Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №1

МНОГОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА ГЕККЕ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ

© В. Г. ЖУРАВЛЕВ

Теорема Гекке о распределения дробных долей на окружности переносится на торы $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$ произвольной размерности D. Доказана теорема об ограниченности $|\delta_k(i)| \leqslant c_k\, n$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$ отклонений $\delta_k(i) = r_k(i) - ia_k$ количества попаданий $r_k(i)$ за i шагов точек S_β-орбиты в область $\mathbb{T}^D_k \subset \mathbb{T}^D$ от средней величины $a_k = \mathrm{vol}(\mathbb{T}^D_k)/\,\mathrm{vol}(\mathbb{T}^D)$, где через $\mathrm{vol}(\mathbb{T}^D_k)$ и $\mathrm{vol}(\mathbb{T}^D)$ обозначены объемы области $\mathbb{T}^D_k$ и всего тора $\mathbb{T}^D$. Рассматриваемые области $\mathbb{T}^D_k$ обладают следующим свойством: для тора $\mathbb{T}^D$ существует такая развертка $T^D \subset \mathbb{R}^D$, что сдвиг S_α тора $\mathbb{T}^D$ эквивалентен некоторому перекладыванию соответствующих областей T^D_k из разбиения развертки $T^D = T^D_0 \sqcup T^D_1 \sqcup \ldots \sqcup T^D_D$. При этом векторы сдвигов тора S_α и S_β связаны условием $\alpha \equiv n\beta \mod L$, где n — любое натуральное число, и константы в неравенствах c_k явным образом выражаются через диаметр развертки T^D.

Введение

Пусть α — вещественное число, $\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ и b — произвольное целое число. Определим считающие функции

$$\begin{aligned} r_0(i) &= \sharp\{j; \{j\beta\} < 1 - \alpha, 0 \leqslant j < i\}, \\ r_1(i) &= \sharp\{j; \{j\beta\} \geqslant 1 - \alpha, 0 \leqslant j < i\}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Рассмотрим отклонения

$$\begin{aligned} \delta_0(i) &= r_0(i) - i(1 - \alpha), \\ \delta_1(i) &= r_1(i) - i\alpha \end{aligned}$$

функций $r_0(i)$, $r_1(i)$ от ожидаемых значений, где $1-\alpha$ и α — длины интервалов, в которые попадают дробные доли $\{j\beta\}$. Относительно отклонений $\delta_0(i)$, $\delta_1(i)$ Гекке доказал следующий результат.

Ключевые слова: теорема Гекке, распределение дробных частей, средние значения функций отклонения, множества ограниченного остатка на торе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00578-а.

Теорема 1 (Гекке [3]). *Если α — иррациональное число, то выполняются неравенства*

$$|\delta_0(i)| \leqslant n, \quad |\delta_1(i)| \leqslant n \tag{0.2}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Цель настоящей работы — перенести теорему Гекке на торы $\mathbb{T}^D$ любой размерности D. Исходить мы будем из следующей аналогии.

Функции $r_0(i)$, $r_1(i)$ можно связать с поворотами окружности. Пусть

$$S_\alpha : x \mapsto x + \alpha \mod 1 \tag{0.3}$$

— поворот единичной окружности $C = \mathbb{T}^1$ на угол α. Тогда $r_0(i)$, $r_1(i)$ можно рассматривать как количество попаданий точек

$$S_\beta^0(0) = 0, \quad S_\beta^1(0), \ \ldots, \ S_\beta^{i-1}(0),$$

где S_β^j — композиция поворота S_β кратности j, соответственно в полуинтервалы $[0, 1-\alpha)$ и $[1-\alpha, 1)$; а $\delta_0(i)$, $\delta_1(i)$ — как отклонения в задаче о распределении дробных долей. Разрежем окружность в некоторой точке и отождествим окружность с единичным полуинтервалом $T^1 = [0, 1)$. Если теперь $T^1 = [0, 1)$ разбить

$$T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1 \tag{0.4}$$

на два полуинтервала $T_0^1 = [0, 1-\alpha)$, $T_1^1 = [1-\alpha, 1)$, то поворот окружности (0.3) будет равносилен прекладыванию полуинтервалов T_0^1 и T_1^1:

$$T^1 \xrightarrow{S} T^1 : \ \ S(x) = x + v_k,$$

если $x \in T_k^1$ для $k = 0, 1$; при этом векторы сдвигов v_0 и v_1 равны α и $\alpha - 1$ соответственно.

В случае размерности $D \geqslant 2$ пусть задан сдвиг тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$,

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : \ \ x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod L, \tag{0.5}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ — вектор сдвига и L — невырожденная решетка из $\mathbb{R}^D$. Разрежем тор $\mathbb{T}^D$ таким способом, чтобы его развертка T^D содержалась в пространстве $\mathbb{R}^D$. Теперь если снова отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D, то сдвигу тора (0.5) будет отвечать перекладывание областей T_k из разбиения развертки

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_s. \tag{0.6}$$

За исключением вырожденных случаев, наименьшее количество областей, на которое возможно разбиение (0.6), равно $s_{\min} = D + 1$. Так, в одномерном случае — это два ранее рассмотренных полуинтервала (0.4); при

$D = 2$ можно взять, например, плоскую проекцию трехмерного куба, состоящую из трех перекладывающихся параллелограммов.

Чтобы получить многомерное обобщение теоремы Гекке, будем, по сравнению с (0.2), двигаться в обратном направлении: начнем с минимальных разверток тора

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D, \tag{0.7}$$

допускающих перекладывание вида

$$T^D \xrightarrow{S} T^D : \quad x \mapsto S(x) = x + v_k, \tag{0.8}$$

если $x \in T_k$. При этом будем требовать, чтобы разбиение тора (0.7) и векторы перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_D$ удовлетворяли свойству: после отождествления тора $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D перекладыванию (0.8) будет отвечать сдвиг тора S_α (0.3) на некоторый вектор α, однозначно определяемый перекладыванием (0.8).

По аналогии с (0.1) определим считающие функции

$$r_k(i) = \sharp\{j; S_\beta^j(0) \in T_k; 0 \leqslant j < i\}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$; где S_β — сдвиг (0.3) тора $\mathbb{T}^D$ на вектор

$$\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b_1 l_1 + \cdots + b_D l_D),$$

при этом b_k — любые целые числа и $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \ldots, D$. Предположим, что векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой области T_k можно определить отклонение

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i a_k \tag{0.9}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$, где $a_1, \ldots, a_D$ — координаты вектора $-\alpha$ в базисе $l_1, \ldots, l_D$ и $a_0 = 1 - a_1 - \cdots - a_D$. Относительно отклонений $\delta_k(i)$ в теореме 5.1 доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и пусть вектор сдвига α тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$ иррационален, т.е. его координаты $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ в некотором базисе решетки L обладают свойством: числа*

$$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D, 1 \tag{0.10}$$

линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i)| \leqslant c_k n \tag{0.11}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $c_k = c_{T,k}$ — константы (5.13), не зависящие от параметров n, i и определяемые исключительно размерами развертки тора T^D.

Пусть A — аффинное отображение, переводящее векторы $l_1, \dots, l_D$ в соответствующие единичные векторы $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_D = (0, 0, \dots, 1)$. Образ AT развертки тора T снова является разверткой некоторого тора той же размерности D. При переходе от развертки T к AT сохраняются все вышеприведенные конструкции, причем константы в неравенствах (0.11) остаются инвариантными относительно аффинных отображений A:

$$c_{AT,k} = c_{T,k}.$$

Поэтому без потери общности можем предположить, что

$$l_1 = e_1, \ \dots, \ l_D = e_D. \tag{0.12}$$

При этих предположения доказан следующий результат.

Теорема 3 (многомерная теорема Гекке). *При выполнении условий теоремы* 2 *и условия* (0.12) *справедливы неравенства*

$$|\delta_k(i)| \leqslant d_T\, n \ \text{ для } \ k = 1, \dots, D,$$
$$|\delta_k(i)| \leqslant D d_T\, n \ \text{ для } \ k = 0,$$

где d_T *— диаметр развертки* T^D. *Если, кроме того, в разбиении* (0.7) *каждая область* T_k *кубируема, то отклонения* (0.9) *можно записать в виде*

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i\ \mathrm{vol}(T_k)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$, *где* $\mathrm{vol}(T_k)$ *— объем области* T_k.

Интересно посмотреть, как выглядит результат данной теоремы, если его сформулировать не в геометрических терминах, а аналитически на языке функции $\{x\}$, так же как в теореме Гекке (0.2). В качестве иллюстрации приведем один пример для размерности $D = 2$. Определим следующую считающую функцию:

$$r_1(i) = \sharp\Big\{0 \leqslant j < i;\ \ \{\{j(\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\} + \{j\beta_2\}\alpha_1\} \geqslant 1 - \alpha_1,\ \ \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2\Big\}, \tag{0.13}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — произвольный вектор и

$$\beta_1 = \frac{1}{n}(\alpha_1 - b_1 - b_2\alpha_1), \quad \beta_2 = \frac{1}{n}(\alpha_2 - b_2).$$

Если перейти к единичному базису $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, то ту же считающую функцию (0.13) можно переписать еще в одном эквивалентном виде

$$r_1(i) = \sharp\Big\{0 \leqslant j < i;\ \ 1 - \alpha_1 \leqslant \{j\widetilde{\beta}_1\} + \alpha_1\{j\beta_2\} < 1,\ \ \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2\Big\}, \tag{0.14}$$

где $\widetilde{\beta}_1 = \frac{1}{n}(\alpha_1 - b_1 - \alpha_1\alpha_2)$. Имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть числа* $\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2, \alpha_2, 1$ *линейно независимы над* $\mathbb{Z}$. *Тогда для отклонения*

$$\delta_1(i) = r_1(i) - i(\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

выполняется неравенство

$$|\delta_1(i)| \leqslant (1 + \alpha_1)n \tag{0.15}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Области T_k из разбиений (0.7) — это множества ограниченного остатка на торе $\mathbb{T}^D$. Так, множества T_1, определяемые неравенствами из (0.14), являются согласно (0.15) множествами ограниченного остатка. Они представляют собой параллелограммы, параметризованные пятью свободными параметрами α_1, α_2, b_1, b_2, n. Семейство параллелограммов T_1 включает в себя подсемейство параллелограммов [7], у которых фиксированы параметры $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. Все параллелограммы из семейства T_1 имеют острые углы, и это неслучайно: Лиарде [4] доказал, что любой невырожденный прямоугольник на торе не может быть множеством ограниченного остатка. Ранее для двумерного случая множества ограниченного остатка с фрактальными границами были исследованы в [8].

Наш метод — геометрический. Он более всего созвучен методу французских математиков (Рози [6], Ференци [2] и др.).

