулярных* чисел

$$\mathbb{A}_{\text{reg}} = \{\alpha = \frac{a'}{n+1}; 1 \leqslant a_1 \leqslant n, (a', n+1) = 1\}. \tag{5.13}$$

Из предложения 4.1 следует

$$m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1} \text{ для любого } \alpha \in \mathbb{A}_{\text{reg}}. \tag{5.14}$$

Числа $\alpha = \frac{a_1}{n+1}$ являются локальными минимумами функции $m_n(\alpha, 0)$. Действительно, для $\alpha = \frac{1}{n+1}$ это очевидно, а для общего случая $\alpha' = \frac{a_1}{n+1}$ следует из равенства орбит $\mathrm{Orb}_n(\alpha', 0) = \mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$.

5.4. Достаточные условия: иррегулярные числа. Они содержатся среди оставшихся α из (5.12), для которых $d = (a, n) < n$:

$$\mathbb{A}_{d<n} = \left\{\alpha = \frac{a}{n(n+1)}; d = (a, n) < n, (a, n+1) = 1\right\}.$$

Из данного множества можно выделить *иррегулярные* числа

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{irr}} = \Big\{\alpha = \frac{r}{n_1(n+1)} + \frac{k}{n_1};\ r = \pm 1, \\ \forall n_1 | n,\ 0 \leqslant k < n_1,\ (k, n_1) = 1,\ k \not\equiv -r \bmod n_1\Big\}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Аналогично (5.14) можно показать, что

$$m_n(\alpha, 0) = \frac{n}{n+1} \text{ для любого } \alpha \in \mathbb{A}_{\text{irr}} \tag{5.16}$$

и числа $\alpha \in \mathbb{A}_{\text{irr}}$ являются локальными минимумами функции $m_n(\alpha, 0)$.

§6. Грубая аппроксимация функции $m_n(\alpha, 0)$

6.1. Основные теоремы.

Теорема 6.1. *Имеют место неравенства (субаддитивность по α)*

$$m_n(\alpha + \Delta, 0) < m_n(\alpha, 0) + 1 \tag{6.1}$$

или

$$m_n(\alpha + \Delta, 0) \leqslant m_n(\alpha, 0) + 1,$$

если соответственно $|\Delta| < \frac{1}{n^2}$ или $|\Delta| \leqslant \frac{1}{n^2}$ и при этом выполнены следующие два условия:

$$\sharp\Big\{\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \cap \Big[0, \frac{1}{n}\Big)\Big\} \leqslant 1 \tag{6.2}$$

и

$$\sharp\Big\{\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \cap \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big)\Big\} \leqslant 1, \tag{6.3}$$

где $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ *— орбита* (3.9).

Доказательство. *Случай* 1: $\Delta \geqslant 0$. Пусть Δ растет так, что последняя точка $(\alpha + \Delta)_n$ из орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ (см. (3.9) и (3.10)) не перескакивает через 1 к 0, т.е. $(\alpha + \Delta)_n < 1$. Тогда согласно определению (3.1) имеем

$$m_n(\alpha + \Delta, 0) < m_n(\alpha, 0) + n^2\Delta, \tag{6.4}$$

так как

$$(\alpha + \Delta)_k = \{j_k(\alpha + \Delta)\} \leqslant \{j_k\alpha\} + \{j_k\Delta\} \leqslant \alpha_k + n\Delta$$

и график функции $\overline{D}_{n,\alpha}(x, 0)$ имеет угол наклона $\operatorname{tg}\varphi = n$. Из (6.4) получаем неравенства (6.1).

Пусть теперь при росте Δ происходит перескок последней точки $\alpha_n \to (\alpha + \Delta)_n$ через 1 к 0. Тогда в силу условия (6.3) нижний минимум $m_n^-(\alpha + \Delta, 0)$ не может уменьшиться более, чем на -1. Причем ровно на -1 также не может, поскольку любая точка орбиты $\alpha_k < 1$. Отсюда снова приходим к неравенствам (6.1).

Случай 2: $\Delta \geqslant 0$ симметричен предыдущему с заменой условия (6.3) на (6.2). Теорема доказана. □

Определим

$$\sharp_{n,\alpha}(\Delta) = \begin{cases} \sharp\{\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \cap [1 - n\Delta, 1)\}, & \text{если } \Delta \geqslant 0, \\ \sharp\{\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0) \cap [0, n|\Delta|)\}, & \text{если } \Delta \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Имеет место обобщение теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Для любых $\alpha \in I$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и Δ справедлива оценка*

$$m_n(\alpha + \Delta, 0) \leqslant m_n(\alpha, 0) + \max(n^2|\Delta|, \sharp_{n,\alpha}(\Delta)). \tag{6.6}$$

Замечание 6.1. Неравенство (6.6) нетривиально только при условии, что

$$|\Delta| < \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Проводится по той же схеме, что и теорема 6.1. □

6.2. Аппроксимация числами из множества $\mathbb{A}$. Будем аппроксимировать α числами α_* из множества

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\text{reg}} \cup \mathbb{A}_{\text{irr}}, \tag{6.7}$$

составленного из регулярных (5.13) и иррегулярных чисел (5.15). Определим расстояние $\varrho(\alpha, \mathbb{A})$ от α до множества $\mathbb{A}$, полагая

$$\varrho(\alpha, \mathbb{A}) = \min_{\alpha_* \in \mathbb{A}} |\alpha - \alpha_*|. \tag{6.8}$$

Теорема 6.3. *Для любых $\alpha \in I$, $n > 0$ выполняется неравенство*

$$m_n(\alpha, 0) \leqslant \frac{n}{n+1} + [n^2 \varrho(\alpha, \mathbb{A})] + 1. \tag{6.9}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_* + \Delta$ для некоторого $\alpha_* \in \mathbb{A}$ и $|\Delta| = \varrho(\alpha, \mathbb{A})$. Принимая во внимание теорему 6.2, можем заметить

$$m_n(\alpha, 0) \leqslant m_n(\alpha_*, 0) + \max(n^2|\Delta|, \sharp_{n,\alpha}(\Delta)), \tag{6.10}$$

где в силу равенств (5.14) и (5.16) имеем

$$m_n(\alpha_*, 0) = \frac{n}{n+1} \tag{6.11}$$

и

$$n^2|\Delta| \leqslant [n^2|\Delta|] + 1 = [n^2 \varrho(\alpha, \mathbb{A})] + 1. \tag{6.12}$$

