

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор, проректор по научной
и инновационной работе

В.Г. Прокошев

« _____ » _____ 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Направление подготовки 01.06.01 - Математика и механика

Направленность (профиль) подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Уровень высшего образования Подготовка кадров высшей квалификации

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения очная

Год	Трудоемкость зач. ед./час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРА, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
2	2/72	20	4		48	Зачет
Итого	2/72	20	4		48	Зачет

г. Владимир 2016 г.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины «Функциональный анализ» — ознакомление с общей теорией функций, с методами работы в бесконечномерных функциональных пространствах и их приложениями в вычислительной математике. В терминах данной дисциплины традиционно излагаются многие задачи физики, технические проблемы и разнообразные процессы, происходящие в природе.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

В соответствии с учебным планом дисциплина «Функциональный анализ» является дисциплиной по выбору (Б1.В.ДВ.2.1) направления профессиональной подготовки аспирантов по специальности 01.06.01 - Математика и механика, по направленности «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» и предполагает углубление и дифференциацию профессиональных компетенций аспирантов.

Для освоения данной дисциплины обучающимся необходимо иметь теоретические знания и практические навыки по дисциплинам линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного. Иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией, уметь использовать инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации.

Ее изучение позволяет аспирантам:

- применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;
- применять системный подход к анализу и синтезу сложных систем;
- уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности
- уметь использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования.

Владея этой методологией исследования, будущий кандидат ф.-м. наук может значительно повысить системность и направленность своей деятельности, в том числе научно-

исследовательской; используя построения математических моделей для решения практических проблем, понимать критерии качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения программы аспирантуры у выпускника должны быть сформированы:

– универсальные компетенции

- способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1);
- готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);
- способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-5).

– общепрофессиональные компетенции

- способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2).

– профессиональные компетенции

- способностью к демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с профессиональной деятельностью (ПК-1);
- способностью понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и умением совершенствовать и развивать математическую теорию при анализе проблем естествознания (ПК-2);

- способностью в составе научно-исследовательского и производственного коллектива к проведению научно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности в профессиональной области (ПК-3);

В результате изучения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

- **Знать**

- основные положения теории метрических (в том числе нормированных и гильбертовых) пространств;
- основные положения современных теорий меры и интегрирования;
- основные положения теории линейных функционалов и операторов;
- основные методы приближенного и точного решения функциональных и линейных интегральных уравнений.

- **Уметь**

- применять методы функционального анализа при решении прикладных задач;
- применять методы функционального анализа при решении теоретико-вероятностных задач, задач математической физики и задач оптимального управления;

- **Иметь навыки** использования методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «Функциональный анализ»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 72 ч., 2 зачетные единицы.

№ п/п	Раздел дисциплины	Год обучения	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			лекции	практ.	СРА	
1.	Элементы теории множеств	2	4	-	8	собеседование
2.	Метрические пространства	2	2	-	6	собеседование
3.	Линейные нормированные пространства	2	4	2	8	собеседование
4.	Гильбертовы пространства	2	2	-	6	собеседование
5.	Теория меры и интеграл Лебега	2	4	-	8	собеседование
6.	Вариационное исчисление	2	2	-	6	собеседование
7.	Компактные операторы в гильбертовом пространстве и интегральные уравнения	2	2	2	6	собеседование
ИТОГО:			20	4	48	Зачет

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Качество обучения достигается за счет использования следующих форм учебной работы: лекции, самостоятельная работа аспиранта (выполнение индивидуальных домашних заданий), консультации, активное, постоянное взаимодействие между преподавателем и аспирантом в процессе обучения.

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ

Для контроля усвоения данной дисциплины учебным планом предусмотрен зачет. Зачет по дисциплине служит для оценки работы аспиранта и призван выявить уровень полученных теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их в

решении практических задач. Оценивание проводится по принципу «зачтено» / «не зачтено».