Данный метод позволяет: 1) строить множества ограниченного остатка на торе $\mathbb{T}^D$ любой размерности D; 2) для отклонений $\delta_k(i)$ на этих множествах находить явные оценки — приближенные оценки вида (0.15) (см. теорему 5.1) и точные границы изменения отклонений (см. теоремы 6.1 и 7.1); 3) вычислять средние значения $\langle\delta_k\rangle$ отклонений $\delta_k(i)$ (см. теорему 8.1).

§1. Перекладывающиеся торические развертки

Пусть дан D-мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L, \tag{1.1}$$

где L — невырожденная решетка в вещественном арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^D$, т.е. решетка L имеет размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \mod L. \tag{1.2}$$

Разверткой тора $\mathbb{T}^D$ назовем такое подмножество T из $\mathbb{R}^D$, что ограничение фактор-отображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mathrm{mod\,L}} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto x \mod L$$

на подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$ задает биекцию

$$T \overset{\mathrm{mod}\, L}{\longrightarrow\!\!\!\!\sim} \mathbb{T}^D. \tag{1.3}$$

Пусть дана торическая развертка T, удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D \tag{1.4}$$

развертки T, что если с помощью биекции (1.3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T, то индуцированное отображение

$$T \xrightarrow{S_\alpha} T \tag{1.5}$$

для сдвига тора (1.2) будет эквивалентно $(D+1)$-перекладыванию развертки T:

$$S_\alpha(x) = x + v(x), \tag{1.6}$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если} \quad x \in T_k, \tag{1.7}$$

при этом $v_0, v_1, \ldots, v_D$ — некоторая фиксированная система векторов.

Примеры торических разверток.

1. В одномерном случае тор $\mathbb{T}^1$ представляет собой единичную окружность C и сдвиг тора S_α — есть поворот окружности C на угол α. Если теперь отождествить окружность C с единичным полуинтервалом $I = [0, 1)$, то поворот окружности S_α будет тождествен перекладыванию двух полуинтервалов $[0, 1-\alpha)$, $[1-\alpha, 1)$ из I.

2. В случае $D = 2$ в качестве развертки T тора $\mathbb{T}^2$ можно выбрать, например, шестиугольник, разбитый на три параллелепипеда, перекладывание которых соответствует некоторому повороту тора $\mathbb{T}^2$.

3. Общая конструкция перекладывающихся разверток T тора $\mathbb{T}^D$ произвольной размерности D будет рассмотрена в п. 9.

Из (1.2), (1.6) и (1.7) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \mod L \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{1.8}$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D \tag{1.9}$$

принадлежат основной решетке периодов L тора (1.1). Данные векторы порождают некоторую подрешетку

$$L' = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D] \tag{1.10}$$

из основной решетки L, где $l_1, \ldots, l_D$ — порождающие решетки L' над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Сдвиг S_α тора (1.2) называется иррациональным, если числа

$$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D, 1 \tag{1.11}$$

линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$, где $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ — координаты вектора сдвига α в некотором базисе основной решетки периодов L.

Предложение 1.1. *Предположим, что сдвиг S_α (1.2) тора $\mathbb{T}^D$ (1.1) и его развертка T удовлетворяют следующим условиям:*

1) *сдвиг тора S_α является иррациональным;*

2) *замыкание $\overline{T}$ развертки T имеет размерность $\dim \overline{T} = D$, и, следовательно, $\overline{T}$ не содержится ни в каком подпространстве $\mathbb{R}^{D'} \subset \mathbb{R}^D$ размерности $D' < D$;*

3) *развертка T имеет конечный диаметр $d_T = \sup_{x,x' \in \overline{T}} |x - x'|$.*

Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{rank} L' = \operatorname{rank} L = D,$$

где $\operatorname{rank} M$ обозначает ранг решетки $M \subset \mathbb{R}^D$, равный размерности решетки M над $\mathbb{R}$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что для решетки L' имеет место включение

$$L' \subset \mathbb{R}^{D'}, \quad \text{где} \quad D' < D. \tag{1.12}$$

Случай 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^{D'}$. Тогда из (1.12) в силу определения (1.6) имеет место включение $\mathtt{Orb}_{S_\alpha}(0) \subset \mathbb{R}^{D'}$ и, значит, также будет выполняться включение $\overline{\mathtt{Orb}}_{S_\alpha}(0) \subset \mathbb{R}^{D'}$ для замыкания $\overline{\mathtt{Orb}}(0)_{S_\alpha}$ орбиты $\mathtt{Orb}(0)_{S_\alpha}$. Из условия 1), теоремы об эргодичности сдвига тора [10, с. 66] и (1.5) вытекает равенство

$$\overline{\mathtt{Orb}}(0) = \overline{T},$$

из которого следует, что замыкание развертки $\overline{T}$ содержится в подпространстве $\mathbb{R}^{D'}$, а это противоречит условию 2).

Случай 2. Допустим теперь, что $\alpha \notin \mathbb{R}^{D'}$. Тогда выполняются включения

$$S^i_\alpha(0) \subset i\alpha + \mathbb{R}^{D'} \tag{1.13}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Так как $\alpha \notin \mathbb{R}^{D'}$, то из (1.13) следует, что точка $S^i_\alpha(0)$ удаляется в бесконечность при $i \to +\infty$. Этот факт в силу (1.6) противоречит включению

$$S^i_\alpha(0) \subset T$$

и условию 3) на диаметр $d_T < \infty$ развертки тора T. Предложение доказано. $\square$

§2. Векторная T-дробная часть

В дальнейшем на протяжении всей статьи будем предполагать, что L' является полной решеткой, т.е.

$$\text{набор векторов} \quad l_1, \dots, l_D \quad \text{имеет ранг} \quad D \quad \text{над} \quad \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^D$ определим его векторную дробную часть $\mathrm{Fr}(x)$, полагая

$$\mathrm{Fr}(x) = x', \tag{2.2}$$

где $x' \equiv x \mod L$ и $x' \in T$. Корректность определния (2.2) вытекает из факта существования разбиения

$$\mathbb{R}^D = \coprod_{l \in L} T[l] \tag{2.3}$$

пространства $\mathbb{R}^D$ на области

$$T[l] = T + l = \{x + l; x \in T\},$$

получающиеся параллельным сдвигом области T на вектор l.

Чтобы указать зависимость дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ от развертки T, мы будем также использовать дополнительное обозначение $\mathrm{Fr}_T(x)$, и точку или вектор $\mathrm{Fr}_T(x)$ будем называть *T-дробной частью* $x \in \mathbb{R}^D$.

Предложение 2.1. *Пусть*

$$\Delta\,\mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}(x + \alpha) - \mathrm{Fr}(x)$$

— векторнозначная разностная функция с шагом α, где α — вектор сдвига (1.1) *тора $\mathbb{T}^D$. Тогда выполняется равенство*

$$\Delta\,\mathrm{Fr}(x) = v(x) \tag{2.4}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$, где вектор

$$v(x) = \alpha + l(x), \tag{2.5}$$

при этом $l(x) = l_k$, если $x \in T_k$ для $k = 1, \dots, D$, и $l(x) = l_0 = 0$, если $x \in T_0$. Здесь l_k — векторы (1.9).

Доказательство. Для любого x из развертки T имеем представление

$$S_\alpha(x) = x + v(x), \tag{2.6}$$

при этом $v(x) = v_k$ для $x \in T_k$ и $k = 0, 1, \dots, D$. Так как в силу (1.8) выполняется равенство $v(x) = \alpha + l(x)$, где $l(x) = l_k$ для $x \in T_k$ и $k = 0, 1, \dots, D$, то из (2.6) вытекает формула

$$S_\alpha(x) = x + \alpha + l(x),$$

причем для любого x из T его образ $x+\alpha+l(x)$ также принадлежит торической развертке T. Отсюда получаем следующие равенства:

$$\mathrm{Fr}(x+\alpha)=x+\alpha+l(x)=x+v(x), \tag{2.7}$$

справедливые при любом $x\in T$. Для доказательства (2.4) заметим, что

$$x+\alpha\equiv x+\alpha+l(x) \mod L, \tag{2.8}$$

где $l(x)\in L$ и в силу (1.6) выполняется включение

$$x+\alpha+l(x)\in T. \tag{2.9}$$

Из (2.7) следует

$$\begin{aligned}\Delta\,\mathrm{Fr}(x)&=\mathrm{Fr}(x+\alpha)-\mathrm{Fr}(x)\\&=x+\alpha+l(x)-x=\alpha+l(x)=v(x)\end{aligned}$$

для любого $x\in T$.

Рассмотрим теперь общий случай $x\in\mathbb{R}^D$. Согласно разбиению (2.3) любое x можем представить в виде $x=x'+l$ для некоторых $x'\in T$ и $l\in L$, и тогда

$$\mathrm{Fr}(x)=x'. \tag{2.10}$$

По (2.8) и (2.9) имеем

$$x+\alpha\equiv x'+\alpha+l\equiv x'+\alpha+l(x)+l \mod L, \tag{2.11}$$

где $x'+\alpha+l(x)$ принадлежит развертке T. Из (2.11) следует равенство

$$\mathrm{Fr}(x+\alpha)=x'+\alpha+l(x) \tag{2.12}$$

для любого $x\in\mathbb{R}^D$. Используя (2.10) и (2.12), имеем

$$\begin{aligned}\Delta\,\mathrm{Fr}(x)&=\mathrm{Fr}(x+\alpha)-\mathrm{Fr}(x)\\&=x'+\alpha+l(x)-x'=\alpha+l(x)=v(x),\end{aligned}$$

т.е. снова получаем равенство (2.4):

$$\Delta\,\mathrm{Fr}(x)=v(x),$$

где $v(x)=\alpha+l(x)$, для любого $x\in T$.

Доказательство закончено. □

§3. Суммарное векторное отклонение

Определим векторнозначную функцию $\delta(i)$, полагая

$$\delta(i) = \sum_{0 \leqslant j < i} \Delta \operatorname{Fr}(j\beta) \tag{3.1}$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$\beta = \alpha_n(b) = \frac{1}{n}(\alpha + b \circ l), \tag{3.2}$$

при этом n — произвольное натуральное число,

$$b \circ l = b_1 l_1 + \cdots + b_D l_D \tag{3.3}$$

и $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{Z}^D$ — целый вектор. Из (3.3) следует, что вектор $b \circ l$ принадлежит решетке L'.