Так как согласно теореме 4.1 и равенствам (5.12), (5.16) имеет место вложение $\mathrm{Orb}_n(\alpha_*, 0) \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I_n}$ для любого $\alpha_* \in \mathbb{A}$, то

$$\begin{gathered} \sharp\Big\{\mathrm{Orb}_n(\alpha_*, 0) \cap \Big[1 - \frac{s}{n}, 1\Big)\Big\} \leqslant s \text{ для всех } s = 0, 1, 2, \ldots, \\ \sharp\Big\{\mathrm{Orb}_n(\alpha_*, 0) \cap \Big[0, \frac{s}{n}\Big)\Big\} \leqslant s \text{ для всех } s = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{6.13}$$

Пусть $\Delta = \frac{\theta}{n^2}$, где $\theta \geqslant 0$ — любое. Тогда $n\Delta = \frac{\theta}{n}$, и из (6.13) выводим неравенство

$$\sharp\{\mathrm{Orb}_n(\alpha_*, 0) \cap [1 - n\Delta, 1)\} \leqslant [\theta] + 1.$$

Отсюда и неравенства (6.12) вытекает оценка

$$\sharp\{\mathrm{Orb}_n(\alpha_*, 0) \cap [1 - n\Delta, 1)\} \leqslant [n^2\Delta] + 1 = [n^2 \varrho(\alpha, \mathbb{A})] + 1.$$

Аналогично рассуждаем для $\Delta = \frac{\theta}{n^2}$, когда $\theta < 0$.

Итак, в общем случае для любого Δ получаем оценку

$$\sharp_{n,\alpha^*}(\Delta) \leqslant [n^2 \varrho(\alpha, \mathbb{A})] + 1, \tag{6.14}$$

где функция $\sharp_{n,\alpha^*}(\Delta)$ определена в (6.5). Из (6.12) и (6.14) выводим неравенство

$$\max(n^2|\Delta|, \sharp_{n,\alpha}(\Delta)) \leqslant [n^2 \varrho(\alpha, \mathbb{A})] + 1. \tag{6.15}$$

Из (6.10), (6.11) и (6.15) следует требуемое неравенство (6.9). □

Из теоремы 6.3 вытекает

Следствие 6.1. *Пусть* $\varrho(\alpha, \mathbb{A}) < \frac{1}{n^2}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$m_n(\alpha, 0) \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}, \tag{6.16}$$

или в общем виде — неравенство

$$m_n(\alpha, 0) < 2 \tag{6.17}$$

для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

§7. Точная аппроксимация функции $m_n(\alpha, t)$

7.1. Цепные дроби. Пусть $\alpha \in I$ разложена в конечную или бесконечную цепную дробь

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}, \tag{7.1}$$

где $q_i = 1, 2, 3, \ldots$ — неполные частные. Обозначим $\alpha^{(m)} = [0; q_1, q_2, \ldots, q_m]$ подходящую дробь длины m. Для нее имеется представление

$$\alpha^{(m)} = \frac{P_m}{Q_m}, \text{ где } P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}, \quad Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2} \tag{7.2}$$

для любого $m \geqslant 1$, с начальными значениями $P_{-1} = 1$, $P_0 = 0$, $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$. Определим $l(\alpha)$ — длину цепной дроби как максимальный номер m неполного частного q_m, входящего в разложение (7.1). Если дробь (7.1) бесконечная, то полагаем $l(\alpha) = +\infty$. Из представления (7.2) следуют неравенства

$$\frac{P_m}{Q_m} \leqslant \alpha \leqslant \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}, \text{ где } m \text{ нечетное.} \tag{7.3}$$

Индукцией по m получается формула

$$P_{m+1} Q_m - P_m Q_{m+1} = (-1)^m,$$

из которой и (7.3) вытекает аппроксимация α подходящими дробями (7.2):

$$\alpha = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{\theta_m}{Q_m Q_{m+1}}, \tag{7.4}$$

где $|\theta_m| \leqslant 1$, $\theta_m \geqslant 0$ или $\theta_m \leqslant 0$, если m нечетное или четное соответственно.

7.2. Возмущение точек орбит. Выберем любое число $\alpha_{\text{app}} \in I = [0, 1\}$ с условием $l(\alpha_{\text{app}}) \geqslant 2$. Пусть $\alpha = \frac{P_m}{Q_m}$ — подходящая дробь для α_{app} с номером $1 \leqslant m < l(\alpha_{\text{app}})$. Согласно (7.4) существует аппроксимация

$$\alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta, \tag{7.5}$$

где

$$0 < \Delta < \frac{1}{Q_m Q_{m+1}}, \quad \text{если } m \text{ нечетное}, \tag{7.6}$$

$$-\frac{1}{Q_m Q_{m+1}} < \Delta < 0, \quad \text{если } m \text{ четное}. \tag{7.7}$$

Шаг 1. Пусть $\alpha = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{a}{n}$, т.е. $n = Q_m$. Строим *начальную невозмущенную систему* точек из орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, 0)$ (см. (3.9)):

$$0 = (\alpha, 0)_0 < (\alpha, 0)_1 < \ldots < (\alpha, 0)_{n-1} < 1, \tag{7.8}$$

где

$$(\alpha, 0)_k = \frac{k}{n} = \{j_k \alpha\} \tag{7.9}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $j_k = 1, 2, \ldots, n$, связанных между собой равенством (7.9).

Шаг 2. Строим *основную невозмущенную систему* точек орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t)$, сдвигая на $t = \frac{1}{2n}$ систему (7.8):

$$0 < (\alpha, t)_0 < (\alpha, t)_1 < \ldots < (\alpha, t)_{n-1} < 1, \tag{7.10}$$

где

$$(\alpha, t)_k = \frac{k}{n} + t = \{j_k \alpha + t\} \tag{7.11}$$

для k, j_k из (7.9).

Шаг 3. *Случай* $\Delta > 0$, m *— нечетное.* Строим *возмущенную сдвинутую систему* точек орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha_{\text{app}}, t)$:

$$(\alpha_{\text{app}}, t)_0 < (\alpha_{\text{app}}, t)_1 < \ldots < (\alpha_{\text{app}}, t)_{n-1}, \tag{7.12}$$

где $\alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta$ определено в (7.5).