Шкала оценивания
(зачет)

Оценка	Критерии
зачтено	Аспирант показал творческий подход к освоению программы дисциплины, в совершенстве или в достаточной степени овладел теоретическими вопросами дисциплины, показал необходимые умения и навыки.
не зачтено	Аспирант имеет проблемы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет как минимум основными умениями и навыками.

Контрольные вопросы к зачету

1. Множества, операции над множествами и их свойства. Системы множеств. Отношения. Отображения.
2. Мощность множества. Свойства счетных множеств.
3. Несчетность отрезка. Свойства множеств мощности континуум.
4. Теорема Кантора — Бернштейна.
5. Теорема Кантора о неэквивалентности множества семейству его подмножеств.
6. Определение и примеры метрических пространств. Сходящиеся последовательности.
7. Свойства открытых и замкнутых множеств.
8. Непрерывные отображения.
9. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
10. Полные метрические пространства. Теорема Бэра.
11. Теорема о равномерной ограниченности последовательности функций.
12. Принцип сжимающих отображений.
13. Условия компактности в метрических пространствах.
14. Свойства функций непрерывных на компакте.
15. Линейные нормированные пространства.
16. Линейные непрерывные операторы и функционалы, ограниченность и непрерывность, норма.

17. Теорема Банаха — Штейнгауза.
18. Существование непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье.
19. Полнота пространства линейных операторов. Сопряженные пространства.
20. Теорема Хана — Банаха.
21. Теорема Банаха об обратном операторе.
22. Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы векторов.
23. Теорема об элементе наилучшего приближения. Неравенство Бесселя, равенство Парсевала.
24. Дифференцирование в линейных нормированных пространствах. Производные Фреше и Гато. Примеры.
25. Необходимые и достаточные условия локального экстремума линейного функционала.
26. Вычисление первой и второй вариации функционала.
27. Простейшие вариационные задачи. Вывод уравнения Эйлера. Условие Лежандра.
28. Задача о брахистохроне.
29. Построение меры Лебега на квадрате. Основные свойства меры.
30. Измеримые функции и их свойства.
31. Определение и свойства интеграла Лебега для ограниченных, положительных неограниченных, функций произвольного знака.
32. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
33. Полнота пространств $L_p(A)$.
34. Компактные операторы в банаховом пространстве. Свойства компактных операторов.
35. Компактность оператора Фредгольма в пространстве $C[a, b]$ и в $L_2[a, b]$.
36. Симметричные операторы в гильбертовом пространстве. Условие симметричности оператора Фредгольма в пространстве $L_2[a, b]$.
37. Теорема Гильберта о спектральном разложении компактного симметричного оператора в гильбертовом пространстве и следствия из нее

Задачи для самостоятельной работы.

1. Найти все предельные точки и замыкание в $C[0, 2]$ множества $\{x(t) \in C[0, 2]: x(t) > t^2\}$.
2. Образуют ли функции $x_n(t) = t^{2n}$ ($0 \leq t \leq 1$) последовательность Коши в пространстве $C[0, 1]$?
3. Найти в l_2 ортогональную проекцию заданного элемента на заданное подпространство

4. Доказать, что множество функций $\{x(t) \in C[0, 1]: x(t) \geq t; 0 \leq t \leq 1\}$ является полным метрическим пространством (метрика наследуется из $C[0, 1]$).

5. Доказать, что функциональное уравнение $3x(t) + \int_0^t s^2 x^2(s) ds = t, 0 \leq t \leq 1$ имеет единственное решение, принадлежащее замкнутому единичному шару $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска этого решения.

6. Исследовать на сходимость (слабую и по норме) функционалы

$$f_n(x) = x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3n}\right), n \geq 1, \text{ в } C[0, 1].$$

7. По заданной производящей функции некоторой меры Стильеса найти меры заданных промежутков и меру множества рациональных чисел.