Используя формулу (2.4), можем функцию (3.1) преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \delta(i) &= \sum_{0 \leqslant j < i} (\alpha + l(j\beta)) = i\alpha + \sum_{0 \leqslant j < i} l(j\beta) \\ &= i\alpha + \sum_{0 \leqslant k \leqslant D} \sum_{\substack{0 \leqslant j < i \\ \operatorname{Fr}(j\beta) \in T_k}} l(j\beta). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как $l(j\beta) = l_k$, если $\operatorname{Fr}(j\beta) \in T_k$, и $l_0 = 0$ по определению (2.5), то из (3.4) для $\delta(i)$ вытекает представление

$$\delta(i) = i\alpha + \sum_{0 \leqslant k \leqslant D} l_k \sum_{\substack{0 \leqslant j < i \\ \operatorname{Fr}(j\beta) \in T_k}} 1,$$

или в другой форме —

$$\delta(i) = i\alpha + r_1(i) l_1 + \cdots + r_D(i) l_D, \tag{3.5}$$

где

$$r_k(i) = \sharp\{\operatorname{Fr}(j\beta) \in T_k; 0 \leqslant j < i\}. \tag{3.6}$$

Если воспользоваться сдвигом тора, то считающую функцию (3.6) можно также записать в виде

$$r_k(i) = \sharp\{j; S_\beta^j(0) \in T_k; 0 \leqslant j < i\}, \tag{3.7}$$

где S_β — сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \mod L \tag{3.8}$$

на вектор β, определенный равенством (3.2).

Сумму (3.1) можно вычислить и другим способом. Используя определение (3.1), запишем $\delta(i)$ в виде разности сумм

$$\delta(i) = \sum_{0\leqslant j<i} \mathrm{Fr}(j\beta+\alpha) - \sum_{0\leqslant j<i} \mathrm{Fr}(j\beta). \tag{3.9}$$

Согласно (3.2) имеем

$$\alpha \equiv n\beta \mod L. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.10) и определения (2.2) векторной T-дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ следует равенство

$$\mathrm{Fr}(j\beta+\alpha) = \mathrm{Fr}(j\beta+n\beta). \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекает

$$\sum_{0\leqslant j<i} \mathrm{Fr}(j\beta+\alpha) = \sum_{0\leqslant j<i} \mathrm{Fr}(j\beta+n\beta) = \sum_{n\leqslant j<i+n} \mathrm{Fr}(j\beta). \tag{3.12}$$

Поэтому из (3.9) и (3.12) для функции $\delta(i)$ получаем еще одно представление

$$\delta(i) = \sum_{n\leqslant j<i+n} \mathrm{Fr}(j\beta) - \sum_{0\leqslant j<i} \mathrm{Fr}(j\beta). \tag{3.13}$$

Предположим, что $i > n$. Тогда из (3.13) вытекает равенство

$$\begin{aligned} \delta(i) &= \sum_{n\leqslant j<i+n} \mathrm{Fr}(j\beta) - \sum_{0\leqslant j<n} \mathrm{Fr}(j\beta) \\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} \bigl(\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta) - \mathrm{Fr}(j\beta)\bigr). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Предложение 3.1. *Пусть вектор β сдвига тора S_β (3.8) определен равенством (3.2) и $\delta(i)$ — сумма (3.1). Тогда $\delta(i)$ представима в виде суммы*

$$\delta(i) = i\alpha + r_1(i)l_1 + \dots + r_D(i)l_D, \tag{3.15}$$

где $r_k(i)$ равно количеству попаданий начальной точки $x = 0$ в область T_k развертки тора T под действием сдвига S_β. Кроме (3.15) вектор-функция $\delta(i)$ может быть представлена еще в одном из двух видов:

$$\delta(i) = \sum_{0\leqslant j<i} (\mathrm{Fr}(j\beta+n\beta) - \mathrm{Fr}(j\beta)) \tag{3.16}$$

для $0 \leqslant i \leqslant n$ и

$$\delta(i) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} (\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta) - \mathrm{Fr}(j\beta)) \tag{3.17}$$

для $i > n$. Здесь $\mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}_T(x)$ определено равенством (2.2) и равно векторной T-дробной части точки $x \in \mathbb{R}^D$.

Доказательство. Равенство (3.16) вытекает непосредственно из определения (3.1) и сравнения (3.10), а равенство (3.17) — из (3.14). □

Замечание 3.1. В п. 5 мы покажем, что при выполнении некоторых условий для молуля $|\delta(i)|$ имеет место следующая оценка:

$$|\delta(i)| = o(i) \quad \text{при} \quad i \to +\infty.$$

Данная оценка и равенство (3.15) позволяют рассматривать $\delta(i)$ как суммарное векторное отклонение от вектора $i\alpha$ распределения точек орбиты

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0) = \{S_\beta^i(0) \equiv i\beta \mod L;\ i = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.18}$$

по всем областям $T_1, \ldots, T_D$ развертки тора T.

§4. Цветные k-отклонения

Пусть L' — полная решетка (2.1). Тогда для ее базиса $l_1, \ldots, l_D$ существует двойственный базис $l_1^*, \ldots, l_D^*$, связанный с исходным базисом соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{k,m}, \tag{4.1}$$

где $x = (x_1, \ldots x_D)$, $y = (y_1, \ldots y_D)$ из $\mathbb{R}^D$ и через $x \cdot y$ обозначено скалярное произведение

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_D y_D.$$

Используя двойственный базис (4.1) и представление (3.15), получаем следующие равенства:

$$l_k^* \cdot \delta(i) = r_k(i) - i\, l_k^* \cdot \alpha \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D. \tag{4.2}$$

Перепишем (4.2) в виде

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i a_k \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D. \tag{4.3}$$

Здесь $\delta_k(i)$ вычисляются по формуле

$$\delta_k(i) = l_k^* \cdot \delta(i), \tag{4.4}$$

а коэффициенты a_k согласно условию (2.1) на векторы $l_1, \ldots, l_D$ и свойству (4.1) однозначно определяются равенством

$$-\alpha = a_1 l_1 + \cdots + a_D l_D. \tag{4.5}$$

Назовем $\delta_k(i)$ отклонением распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0)$ относительно области $T_k \subset T$ или кратко — *k-отклонением*, или *цветным отклонением*.

Из (4.1) и (4.4) следует, что вектор-функция $\delta(i)$ и цветные отклонения $\delta_k(i)$ связаны между собой соотношением

$$\delta(i) = \delta_1(i) l_1 + \cdots + \delta_D(i) l_D. \tag{4.6}$$

Поэтому $\delta(i)$ естественно назвать *векторным суммарным отклонением* распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0)$ относительно областей $T_1, \dots, T_D$ развертки T.

Остается выяснить вопрос о вычислении отклонения $\delta_0(i)$ относительно области T_0. Заметим, что счетные функции $r_0(i), r_1(i), \dots, r_D(i)$ не являются независимыми, так как непосредственно из определений (3.6) и (3.7) следует, что они удовлетворяют тождеству

$$r_0(i) + r_1(i) + \dots + r_D(i) = i \tag{4.7}$$

для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ Определим a_0 равенством

$$a_0 + a_1 + \dots + a_D = 1. \tag{4.8}$$

Согласно (4.7) и (4.8) записываем

$$[r_0(i) - ia_0] + [r_1(i) - ia_1] + \dots + [r_D(i) - ia_D] = 0. \tag{4.9}$$

По аналогии (4.3) с отклонениями $\delta_1(i), \dots, \delta_D(i)$ определим нулевое цветное отклонение как

$$\delta_0(i) = r_0(i) - ia_0. \tag{4.10}$$

Тогда в силу (4.3) и (4.9) между всеми цветными отклонениями выполняется соотношение $\delta_0(i) + \delta_1(i) + \dots + \delta_D(i) = 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, и, следовательно, находим

$$\delta_0(i) = -\delta_1(i) - \dots - \delta_D(i). \tag{4.11}$$

С другой стороны, согласно (4.4) и (4.11) можем записать

$$\delta_0(i) = -l_1^* \cdot \delta(i) - \dots - l_D^* \cdot \delta(i) = -(l_1^* + \dots + l_D^*) \cdot \delta(i). \tag{4.12}$$

Если теперь определить вектор l_0^* равенством

$$l_0^* = -(l_1^* + \dots + l_D^*), \tag{4.13}$$

то из (4.12) для нулевого отклонения $\delta_0(i)$ будет следовать представление

$$\delta_0(i) = l_0^* \cdot \delta(i). \tag{4.14}$$

Сравнивая его с равенством (4.4), видим, что нам удалось тем самым восстановить симметрию между цветными отклонениями относительно всех областей $T_0, T_1, \dots, T_D$ развертки T. Причиной нарушения симметрии было первоначальное выделение вектора v_0 с целью определить базис $l_1, \dots, l_D$ (1.9) решетки L' (1.10).

Предложение 4.1. *Пусть L' — полная решетка* (1.10) *и*

$$\delta_k(i) = r_k(i) - ia_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D, \tag{4.15}$$

где $a_1, \ldots, a_D$ *— координаты вектора* $-\alpha$ *в базисе* $l_1, \ldots, l_D$ *и* $a_0 = 1 - a_1 - \cdots - a_D$. *Тогда* k*-отклонения* (4.15) *удовлетворяют следующему тождеству*:

$$\delta_0(i) + \delta_1(i) + \cdots + \delta_D(i) = 0 \tag{4.16}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$;

$$\delta_k(i) = l_k^* \cdot \delta(i) \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{4.17}$$

где $l_1^*, \ldots, l_D^*$ *— двойственный базис* (4.1) *к базису* $l_1, \ldots, l_D$ *решетки* L', *вектор* l_0^* *определен равенством* (4.13), *а векторное отклонение* $\delta(i)$ *— равенством* (3.1). *При этом отклонения* $\delta(i)$ *и* $\delta_k(i)$ *связаны соотношением*

$$\delta(i) = \delta_1(i) l_1 + \cdots + \delta_D(i) l_D \tag{4.18}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Равенства (4.16) и (4.17) для k-отклонений $\delta_k(i)$ вытекают из равенства (4.3), (4.10) и (4.4), (4.14); а разложение (4.18) следует из (4.6). □

Замечание 4.1. В следующем параграфе мы докажем асимптотическое равенство для k-отклонений $\delta_k(i)$ (см. теорему 5.1)

$$\delta_k(i) = o(i) \quad \text{при} \quad i \to +\infty, \tag{4.19}$$

где $k = 0, 1, \ldots, D$. Тогда из (4.15) и (4.19) следует существование и равенство для следующего предела:

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{r_k(i)}{i} = a_k. \tag{4.20}$$

Отсюда и из определения считающих функций (3.6) вытекают неравенства

$$a_k \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, \ldots, D.$$

Следовательно, коэффициент a_k можно рассматривать как среднее число попаданий точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0)$ в область T_k.

§5. Грубые границы для k-отклонений

Пусть $x \in \mathbb{R}^D$. Определим векторнозначную функцию

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} (\mathrm{Fr}(j\beta + x) - \mathrm{Fr}(j\beta)).$$

Из определения (2.2) T-дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ вытекает равенство

$$\mathcal{D}(x + l) = \mathcal{D}(x)$$

для любого вектора l из решетки L, т.е. $\mathcal{D}(x)$ — периодическая функция на пространстве $\mathbb{R}^D$ с полной решеткой периодов L. В терминах функции $\mathcal{D}(x)$ равенство (3.17) можем записать как композицию

$$\delta(i) = \mathcal{D} \circ \mathrm{Fr}(i\beta) = \mathcal{D}(\mathrm{Fr}(i\beta)) \tag{5.1}$$

функций $\mathrm{Fr}(x)$ и $\mathcal{D}(x)$.