При возмущении орбиты $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t) \to \mathrm{Orb}_n(\alpha_{\mathrm{app}}, t)$ исследуем сдвиг ее последней точки

$$(\alpha, t)_{n-1} \longrightarrow (\alpha_{\mathrm{app}}, t)_{n-1}.$$

Найдем $j = j_{n-1}$ из (7.9). Имеем $j_{n-1}P_m \equiv n-1 \pmod{n}$ и

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{(-1)^m}{Q_m Q_{m+1}} = \frac{-1}{Q_m Q_{m+1}},$$

так как по условию m — нечетное. Отсюда получаем сравнение

$$Q_{m+1}P_m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod{Q_m}, \tag{7.13}$$

где $Q_{m+1} = q_m Q_m + Q_{m-1}$, и поэтому $Q_{m+1} \equiv Q_{m-1} \pmod{Q_m}$. Из (7.13) и последнего сравнения выводим

$$Q_{m-1}P_m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod{Q_m}. \tag{7.14}$$

Отсюда заключаем, что $j_{n-1} = Q_{m-1}$ и, значит,

$$j_{n-1} < n = Q_m. \tag{7.15}$$

Согласно (7.11) можем записать

$$(\alpha_{\mathrm{app}}, t)_{n-1} = \{j_{n-1}\alpha_{\mathrm{app}} + t\} = \{j_{n-1}\alpha + j_{n-1}\Delta + t\},$$

где $j_{n-1}\alpha = \frac{n-1}{n}$, $j_{n-1} = Q_{m-1}$ и в силу (7.6) выполняется неравенство

$$j_{n-1}\alpha_{\mathrm{app}} < \frac{Q_{m-1}}{Q_m Q_{m+1}}. \tag{7.16}$$

Неравенство

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_m Q_{m+1}} < \frac{1}{2n} = \frac{1}{2Q_m} \tag{7.17}$$

будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_{m+1}} < \frac{1}{2}. \tag{7.18}$$

Имеем $Q_{m+1} = q_m Q_m + Q_{m-1} > 2Q_{m-1}$. Поэтому выполняется неравенство (7.18) и, следовательно, (7.17); и тогда из (7.16) и (7.17) получаем неравенство

$$j_{n-1}\alpha_{\mathrm{app}} < \frac{1}{2n}. \tag{7.19}$$

Используя его, имеем

$$\begin{aligned} \{j_{n-1}\alpha_{\mathrm{app}} + t\} &= \left\{\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n} + j_{n-1}\Delta\right\} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n} + j_{n-1}\Delta \\ &= \left\{\frac{n-1}{n} + t\right\} + j_{n-1}\Delta = (\alpha, t)_{n-1} + j_{n-1}\Delta. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Еще раз применяя неравенство (7.19) к последнему члену из (7.20), получаем нужную связь между последними точками из орбит из (7.10) и (7.12):

$$(\alpha_{\text{app}}, t)_{n-1} = (\alpha, t)_{n-1} + j_{n-1}\Delta. \tag{7.21}$$

Предложение 7.1. *Имеют место следующие утверждения*:

1) *точка* $(\alpha_{\text{app}}, t)_{n-1}$ *получается сдвигом точки* $(\alpha, t)_{n-1} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n}$ *на* $j_{n-1}\Delta < \frac{1}{2n}$. *Следовательно, после сдвига точка* $(\alpha, t)_{n-1}$ *не перескакивает через* 1 *к* 0 *по* $\bmod 1$;

2) *никакая точка* $(\alpha, t)_k$ *с номером* $k = 0, 1, \ldots, n-2$ *при ее сдвиге в точку* $(\alpha_{\text{app}}, t)_{k'}$, *т.е. при переходе* $\alpha \to \alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta$, *не перескакивает через* 1 *к* 0 *по* $\bmod 1$;

3) *любая точка* $(\alpha, t)_k$ *с номером* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *при ее сдвиге в точку* $(\alpha_{\text{app}}, t)_{k'}$, *т.е. при переходе* $\alpha \to \alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta$, *не перескакивает через* 1 *к* 0 *по* $\bmod 1$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из равенства (7.21).

Возьмем любую другую точку $(\alpha, t)_k$, где $k = 0, 1, \ldots, n-2$, из орбиты (7.10). Заметим, что расстояние от нее до 1 больше $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$, при этом выполняется неравенство

$$j_k\Delta < n\frac{1}{Q_m Q_{m+1}} = \frac{1}{Q_{m+1}} < \frac{1}{Q_m} = \frac{1}{n},$$

т.е. $j_k\Delta < \frac{1}{n}$. Отсюда вытекает утверждение 2).

Наконец, утверждение 3) следует из утверждений 1) и 2). □

Найдем граничные значения функций $D^{\pm}_{n,\alpha_\Delta}(x, -t)$, определенных в (2.3). Пусть, как в системе (7.10), $t = \frac{1}{2n}$. Указанная функция принимает свое максимальное значение в точке $(\alpha, t)_0 = \{n\alpha + t\}$, которая после сдвига $\alpha \to \alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta$ переходит в точку

$$(\alpha_{\text{app}}, t)_0 = \{n\alpha_{\text{app}} + t\} = \{n\alpha + t + n\Delta\}.$$

Отсюда получаем следующую связь между этими точками:

$$(\alpha_{\text{app}}, t)_0 = (\alpha, t)_0 + n\Delta. \tag{7.22}$$

Любая другая точка $(\alpha, t)_k$, $k > 0$, сдвигается на меньшее расстояние, так как

$$(\alpha_{\text{app}}, t)_k = (\alpha, t)_k + j_k\Delta, \text{ где } 1 \leqslant j_k \leqslant n-1. \tag{7.23}$$

Из утверждения 3) предложения 7.1 и (7.22), (7.23) находим максимальное значение (3.7) функции $D^{+}_{n,\alpha_{\text{app}}}(x, -t)$:

$$m^{+}_n(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{1}{2} + n^2\Delta, \tag{7.24}$$

а из (7.23) находим также и минимальное значение функции $D^-_{n,\alpha_{\rm app}}(x,-t)$:

$$m^-_n(\alpha_{\rm app},t) = -\frac{1}{2} + n\Delta. \tag{7.25}$$

Из равенств (7.24) и (7.25) вытекает следующий результат.