8. Найти экстремум функционала. $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$

9. Найти экстремум функционала. $\int_{x_0}^{x_1} y'(1+x^2 y') dx$

10. Найти экстремум функционала. $\int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx$

11. Решить интегральное уравнение. $y(x) = 1 + \int_0^x (xt)^2 y(t) dt$

12. Решить интегральное уравнение. $y(x) = 3x - 4 \sin x + 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt$

13. Решить интегральное уравнение. $y(x) = x + 2 \sin x - 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt$

14. Решить интегральное уравнение. $y(x) = x + \int_0^1 x \cdot \sin(2\pi \cdot t) y(t) dt$

15. Исследовать последовательность на сходимость (на все сходимости):

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, |x| \leq n \\ 0, |x| > n \end{cases}.$$

16. Исследовать последовательность на сходимость (на все сходимости):

$$f_n = \begin{cases} x^n, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{n^3}, x > 1 \end{cases}.$$

17. Продифференцировать обобщенную функцию, порожденную функцией $y = |x|$ (взять скалярное произведение на функцию $\varphi(x)$ и взять 2 интеграла).

18. Проверить ортогональность ортонормированной системы:

$1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)$ на $[0, \pi]$.

19. Найти норму оператора:

$$Ax = \int_0^1 t \cdot x(t) dt, \text{ если } x \in C^1[0,1]$$

если $x(0) = 0$, а норма x :

$$\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |x'(t)|.$$

20. Сходится ли по норме $\|f(x)\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ в пространстве функций, непрерывных

на отрезке $[0, 1]$:

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

21. Определить норму оператора нулевого, тождественного и оператора подобия:

$$A_1 x \equiv 0,$$

$$A_2 x \equiv x,$$

$$A_3 x \equiv \lambda \cdot x, \text{ при } \lambda \in C.$$

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Леонтьева Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями- М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с. ISBN 978-5-16-006429-1, 1000 экз.
2. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко [и др.] ; под ред. В. К. Романко.-5-е изд. -М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. - ISBN 978-5-9963-2662-4.
3. Методы решения задач по теме «Интегральные уравнения, краевые и спектральные задачи»: Учебно-методическое пособие / Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н., Простокишин В.М. - М.:НИЯУ "МИФИ", 2012. - 64 с. ISBN 978-5-7262-1734-5

б) дополнительная литература:

1. Крепкогорский В.Л. Функциональный анализ: учебное пособие / В.Л. Крепкогорский - Казань : Издательство КНИТУ, 2014.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7.

3. Элементы функционального анализа и методы математической физики: учеб. пособие: в 2ч. Ч. 1. / Я.А. Бутко; под ред. М.М. Сержантовой. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.- 65, [3] с.: ил.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:


математические пакеты Maple, Scilab, MATLAB и др.


1. <http://lib.mexmat.ru>
2. <http://www.mathnet.ru/>
3. <http://exponenta.ru/>
4. <http://www.edu.ru/>
5. <http://www.scilab.org>

**8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ
(МОДУЛЯ)**

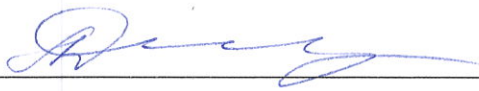
- Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном.
- Электронные учебные материалы на компакт-дисках.
- Лаборатории вычислительных методов 405-3, 528-3.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению 01.06.01 - Математика и механика и направленности (профилю) подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Рабочую программу составил главный научный сотрудник, д. ф.-м. н. Данченко В.И. 

Рецензент(ы)  (Кривская О.В.) - директор по маркетингу ЗАО Инвестиционная группа "ПРОК-Инвест"

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры _____ протокол № 1 от 1.09.2016 года.

Заведующий кафедрой _____ 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.06.01

Протокол № _____ от _____ года

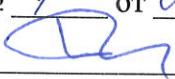
Председатель комиссии _____ 

(ФИО, подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 2017/18 учебный год

Протокол заседания кафедры № 1 от 04.09.17 года

Заведующий кафедрой 

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____