Замечание 5.1. Если S_α будет иррациональным сдвигом (1.2) тора $\mathbb{T}^D$, то сдвиг S_β для вектора β вида (3.2) будет, как нетрудно проверить, также иррациональным в силу определения (1.11). Известно [9], что при этом условии точки орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0)$ (3.18) всюду плотно и равномерно заполняют всю развертку тора T. Поэтому если мы хотим изучить поведение векторного отклонения $\delta(i)$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$, то, используя разложение $\delta(i)$ в композицию (5.1), нам достаточно будет оценить величину функции $\mathcal{D}(x)$, когда точка x пробегает полную развертку тора T.

Пусть $i > n$. Определим разностную функцию

$$\Delta(x, y) = \mathrm{Fr}(x + y) - \mathrm{Fr}(y), \tag{5.2}$$

обладающую согласно (2.2) свойством периодичности

$$\Delta(x + l, y + l') = \Delta(x, y)$$

с периодами l, l' из решетки L. Используя (5.2), функцию $\mathcal{D}(x)$ можно переписать в виде

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \Delta(x, j\beta). \tag{5.3}$$

Из определения (5.2) разностной функции $\Delta(x, y)$ следует, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$ справедливо включение

$$\Delta(x, y) \in T_\Delta, \tag{5.4}$$

где

$$T_\Delta = T - T = \{t - t'; t, t' \in T\} \tag{5.5}$$

— разностное множество для развертки T. Из определения (5.5) вытекает, что разностное множество T_Δ симметрично

$$T_\Delta \overset{-}{\xrightarrow{\sim}} T_\Delta : t \mapsto -t$$

относительно начала координат в $\mathbb{R}^D$. Из (5.3) и (5.4) вытекает включение

$$\mathcal{D}(x) \in nT_\Delta \tag{5.6}$$

для любого x из $\mathbb{R}^D$, где умножение на n в правой части (5.6) означает гомотетию $t \mapsto nt$ с коэффициентом $n = 1, 2, 3, \ldots$

Как следствие из (5.4), для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$ также получаем последовательность включений

$$l_k^* \cdot \Delta(x, y) \in (l_k^* \cdot T)_\Delta \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{5.7}$$

поскольку $l_k^* \cdot (T)_\Delta = (l_k^* \cdot T)_\Delta$ в силу равенства $l_k^* \cdot T = \{l_k^* \cdot t; t \in T\}$. Если положить

$$\mathcal{D}_k(x) = l_k^* \cdot \mathcal{D}(x), \tag{5.8}$$

то из (5.6) и (5.8) для любого $x \in \mathbb{R}^D$ получаем включения

$$\mathcal{D}_k(x) \in n\,(l_k^* \cdot T)_\Delta \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D. \tag{5.9}$$

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим крайние значения

$$\underline{\mathrm{pr}}_l\, X = \inf_{x \in X} \mathrm{pr}_l\, x, \quad \overline{\mathrm{pr}}_l\, X = \sup_{x \in X} \mathrm{pr}_l\, x \tag{5.10}$$

ортогональных проекций

$$\mathrm{pr}_l\, x = \frac{l \cdot x}{|l|}$$

его векторов $x \in X$ на вектор l, где $|l| = \sqrt{l \cdot l}$ обозначает длину вектора l.

Из включений (5.9) и (5.10) следует неравенство

$$|\mathcal{D}_k(x)| \leqslant n\,|l_k^*|\,\big(\overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*}\, T - \underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*}\, T\big) \tag{5.11}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$ и $k = 0, 1, \ldots, D$.

Поскольку согласно предложению 3.1 векторное отклонение $\delta(i)$ разлагается в композицию

$$\delta(i) = \mathcal{D} \circ \mathrm{Fr}(i\beta) \quad \text{для} \quad i > n,$$

то из (5.11) вытекают неравенства

$$|\delta_k(i)| \leqslant c_k n \quad \text{для} \quad i > n \tag{5.12}$$

с константами

$$c_k = c_{T,k} = |l_k^*|\,\big(\overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*}\, T - \underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*}\, T\big), \tag{5.13}$$

не зависящими от n, i и определяемыми исключительно размерами развертки T (1.4) тора $\mathbb{T}^D$.

Осталось рассмотреть случай $0 \leqslant i \leqslant n$, когда векторное отклонение $\delta(i)$ согласно формуле (3.16) имеет вид

$$\delta(i) = \textstyle\sum_{0 \leqslant j < i} (\mathrm{Fr}(j\beta + n\beta) - \mathrm{Fr}(j\beta))$$

или в терминах разностной функции (5.2) — вид

$$\delta(i) = \sum_{0 \leqslant j < i} \Delta(n\beta, j\beta). \tag{5.14}$$

В этом случае вместо (5.12) из (5.7) и (5.14) получаем неравенства

$$|\delta_k(i)| \leqslant c_k i \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.15}$$

Теорема 5.1. *Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i)| \leqslant c_k n \tag{5.16}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где $c_k = c_{T,k}$ — константы (5.13), *не зависящие от n, i и определяемые размерами развертки тора T* (1.4).

2. *Если дополнительно предположить, что α — иррациональный сдвиг* (1.11) *и в разбиении* (1.4) *развертки T каждая область T_k кубируема, то k-отклонения $\delta_k(i)$, определенные равенствами* (4.3) *и* (4.14), *имеют вид*

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i a_k, \quad \text{где} \quad a_k = \tfrac{\operatorname{vol} T_k}{\operatorname{vol} T}, \tag{5.17}$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Здесь $\operatorname{vol} T_k$ *и* $\operatorname{vol} T$ *обозначают объемы областей T_k и всей развертки тора T.*

Доказательство неравенств (5.16) следует из (5.12) и (5.15), а (5.17) следует из (4.3), (4.14) и (4.20). □

Оценим теперь модуль суммарного векторного отклонения $\delta(i)$. Используя (5.1) и (5.6), получаем включение

$$\delta(i) \in n T_\Delta.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|\delta(i)| \leqslant d_T\, n \tag{5.18}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где

$$d_T = \sup_{t, t' \in \overline{T}} |t - t'| \tag{5.19}$$

— диаметр развертки тора T.

Аналогично для k-отклонений $\delta_k(i)$ в силу (5.6) и (5.8) имеем включения

$$\delta_k(i) \in n\, l_k^* \cdot T_\Delta,$$

из которых вытекают следующие неравенства:

$$|\delta_k(i)| \leqslant |l_k^*| d_T\, n \tag{5.20}$$

для $k = 0, 1, \dots, D$.

Допустим снова, что векторы $l_1, \dots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Выберем какое-то невырожденное аффинное отображение A векторного пространства $\mathbb{R}^D$ и подействуем этим отображением на тор

$$A : \mathbb{T}_L^D \simeq \mathbb{R}^D / L \quad \longrightarrow \quad \mathbb{T}_{AL}^D \simeq \mathbb{R}^D / AL.$$

После этого произойдет следующая замена основных элементов конструкции из п. 1:

$$L \to AL, \quad \alpha \to A\alpha;$$

$$T \to AT, \quad L' \to AL', \quad v_k \to Av_k, \quad v_k \to Av_k.$$

Посмотрим, как под действием аффинного отображения A изменится векторное отклонение $\delta(i) = \delta_T(i)$. Из определения (3.1) имеем

$$\delta_{AT}(i) = A\delta_T(i) \tag{5.21}$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots$ Формула (5.21) означает, что на векторное отклонение $\delta_T(i)$ отображение A действует так же, как на векторы $x \mapsto Ax$ векторного пространства $\mathbb{R}^D$. Выбор начального базиса $l_1, \ldots, l_D$ условен: он может происходить, например, из соображений удобства при построении перекладывающихся торических разверток T (1.4). Отсюда можно сделать вывод: у векторного отклонения $\delta(i) = \delta_T(i)$ отсутствует естественный масштаб.

Теперь посмотрим, что происходит с k-отклонениями $\delta_k(i)$ под действием аффинного отображения A. Пусть начальным будет выбран другой базис $Al_1, \ldots, Al_D$. Из формулы (4.18) следует

$$\delta_{AT}(i) = \delta_{AT,1}(i)Al_1 + \cdots + \delta_{AT,D}(i)Al_D. \tag{5.22}$$

Снова используем формулу (4.18), но теперь для базиса $l_1, \ldots, l_D$. Подействуем отображением A на (4.18) и получим

$$A\delta_T(i) = \delta_{T,1}(i)Al_1 + \cdots + \delta_{T,D}(i)Al_D. \tag{5.23}$$

Левые части в разложениях (5.22) и (5.23) равны в силу формулы (5.21). Поэтому равны и правые части в (5.22) и (5.23). Отсюда и из линейной независимости векторов $Al_1, \ldots, Al_D$ выводим формулу

$$\delta_{AT,k}(i) = \delta_{T,k}(i)$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, D$. Как видим, в отличие от векторного отклонения $\delta_T(i)$ (см. (5.21)) цветные k-отклонения $\delta_{T,k}(i)$ не изменяются под действием аффинного отображения A и, следовательно, являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора начального базиса $l_1, \ldots, l_D$. Инвариантами также являются константы (5.13)

$$c_{AT,k} = c_{T,k} \tag{5.24}$$

и координаты (4.5)

$$a_{AT,k} = a_{T,k} \tag{5.25}$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, D$.

Доказательство теремы 3 (см. введение)**.** Пусть снова векторы

$$l_1, \dots, l_D$$

линейно независимы над $\mathbb{R}$. Не уменьшая общности, можем полагать

$$l_1 = e_1, \dots, l_D = e_D. \tag{5.26}$$

В единичном базисе неравенства (5.20) принимают вид

$$|\delta_k(i)| \leqslant d_T\, n \tag{5.27}$$

для $k = 1, \dots, D$ и соответственно для $k = 0$ имеют вид

$$|\delta_0(i)| \leqslant D d_T\, n, \tag{5.28}$$

так как согласно (5.26) и формуле (4.13) для вектора l_0^* выполняется равенство

$$l_0^* = -(e_1 + \dots + e_D) = (-1, \dots, -1).$$

Дополнительно предположим выполненными следующие условия:

1) для тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$ его основная решетка периодов L имеет вид

$$L = L', \tag{5.29}$$

где $L' = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_D]$ — кубическая решетка из $\mathbb{R}^D$;

2) сдвиг α тора $\mathbb{T}^D$ является иррациональным;

3) развертка тора T и все ее области T_k кубируемы.