Лемма 7.1. *Пусть $\alpha_{\rm app} \in I$ любое с условием $l(\alpha_{\rm app}) \geqslant 2$, $n = Q_m$ для нечетного m и, следовательно, $\Delta > 0$, и пусть при этом $1 \leqslant m < l(\alpha_{\rm app})$. Тогда имеют место следующие формулы:*

$$m^+_n(\alpha_{\rm app},t) = \frac{1}{2} + n^2\Delta, \quad m^-_n(\alpha_{\rm app},t) = -\frac{1}{2} + n\Delta \tag{7.26}$$

для граничных значений (3.7), (3.8) *при* $t = \frac{1}{2n}$;

$$\mathrm{am}_n(\alpha_{\rm app}) = 1 + n(n-1)\Delta, \quad m_n(\alpha_{\rm app}) = 1 + n(n-1)\Delta \tag{7.27}$$

для амплитуды (3.27) *и максимума* (3.1) *модуля функции* $D^{\pm}_{n,\alpha_{\rm app}}(x,-t)$ *при любом* $t \in I$.

Шаг 3. *Случай $\Delta < 0$, m — четное.* Имеем $\alpha_{\rm app} = \alpha + \Delta$, где $\Delta < 0$. Предположим, что выполняется дополнительное ограничение

$$-\frac{1}{2n^2} \leqslant \Delta < 0. \tag{7.28}$$

Найдем условия, при которых после сдвига

$$(\alpha,t)_0 \longrightarrow (\alpha_{\rm app},t)_0 \tag{7.29}$$

точка $(\alpha_{\rm app},t)_0$, где $t = \frac{1}{2n}$, не перескакивает через 0 к 1 по $\bmod 1$. Имеем

$$n\alpha_{\rm app} + t = n\alpha_{\rm app} + \frac{1}{2n} \equiv 0 + n\Delta + \frac{1}{2n} \pmod 1.$$

Поэтому если выполнено условие (7.28), то будет справедливо неравенство

$$(\alpha_{\rm app},x_0)_0 = n\Delta + \frac{1}{2n} > 0,$$

и, следовательно, точка $(\alpha_{\rm app},t)_0$ не перескакивает через 0.

Запишем условие (7.28) на языке знаменателей подходящих дробей Q_m. Применяя неравенства (7.7), записываем $-\frac{1}{Q_mQ_{m+1}} < \Delta < 0$. Поэтому если соседние знаменатели удовлетворяют условию $Q_{m+1} \geqslant 2Q_m$, то выполнено ограничение (7.28). Более того, поскольку в силу (7.2) они связаны равенством $Q_{m+1} = q_mQ_m + Q_{m-1}$, то при выполнении неравенства $q_m \geqslant 2$ снова имеет место ограничение (7.28).

При условии выполнения ограничения (7.28) случай $\Delta < 0$ аналогичен ранее рассмотренному случаю $\Delta > 0$. Поэтому можем переформулировать лемму 7.1 следующим образом.

Лемма 7.2. *В условиях леммы* 7.1 *пусть* $-\frac{1}{2n^2} \leqslant \Delta < 0$ *и, значит, m четное. Тогда справедливы следующие формулы*:

$$m_n^+(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{1}{2} - n|\Delta|, \quad m_n^-(\alpha_{\text{app}}, t) = -\frac{1}{2} - n^2|\Delta| \tag{7.30}$$

при $t = \frac{1}{2n}$ *и*

$$am_n(\alpha_{\text{app}}) = 1 + n(n-1)|\Delta|, \quad m_n(\alpha_{\text{app}}) = 1 + n(n-1)|\Delta| \tag{7.31}$$

при любом $t \in I$.

Осталось исследовать случай, когда $\Delta < -\frac{1}{2n^2}$. Теперь уже при сдвиге (7.29) точка $(\alpha_{\text{app}}, t)_0$ перескакивает через 0 к 1 по $\bmod 1$. Поэтому максимум и минимум соответственно равны

$$m_n^+(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{1}{2} + 1 + n\Delta, \quad m_n^-(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{1}{2} + n^2\Delta.$$

Отсюда вытекает

Лемма 7.3. *В условиях леммы* 7.1 *пусть* $\Delta < -\frac{1}{2n^2}$ *и, значит, m четное. Тогда выполняются следующие формулы*:

$$\begin{aligned} &m_n^+(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{3}{2} - n|\Delta|, \quad m_n^-(\alpha_{\text{app}}, t) = \frac{1}{2} - n^2|\Delta|; \\ &am_n(\alpha_{\text{app}}) = 1 + n(n-1)|\Delta|, \quad m_n(\alpha_{\text{app}}) = 1 + n(n-1)|\Delta|. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Из лемм 7.1–7.3 следует

Теорема 7.1. *Пусть дано любое* $\alpha_{\text{app}} \in I = [0, 1)$ *с условием* $l(\alpha_{\text{app}}) \geqslant 2$ *и пусть* $\alpha_{\text{app}} = \alpha + \Delta$, *где* $\alpha = \frac{P_m}{Q_m}$ *— подходящая дробь для* α_{app} *с номером* $1 \leqslant m < l(\alpha_{\text{app}})$. *Кроме того, пусть* $n = Q_m$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Максимум* (3.1) *модуля функции* $D^{\pm}_{n,\alpha_{\text{app}}}(x, -t)$ *по всем* $t \in I$ *вычисляется по формуле*

$$m_n(\alpha_{\text{app}}) = 1 + n(n-1)|\Delta| \tag{7.33}$$

и удовлетворяет неравенству

$$m_n(\alpha_{\text{app}}) < 1 + \frac{1}{q_m} \tag{7.34}$$

или в общем случае — неравенству

$$m_n(\alpha_{\text{app}}) < 2. \tag{7.35}$$

2) *Существует* $t^* \in I$ *с условием*

$$m_n(\alpha_{\text{app}}, t^*) < 1, \tag{7.36}$$

где $m_n(\alpha_{\text{app}}, t^*)$ *— максимум* (3.1) *модуля функции* $D^{\pm}_{n,\alpha_{\text{app}}}(x, t^*)$.

Доказательство. Из формулы (3.2) следует, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $n = Q_m$. При этом условии формула (7.33) следует из (7.27) для $\Delta > 0$ и из (7.31), (7.32) для $\Delta < 0$. Из данной формулы вытекает неравенство

$$m_n(\alpha_{\text{app}}) < 1 + n^2|\Delta|, \tag{7.37}$$

где $|\Delta| < \frac{1}{Q_m Q_{m+1}}$, $n = Q_m$ и, значит, $n^2|\Delta| < \frac{Q_m}{Q_{m+1}}$. Поскольку $Q_{m+1} = q_m Q_m + Q_{m-1} \geqslant q_m Q_m$, то из последнего неравенства выводим

$$n^2|\Delta| < \frac{1}{q_m}. \tag{7.38}$$

Теперь из (7.37) и (7.38) следуют неравенства (7.34) и (7.35), так как $q_m \geqslant 1$. Наконец, неравенство (7.36) вытекает из (7.35) и предложения 3.2. □

7.3. Оценки граничных значений через длину $l_\alpha(n)$. Из свойства аддитивности (2.6) функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$ вытекает *субаддитивность* по n

$$m_{n_1+n_2}(\alpha) \leqslant m_{n_1}(\alpha) + m_{n_2}(\alpha) \text{ для любых } n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \tag{7.39}$$

максимума (3.1) модуля функции $D^{\pm}_{n,\alpha}(x,t)$ по всем $t \in I$.

Определим для любого целого числа n *минимальную длину*

$$l_\alpha(n) = \min\{s : \varepsilon_1 Q_{m_1} + \ldots + \varepsilon_s Q_{m_s} = n, \varepsilon_i = \pm 1\} \tag{7.40}$$

его разложений в алгебраическую сумму знаменателей Q_{m_i} подходящих дробей числа α с условием $1 \leqslant m_i < l(\alpha)$. При этом полагаем $l_\alpha(0) = 0$.

Теорема 7.2. *Пусть дано любое $\alpha \in I$ с условием $l(\alpha) \geqslant 2$. Тогда выполняются неравенства*

$$m_n(\alpha) < l_\alpha(n) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{q_{m_i}}, \tag{7.41}$$

$$m_n(\alpha) < 2 l_\alpha(n) \tag{7.42}$$

и существует $t^* \in I$ такое, что

$$m_n(\alpha, t^*) < l_\alpha(n). \tag{7.43}$$

Доказательство. Первое неравенство следует из формулы (7.34) и неравенства (7.39), второе — непосредственное следствие из (7.41). Третье вытекает из неравенства (7.42) и предложения 3.2. □

7.4. Аппроксимация α регулярными числами. Для $\alpha = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{\theta_m}{Q_m Q_{m+1}}$ выберем приближение

$$\alpha_{\mathrm{reg}} = \frac{a}{n+1} \tag{7.44}$$

из множества регулярных чисел $\mathbb{A}_{\mathrm{reg}}$ (см. определение (5.13)), где $a = P_m$, $n = Q_m - 1$, т.е. $\alpha_{\mathrm{reg}} = \frac{P_m}{Q_m}$. Потребуем, чтобы выполнялось условие $Q_m \geqslant 2$ и, значит, $n = Q_m - 1 \geqslant 1$. Исходя из равенств

$$|\alpha_* - \alpha| = \Big|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha\Big| = \Big|\frac{\theta_m}{Q_m Q_{m+1}}\Big|,$$

оцениваем погрешность

$$|\alpha_* - \alpha| \leqslant \Big|\frac{1}{(n+1)Q_{m+1}}\Big| < \Big|\frac{1}{nQ_{m+1}}\Big|. \tag{7.45}$$

Потребуем выполнения условия $1 \leqslant m < l(\alpha)$. Тогда согласно (7.2) существует $Q_{m+1} = q_{m+1}Q_m + Q_{m-1}$ и, значит, $Q_{m+1} \geqslant Q_m + 1 = n + 2$. Отсюда вытекает более слабое неравенство $Q_{m+1} > n$, из которого и неравенства (7.45) следует, что

$$|\alpha_* - \alpha| < \frac{1}{n^2}. \tag{7.46}$$

Если воспользоваться расстоянием (6.8), то из последнего неравенства заключаем

$$\varrho(\alpha, \mathbb{A}_{\mathrm{reg}}) < \frac{1}{n^2}. \tag{7.47}$$

Из неравенства (7.47), следствия 6.1 и предложения 3.1 вытекает

Теорема 7.3. *Пусть $\alpha \in I$ имеет длину $l(\alpha) \geqslant 2$. Тогда для любого $1 \leqslant m < l(\alpha)$ с условием $Q_m \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$m_n(\alpha, 0) < 2, \quad m_n(\alpha) < 4, \tag{7.48}$$

где $n = Q_m - 1$.

Теорема 7.3 позволяет расширить выбор слагаемых $n_1 + \ldots + n_s = n$ в разложениях (7.40):

$$l_\alpha^{\mathrm{ext}}(n) = \min\{s : \varepsilon_1 Q_{m_1}^* + \ldots + \varepsilon_s Q_{m_s}^* = n,\ \varepsilon_i = \pm 1\}, \tag{7.49}$$

где в качестве Q_m^* допускаются уже слагаемые двух видов Q_m или $Q_m - 1$.

Теорема 7.4. *Пусть $\alpha \in I$ имеет длину $l(\alpha) \geqslant 2$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеют место неравенства*

$$m_n(\alpha) < 4 l_\alpha^{\mathrm{ext}}(n) \tag{7.50}$$

и существует $t^* \in I$ такое, что

$$m_n(\alpha, t^*) < 2 l_\alpha^{\mathrm{ext}}(n). \tag{7.51}$$

Доказательство. Первое неравенство вытекает из (7.48) и субаддитивности (7.39) функции $m_n(\alpha)$, второе — из (7.50) и предложения 3.2. $\square$

Известно [3, 5], что любое натуральное n разложимо в сумму знаменателей Q_m подходящих дробей $\alpha^m = \frac{P_m}{Q_m}$ для любого иррационального α. Если в разложениях (7.40) ограничиться лишь коэффициентами $\varepsilon_k = 1$, то разложения минимальной длины $l^g_\alpha(n)$ можно получать по так называемому ,,жадному“ алгоритму. В [16] исследованы числа n, для которых выполняется неравенство

$$l_\alpha(n) < l^g_\alpha(n). \tag{7.52}$$

Далее мы расширим (7.49) разложения (7.40), допуская слагаемые двух видов Q_m или $Q_m - 1$. Если минимальную длину разложений в этом случае обозначить $l^{\mathrm{ext}}_\alpha(n)$, то из определений следует

$$l^{\mathrm{ext}}_\alpha(n) \leqslant l_\alpha(n). \tag{7.53}$$

Ясно, что для чисел n вида $Q_m - 1$ неравенство (7.53) становится строгим, и тем самым комбинируя теоремы 7.2 и 7.3, можно усиливать верхние оценки для граничных значений $m_n(\alpha, t)$ и $m_n(\alpha)$.