Тогда из условий 2) и 3) вытекает [9]: для любого $k = 0, 1, \dots, D$ существует частота

$$\nu_k = \lim_{i \to +\infty} \frac{r_k(i)}{i} \tag{5.30}$$

попадания точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(0)$ в область T_k и, кроме того, выполняется равенство

$$\nu_k = \mathrm{vol}\, T_k, \tag{5.31}$$

поскольку в силу условия 1) и (5.29) объем всей развертки тора равен $\mathrm{vol}\, T = 1$. А так как согласно (4.20) и (5.30)

$$\nu_k = a_k,$$

то из равенства (5.31) выводим

$$a_k = \mathrm{vol}\, T_k, \tag{5.32}$$

при этом в силу (4.5)

$$\mathrm{vol}\, T_k = -e_k \cdot \alpha = -\alpha_k \tag{5.33}$$

для $k = 1, \dots, D$, где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $e_1, \dots, e_D$.

Из предложения 4.1 и (5.32) выводим

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i \operatorname{vol} T_k. \tag{5.34}$$

Теперь из неравенств (5.27), (5.28) и формулы (5.34) вытекает теорема 3 из введения. □

§6. Точные границы для k-отклонений

Пусть $\Delta(x, y)$ — разностная функция (5.2). Ее можно записать в виде

$$\Delta(x, y) = x - l(x, y) \tag{6.1}$$

для любых $x, y \in T$, где $l(x, y) = l$ — единственный вектор из решетки L с условием

$$x \in T[l] - y \quad \sim \quad x + y \in T[l],$$

где $T[l] = T + l$. Действительно, существует единственный вектор из L с условием $x + y \in T[l]$ и, значит, $x + y - l \in T[0] = T$. Поэтому

$$\operatorname{Fr}(x + y) = x + y - l = x + \operatorname{Fr}(y) - l,$$

если $y \in T$. Отсюда вытекает (6.1).

Случай $i > n$. По (5.3) и (6.1) имеем

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \Delta(x, j\beta) = nx - \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} l(x, j\beta), \tag{6.2}$$

где для любого $x \in T$ вектор $l(x, j\beta) = l$ — это единственный вектор из L с условием $x + \operatorname{Fr}(j\beta) \in T[l]$. Исходя из равенства (6.2), определим функцию

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} l(x, j\beta).$$

Замечание 6.1. Использование векторной дробной части $\operatorname{Fr}(j\beta)$ для аргумента $j\beta$ вместо него самого приводит к тому, что мы локализуем ситуацию и имеем дело только с областями $T[l]$, соседними с областью $T = T[0]$.

Далее будем предполагать выполненным следующее условие: развертка тора T и все ее области T_k состоят из объединения конечного числа произвольных многогранников.

Определим множество векторов

$$L(j\beta) = \{l \in L; T \cap (T_l - \operatorname{Fr}(j\beta)) \neq \emptyset\}. \tag{6.3}$$

Отметим, что может существовать несколько векторов l с условием из (6.3).

Рассмотрим объединение следующих границ многогранников:

$$\partial_n = \bigcup_{0\leqslant j\leqslant n-1} \bigcup_{l\in L(j\beta)} \partial(T_l - \mathrm{Fr}(j\beta)),$$

где для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ через ∂X обозначаем

$$\partial X = \overline{X} \setminus X^{\mathrm{int}}$$

— границу множества X. Рассмотрим разбиение

$$\mathrm{Til}_n(T) = \bigcup_p C_p \tag{6.4}$$

области T на конечное число ячеек C_p, где любое C_p является замкнутым (т.е. $C_p = \overline{C_p}$) многогранником и, следовательно, односвязным множеством. Разбиение $\mathrm{Til}_n(T)$ однозначно определяется условиями:

$$\partial(\mathrm{Til}_n(T)) = \overline{T} \cap \partial_n,$$

и любые две ячейки C_p и $C_{p'}$ из разбиения (6.4) не имеют внутренних точек.

Из (5.3) и (5.8) следует

$$\mathcal{D}_k(x) = n\, l_k^* \cdot x - \mathcal{A}_k(x), \tag{6.5}$$

где

$$\mathcal{A}_k(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} l_k^* \cdot l(x, j\beta) \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D. \tag{6.6}$$

Из определений $l(x, j\beta)$ и $\mathrm{Til}_n(T)$ вытекает следующее свойство функции $\mathcal{A}_k(x)$.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{A}_k(x)$ — функция, определенная равенством* (6.6). *Тогда*

1) *$\mathcal{A}_k(x)$ является постоянной на любом множестве C_p^{int} из* (6.4);
2) *ее скачки могут происходить только на границах ∂C_p.*

Первое слагаемое $n\, l_k^* \cdot x$ в правой части равенства (6.5) — ненулевая линейная форма, которая как функция на множестве C_p принимает свои экстремальные значения в вершинах $v \in V(C_p)$ многогранника C_p.

Обозначим $V(\mathrm{Til}_n(T))$ множество вершин всех многогранников C_p из разбиения $\mathrm{Til}_n(T)$. Для любой вершины v из $V(\mathrm{Til}_n(T))$ определим

$$\mathcal{A}_{k,C_p} = \mathcal{A}_k(x_{C_p}^{\mathrm{int}}), \tag{6.7}$$

где $x_{C_p}^{\mathrm{int}}$ — любая внутренняя точка многогранника C_p. Из (6.6) следует

$$\mathcal{A}_{k,C_p} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} l_k^* \cdot l(x_{C_p}^{\mathrm{int}}, j\beta).$$

Для любой вершины v из $V(\mathrm{Til}_n(T))$ рассмотрим две экстремальные величины

$$\min_k(v) = \min_{C_p \in \mathrm{Til}_n(T)} \mathcal{A}_{k,C_p}, \quad \max_k(v) = \max_{C_p \in \mathrm{Til}_n(T)} \mathcal{A}_{k,C_p}.$$

Пусть

$$m'_k = \inf_{x \in T} \mathcal{D}_k(x), \quad M'_k = \sup_{x \in T} \mathcal{D}_k(x). \tag{6.8}$$

Из леммы 6.1, (6.5) и (6.7) следуют равенства

$$m'_k = \min_{v \in V(\mathrm{Til}_n(T))} (n\, l^*_k \cdot v - \max_k(v)), \tag{6.9}$$

$$M'_k = \max_{v \in V(\mathrm{Til}_n(T))} (n\, l^*_k \cdot v - \min_k(v)) \tag{6.10}$$

для любого $i > n$.

Случай $0 \leqslant i \leqslant n$. Определим

$$\mathcal{D}_{k,i} = \sum_{0 \leqslant j\ < i} l^*_k \cdot \Delta(n\beta, j\beta),$$

и пусть

$$m''_k = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{D}_{k,i}, \quad M''_k = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{D}_{k,i}.$$

Из предложения 3.1, (5.1), (6.9) и (6.10) вытекает

Теорема 6.1. *Пусть векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ для отклонений $\delta_k(i)$ имеют место неравенства*

$$m_k \leqslant \delta_k(i) \leqslant M_k \tag{6.11}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$m_k = \min\{m'_k, m''_k\}, \quad M_k = \max\{M'_k, M''_k\}. \tag{6.12}$$

При этом границы в (6.11) точные, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют i_1, i_2 такие, что

$$m_k + \varepsilon \geqslant \delta_k(i_1), \quad \delta_k(i_2) \geqslant M_k - \varepsilon.$$

Замечание 6.1. Сложность вычисления точных границ m_k, M_k в (6.11) определяется количеством $c_{n,D}(T)$ ячеек C_p в разбиениях $\mathrm{Til}_n(T)$ из (6.4). Если в качестве торической развертки T выбрать D-мерный единичный куб I^D (см. п. 9), то для $c_{n,D}(T)$ имеет место следующая оценка

$$c_{n,D}(T) = O(n^D) \quad \text{при} \quad n, D \to +\infty.$$

Замечание 6.2. Знание точных границ (6.11) бывает нужным, например, при решении задачи о вложении решеток в квазипериодические разбиения [11], а также при построении квазипериодических последовательностей, близких к периодическим, или сбалансированных слов (см., например, [1, 5]).

§7. Случай $n = 1$

Для случая $n = 1$ отклонения $\delta(i)$ имеет наиболее простое поведение, которое полностью определяется геометрией торической развертки T (1.4). При $n > 1$ на отклонение $\delta(i)$ уже существенно начинают влиять метрические характеристики вектора сдвига α (1.2).

Итак, пусть $n = 1$. Тогда для $i \geqslant 2$ из формулы (3.17) следует

$$\delta(i) = \mathcal{D}(i\beta), \tag{7.1}$$

где

$$\mathcal{D}(x) = \mathrm{Fr}(x) - \mathrm{Fr}(0) \tag{7.2}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$. Пусть $\mathrm{Fr}(0) = 0$, т.е. $0 \in T$. Тогда из определения дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ (2.2) и (7.2) вытекает равенство

$$\mathcal{D}(x) = x \quad \text{для любого} \quad x \in T. \tag{7.3}$$

Если $i = 0$ или 1, то из (3.16) имеем равенства

$$\delta(0) = 0, \quad \delta(1) = \mathrm{Fr}(\beta) - \mathrm{Fr}(0) = \mathrm{Fr}(\beta).$$

Таким образом, если $n = 1$ и $\mathrm{Fr}(0) = 0$, то для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ векторное отклонение $\delta(i)$ вычисляется по формуле

$$\delta(i) = \mathrm{Fr}(i\beta), \tag{7.4}$$

и соответственно k-отклонения — по формуле

$$\delta_k(i) = \mathrm{Fr}_k(i\beta) \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{7.5}$$

где $\mathrm{Fr}_k(x) = l_k^* \cdot \mathrm{Fr}(x)$. Из формул (7.4) и (7.5) вытекает следующий геометрический смысл отклонений:

1) векторное отклонение $\delta(i)$ совпадает с положением T-дробной части $\mathrm{Fr}(i\beta)$ точки $i\beta$ на развертке тора T (1.4);

2) k-отклонение $\delta_k(i)$ вычисляется через проекцию $\mathrm{Fr}_k(i\beta)$ векторной дробной части $\mathrm{Fr}(i\beta)$ на вектор l_k^*:

$$\delta_k(i) = |l_k^*| \, \mathrm{pr}_{l_k^*} \mathrm{Fr}(i\beta). \tag{7.6}$$

Из (7.6) вытекают неравенства

$$|l_k^*| \underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T \leqslant \delta_k(i) \leqslant |l_k^*| \overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T, \tag{7.7}$$

откуда получаем

$$|\delta_k(i)| \leqslant |l_k^*| \max\left\{|\underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T|, |\overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T|\right\}. \tag{7.8}$$

Предположим, что точка $\mathrm{Fr}(0) = 0$ принадлежит области T. Тогда из (7.8) следуют неравенства

$$|\delta_k(i)| \leqslant |l_k^*|\, d_T \tag{7.9}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$, где d_T — диаметр (5.19) множества $\overline{T}$.

Векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, поэтому существует аффинное отображение $Al_k = e_k$ для $k = 1, 2, \ldots, D$, где $e_1, \ldots, e_D$ — единичный базис векторного пространства $\mathbb{R}^D$. Так как преобразование A невырожденное, то при переходе от развертки T к AT сохраняются все вышеприведенные рассуждения из данного раздела. Поэтому ради упрощения обозначений можем считать, что $l_1 = e_1, \ldots, l_D = e_D$, и тогда решетка L' (1.10) будет иметь вид

$$L' = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_D], \tag{7.10}$$

т.е. будет кубической решеткой $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Замечание 7.1. В п. 9 мы рассмотрим один конкретный пример торических разверток T, совпадающих с D-мерными единичными кубами I^D, где $I = [0, 1)$ — единичный полуинтервал. Данные развертки $T = I^D$ удобно строить, исходя из чисто геометрических соображений. При этом решетка L' возникает естественно из самой конструкции и она в общем случае не совпадает с кубической решеткой $\mathbb{Z}^D$. Более того, при переходе от развертки тора T к новой развертке AT приходится жертвовать геометрической наглядностью с целью замены векторной дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ для $x = (x_1, \ldots, x_D)$ на обычные дробные части $\{x_k\}$ координат x_k.

При условии (7.10) двойственный базис (4.1) имеет вид

$$l_k^* = e_k^* = e_k. \tag{7.11}$$

Следовательно, получаем

$$\mathrm{pr}_{l_k^*}(x) = \mathrm{pr}_{e_k}(x)$$

и соответственно

$$\underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T = \underline{\mathrm{pr}}_{e_k} T, \quad \overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T = \overline{\mathrm{pr}}_{e_k} T \tag{7.12}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Если же $k = 0$, то согласно равенству (4.13) имеем

$$l_0^* = -(e_1^* + \cdots + e_D^*) = -(e_1 + \cdots + e_D).$$

Отсюда вытекают следующие равенства:

$$\underline{\mathrm{pr}}_{l_o^*} T = -\overline{\mathrm{pr}}_e T, \quad \overline{\mathrm{pr}}_{l_0^*} T = -\underline{\mathrm{pr}}_e T, \tag{7.13}$$

где $e = e_1 + \dots + e_D = (1, \dots, 1)$. Поэтому для k-отклонений $\delta_k(i)$ в силу (7.11) имеем представления

$$\delta_k(i) = l_k^* \cdot \delta(i) = e_k \cdot \delta(i)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\delta_0(i) = l_0^* \cdot \delta(i) = -e \cdot \delta(i) \tag{7.14}$$

соответственно для $k = 0$.

Теорема 7.1. *Пусть векторы* (2.1) *выбраны в виде* $l_1 = e_1, \dots, l_D = e_D$.

1. *Тогда векторное отклонение* $\delta(i)$ *имеет координаты*

$$\delta(i) = (\delta_1(i), \dots, \delta_D(i))$$

в базисе $e_1, \dots, e_D$, *где согласно* (7.5)

$$\delta_k(i) = \mathrm{Fr}_k(i\beta) \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, D,$$

при этом векторная T*-дробная часть* $\mathrm{Fr}(x)$ *имеет координаты*

$$\mathrm{Fr}(x) = (\mathrm{Fr}_1(x), \dots, \mathrm{Fr}_D(x)) \tag{7.15}$$

также в базисе $e_1, \dots, e_D$.

2. *Для* k*-отклонений* $\delta_k(i)$ *выполняются следующие неравенства*:

$$\underline{\mathrm{pr}}_{e_k} T \leqslant \delta_k(i) \leqslant \overline{\mathrm{pr}}_{e_k} T, \tag{7.16}$$

$$|\delta_k(i)| \leqslant d_T \tag{7.17}$$

для $k = 1, \dots, D$ *и*

$$-\overline{\mathrm{pr}}_e T \leqslant \delta_0(i) \leqslant -\underline{\mathrm{pr}}_e T, \tag{7.18}$$

где $e = e_1 + \dots + e_D$,

$$|\delta_0(i)| \leqslant D\, d_T. \tag{7.19}$$

Доказательство. Неравенства (7.16) для $k = 1, \dots, D$ вытекают из (7.7), (7.12); а неравенство (7.18) следует из неравенств (7.7) и (7.13), (7.14). Неравенства (7.17) и (7.19) вытекают из (7.9). □

§8. Средние значения отклонений

Определим для векторного отклонения $\delta(i)$ его среднее значение

$$\langle \delta \rangle = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \delta(i) \tag{8.1}$$

в случае, если предел (8.1) существует. Из формулы (3.17) следует

$$\begin{aligned}\sum_{n<i\leqslant N}\delta(i) &= \sum_{n<i\leqslant N}\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}(\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta)-\mathrm{Fr}(j\beta))\\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}\sum_{n<i\leqslant N}\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta)-(N-n)\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}\mathrm{Fr}(j\beta).\end{aligned}\tag{8.2}$$

Из (8.2) последовательно получаем

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\delta(i)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n<i\leqslant N}\delta(i)\\ &=\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta)-\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}\mathrm{Fr}(j\beta)\right).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Обозначим

$$c(j)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta).\tag{8.4}$$

Так как

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Fr}(j\beta+i\beta)=\sum_{0\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Fr}(j\beta)-\sum_{0\leqslant i<j}\mathrm{Fr}(j\beta)+\sum_{N<i\leqslant N+j}\mathrm{Fr}(j\beta),$$

то предел (8.4) не зависит от $j=0,1,2,\ldots$ Поэтому можем записать, что

$$c(j)=c(0)\tag{8.5}$$

для любого $j=0,1,2,\ldots$ Из (8.1), (8.3) и (8.4) для среднего значения $\langle\delta\rangle$ вытекает формула

$$\langle\delta\rangle=\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}(c(0)-\mathrm{Fr}(j\beta)).\tag{8.6}$$

Предположим, что развертка T имеет конечный диаметр $d_T<\infty$ и ее замыкание $\overline{T}$ кубируемо. Следовательно, для индикатора

$$\chi_{\overline{T}}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\overline{T},\\ 0, & \text{если } x\notin\overline{T},\end{cases}$$

области $\overline{T}\subset\mathbb{R}^D$ существует интеграл

$$\mathrm{vol}(\overline{T})=\int_{\mathbb{R}^D}\chi_{\overline{T}}(x)dx,$$

равный объему области $\overline{T}$.

Из сделанных выше предположений следует, что предел (8.4) существует и он равен (см., например, [9, 10])

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Fr}(i\beta)=\frac{1}{\mathrm{vol}(\overline{T})}\int_{\overline{T}}x dx. \tag{8.7}$$

Заметим, что геометрически векторнозначный интеграл

$$c_T=\frac{1}{\mathrm{vol}(\overline{T})}\int_{\overline{T}}x dx \tag{8.8}$$

— это центр тяжести области $\overline{T}$. Таким образом, в силу (8.4) и (8.8) получаем равенство

$$c(0)=c_T. \tag{8.9}$$

Теорема 8.1. *Предположим, что выполнены следующие условия: векторы* (1.9) $l_1,\dots,l_D$ *линейно независимы над* $\mathbb{R}$, α *— иррациональный сдвиг тора* $\mathbb{T}^D$, *развертка тора* T (1.4) *имеет конечный диаметр* d_T *и ее замыкание* $\overline{T}$ *кубируемо.*

1. *Тогда существует среднее значение* $\langle\delta\rangle$ (8.1) *векторного отклонения* $\delta(i)$, *и среднее значение вычисляется по формуле*

$$\langle\delta\rangle=\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}(c_T-\mathrm{Fr}(j\beta)), \tag{8.10}$$

где c_T *— центр тяжести* (8.8) *области* $\overline{T}$ *и разность* $c_T-\mathrm{Fr}(x)$, *стоящая под знаком суммы в* (8.10), *это — центрированная дробная часть* $x\in\mathbb{R}^D$.

2. *Также для любого* $k=0,1,\dots,D$ *существует среднее значение*

$$\langle\delta_k\rangle=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\delta_k(i) \tag{8.11}$$

для k*-отклонений* $\delta_k(i)=l_k^*\cdot\delta(i)$, *и оно равно*

$$\langle\delta_k\rangle=\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}(c_{T,k}-\mathrm{Fr}_k(j\beta)), \tag{8.12}$$

где $\mathrm{Fr}_k(j\beta)=l_k^*\cdot\mathrm{Fr}_k(j\beta)$ *и*

$$c_{T,k}=l_k^*\cdot c_T=|l_k^*|\,\mathrm{pr}_{l_k^*}c_T.$$

Доказательство. Формула (8.10) вытекает из (8.6) и (8.9).

Для доказательства формулы (8.12) заметим, что в силу формулы (8.10) выполняется равенство

$$l_k^*\cdot\langle\delta\rangle=\sum_{0\leqslant j\leqslant n-1}(l_k^*\cdot c_T-l_k^*\cdot\mathrm{Fr}(j\beta)),$$

а из определения (8.11) вытекает еще одно равенство

$$l_k^* \cdot \langle\delta\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} l_k^* \cdot \delta(i). \tag{8.13}$$

Из (8.1) и (8.13) получаем формулу связи

$$l_k^* \cdot \langle\delta\rangle = \langle l_k^* \cdot \delta\rangle = \langle\delta_k\rangle \tag{8.14}$$

между средними значениями векторного отклонения $\delta(i)$ и k-отклонений $\delta_k(i)$. Из (8.10) и (8.14) следует (8.12). □

В случае $n = 1$ вектор сдвига β совпадает с исходным вектором сдвига тора α. Поэтому формулы (8.10) и (8.12) принимают вид

$$\langle\delta\rangle = c_T - \mathrm{Fr}(0), \tag{8.15}$$

$$\langle\delta_k\rangle = c_{T,k} - \mathrm{Fr}_k(0) \ \text{ для } \ k = 0, 1, \ldots, D. \tag{8.16}$$

Если точка $\mathtt{Fr}(0) = 0$ принадлежит области T, то формулы (8.15) и (8.16) преобразуются к более простому виду

$$\langle\delta\rangle = c_T, \tag{8.17}$$

$$\langle\delta_k\rangle = c_{T,k} \ \text{ для } \ k = 0, 1, \ldots, D. \tag{8.18}$$

Если дополнительно предположить, что центр тяжести c_T области T принадлежит ей самой, то после параллельного переноса $x \mapsto x - c_T$ область T переходит в область $T' = T - c_T$, у которой центр тяжести

$$c_{T'} = 0$$

принадлежит области T'. Поэтому в случае $c_T \in T$, не теряя общности, будем сразу предполагать, что область T имеет центр тяжести

$$c_T = 0. \tag{8.19}$$

Из (8.19) следует $\mathrm{Fr}(0) = 0$; и тогда формулы (8.17) и (8.18) примут вид

$$\langle\delta\rangle = 0, \ \ \langle\delta_k\rangle = 0 \ \text{ для } \ k = 0, 1, \ldots, D. \tag{8.20}$$

§9. Перекладывающийся единичный куб

9.1. Общая конструкция перекладывающегося куба. Начнем с размерности D=1. Полагаем T^1 равным единичному полуинтервалу I^1=[0, 1). Зададим на T^1 разбиение

$$T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1 \tag{9.1}$$

на два полуинтервала

$$T_0^1 = [0, 1-\alpha), \quad T_1^1 = [1-\alpha, 1). \tag{9.2}$$

Далее, перекладывание на T^1 определим формулами

$$T^1 \xrightarrow{S^1} T^1: \quad S^1(x) = x + v_k^1 \quad \text{для} \quad x \in T_k^1, \tag{9.3}$$

где $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$.