7.5. Построение когерентных последовательностей. Пусть орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t)$ — орбита (3.9), состоящая из точек $\{j\alpha - t\}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t)$ вкладывается $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$ в разбиение $\mathbf{I}_n = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ (см. определение (4.1)), если выполняются включения $(\alpha, t)_k \in I_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, где

$$0 \leqslant (\alpha, t)_1 < (\alpha, t)_2 < \ldots < (\alpha, t)_n < 1 \tag{7.54}$$

— все точки орбиты, пронумерованные в порядке их возрастания. Если выполняется вложение $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$, то последовательность (7.54) будет когерентной относительно разбиения $\mathbf{I}_n$.

Теорема 7.5 (о вложении). *Пусть выбрано любое $\alpha \in I = [0, 1\}$ с условием $l(\alpha) \geqslant 2$ и пусть $n = Q_m$ — знаменатель любой подходящей дроби для α с номером $1 \leqslant m < l(\alpha)$. Тогда существовует такое $t^* \in I$, что орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t^*)$ вкладывается $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t^*) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$ в разбиение $\mathbf{I}_n$.*

Доказательство. Согласно теореме 7.1 найдется $t^* \in I$ с условием $m_n(\alpha, t^*) < 1$. Тогда из определения (3.1) следует, что $|D^{\pm}_{n,\alpha}(x, t^*)| < 1$ для всех $x \in I$. Отсюда и теоремы 4.1 заключаем, что орбита $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t^*)$ вкладывается в разбиение $\mathbf{I}_n$. $\square$

Замечание 7.1. Интересно проследить связь вложений $\mathrm{Orb}_n(\alpha, t) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_n$ орбит (4.2) в конечные разбиения $\mathbf{I}_n$ с вложениями

$$L \overset{\mathrm{em}_\infty}{\hookrightarrow} \mathbf{I}_\infty(\alpha) \tag{7.55}$$

решеток $L = \{j\beta + t; j = 0, 1, 2, \ldots\}$ в бесконечные *квазипериодические разбиения* $\mathbf{I}_\infty(\alpha)$ полупрямой $\mathbb{R}_+$, разбитой на полуинтервалы произвольных длин l_1 или l_2 в соответствии с попаданием дробной доли $\{i\alpha\}$ в один из полуинтервалов $[0, \alpha)$ или $[\alpha, 1)$. Бесконечные вложения (7.55) были исследованы в [13].

§8. Оценки δ-отклонений

8.1. Формула двойственности и граничные значения. Доказанная в теореме 1.1 формула $\delta_{n,\alpha}(i, t) = \Delta_{n,\alpha}(i\alpha, t)$, где $i > |n|$, устанавливает связь между двумя видами отклонений: δ-отклонением (1.3) и D-отклонениями (1.8) и (1.17). Формулу двойственности (1.21) можно применить к оценке величины δ-отклонения, поскольку из нее и определения (3.19) вытекают неравенства

$$|\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant \mu_n(\alpha, t), \tag{8.1}$$

$$|\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant \mu_n(\alpha), \tag{8.2}$$

справедливые для всех $i > |n|$ и $t \in I$. Заметим, что если параметр n начинает расти, то условие $i > |n|$ в приведенных выше неравенствах (8.1) и (8.2) становится весьма ограничительным. Поэтому возникает необходимость выяснить, как ведут себя данные неравенства для начальных значений $i \leqslant |n|$.

Пусть $n > 0$. Если в формуле (1.3) положить $i = i' + i''$ с произвольными $i', i'' \geqslant 0$, то ее можно переписать в виде равенства

$$\delta_{n,\alpha}(i' + i'', t) = \delta_{n,\alpha}(i', t) + \delta_{n,\alpha}(i'', t + i'\alpha), \tag{8.3}$$

выражающего свойство аддитивности по параметру i отклонения δ. Из (8.3) следует

$$|\delta_{n,\alpha}(i', t)| \leqslant |\delta_{n,\alpha}(i' + i'', t)| + |\delta_{n,\alpha}(i'', t + i'\alpha)|. \tag{8.4}$$

Используем данное неравенство для оценки отклонения $|\delta_{n,\alpha}(i', t)|$ в интересующем нас интервале $0 \leqslant i' \leqslant n$. Из (1.21), (8.1) и (8.4) вытекает оценка

$$|\delta_{n,\alpha}(i', t)| \leqslant \mu_n(\alpha, t) + |\Delta_{n,\alpha}(i''\alpha, t')|, \tag{8.5}$$

где $t' = t + i'\alpha$. Здесь в качестве i'' можно выбрать любое $i'' > n$. Конечно, вместо (8.5) можно было сразу записать неравенство

$$|\delta_{n,\alpha}(i', t)| \leqslant 2\mu_n(\alpha, t), \tag{8.6}$$

но, как увидим ниже, при некоторых α его можно значительно усилить. С этой целью постараемся сделать значение функции $D_{n,\alpha}(x, t')$, где $x = \{i''\alpha\}$, как можно меньшим. Отметим, что в неравенстве (8.5) параметр $t' = t + i'\alpha$ не зависит от i''.

Если, например, α допустим быть рациональным числом, то переменная $x = \{i''\alpha\}$ при изменении i'' пробегает конечное множество значений, и, значит, выбор значений для функции $D_{n,\alpha}(x, t')$ ограничен. Поэтому в общем случае неравенство (8.6) принципиально не улучшаемо.

Ситуация резко меняется, если предположить α иррациональным числом. Чтобы это увидеть, воспользуемся следующим равенством:

$$\Delta_{n,\alpha}(x, t') = nx \text{ для } 0 \leqslant x < (\alpha, t')_1, \tag{8.7}$$

вытекающим из формулы (1.10). Поскольку α иррационально, то для любого $0 < \varepsilon < (\alpha, t')_1$ найдется такое $i'' > n$, что выполняется включение

$$x = \{i''\alpha\} \in \left[0, \frac{\varepsilon}{n}\right). \tag{8.8}$$

Из (8.7) и (8.8) следует $|\Delta_{n,\alpha}(x, t')| < \varepsilon$, и тогда из (8.5) получаем для δ-отклонения оценку $|\delta_{n,\alpha}(i', t)| < \mu_n(\alpha, t) + \varepsilon$. Поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, то мы тем самым доказали неравенство

$$|\delta_{n,\alpha}(i', t)| \leqslant \mu_n(\alpha, t), \tag{8.9}$$

которое выполняется уже при всех $i' = 0, 1, 2, \ldots$

Лемма 8.1. *Для произвольного целого n, $t \in I$ и любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются следующие неравенства*:

$$|\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant \mu_n(\alpha, t), \quad |\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant m_n(\alpha), \tag{8.10}$$

если $\alpha \in I$ — иррациональное число, и соответственно

$$|\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant 2\mu_n(\alpha, t), \quad |\delta_{n,\alpha}(i, t)| \leqslant 2m_n(\alpha), \tag{8.11}$$

если $\alpha \in I$ — произвольное число.

Доказательство. Пусть $n > 0$ и α иррациональное. Первое неравенство (8.10) следует из неравенства (8.9), а второе — из неравенства $m_n(\alpha, t) \leqslant m_n(\alpha)$, вытекающего из определения (3.1) и предложения 3.3.

Случай $n < 0$ вытекает из предыдущего и свойства инвариантности (2.4) функции $D_{n,\alpha}(x, t)$ при замене $n \to -n$, а случай $n = 0$ тривиален.

Для доказательства (8.11) нужно воспользоваться неравенством (8.6). □

Теорема 8.1. *Пусть $\alpha \in I$ выбрано с условием $l(\alpha) \geqslant 2$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in I$. Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства:*

1) *если α — иррациональное число, то*

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| < 2l_\alpha(n) \tag{8.12}$$

и для некоторого $t^* \in I$

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t^*)| < l_\alpha(n); \tag{8.13}$$

2) *если же α — произвольное число, то*

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t)| < 4l_\alpha(n) \tag{8.14}$$

и для некоторого $t^* \in I$

$$|\delta_{n,\alpha}(i,t^*)| < 2l_\alpha(n). \tag{8.15}$$

Доказательство. Вытекает из леммы 8.1 и теоремы 7.2. □

§9. Золотое сечение

9.1. Золотое сечение и числа Фибоначчи. Выберем в качестве α число $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\ldots$ — *золотое сечение*. Оно удовлетворяет квадратичному соотношению

$$\tau^2 + \tau = 1, \tag{9.1}$$

из которого для τ вытекает следующее разложение в цепную дробь:

$$\tau = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}. \tag{9.2}$$

Находим для нее знаменатели подходящих дробей

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 2, \quad Q_3 = 3, \ldots, Q_m = Q_{m-1} + Q_{m-2} \tag{9.3}$$

для $m \geqslant 3$. Эти знаменатели есть нечто такое, как *числа Фибоначчи*:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \ldots, \tag{9.4}$$

определяемые рекуррентным соотношением $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$.

Укажем на некоторые связи чисел Фибоначчи F_m с золотым сечением τ, которые нам потребуются в дальнешем. Во-первых, используя индукцию, из (9.1) и рекуррентного соотношения получаем формулу

$$F_m\tau - F_{m-1} = (-1)^{m-1}\tau^m, \tag{9.5}$$

из которой следует $\{F_m\tau\} = \{(-1)^{m-1}\tau^m\}$. Для удобства распишем последнее равенство в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \{F_m\tau\} &= \begin{cases} 1-\tau^m, & \text{если } m \text{ четное,} \\ \tau^m, & \text{если } m \text{ нечетное;} \end{cases} \\ \{-F_m\tau\} &= \begin{cases} \tau^m, & \text{если } m \text{ четное,} \\ 1-\tau^m, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases} \end{aligned} \tag{9.6}$$

9.2. Точная формула для граничного значения $m_n(\tau)$**.** По формуле (9.5) имеем равенство $F_m\tau = F_{m-1} + (-1)^{m-1}\tau^m$, из которого вытекает представление

$$\tau = \frac{F_{m-1}}{F_m} + \frac{(-1)^{m-1}\tau^m}{F_m}, \tag{9.7}$$

и, следовательно, выполняется равенство

$$|\Delta| = \left|\tau - \frac{F_{m-1}}{F_m}\right| = \frac{\tau^m}{F_m}. \tag{9.8}$$

Для вычисления $m_n(\tau)$ воспользуемя формулой (7.33) из теоремы 7.1. Подставим (9.8) в формулу (7.33), в которой второе слагаемое равно

$$n(n-1)|\Delta| = (F_m - 1)\tau^m. \tag{9.9}$$

Далее используем явную формулу, выражающую числа Фибоначчи F_m через степени τ:

$$F_m = \frac{\tau^{-m} + (-1)^{m+1}\tau^m}{\sqrt{5}}.$$

Данная формула вытекает из рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи. Используя ее, находим

$$F_m\tau^m = \frac{1 + (-1)^{m+1}\tau^{2m}}{\sqrt{5}}.$$

Тогда из (9.9) и последнего равенства получаем

$$n(n-1)|\Delta| = \frac{1 + (-1)^{m+1}\tau^{2m}}{\sqrt{5}} - \tau^m. \tag{9.10}$$

Теорема 9.1. *Пусть* $\alpha_{\text{app}} = \tau$, $n = \pm F_m$, $m \geqslant 2$, *где* F_m *— числа Фибоначчи* (9.4). *Тогда для максимума* $m_n(\tau)$ *функции* $D^{\pm}_{n,\tau}(x,t)$, *определенного в* (3.1), *имеет место следующая явная формула*

$$m_n(\tau) = c_m, \tag{9.11}$$

где $c_m = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon_m$, *при этом* $\varepsilon_m = \tau^m\big(1 + \frac{(-\tau)^m}{\sqrt{5}}\big) > 0$; *и как следствие из формулы* (9.11) *выполняется неравенство*

$$m_n(\tau) < 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.45. \tag{9.12}$$

Доказательство. Формула (9.11) следует из теоремы 7.1 и соотношения (9.10), а неравенство (9.12) — из (9.11), так как $\varepsilon_m > 0$ для любого m. □

9.3. Отклонения δ для $\alpha = \tau$. Пусть снова $\alpha_{\text{app}} = \tau$. По лемме 8.1 для δ-отклонения имеет место оценка

$$|\delta_{n,\tau}(i,t)| \leqslant m_n(\tau) \tag{9.13}$$

для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть

$$n = n_1 + \ldots + n_s \tag{9.14}$$

— некоторое минимальное разложение числа n на слагаемые $n_k = \pm F_{m_k}$ и, значит, $s = l_\tau(n)$ по определению (7.40). Из субаддитивности (7.39) функции $m_n(\tau)$ следует неравенство

$$m_n(\tau) \leqslant m_{n_1}(\tau) + \ldots + m_{n_s}(\tau), \tag{9.15}$$

где $m_{n_k}(\tau)$ вычисляются по формуле (9.11).