Полуинтервал T^1, заданный вместе с разбиением (9.1), будем рассматривать как раскрашенный единичный полуинтервал $T^1 = I^1_{\mathrm{col}}$.

Пусть теперь размерность $D \geqslant 2$. Построим перекладывающийся куб T^D по индукции $D-1 \to D$. Пусть дан единичный $(D-1)$-мерный куб $T^{D-1} = I^{D-1}_{\mathrm{col}}$ и на нем задано разбиение

$$T^{D-1} = T_0^{D-1} \sqcup \ldots \sqcup T_{D-1}^{D-1}.$$

Пусть, кроме того, дано еще одномерное разбиение $T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1$ с параметром $\alpha = \alpha_D$ из (9.2).

Определим D-мерный куб T^D и разбиение на нем, полагая

$$T^D = T^{D-1} \times T^1 = T_0^D \sqcup T_1^D \sqcup \ldots \sqcup T_D^D, \tag{9.4}$$

где

$$T_k^D = T_k^{D-1} \times T_0^1 \quad \text{для} \quad k = 0, \ldots, D-1$$

и

$$T_D^D = T^{D-1} \times T_1^1$$

— прямые произведения соответствующих множеств. Чтобы определить векторы перекладывания для куба T^D (9.4), будем полагать, что пространства $\mathbb{R}^{D-1}$ и $\mathbb{R}^1$ вложены в пространство $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{D-1} \times \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^{D-1} \ni x^{D-1} \hookrightarrow (x^{D-1}, 0) \in \mathbb{R}^D, \\ \mathbb{R}^1 \ni x^1 \hookrightarrow (0, x^1) \in \mathbb{R}^D. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Перекладывание на кубе T^D зададим формулами

$$T^D \xrightarrow{S^D} T^D: \quad S^D(x) = x + v_k^D \quad \text{для} \quad x \in T_k^D,$$

где

$$v_k^D = v_k^{D-1} + v_0^1 \quad \text{для} \quad k = 0, \ldots, D-1 \tag{9.6}$$

и

$$v_D^D = v_1^1. \tag{9.7}$$

Снова видим, что разбиение (9.4) задает раскрашенный D-мерный единичный куб $T^D = I^D_{\mathrm{col}}$.

9.2. Одномерный случай. Посмотрим, как работают конструкции п. 5 применительно к перекладывающемуся полуинтервалу T^1 (9.1). Согласно определению (1.9) имеем $l_1 = v_1 - v_0 = -1$. Поэтому решетка L' (1.10) имеет вид $L' = \mathbb{Z}[l_1] = \mathbb{Z}$, и, значит,

$$S^1_\alpha : x \to x + \alpha \mod 1$$

— поворот единичной окружности $\mathbb{T}^1 \simeq \mathbb{R}^1/L$, где $L = L' = \mathbb{Z}$. Отсюда получаем

$$\mathrm{Fr}^1(x) = \{x\}$$

— дробная часть числа x. По формулам (4.1) и (4.13) находим

$$l^*_1 = -1, \quad l^*_0 = -l^*_1 = 1, \tag{9.8}$$

и, следовательно, считающие функции $r^1_0(i)$ и $r^1_1(i)$ имеют вид

$$r^1_0(i) = \sharp\{j; \{j\beta\} < 1 - \alpha, 0 \leqslant j < i\},$$
$$r^1_1(i) = \sharp\{j; \{j\beta\} \geqslant 1 - \alpha, 0 \leqslant j < i\}.$$

Теперь выпишем k-отклонения

$$\delta^1_k(i) = r^1_k(i) - ia_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \tag{9.9}$$

где согласно (4.5) и (9.8)

$$a_1 = -l^*_1 \cdot \alpha = \alpha, \quad a_0 = 1 - a_1 = 1 - \alpha.$$

Отсюда для k-отклонений (9.9) получаем формулы

$$\delta^1_0(i) = r^1_0(i) - i(1 - \alpha), \quad \delta^1_1(i) = r^1_1(i) - i\alpha. \tag{9.10}$$

Чтобы оценить величины k-отклонений $\delta^1_0(i)$, $\delta^1_1(i)$, применим теорему 5.1. По формулам (5.16) получаем грубые оценки

$$|\delta^1_k(i)| \leqslant c^1_k n \quad \text{для} \quad k = 0, 1,$$

где в силу (5.13)

$$c^1_k = |l^*_k|(\overline{\mathrm{pr}}_{l^*_k} T^1 - \underline{\mathrm{pr}}_{l^*_k} T^1) = 1.$$

Отсюда для отклонений (9.10) вытекают оценки Гекке [3]:

$$|\delta^1_0(i)| \leqslant n, \quad |\delta^1_1(i)| \leqslant n. \tag{9.11}$$

9.3. Двумерный случай: n произвольное. Имеем $T^2 = I^2_{\mathrm{col}}$ — единичный квадрат с разбиением

$$T^2 = T^2_0 \sqcup T^2_1 \sqcup T^2_2$$

на области

$$\begin{aligned} T^2_0 &= \{x = (x_1, x_2); 0 \leqslant x_1 < 1 - \alpha_1, 0 \leqslant x_2 < 1 - \alpha_2\}, \\ T^2_1 &= \{x = (x_1, x_2); 1 - \alpha_1 \leqslant x_1 < 1, 0 \leqslant x_2 < 1 - \alpha_2\}, \\ T^2_2 &= \{x = (x_1, x_2); 0 \leqslant x_1 < 1, 1 - \alpha_2 \leqslant x_2 < 1\}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Векторы перекладывания (9.6) и (9.7) имеют вид

$$v_0 = (\alpha_1, \alpha_2), \quad v_1 = (\alpha_1 - 1, \alpha_2), \quad v_2 = (0, \alpha_2 - 1),$$

отсюда находим векторы

$$l_1 = v_1 - v_0 = (-1, 0), \quad l_2 = v_2 - v_0 = (-\alpha_1, -1) \tag{9.13}$$

решетки L'. Поэтому в данном случае перекладывание единичного квадрата T^2 равносильно сдвигу

$$S^2_\alpha : x \mapsto x + \alpha \mod L \tag{9.14}$$

двумерного тора $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/L$ на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$L = \mathbb{Z}[l_1, l_2] = L'.$$

Приведение в декартовом базисе. Для любого $x \in \mathbb{R}^2$ его дробная часть $\mathrm{Fr}^2(x)$ имеет вид

$$\mathrm{Fr}^2(x) = x', \quad \text{где} \quad x' \equiv x \mod L, \quad x' \in T^2.$$

Выразим дробную часть $\mathrm{Fr}^2(x)$ через дробные части $\{x_1\}$, $\{x_2\}$. В силу (9.13) основную решетку периодов L можно представить как

$$L = \mathbb{Z}[m_1, m_2], \quad \text{где} \quad m_1 = -l_1 = (1, 0), \quad m_2 = -l_2 = (\alpha_1, 1). \tag{9.15}$$

Перейдем к базису $\{m_1, m_2\}$ и введем новые координаты $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$:

$$x = (x_1, x_2) = \widetilde{x}_1 m_1 + \widetilde{x}_2 m_2, \tag{9.16}$$

отсюда для координат $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ выводим формулы

$$\widetilde{x}_1 = x_1 - \alpha_1 x_2, \quad \widetilde{x}_2 = x_2. \tag{9.17}$$

Если теперь мы заменим x из равенства (9.16) на

$$\widetilde{x}' = \{\widetilde{x}_1\} m_1 + \{\widetilde{x}_2\} m_2,$$

то получим $\widetilde{x}' \equiv x \mod L$; и $\widetilde{x}'$ согласно (9.16) и (9.17) примет вид

$$\widetilde{x}' = \{x_1 - \alpha_1 x_2\} m_1 + \{x_2\} m_2 = (\{x_1 - \alpha_1 x_2\} + \{x_2\}\alpha_1, \{x_2\}).$$

Чтобы добиться включения $\widetilde{x}'$ в единичный квадрат T^2 — фундаментальную область относительно решетки L, сделаем дополнительную замену $\widetilde{x}'$ на

$$x' = (\{\{x_1 - \alpha_1 x_2\} + \{x_2\}\alpha_1\}, \{x_2\}).$$

При такой замене от первой координаты в $\widetilde{x}'$ возможно отнимется 1, т.е.

$$x' = \widetilde{x}' - (1,0) = \widetilde{x}' - m_1,$$

и, следовательно, в любом случае выполняется сравнение

$$x' \equiv \widetilde{x}' \mod L.$$

А так как по построению $x' \in T^2$, то при любом $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ для дробной части $\mathrm{Fr}^2(x)$ выводим

$$\mathrm{Fr}^2(x) = (\{\{x_1 - \alpha_1 x_2\} + \{x_2\}\alpha_1\}, \{x_2\}) \tag{9.18}$$

— формулу приведения дробной части $\mathrm{Fr}^2(x)$ в единичном базисе $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

По определению (3.6) и (3.7) считающая функция $r_k^2(i)$, где $k = 0,1,2$, равна количеству j из интервала $0 \leqslant j < i$, удовлетворяющих соответственно условиям:

для $r_0^2(i)$ —

$$\{\{j(\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\} + \{j\beta_2\}\alpha_1\} < 1 - \alpha_1, \quad \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2; \tag{9.19}$$

для $r_1^2(i)$ —

$$\{\{j(\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\} + \{j\beta_2\}\alpha_1\} \geqslant 1 - \alpha_1, \quad \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2;$$

для $r_2^2(i)$ —

$$\{j\beta_2\} \geqslant 1 - \alpha_2.$$

Приведение в базисе основной решетки периодов L. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ — единичный базис и L — решетка (9.15) с выделенным в ней базисом $\{m_1, m_2\}$. Координаты x_i в базисе E и координаты $\widetilde{x}_i$ в базисе $\{m_1, m_2\}$ связаны между собой формулами

$$x = (x_1, x_2)_E = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)_L, \text{ где } \widetilde{x}_1 = x_1 - \alpha_1 x_2, \ \widetilde{x}_2 = x_2,$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)_E = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2)_L, \text{ где } \widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \alpha_1\alpha_2, \ \widetilde{\alpha}_2 = \alpha_2.$$

Здесь индексы при координатах $(x_1, x_2)_E$ и $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)_L$ указывают, в каком базисе они записаны. Поскольку

$$e_1 = (1,0)_L, \quad e_2 = (-\alpha_1, 1)_L,$$

то развертка тора T^2 преобразуется в новую развертку $\widetilde{T}^2$:

$$\widetilde{T}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant \widetilde{x}_1 + \alpha_1\widetilde{x}_2 < 1, 0 \leqslant \widetilde{x}_2 < 1\}, \tag{9.20}$$

при этом согласно (9.12) области T_0^2, T_1^2, T_2^2 также преобразуются соответственно в области:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_0^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant \widetilde{x}_1 + \alpha_1 \widetilde{x}_2 < 1 - \alpha_1, 0 \leqslant \widetilde{x}_2 < 1 - \alpha_2\},\\
\widetilde{T}_1^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2; 1 - \alpha_1 \leqslant \widetilde{x}_1 + \alpha_1 \widetilde{x}_2 < 1, 0 \leqslant \widetilde{x}_2 < 1 - \alpha_2\},\\
\widetilde{T}_2^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2; 1 - \alpha_2 \leqslant \widetilde{x}_2 < 1\}.
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Замечание 9.1. Цель приведения (9.20)–(9.21) в базисе основной решетки периодов L (9.15) состоит в том, чтобы понять, как в двумерном случае области ограничения выражаются на языке обычных (одномерных) дробных долей $\{\widetilde{x}_1\}$, $\{\widetilde{x}_2\}$.

Используя формулу (3.2) для вектора сдвига β тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$, вычислим его координаты

$$\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b_1 l_1 + b_2 l_2) \tag{9.22}$$

также в базисе (9.15) решетки L. Имеем

$$\beta = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2)_L = \widetilde{\beta}_1 m_1 + \widetilde{\beta}_2 m_2.$$

Отсюда находим координаты

$$\widetilde{\beta}_1 = \tfrac{1}{n}(\widetilde{\alpha}_1 - b_1), \quad \widetilde{\beta}_2 = \tfrac{1}{n}(\widetilde{\alpha}_2 - b_2).$$

В базисе основной решетки периодов L функции $r_k^2(i)$, $k = 0, 1, 2$, равны количеству j из интервала $0 \leqslant j < i$, удовлетворяющих согласно (9.21) условиям:

для $r_0^2(i)$ —

$$\begin{cases} \{j\widetilde{\beta}_1\} + \alpha_1\{j\widetilde{\beta}_2\} < 1 - \alpha_1 \ \text{ или } \ \{j\widetilde{\beta}_1\} + \alpha_1\{j\widetilde{\beta}_2\} \geqslant 1,\\ \{j\widetilde{\beta}_2\} < 1 - \alpha_2; \end{cases} \tag{9.23}$$

для $r_1^2(i)$ —

$$\begin{cases} 1 - \alpha_1 \leqslant \{j\widetilde{\beta}_1\} + \alpha_1\{j\widetilde{\beta}_2\} < 1,\\ \{j\widetilde{\beta}_2\} < 1 - \alpha_2; \end{cases}$$

для $r_2^2(i)$ —

$$\{j\widetilde{\beta}_2\} \geqslant 1 - \alpha_2.$$

Теперь, пользуясь формулами (4.3) и (4.14), выпишем k-отклонения

$$\delta_k^2(i) = r_k^2(i) - i a_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2,$$

где считающие функции $r_k^2(i)$ вычисляются по формулам (9.19) или равносильным им формулам (9.23), $a_k = -l_k^* \cdot \alpha$ для вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ Поскольку в силу (9.13) векторы $l_1 = (-1, 0)$, $l_2 = (-\alpha_1, -1)$, то находим

$$l_1^* = (-1, \alpha_1), \quad l_2^* = (0, -1), \quad l_0^* = -l_1^* - l_2^* = (1, 1 - \alpha_1). \tag{9.24}$$

Поэтому можем записать, что

$$a_1 = \alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = \widetilde{\alpha}_1, \quad a_2 = \alpha_2 = \widetilde{\alpha}_2,$$

и тем самым в силу формулы (4.8) для коэффициента a_0 будем иметь равенство

$$a_0 = 1 - \widetilde{\alpha}_1 - \widetilde{\alpha}_2 = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

Чтобы получить грубые оценки для k-отклонений $\delta_k^2(i)$, снова применим теорему 5.1. Имеем следующие неравенства:

$$|\delta_k^2(i)| \leqslant c_k^2 n \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, \tag{9.25}$$

где

$$c_k^2 = |l_k^*|(\overline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T^2 - \underline{\mathrm{pr}}_{l_k^*} T^2). \tag{9.26}$$

Поскольку в данном случае развертка тора T^2 является единичным квадратом $I^2 = [0, 1) \times [0, 1)$, то для констант (9.26) в силу (9.24) находим явные выражения

$$c_0 = 2 - \alpha_1, \quad c_1 = 1 + \alpha_1, \quad c_2 = 1.$$

Отсюда и из (9.25) в двумерном случае для k-отклонений $\delta_k^2(i)$ получаем грубые оценки:

$$|\delta_0^2(i)| \leqslant (2 - \alpha_1)n, \quad |\delta_1^2(i)| \leqslant (1 + \alpha_1)n, \quad |\delta_2^2(i)| \leqslant n \tag{9.27}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Замечание 9.2.

1. Последняя оценка в (9.27) не зависит от выбора вектора сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, и она по существу снова является оценкой Гекке [3].

2. Первые две оценки в (9.27) не зависят от выбора координаты α_2 у вектора сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$.

3. Вторая оценка в (9.27) отвечает отклонению $\delta_1^2(i)$ для двумерной области $\widetilde{T}_1^2$, являющейся косоугольным параллелограммом, соглано определению (9.21). Некоторые частные случаи таких параллелограммом ранее были найдены Szüsz [7].

9.4. Двумерный случай: $n = 1$. Воспользуемся разверткой $\widetilde{T}^2$ и результами п. 6, чтобы получить точные границы для k-отклонений $\delta_k^2(i)$ в случае, когда у вектора сдвига β (9.22) параметр $n = 1$.

Переход к координатам относительно базиса $\{m_1, m_2\}$ основной решетки периодов $L = \mathbb{Z}[m_1, m_2]$ равносилен переходу к квадратной решетке $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$. При переходе $m_1 \to e_1$, $m_2 \to e_2$ векторы l_k, $k = 0, 1, 2$, отображаются соответственно в векторы

$$l_1 \to -e_1, \quad l_2 \to -e_2, \quad l_0 = -l_1 - l_2 \to e_1 + e_2,$$

а для двойственных векторов l_k^*, $k = 0, 1, 2$, в силу формул (4.1) и (4.13) имеем соответствия

$$l_1^* \to -e_1, \quad l_2^* \to -e_2, \quad l_0^* =\to e_1 + e_2.$$

Согласно (9.20) развертка тора $\widetilde{T}^2$ — это параллелограмм. Поэтому для нахождения экстремальных значений проекций $\mathtt{pr}_{l_k^*} x$ при условии $x \in \widetilde{T}^2$ можно ограничиться вершинами $x = v$ из $V(\widetilde{T}^2)$. Перебором вершин из $V(\widetilde{T}^2)$ выпишем значения всех проекций

$$\begin{aligned} \{\mathrm{pr}_{e_1+e_2} v; v \in V(\widetilde{T}_0^2)\} &= \{0, 1, 2 - \alpha_1, 1 - \alpha_1\}, \\ \{\mathrm{pr}_{-e_1} v; v \in V(\widetilde{T}_1^2)\} &= \{0, -1, \alpha_1 - 1, \alpha_1\}, \\ \{\mathrm{pr}_{-e_2} v; v \in V(\widetilde{T}_2^2)\} &= \{0, -1\}. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Поэтому из (9.28) и предложения 6.1 получаем для k-отклонений $\delta_k^2(i)$ в случае $n = 1$ следующие точные границы:

$$0 \leqslant \delta_0^2(i) \leqslant 2 - \alpha_1, \quad -1 \leqslant \delta_1^2(i) \leqslant \alpha_1, \quad -1 \leqslant \delta_2^2(i) \leqslant 0. \tag{9.29}$$

Замечание 9.3. Сравнивая (9.29) с оценками (9.27), замечаем, что для $\delta_0^2(i)$, $\delta_1^2(i)$ границы в (9.29) зависят лишь от первой координаты вектора сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, а для $\delta_2^2(i)$ границы не зависят от α.

Средние значения отклонений. Согласно теореме 8.1 и (8.17) для суммарного векторного отклонения $\delta^2(i)$ находим векторное среднее значение

$$\langle \delta^2 \rangle = c_T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{9.30}$$

Нетрудно заметить, что среднее значение (9.30) — это не что иное, как центр тяжести единичного квадрата $T^2 = I^2$. Аналогично по формулам (8.18) вычисляем средние значения для k-отклонений $\delta_k^2(i)$:

$$\langle \delta_k^2 \rangle = l_k^* \cdot c_T \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2. \tag{9.31}$$

Из (9.30) для средних значений (9.31) находим явные выражения

$$\langle \delta_0^2 \rangle = 1 - \tfrac{\alpha_1}{2}, \quad \langle \delta_1^2 \rangle = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\alpha_1}{2}, \quad \langle \delta_2^2 \rangle = -\tfrac{1}{2}. \tag{9.32}$$

Правые части равенств (9.32) — это в точности середины интервалов для точных границ из (9.29).

Список литературы

[1] Berthé V., Tijdeman R., *Balance properties of multi-dimensional words*, WORDS (Rouen, 1999), Theoret. Comput. Sci. **273** (2002), 197–224.

[2] Ferenczi S., *Bounded remainder sets*, Acta Arith. **61** (1992), no. 4, 319–326.

[3] Hecke E., *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins*, Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.

[4] Liardet P., *Regularities of distribution*, Compositio Math. **61** (1987), 267–293.

[5] Lothaire M., *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[6] Rauzy G., *Ensembles à restes bornés*, Seminar on Number Theory, 1983-1984 (Talence, 1983/1984), Univ. Bordeaux I, Talence, 1984, Exp. No. 24, 12 pp.

[7] Szüsz R., *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **5** (1954), 35–39.

[8] Журавлев В. Г., *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

[9] Кейперс Л., Нидеррейтор Г., *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985.

[10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.

[11] Красильщиков В. В., Шутов А. В., *Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения*, Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. **2007**, №7, 84–91.

Владимирский государственный
гуманитарный университет
600024, Владимир
пр. Строителей, 11
Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 20 декабря 2010 г.