Теорема 9.2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$ *имеет минимальное разложение* (9.14). *Тогда для всех* $t \in I$ *и* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *выполняются следующие неравенства*:

$$|\delta_{n,\tau}(i,t)| \leqslant c_{m_1} + \ldots + c_{m_s}, \tag{9.16}$$

при этом c_{m_k} *вычисляются по формуле* (9.11);

$$|\delta_{n,\tau}(i,t)| \leqslant c l_\tau(n), \ \text{где } c = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.45, \tag{9.17}$$

и

$$|\delta_{n,\tau}(i,t^*)| \leqslant \frac{3}{4}\, l_\tau(n) \tag{9.18}$$

для некоторого $t^* \in I$.

Доказательство. Из (9.13), (9.15) и теоремы 9.1 следует неравенство (9.16). Отсюда и (9.12) получаем (9.17). Переход от неравенства (9.17) к (9.18) уже обсуждался в теореме 7.1. □

9.4. Аналитическая формула для δ-отклонения. Пусть $I_m = [1-\tau^m, 1)$ — интервал длины $|I_m| = \tau^m$. Обозначим

$$N(i, I_m) = \sharp\{j;\ \{j\tau\} \in I_m,\ j = 0, 1, \dots, i-1\}. \tag{9.19}$$

В [7] была найдена явная формула для считающей функции $N(i, I_m)$. В частности, для случая четного $m \geqslant 4$ указанная формула принимает вид

$$N(i, I_m) = \begin{cases} [\dots[[i\tau^2]\tau^2]\dots\tau^2] + 1, & \text{если } i \geqslant F_m, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant i < F_m. \end{cases} \tag{9.20}$$

Здесь τ^2 записано $m/2$ раз.

Перейдем от (9.19) на язык считающей функции, определенной ранее в (0.1):

$$N(i, I_m) = r_{n,\tau}(i, t). \tag{9.21}$$

По формуле (9.6) находим $|I_m| = \tau^m = \{-F_m\tau\}$ для четных m. Следовательно, в нашем случае $n = -F_m$. Теперь используем нумерацию (0.1) точек орбиты

$$\{j\tau + t\}, j = 0, 1, \dots, i-1. \tag{9.22}$$

Начальная точка $\{t\}$ орбиты (9.22) соответствует номеру $j = 0$. Поэтому из равенства (9.21) следует, что t равно $|I_m| = \tau^m$. Таким образом, в формуле (9.21) имеем $n = -F_m, \quad t = \tau^m$. Из (9.20) и (9.21) для четных $m \geqslant 4$ вытекает следующая явная формула:

$$r_{-F_m,\tau}(i, \tau^m) = \begin{cases} [\dots[[i\tau^2]\tau^2]\dots\tau^2] + 1, & \text{если } i \geqslant F_m, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant i < F_m. \end{cases} \tag{9.23}$$

Как уже отмечалось, $\{-F_m\tau\} = \tau^m$, поэтому формулу (1.4) для δ-отклонения можно записать в виде

$$\delta_{-F_m,\tau}(i, \tau^m) = \tau^m i - r_{-F_m,\tau}(i, \tau^m).$$

Отсюда и (9.23) вытекает следующая аналитическая формула для δ-отклонения:

$$\delta_{-F_m,\tau}(i, \tau^m) = \tau^m i - [\dots[[i\tau^2]\tau^2]\dots\tau^2] - 1, \tag{9.24}$$

справедливая для всех $i \geqslant F_m$. Значение формулы (9.24) состоит в том, что она напрямую вычисляет δ-отклонение через функцию $[x]$ — целую часть x.

Полученную формулу интересно сравнить с геометрической формулой (1.21) из теоремы 1.1, выражающей δ-отклонение через функцию $D_{n,\alpha}(x, t)$. Избавляясь от целых частей в формуле (9.24), из нее можно получить оценку

$$|\delta_{-F_m,\tau}(i, \tau^m)| \leqslant 1.$$

В то время, как из теоремы 9.2 вытекает неравенство

$$|\delta_{-F_m,\tau}(i,t^*)| \leqslant 0.75$$

для некоторого $t^* \in I$.

Список литературы

[1] Brown T. C., Shiue P. J-S., *Sums of fractional parts of integer multiples of an irrational*, J. Number Theory **50** (1995), no. 2, 181–192.

[2] Hecke E., *Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.

[3] Ostrowski A., *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **1** (1922), no. 1, 77–98.

[4] Pinner C., *On sums of fractional parts* $\{n\alpha+\gamma\}$, J. Number Theory **65** (1997), no. 1, 48–73.

[5] Zeckendorf E., *Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **41** (1972), 179–182.

[6] Абросимова А. А., Журавлев В. Г., *Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова*, Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, Тез. докл., Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2011, с. 3–4.

[7] Журавлев В. Г., *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ 322 (2005), 83–106.

[8] Журавлев В. Г., *Одномерные разбиения Фибоначчи*, Изв. РАН. Сер. мат. **71** (2007), №2, 89–122.

[9] Журавлев В. Г., *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.

[10] Журавлев В. Г., *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей*, Алгебра и анализ **24** (2012), №1, 95–130.

[11] Журавлев В. Г., *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова*, Алгебра и анализ **24** (2012), №4, 97–136.

[12] Журавлев В. Г., *Многогранники ограниченного остатка*, Математика и информатика. 1, Совр. пробл. мат., вып. 16, Мат. ин-т РАН, М., 2012, с. 82–102.

[13] Красильщиков В. В., Шутов А. В., Журавлев В. Г., *Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий*, Изв. вузов. Мат. **2009**, №7, 3–9.

[14] Мануйлов Н. Н., *Число попаданий точек последовательности* $\{n\tau_g\}$ *в полуинтервал*, Чебышевский сб. **5** (2004), №3, 72–81.

[15] Шутов А. В., *Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей* $n\alpha$ *на множествах ограниченного остатка*, Вестн. Самар. гос. ун-та. Естеств.-науч. сер. **7(57)** (2007), 168–175.

[16] Шутов А. В., *Системы счисления и множества ограниченного остатка*, Чебышевский сб. **7** (2006), №3, 110–128.

Владимирский
государственный университет
600024, Владимир
пр. Строителей, 11
Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 25 июня 2013 г.